РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А.И.ГЕРЦЕНА

На правах рукописи

Алексеева Татьяна Анатольевна

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Валентин Федорович Зайцев

Воронеж – 1996

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Современный этап развития науки характеризуется стремлением к всестороннему исследованию изучаемых объектов с целью получения о них наиболее полной информации. При этом особое значение приобретают фундаментальные свойства, заложенные в самой природе объекта, и, следовательно, влияющие на его поведение.

К таким фундаментальным свойствам относится и симметрия, поскольку она присуща практически всем объектам и явлениям. Многообразие ее форм дает возможность применять симметрийный принцип в различных отраслях науки и объединять общим подходом казалось бы совершенно разные направления научных исследований.

Использование симметрийного подхода в теории дифференциальных уравнений позволяет значительно разнообразить и дополнить существующий набор традиционных методов исследования дифференциальных уравнений (ДУ) и, тем самым, получать о них качественно новую информацию.

Вместе с тем, растущий интерес к прогнозированию результатов исследования, а также существующая проблема классификации и систематизации изучаемых объектов и их свойств требуют нового подхода к самой постановке задач. В этой связи важна разработка алгоритмов, которые позволяли бы находить необходимые и достаточные условия существования моделей с априорными симметриями (прогнозирующие алгоритмы) или описывать все модели заданного вида с требуемой симметрией (алгоритмы обратной задачи). Кроме того, для исследования строения получаемых симметрий необходимо активное привлечение аппарата общей алгебры [37, 42, 43, 56].

В настоящее время изучение симметрий ДУ проводится в рамках современного группового анализа, объединяющего в себе три научных направления - метод первого интеграла, классический групповой анализ С. Ли [31-33, 49, 50] и дискретно-групповой анализ (ДГА) [12, 13, 17, 24, 26, 27, 71] - взаимно дополняющие друг друга. Метод 1-го интеграла имеет давнюю историю и возник в задачах механики как способ описания законов сохранения. Он применяется, в основном, при исследовании ДУ старших порядков, поскольку для уравнений первого порядка первый интеграл является общим, и, следовательно, задача его поиска равносильна поиску общего решения ДУ. Групповой анализ ДУ, предложенный С. Ли [67] в конце 19 века и развитый затем Л. В. Овсянниковым [49], положил начало регулярному поиску непрерывных симметрий ДУ. Однако его методы дают хорошие результаты для уравнений в частных производных, в то время как для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) эти результаты несколько скромнее, а для ОДУ первого порядка вовсе неэффективны. Появление ДГА (первая публикация вышла в 1976 году [15]), изучающего дискретные симметриии ДУ, позволило значительно продвинуться в исследовании ОДУ, особенно тех, для которых как традиционные методы, так и групповой анализ С. Ли не дают заметных результатов. В частности, это относится к дифференциальным уравнениям Абеля второго рода (уравнениям А2).

Проблема изучения уравнений А2 является классической. Эти уравнения упоминаются в работах Л. Эйлера, Н. Абеля, К. Якоби, Г. Дарбу, Ж. Лиувилля и др. [57-65,68-70]. Однако, несмотря на столь продолжительную историю их исследования, уравнения А2 до сих пор остаются объектом неослабевающего интереса со стороны многих ученых [2-4, 5, 11, 14, 19, 22-24, 35, 51, 66, 71]. Это объясняется рядом причин. Во-первых, уравнение А2, с одной стороны, является естественным обобщением уравнения Риккати, а с другой - наиболее простым по внешнему виду нелинейным ОДУ первого порядка, для которого не известен общий вид решения (т. е. общий вид зависимости решения от произвольной постоянной). Во-вторых, для уравнений А2 как традиционные методы [1, 46, 55], так и групповой анализ С. Ли оказываются малоэффективными, в частности, в силу того, что поиск непрерывной группы преобразований по методу Ли приводит к задаче, эквивалентной по сложности нахождению его общего решения. До недавнего времени было известно всего семь разрешимых случаев уравнений такого типа [39]. В-третьих, эти уравнения широко используются в прикладных задачах, в связи с тем, что к ним сводятся многие уравнения второго и третьего порядков, моделирующие реальные процессы [23, 24, 51, 71]. В частности, доказано следующее утверждение [20].

Теорема. *Пусть уравнение*

$$y'' = F(x,y)$$

допускает некоторую точечную лиевскую симметрию, тогда это уравнение

1) *интегрируется в квадратурах, если симметрия вариационная*;

2) *приводится к уравнению А2, если симметрия невариационная*.

Кроме того, многие уравнения нелинейной механики сводятся именно к уравнениям А2 [24, 51].

Большой вклад в изучение уравнений А2 внесли российские ученые В.П. Максимович, Д.Д. Мордухай-Болтовский, В.Г. Имшенецкий, А.Н. Коркин, Д.М. Синцов и др. [7-9, 38-41, 44, 45, 47, 48, 54]. Особое значение имеют исследования Б. М. Кояловича. В его работах [39, 40] приводятся наиболее общие для того времени результаты, указываются все известные разрешимые случаи. Однако следует отметить, что методы, применяемые и Кояловичем, и другими учеными того времени, являлись, как правило, нерегулярными или полурегулярными. Построенные алгоритмы незамкнуты, и при их выполнении крайне трудно предсказать конечный результат или сказать что-либо о его максимальности. Помимо этого, с течением времени накапливались ошибки, которые практически не могли быть обнаружены, так как содержались в классических результатах, принадлежащих известным ученым.

Например, уравнение Альфана приводится в математическом журнале [65] в виде

$$y' = \frac{3y(y+1) - 4x}{8y - 1} \ .$$

Указанное там же общее решение принадлежит совершенно другому уравнению

$$y' = \frac{3y(y+1) - 4x}{x(8y - 1)} \ .$$

Эта ошибка вошла в ряд современных монографий и справочников [24, 51] и была обнаружена лишь недавно.

<u>Цели и задачи исследования.</u> Применение методов ДГА позволило построить ряд отображений из класса уравнений второго порядка в класс уравнений А2, что привело к новым важным результатам, в частности, к значительному увеличению числа разрешимых случаев. В настоящее время известно около 1500 интегрируемых уравнений А2 [25]. Однако построение новых разрешимых случаев не является самоцелью, а скорее следствием симметрийных свойств исследуемого класса уравнений. И именно ДГА дал возможность изучать симметрии уравнений А2 регулярными методами. В свете указанных выше проблем, а также под влия-

нием публикаций по уравнениям Дарбу [38, 47, 54, 61, 62] и результатов Кояловича [39, 40] в диссертационной работе проведено комплексное исследование уравнений A2 по нескольким направлениям с использованием основных методов ДГА:

1. Исследование симметрий, индуцированных частными решениями уравнений A2.

2. Построение дискретных метагрупп преобразований (ДМП), действующих на подклассах уравнений A2, решение вопроса об их максимальности и изучение строения полученных ДМП.

3. Решение обратной задачи Б. М. Кояловича и проблемы полуфундаментальных систем решений (ПФСР).

Далее даются определения основных понятий и объектов, рассматриваемых в диссертации и являющихся общими для всех ее глав. Определения, носящие частный характер и необходимые для освещения конкретного материала, приводятся в соответствующих главах и параграфах.

Основные определения.

В настоящей работе в основном используется терминология и система определений, принятая в монографиях [6, 10, 13, 17, 24, 26, 27, 29, 46, 55], а также вводится ряд новых понятий. Следует отметить, что здесь рассматриваются формальные преобразования и решения. Это оправдывается тем, что результатами ДГА являются замкнутые аналитические выражения, которые могут быть проверены прямой подстановкой или применены в соответствии с конкретными требованиями исследования.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество [73].

Под *общим решением ОДУ 1-го порядка* будем понимать однопараметрическое семейство решений (в неявном виде)

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{0.0}$$

удовлетворяющее естественным требованиям гладкости и содержащее произвольную постоянную C, изменяющуюся в некоторой области (C) [10].

Заметим, что решения (0.0) могут принимать как явный, так и параметрический вид.

Далее везде в работе мы полагаем, что функции $\Phi(x,y,C)$ в (0.0) являются замкнутыми аналитическими выражениями, т. е. не содержат непросуммированных рядов и предельных переходов.

Очевидно, что указанное аналитическое выражение (0.0) задает на плоскости (x,y) семейство кривых. Элемент этого семейства, соответствующий фиксированному значению $C=C_1$, будем называть *частным решением* исходного уравнения. При этом два частных решения, соответствующие разным значениям произвольной постоянной C_1 и C_2, считаются *различными*.

Замечание 0.1. В данном случае частное решение рассматривается как глобальный объект на всей области определения. Поэтому естественно, что элемент семейства кривых при $C=C_1$ задает единственное частное решение независимо от количества ветвей функции, представленной соответствующим аналитическим выражением в координатах x, y. Как правило, многозначные частные решения можно параметризовать так, что в некоторой системе координат они становятся однозначными функциями введенного параметра. Например, если в качестве параметра взять длину дуги S, то всякая отдельная многозначная ветвь (типа “складки“) становится однозначной функцией параметра S [53].

Основной задачей ДГА является поиск и изучение дискретных симметрий - множеств преобразований, действие которых замкнуто на выбранном классе ОДУ.

В нашем случае мы будем понимать под *симметрией класса ОДУ* его свойство оставаться инвариантным при некотором преобразовании, а также само это преобразование, которое имеет сответствующие алгебраическое и функциональное представления.

Очевидно, что если некоторая симметрия переводит некоторое ОДУ в себя или в другое ОДУ данного класса, то оно переводит решение этого ОДУ в себя или, соответственно, в решение другого ОДУ рассматриваемого класса.

Определение 0.1. Множество ОДУ называется *классом уравнений* D, если каждый его элемент $D(\bar{a}) \in D$ однозначно определяется вектором параметров $\bar{a}$ этого элемента.

Фиксация одной или нескольких компонент вектора параметра $\bar{a}$ приводит к различным *подклассам* (или *специализациям*) исходного класса D.

Определение 0.2. Множество (допустимых) значений вектора параметров $\bar{a}$ называется *пространством параметров* $\mathrm{R}(D)$ класса D.

Определение 0.3. Параметр называется *существенным*, если уравнение не допускает по нему непрерывную группу эквивалентности.

Желательно, чтобы пространство параметров было замкнуто относительно алгебраических операций и имело минимальную размерность. Поэтому в качестве основной формы уравнения удобно взять некоторую каноническую форму, содержащую только существенные параметры.

Определение 0.4. *Точечным преобразованием* будем называть подстановку вида

$$\begin{cases} y = f(t,u), \\ x = g(t,u), \end{cases} \qquad f_t g_u - g_t f_u \neq 0\,, \tag{0.1}$$

связывающую исходные переменные (x, y) с переменными преобразованного уравнения (t, u).

Определение 0.5. Множество обратимых преобразований вида (0.1), замкнутое относительно операций обращения и композиции (исключая композиции, которые не определены), называется *классом точечных преобразований* P_0.

Определение 0.6. Множество с определенной на нем частичной бинарной операцией, которое содержит в себе совпадающие левую и правую единицы и для каждого элемента h совпадающие левый и правый обратные, будем называть *метагруппой.*

В определении 0.6 нет априорного требования алгебраической полноты или ассоциативности бинарной операции, что позволяет с помощью термина “метагруппа“ описывать самые разные множества.

Определение 0.7. Пусть заданы два класса ОДУ D и D_1. Обратимое преобразование

$$g: \quad D(\bar{a}) \to D_1(\bar{\alpha}(\bar{a})) \tag{0.2}$$

определяет *отображение* класса D в класс D_1.

Определение 0.8. Любое множество G обратимых преобразований (0.1), отображающих класс D в себя

$$g_i: \quad D(\bar{a}) \to D(\bar{b}_i), \qquad \bar{a},\ \bar{b}_i \in R(D) \tag{0.3}$$

и содержащее тождественное преобразование, будем называть *дискретной метагруппой преобразований* (ДМП) G, допускаемой классом D.

Формула (0.3) определяет *действие* преобразования g_i.

Замечание 0.2. В зависимости от свойств конкретного множества G, например, наличие полноты, ассоциативности операции композиции преобразований и т. п., ДМП может иметь строение различных алгебраических структур [27, 37, 56] . В частности, если не выполняется аксиома полноты (т.е. не любая композиция преобразований - элементов G - определена и замкнута на классе D), но операция ассоциативна, то G является *псевдогруппой* [56].

Каждый элемент ДМП $g_i \in$G переводит элемент $D(\bar{a})$ класса D в некоторый элемент $D(\bar{b}_i)$ того же класса. В смысле определения симметрии ОДУ, данного выше, ДМП может трактоваться как закон подобия моделей, описываемых соответствующими ОДУ.

Определение 0.9. Множество уравнений $\{D(\bar{b}_i)\}$, порожденное действием всевозможных преобразований $g_i \in$G на фиксированный элемент $D(\bar{a})$, называется *орбитой* элемента $D(\bar{a})$.

Будем считать, что непрерывные группы эквивалентности исключены из рассмотрения, тогда каждый элемент орбиты обладает некоторой окрестностью, не содержащей никаких других элементов этой орбиты [52].

Определение 0.10. Алгебраическое соотношение

$$\bar{b}_i = F_i(\bar{a}_i), \qquad (0.4)$$

индуцированное действием образующей g_i в пространстве параметров R(D), называется *алгебраическим представлением* образующей g_i ДМП G.

Поскольку (0.4) однозначно представляет ДМП G, то, если последняя, допускаемая данным классом D, известна, любая орбита может быть построена на основе (0.4) без проведения трудоемких преобразований, что позволяет достаточно простым способом прогнозировать свойства ОДУ.

Определение 0.11. Конкретное преобразование вида

$$x = \varphi_i\left(\tau, u, u', \ldots, \int u d\tau, \ldots\right), \qquad y = \psi_i\left(\tau, u, u', \ldots, \int u d\tau, \ldots\right), \qquad (0.5)$$

которому соответствует образующая g_i, называется *функциональным представлением* образующей g_i ДМП G.

<u>Определение 0.12.</u> Пусть задан класс D, допускающий ДМП $\mathrm{G}\{g_i\}$, и его подкласс $D_1 \subset D$, допускающий ДМП $\mathrm{H}\{h_j\}$. Если

$$\mathrm{G}\{g_i\}\Big|_{D_1} \equiv \mathrm{H}\ \{h_j\}, \tag{0.6}$$

то будем говорить, что подкласс D_1 вложен в класс D по ДМП G.

<u>Определение 0.13.</u> Общим уравнением Абеля второго рода называется уравнение вида

$$\left[g_1(x)y + g_0(x)\right]y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \tag{0.7}$$

которое каноническими преобразованиями (КП) [35]

$$y = u - \frac{g_0}{g_1}\ , \qquad u = wE\ , \qquad E = \exp\left(\int \frac{f_2}{g_1}dx\right), \tag{0.8}$$

$$\xi = \int \frac{g_0' g_1 - g_0 g_1' - 2g_0 f_2 + f_1 g_1}{g_1^2 E}dx \tag{0.9}$$

последовательно приводится к уравнениям

$$uu' = \frac{f_2}{g_1}u^2 + \left[\frac{g_0' g_1 - g_0 g_1' - 2g_0 f_2 + f_1 g_1}{g_1^2}\right]u + \frac{f_2 g_0^2 - f_1 g_0 g_1 + f_0 g_1^2}{g_1^3}\ ,$$

$$ww' = \frac{g_0' g_1 - g_0 g_1' - 2g_0 f_2 + f_1 g_1}{g_1^2 E}w + \frac{f_2 g_0^2 - f_1 g_0 g_1 + f_0 g_1^2}{g_1^3 E^2}\ , \tag{0.10}$$

$$ww'_\xi - w = \frac{f_2 g_0^2 - f_1 g_0 g_1 + f_0 g_1^2}{\left(g_0' g_1 - g_0 g_1' - 2g_0 f_2 + f_1 g_1\right)g_1 E}\ . \tag{0.11}$$

Уравнение (0.11), которое можно записать в виде

$$ww'_\xi - w = R\ (\xi) \tag{0.12}$$

представляет собой <u>*каноническую форму*</u> уравнения (0.7), а уравнение (0.10) или, что тоже самое,

$$ww' = F_1(x)w + F_0(x) \tag{0.13}$$

будем называть <u>*предканонической формой*</u> уравнения (0.7).

Каноническая форма является классом уравнений с минимальной размерностью. Поскольку КП (0.8)-(0.9) приводят класс (0.7) с пятью произвольными функциями к форме (0.12) с одно-функциональным произволом, то уравнение А2 (0.12) имеет бесконечномерный вектор параметров $\bar{a} \equiv \boldsymbol{R}_\infty$, а не $\boldsymbol{R}_\infty \times \boldsymbol{R}_\infty \times \boldsymbol{R}_\infty \times \boldsymbol{R}_\infty \times \boldsymbol{R}_\infty$.

Заметим, что уравнения А2, связанные линейным по зависимой переменной преобразованием, являются эквивалентными [51]. Поэтому КП (0.8)-(0.9), являясь таковыми, не приводят уравнение (0.7) к принципиально новому уравнению A2, т.е. уравнения (0.7), (0.12), (0.13) в этом смысле эквивалентны. Отсюда вытекает, что построение новых уравнений A2 в значительной мере связано с поиском соответствующих нелинейных преобразований.

В дальнейшем как основная будет использоваться каноническая форма (0.12) уравнения A2, а также предканоническая форма (0.13), которая часто бывает более удобна в промежуточных вычислениях.

ГЛАВА 1

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ЧАСТНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

1.1. Основные определения и вводные замечания.

Определение 1.1. ДМП G, действующая на всем классе D (за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль), называется *основной*.

Можно доказать, что основная ДМП алгебраически замкнута.

Определение 1.2. Если любое точечное преобразование $g_i \in \mathrm{G}$ определено подстановкой (0.1), не содержащей в явном виде компонент вектора параметров исходного ($\overline{a}$) и преобразованных ($\overline{b_i}$) уравнений, то ДМП G называется *независимой.*

Замечание 1.1. ДМП, не удовлетворяющие определению 1.2, являются *зависимыми*.

Независимая ДМП ассоциативна [27]. Неассоциативность может возникнуть лишь как следствие явной зависимости формулы (0.1) от векторов параметров исходного и преобразованных уравнений. В этом случае каждому элементу $D(\overline{a}) \in D$ соответствует свое преобразование $g_i(\overline{a})$, т. е. при $\overline{a} \neq \overline{b}$ может быть $g_i(\overline{a}) \neq g_i(\overline{b})$. При этом алгебраическое представление $g_i(\overline{a})$ на разных элементах D совпадает.

Определение 1.3. Группоид с единицей и обратимостью называется *парагруппой* [27].

***Теорема* 1.1.** Полная метагруппа есть парагруппа.

Доказательство. Пусть для бинарной операции, определенной в метагруппе (см. определение 0.6), выполняется аксиома полноты (т.е. эта операция определена на всех парах элементов метагруппы), тогда метагруппа является полной и удовлетворяет определению 1.3, а следовательно, утверждение теоремы верно.

Поскольку определение 1.3 не содержит априорного требования ассоциативности операции, то парагруппа – неассоциативная алгебраическая структура (не для любых трех ее элементов выполняется ассоциативный закон).

Определение 1.4. Уравнение или подкласс уравнений $D(\overline{a}_i)$, удовлетворяющие соотношению

$$g_i: \quad D(\overline{a}_i) \to D(\overline{a}_i),$$

т. е. алгебраическому уравнению

$$\overline{a}_i = F_i(\overline{a}_i),$$

называются g_i - *инвариантами* ДМП G .

Иными словами, g_i - инвариантом называется конкретное уравнение $D(\overline{a}_i) \in D$, переводящееся преобразованием g_i в себя с точностью до несущественного параметра, а также любой подкласс $D_i \subset D$, каждый элемент которого обладает указанным свойством.

Одной из основных задач ДГА является поиск основной ДМП в возможно более широком классе преобразований и описание всех ее расширений, допускаемых различными специализациями, т.е. симметрийная классификация выбранного класса уравнений *D*. Для многих классов уравнений, особенно четных порядков, эта задача решается достаточно успешно [17, 21, 22, 30]. Для уравнений первого (и, вообще, нечетного) порядка, в частности, и для уравнений А2, найти основную ДМП значительно сложнее. Как правило, действие полученной ДМП замыкается на некотором подклассе соответствующего класса уравнений. Поэтому исследование строения и свойств основных ДМП для уравнения А2 особенно важно.

1.2. Строение и свойства ДМП, порожденных частными решениями уравнений Абеля второго рода.

В конце прошлого века Б. М. Коялович доказал [39], что любое уравнение А2 можно перевести в другое уравнение А2 дробно-линейным преобразованием

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{z + \gamma(x)}, \qquad x = \lambda(x).$$

Элементами этой подстановки являются частные решения как исходного, так и преобразованного уравнений.

В. Ф. Зайцев усилил этот результат, доказав следующее утверждение.

***Теорема* 1.2** [3]. Пусть для уравнения А2

$$yy'_x - y = R(x) \tag{1.1}$$

известно одно частное решение $y_0(x)$, тогда это уравнение преобразованием

$$\begin{cases} z = \dfrac{Y_0 y}{y_0^2(y - y_0)}, \\ \xi = -\displaystyle\int \frac{(3R + y_0)Y_0}{y_0^4} dx \,, \qquad \text{где } Y_0 = \exp\int \frac{dx}{y_0} \end{cases} \tag{1.2}$$

переводится в новое уравнение А2

$$\begin{cases} zz'_\xi - z = -\dfrac{RY_0}{y_0^2(3R + y_0)}, \\ \xi = -\displaystyle\int \frac{(3R + y_0)Y_0}{y_0^4} dx \,, \end{cases} \tag{1.3}$$

причем преобразование (1.2) задает на классе уравнений А2 ДМП второго порядка, имеющую строение циклической группы C_2.

Частное решение уравнения (1.3) получается по формуле

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{Y_0}{y_0^2}, \\ \xi = -\displaystyle\int \frac{(3R + y_0)Y_0}{y_0^4} dx \,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Таким образом, для построения преобразования (1.2) достаточно знать частное решение лишь исходного уравнения А2 (1.1).

Однако до последнего времени оставалось неизвестным строение ДМП, индуцированной двумя и более частными решениями уравнения А2. Поэтому в настоящей работе был поставлен вопрос об исследовании структуры ДМП при наличии у уравнения А2 произвольного числа (известных) частных решений.

Будем называть частное решение $y_0(x)$ <u>*порождающим*</u>, если преобразование определяется функцией $y_0(x)$ по формуле (1.2).

Замечание 1.2. Поскольку мы имеем дело с зависимой образующей, то очевидно, что для различных порождающих частных решений будем получать различные преобразования вида (1.2).

Полученные результаты сформулируем в виде следующих утверждений.

***Лемма* 1.1.** Пусть для уравнения А2 (1.1) известно два различных частных решения, тогда преобразования вида (1.2) задают на классе уравнений А2 основную ДМП третьего порядка.

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - любые различные частные решения уравнения (1.1), $y_1(x)$ - порождающее частное решение, тогда по теореме 1.2 подстановка

$$\begin{cases} z = \dfrac{Y_1 y}{y_1^2 (y - y_1)}, \\ \xi = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_1) Y_1}{y_1^4} dx, \qquad \text{где } Y_1 = \exp \displaystyle\int \dfrac{dx}{y_1}, \end{cases} \tag{1.5}$$

приводит уравнение (1.1) к уравнению

$$\begin{cases} z z'_\xi - z = -\dfrac{R Y_1}{y_1^2 (3R + y_1)}, \\ \xi = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_1) Y_1}{y_1^4} dx \ . \end{cases} \tag{1.6}$$

При этом порождающее частное решение y_1 переходит в частное решение

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{Y_1}{y_1^2}, \\ \xi = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_1) Y_1}{y_1^4} dx \ , \end{cases} \tag{1.7}$$

а частное решение y_2 - в частное решение

$$\begin{cases} z_2 = \dfrac{Y_1 y_2}{y_1^2 (y_2 - y_1)}, \\ \xi = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_1) Y_1}{y_1^4} dx \end{cases} \tag{1.8}$$

уравнения (1.6).

Таким образом, получили новое уравнение А2 с двумя различными частными решениями $z_1(\xi)$ и $z_2(\xi)$.

Так как частные решения исходного уравнения различны, то аналогично теорему 1.2 можно применить, взяв в качестве порождающего частное решение $y_2(x)$. Тогда подстановка

$$\begin{cases} \tilde{z} = \dfrac{Y_2 y}{y_2^2 (y - y_2)}, \\ \tilde{\xi} = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_2) Y_2}{y_2^4} dx, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $Y_2 = \exp \int \dfrac{dx}{y_2}$, приводит уравнение (1.1) к уравнению

$$\begin{cases} \tilde{z}\tilde{z}'_{\tilde{\xi}} - \tilde{z} = -\dfrac{R Y_2}{y_2^2 (3R + y_2)}, \\ \tilde{\xi} = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_2) Y_2}{y_2^4} dx \ . \end{cases} \tag{1.10}$$

Порождающее частное решение y_2 переходит в частное решение

$$\begin{cases} \tilde{z}_2 = \dfrac{Y_2}{y_2^2}, \\ \tilde{\xi} = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_2) Y_2}{y_2^4} dx, \end{cases} \tag{1.11}$$

а частное решение y_1 - в частное решение

$$\begin{cases} \tilde{z}_1 = \dfrac{Y_2 y_1}{y_2^2 (y_1 - y_2)}, \\ \tilde{\xi} = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_2) Y_2}{y_2^4} dx. \end{cases} \tag{1.12}$$

Итак, зная два частных решения исходного уравнения, мы получили два новых уравнения A2 (1.6) и (1.10) с двумя частными решениями $z_1(\xi)$, $z_2(\xi)$ и $\tilde{z}_1(\tilde{\xi})$, $\tilde{z}_2(\tilde{\xi})$ соответственно.

Рассмотрим уравнение (1.6). Наличие двух частных решений у этого уравнения дает возможность применить преобразование типа (1.2) второй раз. Однако теперь в качестве порождающего можно выбрать только частное решение $z_2(\xi)$, так как использование с этой целью частного решения $z_1(\xi)$ приведет по теореме 1.2 уравнение (1.6) к исходному уравнению (1.1).

Пусть $z_2(\xi)$ - порождающее частное решение, тогда преобразование

$$\begin{cases} v = \dfrac{Z_2 z}{z_2^2(z - z_2)} \ , \\ \eta = -\displaystyle\int \dfrac{(3R_1 + z_2)Z_2}{z_2^4} d\xi \ , \end{cases} \tag{1.13}$$

где $R_1 = -\dfrac{R Y_1}{y_1^2(3R + y_1)}$, $\xi = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_1)Y_1}{y_1^4} dx$, $Z_2 = \exp\displaystyle\int \dfrac{d\xi}{z_2}$, переводит уравнение (1.6) в уравнение

$$\begin{cases} v v'_\eta - v = -\dfrac{R_1 Z_2}{z_2^2(3R_1 + z_2)} \ , \\ \eta = -\displaystyle\int \dfrac{(3R_1 + z_2)Z_2}{z_2^4} d\xi \end{cases} \tag{1.14}$$

с частными решениями

$$v_1(\eta) = \frac{Z_2 z_1}{z_2^2(z_1 - z_2)} \ , \tag{1.15}$$

$$v_2(\eta) = \frac{Z_2}{z_2^2} \ . \tag{1.16}$$

Перепишем преобразование (1.13), уравнение (1.14) и частные решения (1.15) и (1.16) в терминах исходного уравнения, получим

$$\begin{cases} v = \dfrac{Y_2 y}{y_2^2(y - y_2)} \ , \\ \eta = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_2)Y_2}{y_2^4} dx \ , \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\begin{cases} v v'_\eta - v = -\dfrac{R Y_2}{y_2^2(3R + y_2)} \ , \\ \eta = -\displaystyle\int \dfrac{(3R + y_2)Y_2}{y_2^4} dx \ , \end{cases} \tag{1.18}$$

$$v_1(\eta)=\frac{Y_2}{y_2^2}\ ,\quad v_2(\eta)=\frac{Y_2 y_1}{y_2^2(y_1-y_2)}\ .$$

Отсюда следует, что преобразование (1.17) с точностью до переобозначений совпадает с преобразованием (1.9), уравнение (1.18) эквивалентно уравнению (1.10), а для частных решений справедливы равенства

$$v_1(\eta)=\tilde{z}_2(\tilde{\xi})\ ,\quad v_2(\eta)=\tilde{z}_1(\tilde{\xi})\ .$$

Это означает, что уравнение (1.6) переводится в уравнение (1.10) преобразованием (1.9) при выборе порождающим частного решения (1.8).

Аналогично доказывается, что уравнение (1.10) переходит в уравнение (1.6) посредством преобразования (1.5), роль порождающего частного решения при этом играет $\tilde{z}_1(\tilde{\xi})$.

Заметим, что частные решения этих уравнений взаимно преобразуются друг в друга, а именно, z_2 в $\tilde{z}_1$ и, обратно, $\tilde{z}_1$ в z_2; z_1 в $\tilde{z}_2$ и, обратно, $\tilde{z}_2$ в z_1.

Очевидно, продлить цепочку преобразований дальше с целью получения новых уравнений А2 (расширение ДМП) невозможно, поскольку, как было показано выше, применение преобразований (1.5) и (1.9) к полученным уравнениям (1.6) и (1.10) дает либо взаимный переход этих уравнений друг в друга, либо в исходное уравнение (1.1).

Таким образом, мы получили ДМП третьего порядка $V_3\,(E, A, B)$, где E - тождественное преобразование, A и B - преобразования, которые выражаются формулами (1.5) и (1.9) соответственно. ДМП V_3 является основной, так как любое уравнение А2 (1.1) переводится также в уравнение А2 посредством преобразований из V_3 , т. е. действует на всем классе уравнений А2.

Действие ДМП можно изобразить графом

Рис. 1.

Лемма доказана.

***Лемма* 1.2.** ДМП V_3 является парагруппой третьего порядка, изоморфной парагруппе V [21].

Доказательство. ДМП V_3 может быть представлена следующей таблицей Кэли

	E	***A***	***B***
E	E	A	B
A	A	E	A
B	B	B	E

По ней легко проверить, что операция - композиция преобразований - определена и алгебраически замкнута на любой паре элементов из V_3 . Следовательно, V_3 является полной метагруппой, а по теореме 1.1 это означает, что V_3 есть парагруппа. Строение V_3 полностью совпадает со строением парагруппы V , действующей на двух классах ОДУ второго и третьего порядков [21, 27, 30], поэтому V_3 и V изоморфны.

Следует отметить, что в V_3, как и во всякой парагруппе, бинарная операция неассоциативна, поскольку в силу замечания 1.1 V_3 является зависимой ДМП. Например, $(AB)A=E$, а $A(BA)=A$.

Лемма доказана.

Распространяя результаты лемм 1.1 и 1.2 на случай наличия у исходного уравнения А2 (1.1) любого числа известных частных решений, получим следующее утверждение.

***Теорема* 1.3**. Пусть для уравнения (1.1) известно n различных частных решений, тогда преобразования вида (1.2) задают на классе уравнений А2 основную ДМП V_{n+1} , являющуюся парагруппой порядка $n+1$.

Доказательство проводится аналогично доказательствам лемм 1.1 и 1.2, применяя результаты последних к каждой паре различных частных решений.

Замечание 1.3. Можно показать, что единственным инвариантом ДМП V_{n+1} при любом n является уравнение

$$yy'_x - y = -\tfrac{2}{9}x + c, \qquad (1.19)$$

где c - несущественный параметр. При этом каждое порождающее частное решение указанного уравнения переходит в себя.

Полученное множество V_{n+1} является единственной известной в настоящее время основной ДМП, действующей на классе уравнений A2 . Поэтому результаты указанных выше утверждений позволяют установить дискретную симметрию (1.2) и описать ее свойства на всем классе уравнений A2 при наличии у исследуемого уравнения любого количества известных частных решений.

Более того, лишь V_3 изоморфна паpагpуппе, полученной ранее. Все остальные структуры V_{n+1} (n>2) найдены впервые, причем не как абстрактные конструкции, а как реальные объекты, описывающие симметрию конкретного класса ОДУ - уравнений A2.

Рассмотрим полученные выше результаты для конкретного уравнения A2.

Пример. Для уравнения

$$yy'_x - y = -\frac{k}{(k+1)^2}x + b^2kx^{2k-1}, \qquad (1.20)$$

где k - существенный ($k\neq-1$; 0 - в силу уравнения), b - несущественный параметры, функции

$$y_{1,2} = \tfrac{1}{k+1}x \pm bx^k \qquad (1.21)$$

являются частными решениями. Применим преобразования типа (1.2), которые для каждого из двух частных решений (1.21) (при $k\neq1$; 1/3) будут иметь следующий вид

$$\begin{cases} z_{1,2} = (\pm b)^{\frac{k+1}{k-1}} \dfrac{x^{k-1}\left(\frac{1}{k+1} \pm bx^{k-1}\right)^{\frac{1-3k}{k-1}}}{y - x\left(\frac{1}{k+1} \pm bx^{k-1}\right)}, \\ \xi_{1,2} = \dfrac{(\pm b)^{\frac{2}{k-1}}}{2}\left(\frac{1}{k+1} \pm bx^{k-1}\right)^{\frac{1-3k}{k-1}}\left(\frac{1}{1-3k} \pm 3bx^{k-1}\right), \end{cases} \qquad (1.22)$$

к исходному уравнению, получим два других уравнения A2

$$R_{1,2}(\xi_{1,2}) = (\pm b)^{\frac{k+1}{k-1}}(-k)\frac{x^{k-1}\left(-\frac{1}{k+1} \pm bx^{k-1}\right)}{\left(\frac{1}{k+1} \pm bx^{k-1}\right)^{\frac{3k-1}{k-1}}\left(\frac{1-2k}{k+1} \pm 3bkx^{k-1}\right)} \qquad (1.23)$$

с частными решениями

$$
\begin{aligned}
&z_1(\xi_1)=b^{\frac{k+1}{k-1}}x^{k-1}\left(\tfrac{1}{k+1}+bx^{k-1}\right)^{\frac{1-3k}{k-1}},\\
&\tilde{z}_1(\xi_1)=-\frac{b^{\frac{2}{k-1}}}{2}\left(\tfrac{1}{k+1}-bx^{k-1}\right)\left(\tfrac{1}{k+1}+bx^{k-1}\right)^{\frac{1-3k}{k-1}}
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&z_2(\xi_2)=(-b)^{\frac{k+1}{k-1}}x^{k-1}\left(\tfrac{1}{k+1}-bx^{k-1}\right)^{\frac{1-3k}{k-1}},\\
&\tilde{z}_2(\xi_2)=\frac{(-b)^{\frac{2}{k-1}}}{2}\left(-\tfrac{1}{k+1}-bx^{k-1}\right)\left(\tfrac{1}{k+1}-bx^{k-1}\right)^{\frac{1-3k}{k-1}}
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

соответственно. При k=1/5 уравнения (1.23) можно записать в явном виде

$$
\begin{aligned}
&R_1(\xi)=-\tfrac{2}{9}\xi+B\xi^{-1}-B^2\xi^{-3},\\
&R_2(\xi)=-\tfrac{2}{9}\xi-B\xi^{-1}-B^2\xi^{-3},
\end{aligned}
$$

при этом их частные решения (1.24), (1.25) примут следующий вид

$$
z_1(\xi)=\tfrac{2}{3}\xi-B\xi^{-1},\ \ \tilde{z}_1(\xi)=\tfrac{1}{3}\xi-B\xi^{-1}
$$

и

$$
z_2(\xi)=\tfrac{2}{3}\xi+B\xi^{-1},\ \ \tilde{z}_2(\xi)=\tfrac{1}{3}\xi+B\xi^{-1},
$$

а исходное уравнение A2 (1.20) и порождающие частные решения (1.21) —

$$
\begin{aligned}
&yy'_x-y=-\tfrac{5}{36}x+\tfrac{b^2}{5}x^{-5/3},\\
&y_{1,2}=\tfrac{5}{6}x\pm bx^{1/5}.
\end{aligned}
$$

В случае, когда k=1/3 , правые части соответствующих преобразованных уравнений A2 (1.23) будут иметь неявный вид и содержать логарифмы; при k=1 правая часть исходного уравнения (1.20) - линейная функция от x, для которой преобразование (1.2) является несущественным; а при k=1/2 получим инвариант (1.19).

С геометрической точки зрения найденные парагруппы (для n>2) представляют собой правильные n - угольные пирамиды, у которых все вершины основания соединены между собой попарно (т. е. все диагонали основания пирамиды отмечены). Вершиной такой пирамиды является исходное уравнение (1.1); вершинами оснований - уравнения, порожденные каждым из известных частных решений уравнения (1.1) соответственно; каждое ребро пирамиды обозначает преобразование вида (1.2) (условно можно назвать такое ребро *порождающим*); стороны и диагонали основания соответствуют двум преобразованиям вида (1.2), действующим в противоположных направлениях (т. е. для каждой из двух связанных вершин свое преобразование) и тождественно совпадающими с преобразованиями, обозначенными порождающими ребрами. Иными словами, каждая такая пирамида состоит из $C_n^2 = \frac{(n-1)n}{2}$ треугольников, подобных изображенному на графе (см. рис. 1), с общей вершиной, соответствующей исходному уравнению А2, и попарно совпадающими боковыми сторонами.

Таким образом, дискретные симметрии, индуцированные частными решениями уравнения А2 (1.1), могут быть описаны как при помощи аппарата общей алгебры, так и на геометрическом языке. Это дает возможность изучать реальные объекты - классы ОДУ и ДМП, действующие на них - как абстрактные, и, наоборот, находить для чистых абстракций реально существующие модели из других областей науки.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ДГА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

Настоящая глава посвящена исследованию дискретных симметрий уравнений A2 с использованием всей (допустимой) техники ДГА , куда входят

1) прямой метод поиска точечных преобразований;

2) метод *RF*-пар;

3) метод отображений.

Применение указанных методов к ОДУ 1-го порядка вообще, и к уравнениям A2 в частности, сопряжено с рядом трудностей, что связано со спецификой этих уравнений. Исследования по этому направлению ограничивались, как правило, изучением частных случаев [11, 19, 23-25, 51, 71], а некоторые из приведенных методов считались вовсе неэффективными. Однако, основываясь на принципе обратной задачи и вводя логично обоснованный анзац (*нем.* Ansatz *дословно означает подход, исходная идея*), возможно не только повысить эффективность применяемых методов, но и алгоритмизировать поиск дискретных симметрий ОДУ 1-го порядка, что в свою очередь позволяет

1) описывать все подклассы преобразований, получаемых тем или иным методом;

2) описывать все подклассы уравнений, на которых они действуют;

3) строить орбиты ДМП.

Дадим краткую характеристику методов ДГА и по ходу изложения введем определения, которые будут использоваться в этой главе.

2.1. Прямой метод поиска точечных преобразований.

Как известно [27], для ОДУ 1-го порядка прямой метод поиска точечных преобразований (который в дальнейшем для краткости будем называть прямой метод) считается неэффективным, так как подстановка общего точечного преобразования

$$\begin{cases} y = f(\tau, u), \\ x = g(\tau, u), \end{cases} \qquad J = f_\tau g_u - f_u g_\tau \neq 0 \tag{2.1}$$

в уравнение

$$y' = F(x, y, \overline{a})$$

с последующим наложением условия замкнутости

$$u' = F(\tau, u, \overline{b})$$

приводит к определяющему уравнению

$$\frac{f_\tau + f_u F(\tau, u, \overline{b})}{g_\tau + g_u F(\tau, u, \overline{b})} = F(g, f, \overline{a}),$$

которое невозможно расщепить ввиду отсутствия независимой переменной. В ряде случаев последнее уравнение позволяет найти некоторые преобразования [13, 51]. Как правило, при этом используется простой подбор или частное решение исходного уравнения.

Рассмотрим этот метод в применении к классу уравнений А2 (1.1) и выясним, при каких начальных предположениях он может дать нетривиальные результаты.

Исследования показали, что в общем случае для уравнения А2 справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 2.1.** Если общее решение уравнения А2 (1.1) не известно, то преобразование (2.1) при условии

$$f_\tau f_u g_\tau g_u \neq 0 \tag{2.2}$$

не порождает никакой ДМП на классе уравнений А2 (1.1).

Доказательство. Рассмотрим произвольное уравнение А2 (1.1)

$$yy' - y = R(x).$$

Подставляя в него преобразование (2.1), получим уравнение

$$f\,\frac{f_\tau + f_u u'}{g_\tau + g_u u'} - f = R(g). \tag{2.3}$$

При условии (2.2) последнее уравнение можно записать в виде исходного относительно функции $f(g)$

$$ff'_g - f = R(g). \tag{2.4}$$

Поскольку общее решение этого уравнения нам не известно, допустим, что известно его частное решение $f=F(g)$, но в этом случае функции f и g зависимы, т.е. якобиан преобразования (2.1) тождественно равен нулю, что приводит к необратимости преобразования (2.1).

Если же мы не знаем и частного решения уравнения (2.4), то проблема существования ДМП, допускаемой уравнением А2 (1.1), равносильна поиску общего решения этого уравнения. Теорема доказана.

Замечание 2.1. В том случае, когда общее решение преобразуемого уравнения (1.1) (или, что то же самое (2.4)) известно, мы автоматически получаем преобразование (2.1). Кроме этого, придавая произвольной константе в формуле общего решения конкретные значения и используя результаты теоремы 1.3 главы 1, можно построить ДМП сколь угодно высокого порядка. При этом точечное преобразование (1.2), порождаемое частным решением, имеет $g_u=0$.

Из теоремы 2.1 вытекает, что эффективность применения прямого метода ограничивается четырьмя случаями, когда хотя бы одна из частных производных g_τ, g_u, f_τ, f_u тождественно равна нулю.

Пусть $g_\tau=0$, тогда $g=g(u)$, и уравнение (2.3) примет вид

$$\left[f_u - g_u' - \frac{Rg_u'}{f}\right]u' = -f_\tau . \tag{2.5}$$

Для того, чтобы (2.5) было уравнением А2 достаточно выполнения следующих условий

$$f_\tau = \omega(u)\left[s_2(\tau)u^2 + s_1(\tau)u + s_0(\tau) + q_0(\tau,u)\right], \tag{2.6a}$$

$$f_u = \omega(u)\left[s_3(\tau)u + s_4(\tau) + q_1(\tau,u)\right], \tag{2.6$б$}$$

$$g_u' = \omega(u)\left[k_1 u + k_2 + q_2(u)\right], \tag{2.6$в$}$$

$$\frac{R(g)g_u'}{f} = \omega(u)\left[s_5(\tau)u + s_6(\tau) + q_3(\tau,u)\right], \tag{2.6$г$}$$

$$q_0 + q_1 - q_2 - q_3 = 0 . \tag{2.6$д$}$$

Из уравнений (2.6*а*) и (2.6*б*) найдем $f_{\tau u}$ и $f_{u\tau}$, приравнивая их правые части, приходим к ОДУ с разделенными переменными

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(s_3' - 2s_2)u + (s_4' - s_1) + q_{1\tau} - q_{0u}}{s_2 u^2 + s_1 u + s_0 + q_0} . \tag{2.7}$$

Решая его и учитывая, что ω зависит только от u, получим

$$\omega = e^{J_0}, \quad J_0 = \int \frac{U_0}{U} du, \tag{2.8}$$

$$U_0 = u + q(u) + c_0, \quad U = c_1 u^2 + c_2 u + c_3 + \tilde{q}(u), \quad q(u) = (1 + 2c_1)\frac{q_{1\tau} - q_{0u}}{s_3'}, \quad \tilde{q}(u) = (1 + 2c_1)\frac{q_0}{s_3'},$$

$$q_1 = Bs_3(\tau)Q(u) + a_1(u), \quad Q(u) = q(u) + \tilde{q}_u', \quad s_3' - 2s_2 \neq 0, \quad s_3' \neq 0, \quad B = \frac{1}{1 + 2c_1}, \quad c_1 \neq -\tfrac{1}{2}.$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 - произвольные константы, $a_1(u)$ - произвольная функция от u. Подставим найденное значение $\omega(u)$ в (2.6*а*) и в (2.6*б*). Вычисляя в (2.6*б*) частный интеграл по τ, получим функцию f:

$$f = Be^{J_0}Us_3(\tau) + a_2(u), \tag{2.9}$$

где $a_2(u)$ - произвольная функция от u.

Поскольку частная производная f_u, которая может быть найдена дифференцированием выражения (2.9) по u, должна удовлетворять (2.6*б*), то соответствующее равенство даст нам значение произвольной функции $a_2(u)$ в (2.9). А именно,

$$a_2 = \int \left[a_1(u) + A_0\right] e^{J_0} du,$$

где $A_0 = \text{const}$. Из (2.6*в*) находим $g(u)$:

$$g(u) = \int e^{J_0}\left[k_1 u + k_2 + q_2(u)\right] du.$$

Из (2.6*г*), подставляя значения ω, f, g_u и учитывая, что функция g зависит только от u, получим:

$$R(g) = \frac{d_1 u + d_2 + \tilde{q}_3(u)}{k_1 u + k_2 + q_2(u)} e^{J_0} U,$$

где d_1, d_2 - произвольные константы, $\tilde{q}_3(u) = \dfrac{q_3(\tau, u)}{s_5(\tau)}$; а также $a_1(u) = 0$, $a_2(u) = -A_0$.

Подставим в (2.6*д*) полученные во всех предыдущих вычислениях значения q_0, q_1, q_2, q_3, что приведет к уравнению

$$BQ(u)s_3^{\,2}(\tau) - (A_0 + q_2(u))s_3(\tau) - d_1\tilde{q}_3(u) + B\tilde{q}(u)s_3(\tau)s_3' = 0.$$

Так как функция s_3 зависит только от τ, то

$$Q(u) = \tilde{q}_3(u) = \tilde{q}(u) = 0, \quad q_2(u) = -A_0.$$

Соответственно,

$$\begin{cases} f = e^{J_0} U s_3(\tau), \\ g = \int e^{J_0}(k_1 u + k_0) du, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} R(x) = \dfrac{d_1 u + d_2}{k_1 u + k_0} e^{J_0} U, \\ x = g(u), \end{cases}$$

где $U_0 = u + c_0$, $U = c_1 u^2 + c_2 u + c_3$, $J_0 = \int \dfrac{U_0}{U} du$, k_0 - произвольная постоянная, остальные константы и функции были определены ранее.

Подставляя соответствующие выражения в уравнение (2.5) и применяя к нему канонические преобразования (0.8)-(0.9), можно найти вид преобразованного уравнения A2 , что и будет сделано далее.

Приведенные рассуждения позволяют принять анзац и, основываясь на формуле (2.10), рассматривать точечное преобразование вида

$$\begin{cases} p(\xi) = h(\tau) F(u), \\ \xi = G(u), \end{cases} \tag{2.11}$$

где $h(\tau)$, $F(u)$, $G(u)$ - произвольные функции своих аргументов, действующее на некоторых подклассах уравнений A2.

Покажем, что для преобразования (2.11) справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 2.2.** Подкласс уравнений A2

$$pp'_\xi - p = R(\xi), \tag{2.12}$$

где

$$\begin{cases} R(\xi) = \dfrac{b_1 u + b_2}{d_1 u + d_2} e^{J_1}, \\ \xi = G(u), \end{cases} \tag{2.13}$$

$J_1 = \int \dfrac{U_0}{U} du$, $U_0 = k_1 u + k_2$, $U = au^2 + bu + c$, b_1, b_2, d_1, d_2, k_1, k_2, a, b, c - произвольные константы (такие, что соответствующие знаменатели не обращаются тождественно в нуль), преобразованиями вида (2.11), где

$$\begin{aligned} &G = \int \frac{a_1 u + a_2}{U} e^{J_1} du, \\ &F = e^{J_1}, \\ &h(\tau) = \tau, \end{aligned} \tag{2.14}$$

a_1, a_2 - произвольные постоянные, переводится (с учетом канонических преобразований) в другой подкласс уравнений А2

$$ww'_\eta - w = R_1(\eta), \tag{2.15}$$

где

$$\begin{cases} R_1(\eta) = -\dfrac{\tau\left(aT_0^2 - bT_0T_1 + cT_1^2\right)}{\left(2a\tau T_0 - b\tau T_1 + T_2\right)T_1 E}, \\ \eta = \displaystyle\int \dfrac{2a\tau T_0 - b\tau T_1 + T_2}{T_1^2 E}\, d\tau, \end{cases} \tag{2.16}$$

$T_0 = k_2\tau^2 - k_4\tau - k_6$, $T_1 = k_1\tau^2 - k_3\tau - k_5$, $T_2 = (k_1k_4 - k_2k_3)\tau^2 + 2(k_1k_6 - k_2k_5)\tau + (k_4k_5 - k_3k_6)$,
$E = e^{-a\int \frac{\tau\, d\tau}{T_1}}$.

При этом ДМП М (2.11)-(2.14) является максимальной в заданном классе преобразований (2.11) в смысле невозможности дальнейшего ее расширения преобразованиями того же вида.

Доказательство. Подставим преобразование (2.11) в уравнение (2.12) с произвольной правой частью $R(x)$, получим уравнение

$$\left(h^2F'_u - hG'_u - \frac{RG'_u}{F}\right)u' = -hh'_\tau F. \tag{2.17}$$

Для того чтобы это уравнение было общим уравнением А2 типа (0.7) необходимо и достаточно выполнения следующих условий

$$\begin{aligned} &F = \omega(u)\left(au^2 + bu + c\right), \\ &F'_u = \omega(u)\left(k_1u + k_2\right), \\ &G'_u = \omega(u)\left(k_3u + k_4\right), \\ &\frac{RG'_u}{F} = \omega(u)\left(k_5u + k_6\right), \end{aligned} \tag{2.18}$$

где a, b, c, k_i $(i = 1,\ldots,6)$ - произвольные константы, $\omega(u)$ - произвольная функция. Из первых двух уравнений находим функции ω и F:

$$\omega = U^{-1}e^{J_1},\ \ F = e^{J_1}.$$

Третье уравнение даст функцию G:

$$G = \int \frac{k_3u + k_4}{U}\, du,$$

а последнее - правую часть $R(x)$ исходного уравнения А2 (2.12)-(2.13).

Подставляя значения F_u', G_u', G, R в уравнение (2.17) и применяя к нему канонические преобразования (0.8)-(0.9), получим вид правой части преобразованного уравнения (2.15)-(2.16).

Поскольку система (2.18) имеет единственное нетривиальное решение, и найден вид не только функций *F*, *G*, входящих в преобразование (2.11), но и правых частей уравнений А2, связанных этим преобразованием, то можно утверждать, что в заданном классе преобразований (2.11) построенная ДМП М максимальна, т. е. не может быть расширена преобразованиями типа (2.11). Теорема доказана.

Таким образом, мы получаем не только искомое преобразование (2.11), но и одновременно решаем обратную задачу : вычисляем исходный подкласс уравнений А2, допускающий определенную дискретную симметрию, а также подкласс преобразованных уравнений А2.

В качестве примера приведем несколько конкретных уравнений А2, принадлежащих подклассам (2.12)-(2.13) и (2.15)-(2.16).

Пример 1. 1) Уравнение А2

$$pp'_{\xi} - p = A e^{\xi}$$

последовательным применением преобразования

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} x\left(2ay + b\right), \\ \xi = \ln\left(2ay + b\right) \end{cases}$$

и канонических преобразований (0.8)-(0.9) приводится к уравнению А2

$$ww'_{\eta} - w = \left(2A e^{\eta} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2,$$

где A, a, b - некоторые константы, отличные от нуля, $a>0$.

2) Уравнение А2

$$pp'_{\xi} - p = \left(A_1 + A_2 \sin\xi\right)\sqrt{\sin^2\xi + 1}$$

подстановкой (с учетом канонических преобразований)

$$\begin{cases} p = x\sqrt{ay^2 + by + c}, \\ \xi = \arcsin\dfrac{1}{d}\left(2ay + b\right) \end{cases}$$

переводится в уравнение А2

$$ww'_\eta - w = B_1 \sin\eta (\sin\eta + 1)^{-3/2} \left[B_2 \sin^4\eta + B_3 \sin^2\eta + B_4 \sin\eta + B_5 \right],$$

где a, b, c - произвольные константы, не обращающиеся одновременно в нуль, d, A_1, A_2, B_j - некоторые константы (j=1,...,5), отличные от нуля.

3) Уравнение А2

$$pp'_\xi - p = C_1 \xi^{-1/3}$$

преобразованием (с учетом канонических)

$$\begin{cases} p = x\sqrt{by + c}, \\ \xi = C_2 (by + c)^{3/2} \end{cases}$$

переводится в уравнение А2

$$ww'_\eta - w = \eta + \sqrt{\eta^2 + C_3},$$

где C_1, C_2, C_3 - отличные от нуля константы.

Замечание 2.2. Расширение указанной ДМП возможно преобразованием инверсии

$$u = \frac{1}{w}, \tag{2.19}$$

когда c=0 , а также (в некоторых случаях) преобразованиями, индуцированными отображением из класса уравнений Эмдена-Фаулера (2.34), что и будет показано далее.

Легко заметить, что частным случаем (2.11)-(2.14) является подстановка вида

$$\begin{cases} \xi = y^\lambda, \\ p = xy^\nu, \end{cases} \tag{2.20}$$

где λ , ν - некоторые константы, рассмотренная А.Д. Поляниным [51], который предложил алгоритм получения новых уравнений А2 посредством (2.20), используя промежуточное звено - квазиоднородное уравнение :

$$xy^\nu f\left(y^\lambda\right) y'_x + g\left(y^\lambda\right) y^{\nu+1} + p\left(y^\lambda\right) y'_x + x^{-1} y^{-\nu} \left[r\left(y^\lambda\right) y^{\nu+1} + s\left(y^\lambda\right) y'_x \right] = 0, \tag{2.21}$$

где f, g, p, r, s - произвольные функции своего аргумента.

Однако, хотя этот алгоритм и позволяет получить достаточно большое число новых уравнений, обладающих указанной симметрией, он имеет ряд недостатков, главный из которых - его незамкнутость на исследуемом классе уравнений. Каждый раз, применяя алгоритм к конкретному уравнению А2, невозможно предсказать - удастся ли получить квазиоднородное уравнение (2.21), которое, в свою очередь, сведется к новому уравнению А2, или нет. Кроме того, использование промежуточного уравнения значительно увеличивает трудоемкость выкладок.

Выводы теоремы 2.2 дают, в частности, возможность описать результаты Полянина на новой основе. А именно, сделать алгоритм замкнутым, исключив из рассмотрения квазиоднородное уравнение (2.21), конкретизировать значения констант λ, ν в преобразовании (2.20) и указать подклассы уравнений, на которых последнее действует.

В соответствии с замечанием 2.2 ДМП M (при c=0) допускает расширение преобразованием вида (2.19).

Приведем важный пример разрешимой орбиты уравнений А2, порожденной действием ДМП R{m, n} (где m - образующая, заданная преобразованием (2.11)-(2.14), n - образующая, заданная преобразованием (2.19)), который далее будет упоминаться в параграфе, посвященном дифференциальным кольцам решений.

Пример 2. Рассмотрим уравнения А2

$$yy'_x - y = Ax^m$$

в случаях m=–1/2 , m=–2 , (A - произвольная константа). Орбита, порожденная действием ДМП R {m, n}, где образующая m задана преобразованием типа (2.20) (для этого преобразования c=0)

$$\begin{cases} x = u^{\lambda}, \\ y = \tau\, u^{\nu}, \end{cases}$$

а n - инверсия (2.19), на указанные уравнения, может быть изображена следующим графом

Обозначенные вершины соответствуют следующим уравнениям A2 , полученным из исходных уравнений (вершины P и Q соответственно) действием образующей m , для которой конкретные преобразования будем записывать как (λ , ν) :

$$P\ :\quad R(x) = A_1 x^{-1/2}.$$

$$Q\ :\quad R(x) = A_2 x^{-2}.$$

$$P_1:\quad R(\eta) = -\tfrac{12}{49}\eta + \tfrac{6}{49}B_1\left[\eta^{1/2} + 8B_1 + 5B_1^2\eta^{-1/2}\right],\ (\lambda,\nu) = \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right).$$

$$P_2:\quad R(\eta) = \tfrac{3}{8}\eta + \tfrac{3}{8}\sqrt{\eta^2 - 2A_1} - \frac{3A_1}{8\sqrt{\eta^2 - 2A_1}},\ (\lambda,\nu) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}\right).$$

$$P_3:\quad R(\eta) = -\tfrac{6}{25}\eta + \tfrac{6}{25}B\left[2\eta^{1/2} + 7B + 4B^2\eta^{-1/2}\right],\ A_1 = A_2\ ,\ B = \frac{1}{A_1}\ ,\ (\lambda,\nu) = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right).$$

$$Q_1:\quad R(\eta) = \tfrac{9}{32}\eta + \tfrac{15}{32}\sqrt{\eta^2 + 8A_2} - \frac{3A_2}{8\sqrt{\eta^2 + 8A_2}}\ ,\ (\lambda,\nu) = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

$$Q_2:\quad R(\eta) = -\tfrac{3}{32}\eta - \tfrac{3}{32}\sqrt{\eta^2 - 8A_2} - \frac{15A_2}{8\sqrt{\eta^2 - 8A_2}},\ (\lambda,\nu) = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right).$$

$$Q_3:\quad R(\eta) = -3A_1\frac{(1-z)^2}{4z+1}\ ,\ \eta = A_1\left(4z - 3\ln z + \frac{1}{z}\right)\ ,\ (\lambda,\nu) = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right).$$

Остальные уравнения орбиты записываются в параметрическом виде и здесь не приводятся. Заметим, что поскольку исходные уравнения (P и Q) интегрируются в функциях Бесселя, то все уравнения этой орбиты разрешимы, и их решения представимы в терминах решений исходных уравнений, т. е. также функциями Бесселя, что и будет показано далее. Кроме того, используя образующие, индуцированные отображением из класса уравнений Эмдена-Фаулера (2.34) в класс уравнений A2, можно расширить указанную орбиту.

Рассмотрим случай, когда в (2.1) g_u=0 . Тогда преобразованное уравнение примет вид

$$f_u u' = \frac{R(g)g'_\tau}{f} + g'_\tau - f_\tau\ ,$$

а достаточные условия его принадлежности к классу уравнений A2 (1.1) запишутся следующим образом

$$
\begin{aligned}
&f_u = \omega(\tau)\left[h_1(\tau)u + h_0(\tau) + q_0(\tau,u)\right],\\
&\frac{Rg'_\tau}{f} = \omega(\tau)\left[s_1(\tau)u^2 + s_2(\tau)u + s_3(\tau) + q_1(\tau,u)\right],\\
&g'_\tau = \omega(\tau)q_2(\tau),\\
&f_\tau = \omega(\tau)\left[s_4(\tau)u^2 + s_5(\tau)u + s_6(\tau) + q_3(\tau,u)\right],\\
&q_0 - q_1 - q_2 + q_3 = 0,
\end{aligned}
$$

где ω, h_0, h_1, $s_i\ \left(i=\overline{1,6}\right)$, $q_j\ \left(j=\overline{0,3}\right)$ - произвольные функции своих аргументов.

Аналогично предыдущему случаю, принимая некоторый анзац для произвольных функций, можно получить соответствующий вид преобразования (2.1). Если анзац выбирается очевидным образом, то получаем тривиальный случай ($R(x)$=0). Более сложные анзацы приводят к ряду важных результатов. Во-первых, прямым методом можно получить дробно-линейное преобразование (1.2), рассмотренное в первой главе. Однако при этом поиск сответствующих начальных предположений достаточно трудоемок и осуществляется искусственным путем. Во-вторых, найден анзац, при котором преобразование (2.1) принимает вид

$$
\begin{cases} x = G(\tau), \\ y = r_1(\tau)F(u) + r_2(\tau), \end{cases} \tag{2.22}
$$

где r_1, r_2, G, F - произвольные функции своих аргументов. При этом последнее имеет особое значение для уравнений А2.

***Теорема* 2.3.** Любое уравнение А2 (1.1) инвариантно относительно точечного преобразования (2.22).

Доказательство. Подставим преобразование (2.22), вычислив предварительно производную y'_x, в уравнение А2 (1.1)

$$
yy'_x - y = R(x)
$$

с произвольной правой частью $R(x)$, получим уравнение

$$
r_1(r_1F + r_2)F'_u u'_\tau = RG'_u + (r_1F + r_2)(G'_u - r'_1F - r'_2)
$$

или

$$
r_1(r_1F + r_2)F'_\tau = -r_1r'_1F^2 + (r_1G'_u - r'_1r_2 - r_1r'_2)F + (R + r_2)G'_u - r_2r'_2,
$$

которое является общим уравнением А2 вида (0.7). Последнее каноническими преобразованиями (0.8)-(0.9) приводится к уравнению

$$
ww'_\eta - w = R(\eta),
$$

которое, с точностью до переобозначений, совпадает с исходным уравнением. Теорема доказана.

В случаях $f_\tau = 0$, $f_u = 0$ получаем, что правая часть исходного уравнения (1.1) зависит от двух переменных, поэтому необходимо изначально ограничить подкласс исходных уравнений. При этом наиболее простые анзацы приводят к преобразованиям, якобианы которых обращаются в нуль, либо более сложный анзац дает тривиальный подкласс уравнений А2 .

2.2. **Метод *RF*-пар**.

Метод *RF*-пар является обобщением известных методов повышения и понижения порядка уравнения. Термин “*RF*-пара” образован начальными буквами английских слов “rise” (повышение) и “fall” (падение, понижение). Последнее слово характеризует тот факт, что если повышение порядка уравнения (*R*-операция) производится целенаправленно по выбору исследователя, то понижение порядка (*F*-операция) должно происходить “автоматически”, в соответствии со спецификой исходного уравнения, чтобы в результате действия *RF*-пары его порядок не изменился. Таким образом, *RF*-пара представляет собой упорядоченную последовательность *R*- и *F*-операций.

Для уравнений старших порядков метод позволяет искать преобразования Беклунда, т.е. преобразования, содержащие производную.

Для уравнений первого порядка эти преобразования являются точечными, так как на многообразии решений производная выражается через правую часть уравнения:

$$y' = F(x, y).$$

Существует четыре стандартные *RF*-пары [27], которые условно обозначают (*X*,*X*), (*Y*,*Y*), (*A*,*O*), (*A*,*U*), из них первые две являются универсальными, т. е. (в принципе) допускаются любым ОДУ. Для применимости каждой указанной *RF*-пары необходимо, чтобы исследуемое уравнение удовлетворяло определенным условиям.

Например, *RF*-пара (*Y*,*Y*) применима, если уравнение

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \overline{a}\right) \qquad (2.23)$$

может быть приведено к виду

$$F_1\left(x, y', \dots, y^{(n-1)}, \overline{a}\right) = Ay,$$

где A=const - несущественный параметр.

Для некоторых конкретных уравнений А2 метод RF-пар дает нетривиальные результаты. Однако в общей постановке этот метод для уравнений Абеля не рассматривался. Известна лишь теорема [24] о том, что уравнение А2 (1.1) всегда допускает RF-пару (Y,Y), действие которой эквивалентно каноническому преобразованию $y = \dfrac{1}{u}$ этого уравнения в уравнение Абеля первого рода

$$w'_\xi = w^3 + W(\xi).$$

Исследуем действие другой универсальной RF-пары - (X,X) - на классе уравнений А2 (1.1). Эта RF-пара используется, если уравнение (2.23) содержит в явном виде независимую переменную и (в принципе) может быть приведено к форме

$$F_2\left(y, y', \dots, y^{(n)}, \overline{a}\right) = Ax .$$

Запишем уравнение А2 в виде

$$\xi = Q\left(pp'_\xi - p\right),$$

где Q - функция обратная к $R(\xi)$, тогда к нему можно применить RF-пару (X,X). Продифференцируем обе части последнего уравнения по независимой переменной, получим автономное ОДУ второго порядка

$$pp''_\xi + p'^2_\xi - p'_\xi = \frac{1}{Q'_p}.$$

Отсутствие (в явном виде) независимой переменной в этом уравнении позволяет автоматически понизить его порядок на единицу заменой переменных

$$p' = q(p), \quad p'' = qq'_p .$$

Далее, последовательно применяя подстановки

$$q = \frac{u}{p}, \quad u - p = w,$$

приходим к уравнению

$$\left(w+p\right)w'_p=\frac{p}{Q'\left(w\right)} \ . \tag{2.24}$$

Для того, чтобы последнее было общим уравнением А2 вида (0.7) достаточно выполнения следующего условия

$$Q'\left(w\right)=\frac{1}{aw^2+bw+c}\ , \tag{2.25}$$

где a, b, c - произвольные константы, тем самым (2.24) примет вид

$$\left(w+p\right)w'_p=\left(aw^2+bw+c\right)p\,.$$

Полученное уравнение каноническими преобразованиями (0.8)-(0.9) сводится к виду

$$\begin{cases} vv'_\eta - v=\dfrac{ap^3-bp+cp}{c\left(1-2ap^2+bp\right)}e^{-a/2\,p^2}\ , \\ \eta=\dfrac{1}{c}\displaystyle\int\left(1-2ap^2+bp\right)e^{-a/2\,p^2}\,dp\ . \end{cases} \tag{2.26}$$

Используя формулу (2.25), находим функцию $R(\xi)$, которая в общем случае $(a\neq 0)$ может иметь один из следующих видов

$$\begin{gathered} pp'_\xi - p=\frac{A}{2}\mathrm{tg}\xi+B\ , \\ pp'_\xi - p=A+\frac{2A}{e^\xi-1}, \\ pp'_\xi - p=-\frac{1}{2a}\xi^{-1}-\frac{b}{2a}\ , \end{gathered} \tag{2.27}$$

где A, B - произвольные константы, и RF-пару (X,X), которая будет представлена точечным преобразованием вида

$$\begin{cases} p(\xi)=p, \\ \xi=\displaystyle\int\frac{dw}{aw^2+bw+c}\ . \end{cases} \tag{2.28}$$

При a=0 имеем частный случай, который будет рассмотрен ниже (см. пример 3).

Легко заметить, что преобразование (2.28) является частным случаем преобразования (2.11)-(2.14) при условиях

$$f_u=g_\tau=0\ ,\ J_1=0\ ,\ a_1=0\ ,\ a_2=1\ , \tag{2.29}$$

а (2.27) - подклассом в (2.12)-(2.13).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 2.4.** Подкласс уравнений А2 (2.27) вложен в подкласс уравнений А2 (2.12)-(2.13) по ДМП М {m}.

Доказательство. Из приведенных выше рассуждений следует, что при условиях (2.29) ДМП М {m}, действующая на подклассе (2.12)-(2.13), совпадает с ДМП Р с образующей p, заданной преобразованием (2.28), т.е. верно тождество

$$\mathrm{M}\{\mathrm{m}\}\Big|_{(2.27)} \equiv \mathrm{P}\{\mathrm{p}\}.$$

По определению 0.12 это означает, что подкласс (2.27) вложен в подкласс (2.12)-(2.13) по ДМП М. Теорема доказана.

RF-пара (*X*,*X*), представленная преобразованием (2.28), связывает ряд новых уравнений А2, входящих в подклассы (2.27) и (2.26). Среди них имеются разрешимые случаи.

Пример 3. Уравнение А2

$$pp'_{\xi} - p = -\gamma + Ae^{\xi}, \tag{2.30}$$

где A, γ - произвольные константы ($\gamma \neq 0$), *RF*-парой (*X*,*X*) приводится к другому уравнению А2

$$uu'_{\zeta} - u = -(2\zeta)^{1/2} + (\gamma + 2) - \frac{\gamma + 1}{(2\zeta)^{1/2}}\ , \tag{2.31}$$

которое разрешимо [24, 25, 72]. Следовательно, уравнение (2.30) можно проинтегрировать, применяя обратное преобразование к решению уравнения (2.31).

Заметим, что в настоящее время, кроме уравнения (2.30), не известны разрешимые случаи уравнений А2 с трансцендентной правой частью.

RF-пары (*A*,*O*) и (*A*,*U*) могут быть использованы, если уравнение (2.23) разрешимо относительно несущественного параметра, т. е. представимо в виде

$$F_3\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}, \bar{a}\right) = A\ .$$

Если почленное дифференцирование последнего уравнения по x дает однородное или обобщенно-однородное уравнение

$$\frac{d}{dx}F_3\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}, \bar{a}\right) = 0,$$

то реализуется *RF*-пара (*A*,*O*) или, соответственно, (*A*,*U*).

Очевидно, что эти *RF*-пары могут быть применены лишь к конкретным уравнениям А2 (1.1), когда несущественный параметр явно входит в правую часть соответствующего уравнения. Например, уравнение А2

$$yy'_x - y = ax + Bx^m,$$

где B - несущественный параметр, допускает RF-пару (A,U), которая сводит его к уравнению

$$ww'_{\xi}-w=\frac{2(m-1)}{(m-3)^2}\left\{\xi\pm m\xi^{1/2}+\left[2m-3-a(m-3)^2\right]\pm\left[m-2-a(m-3)^2\right]\xi^{-1/2}\right\},\qquad m\neq 3\,;\,1\,.$$

Последнее разрешимо для определенных пар значений параметров $(a,\,m)$ (B-любое), в частности, при $a=-\frac{2(m+1)}{(m+3)^2}$, m -любое; $a=\frac{15}{4}$, $m=-7$; $a=\frac{63}{4}$, $m=-\frac{5}{3}$.

2.3. Метод отображений.

Пусть класс уравнений $D(\bar{a})$ допускает ДМП G, класс $D_1(\bar{\alpha})$ - ДМП H, и существует преобразование

$$h:\quad D(\bar{a})\to D_1(\bar{\alpha})\,. \qquad (2.32)$$

Преобразование (2.32) порождает отображение

$$H:\quad \mathrm{G}\to\mathrm{H}$$

и алгебраическую зависимость $\bar{\alpha}=F(\bar{a})$.

Определение 2.1. Множество элементов G, переводимых отображением H в единичный элемент ДМП H с точностью до несущественного преобразования, называется *расширенным ядром* отображения H и обозначается $\mathrm{Ker}\,H$.

Поскольку отображения классов уравнений индуцирует отображение ДМП, допускаемых этими классами, то зная ДМП G и преобразование (2.32) можно построить ДМП H. Для этого необходимо найти расширенное ядро.

Определение 2.2. Отображение называется тривиальным, если $\mathrm{Ker}\,H$=G.

Разновидностью метода отображений является метод опорного уравнения, который основывается на следующем положении.

Теорема 2.5 [27]. Пусть найдено два нетривиальных существенно различных отображения

$$H_i:\ D(\bar{a})\to D_1(\bar{\alpha}_i(\bar{a})),\qquad i=1,\ 2\,.$$

Тогда любое решение

$$\bar{b}=F(\bar{a}) \qquad (2.33)$$

алгебраической системы $\overline{\alpha}_1(\overline{a}) = \overline{\alpha}_2(\overline{b})$ порождает образующую ДМП, допускаемой классом D, имеющую алгебраическое представление (2.33). Класс D_1 называется <u>*классом опорных уравнений*</u>.

Замечание 2.3. Очевидно, найденные отображения порождают и образующую ДМП, допускаемой классом D_1.

Таким образом, метод отображений (метод опорного уравнения) можно реализовать, используя, как вспомогательный, другой класс уравнений того же или более высокого порядка, для которого ДМП известна, либо может быть найдена каким-нибудь известным приемом (например, прямым методом). При этом применение этого метода, как правило, связано с поиском пересечения двух классов уравнений: класса, допускающего некоторую ДМП, и класса, редуцируемого к исследуемому.

Поскольку пока не существует алгоритмов, позволяющих оптимальным образом выбрать класс опорных уравнений, то единственным способом является перебор классов уравнений, которые обладают известными ДМП. Заметим, что число таких, в частности, среди классов ОДУ второго порядка, достаточно ограничено.

Для класса уравнений А2 в качестве опорных рассматривались два класса уравнений - квазиоднородные (2.21) [51] и обобщенные уравнения Эмдена-Фаулера [23-25, 71, 72]

$$y'' = Ax^n y^m y'^l, \qquad (2.34)$$

где A - несущественный, n, m, l - существенные параметры. Дискретные симметрии (2.34) изучены наиболее полно, что и позволяет использовать этот класс уравнений для исследования других.

Учитывая изложенное выше, логично рассмотреть как опорный класс уравнений (для него также известны ДМП [24])

$$y'' = A_1 x^{n_1} y^{m_1} y'^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2} y'^{l_2}, \qquad (2.35)$$

где A_1, A_2 - несущественные, n_i, m_i, l_i (i=1, 2) - существенные параметры, являющийся обобщением уравнения (2.34).

Хорошо известно, что образующие ДМП, допускаемых уравнениями старших порядков, заданные точечными преобразованиями, являются эле-ментами ядра отображения в класс уравнений А2 [51]. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.6 [20]. Пусть уравнение $y''=F(x,y)$ допускает точечную группу Ли (*Lie*) и ДМП, заданную точечными образующими $g_i,\ i=\overline{1,k}$. Тогда все g_i принадлежат ядру отображения

$$\left\{y''=F(x,y)\right\}\overset{Lie}{\Rightarrow}\left\{A2\right\}.$$

Нетривиальная образующая порождается лишь преобразованиями Беклунда. Поэтому будем строить отображение, включив в него одну из стандартных *RF*-пар. Так как ДМП, определенные на основе *RF*-пар (*X*,*X*), (*Y*,*Y*) для класса уравнений (2.35), описаны в литературе [24, 29, 30], то результат действия отображения находится прямой проверкой, которая дает тривиальный случай. Рассмотрим *RF*-пару (*A*,*U*).

Очевидно, что преобразование *RA* можно применить к уравнению (2.35), если $A_1=\dfrac{A_2}{k}=A$ (k=const, $k\neq0$). Понизим порядок получившегося уравнения на две единицы посредством преобразований

$$\begin{cases} y=e^{\int u d\tau}, \\ x=e^{\tau}, \end{cases} \qquad u'_\tau=q(u).$$

Следующая подстановка $q=p\left(\frac{1}{k}u^{l_1}+u^{l_2}\right)$ дает уравнение А2

$$pp'_u=\frac{F_1(u)}{F_0(u)}p+\frac{F_2(u)}{F_0(u)}$$

или в канонической форме

$$\begin{cases} pp'_\xi-p=\dfrac{F_2}{F_1}, \\ \xi=\displaystyle\int\frac{F_1du}{F_0}, \end{cases} \tag{2.36}$$

где

$$F_0=\left(\tfrac{1}{k}u^{l_1}+u^{l_2}\right)^3,$$

$$F_1=\tfrac{1}{k^2}u^{2l_1-1}\left[(m_1+2l_1-3)u-(2l_1-n_1-3)\right]+\tfrac{1}{k}u^{l_1+l_2-1}\left[(3l_1+l_2-6+2m_1)u-(3l_1+l_2-6-2n_1)\right]+$$
$$+u^{2l_2-1}\left[(l_1+l_2-3+m_1)u-(l_1+l_2-3-n_1)\right],$$

$$F_2=\left(\tfrac{1}{k}u^{l_1}+u^{l_2}\right)\left[(m_1+l_1-1)u^2+(n_1+3-2l_1-m_1)u+(l_1-n_1-2)\right].$$

При этом получаем ограничения на существенные параметры исходного уравнения (2.35), которое примет вид

$$y'' = A\left[x^{n_1} y^{m_1} y'^{l_1} + kx^{n_1+l} y^{m_1-l} y'^{l_1+l}\right], \tag{2.37}$$

где $l = l_2 - l_1$. А преобразование, порождающее отображение, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} p = \left(\frac{1}{k} u^{l_1} + u^{l_2}\right)^{-1} x u'_x = \left(\frac{1}{k} u^{l_1} + u^{l_2}\right)^{-1} \left[A x^{n_1+2} y^{m_1-1}\left(y'^{l_1} + kx^{l} y^{-l} y'^{l_2}\right) - u^2 + u\right], \\ u = xy^{-1} y'_x . \end{cases} \tag{2.38}$$

Заметим, что в данном случае мы рассмотрели обратное отображение из класса опорных уравнений в исследуемый. Это можно сделать, так как оно всегда существует.

В соответствии с теоремой 2.5 необходимо найти еще одно (существенно другое) отображение. Применим к уравнению A2 (1.1) преобразование

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = \dot{x}(t), \end{cases}$$

которое приводит его к автономному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} - \dot{x} = R(x). \tag{2.39}$$

Далее, используя прямой метод, будем искать точечное преобразование

$$\begin{cases} x = f(\tau, u), \\ t = g(\tau, u), \end{cases} \qquad J = f_\tau g_u - f_u g_\tau \neq 0, \tag{2.40}$$

переводящее уравнение (2.39) в класс опорных уравнений (2.37). Подставляя преобразование (2.40) в уравнение (2.39), получим определяющее уравнение

$$\begin{aligned} u'' = \frac{1}{J}\Big[&\left(g_u f_{uu} - f_u g_{uu} - R g_u^3 - f_u g_u^2\right) u'^3 + \\ &+ \left(f_{uu} g_\tau - f_\tau g_{uu} + 2 f_{\tau u} g_u - 2 f_u g_{\tau u} - 3R g_\tau g_u^2 - f_\tau g_u^2 - 2 f_u g_\tau g_u\right) u'^2 + \\ &+ \left(f_{\tau\tau} g_u - f_u g_{\tau\tau} + 2 f_{\tau u} g_\tau - 2 f_\tau g_{\tau u} - 3R g_\tau^2 g_u - 2 f_\tau g_\tau g_u - f_u g_\tau^2\right) u' + \\ &+ \left(g_\tau f_{\tau\tau} - f_\tau g_{\tau\tau} - R g_\tau^3 - f_\tau g_\tau^2\right)\Big]. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Как и в параграфе 2.1, необходимо рассмотреть четыре случая, когда каждая из частных производных f_u, f_τ, g_u, g_τ тождественно равна нулю. Учитывая, что уравнение (2.41) должно принадлежать подклассу (2.37), и расщепляя его по степеням u', получим 24 определяющие системы, из которых могут быть найдены функции f и g, входящие в искомое точечное преобразование. Сразу заметим, что 12 из этих систем вырожденные, поэтому остается исследовать оставшиеся 12. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} Rg_u^2 = -A\tau^{n_1}u^{m_1}f_\tau\,, \\ f_\tau g_{uu} + 3Rg_\tau g_u^2 + f_\tau g_u^2 = 0\,, \\ f_{\tau\tau}g_u - 2f_\tau g_{\tau u} - 3Rg_\tau^2 g_u - 2f_\tau g_\tau g_u = 0\,, \\ g_\tau f_{\tau\tau} - f_\tau g_{\tau\tau} - Rg_\tau^3 - f_\tau g_\tau^2 = Ak\tau^{n_1-3}u^{m_1+3}f_\tau g_u\,, \end{cases} \qquad (2.42)$$

где R=$R(f)$, соответствующую случаю $f_u = 0$, $l_1 = 3$, $l_2 = 0$. Она имеет “треугольный” вид, чем однозначно определяется алгоритм решения. Из первого уравнения этой системы выражаем g_u и, беря частный интеграл по u, получим следующие два случая :

1) $m_1 \neq 2 \;\Rightarrow\; g = \frac{2}{m_1+2}F_1(\tau)u^{\frac{m_1+2}{2}} + F_2(\tau)$,

2) $m_1 = 2 \;\Rightarrow\; g = F_1(\tau)\ln u + F_2(\tau)$, $F_1(\tau) = A_1\tau^{n_1/2}f_\tau^{1/2}R^{-1/2}$, $F_2(\tau)$ - произвольная функция от τ, $A_1^2 = -A$.

В первом случае, вычисляя соответствующие частные производные функции g и подставляя их во второе уравнение системы (2.42), приходим к ОДУ, которое имеет смысл лишь при m_1=0. Расщепляя его по степеням u, получаем условия на функции F_1, F_2, f. С учетом этого третье уравнение системы (2.42) даст вид функции R. Однако полученные результаты не удовлетворяют последнему уравнению системы (2.42), а, следовательно, эта система (при m_1=0) несовместна.

Проводя аналогичную процедуру для случая 2), получим, что система (2.42) совместна только при n_1=1, и ее решение дает линейную функцию R:

$$R(\xi) = B\xi\,.$$

При этом опорное уравнение (2.37) примет следующий вид

$$y'' = Axy^{-2}y'^3 + Akx^{-2}y\,,$$

а уравнение А2 (2.36), полученное другим преобразованием (посредством RF-пары (2.38)) , будет вырожденным - R=0. Поскольку указанные уравнения А2 связаны несущественным преобразованием, то найденное отображение из класса уравнений (2.37) в класс уравнений А2 (1.1) является тривиальным.

Можно показать, что остальные 11 определяющих систем дают результаты, идентичные рассмотренным выше. Тем самым, доказано следующее утверждение.

***Теорема* 2.7.** Класс опорных уравнений (2.37) порождает на классе уравнений А2 (1.1) тривиальную ДМП.

Очевидно, выбор в качестве опорных других уравнений второго порядка, например,

$$y'' = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) g_i(y) h_i(y'_x),$$

приводит к более сложным определяющим системам, требующим значительного ограничения на вид произвольных функций, входящих в уравнение, что, аналогично предыдущему случаю, дает тривиальные отображения.

Таким образом, показано, что нетривиальные результаты методом отображений могут быть получены лишь при использовании как опорного класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (2.34).

2.4. Дифференциальные кольца решений, порожденные действием ДМП.

Настоящий параграф посвящен представлению решений дифференциальных уравнений орбиты, порожденной действием некоторой ДМП, основанному на понятиях дифференциальной алгебры [36] и позволяющему прогнозировать и унифицировать решения всех элементов этой орбиты в единых терминах, указав внутренние связи между ними, т. е. распространить симметрийное описание с самих ОДУ на их общие решения.

Изложение будет проводится на примере уравнения А2, что однако не мешает использовать тот же аппарат для других ОДУ.

Определение 2.3. Дифференцированием кольца $\boldsymbol{A}$ называется аддитивное отображение $a \to a'$ кольца $\boldsymbol{A}$ в себя, удовлетворяющее соотношению

$$(ab)' = a'b + ab'.$$

Определение 2.4. Дифференциальным кольцом называется коммутативное кольцо с единицей, в котором отмечено некоторое дифференцирование.

В любом дифференциальном кольце $\boldsymbol{A}$ элементы, производные которых равны нулю, образуют подкольцо $\boldsymbol{C}$, называемое кольцом констант. Заметим, что $\boldsymbol{C}$ содержит подкольцо, порожденное единичным элементом кольца $\boldsymbol{A}$.

Очевидно, что кольцо всех бесконечно дифференцируемых функций на действительной прямой относительно обычного дифференцирования является дифференциальным кольцом.

Пусть произвольное уравнение А2

$$yy'_x - y = R(x) \tag{2.43}$$

переводится в другое уравнение А2

$$ww'_u - w = Q(u) \tag{2.44}$$

некоторым преобразованием, функциональное представление которого запишем в виде соотношения между 2-векторами

$$\mathrm{U}=\mathrm{H}(\mathrm{X}),\ \mathrm{X}=(x,y),\ \mathrm{U}=(u,w). \tag{2.45}$$

Пусть решение (2.43) имеет вид

$$\begin{cases} x = f(\tau), \\ y = g(\tau) \end{cases} \tag{2.46}$$

и, вообще говоря, принадлежит кольцу бесконечно дифференцируемых функций, которое будем обозначать $\boldsymbol{K}$, тогда решение уравнения (2.44) получается из (2.46) применением к последнему преобразования (2.45)

$$\begin{cases} u = h_1(f, g), \\ w = h_2(f, g), \end{cases} \tag{2.47}$$

где $\mathrm{H}=(h_1, h_2)$.

Пусть теперь на классе уравнений А2 задана некоторая ДМП А. Предположим, что орбита какого-либо уравнения, порожденная действием А, содержит разрешимый элемент - уравнение (2.43). Покажем, что общее решение последнего принадлежит дифференциальному кольцу $\boldsymbol{K}_1$: $\boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{K}$, для которого справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 2.8.** Подкольцо $\boldsymbol{K}_1$ является конечно-порожденным кольцом и полностью определяется функцией $R(x)$.

Доказательство. Поскольку, как указывалось во введении, мы рассматриваем решения (ОДУ) в замкнутом виде, т. е. аналитические выражения, заданные конечной комбинацией элементарных (квадратуры) и специальных функций (в решении отсутствуют непросуммированные ряды и предельные переходы), то подстановка такого решения в уравнение А2 должно давать правую часть $R(x)$, отсюда и вытекает конечность базиса кольца $\boldsymbol{K}_1$, определяемого функцией $R(x)$. #

Очевидно, что все элементы этой орбиты имеют решения, которые получаются при действии ДМП A на разрешимый элемент. При этом A порождает некоторое дифференциальное кольцо $\boldsymbol{K}_2$, содержащее элементы из $\boldsymbol{K}_1$ и замкнутое относительно операции, заданной в A (суперпозиции функций). $\boldsymbol{K}_2$ может совпадать со всем кольцом $\boldsymbol{K}_1$ или включать его в себя: $\boldsymbol{K}_1 \subseteq \boldsymbol{K}_2$.

Пусть порядок ДМП A равен m : $|\mathrm{A}| = m$, тогда

$$\boldsymbol{K}_2 : \ \left\{ f, g, h_1, h_2, \ldots, h_{2m-3}, h_{2m-2} \right\}, \tag{2.48}$$

где $\mathrm{H}_j = \mathrm{H}_j\left(h_{2j-1}, h_{2j}\right)$, $\left(j = \overline{1, m-1}\right)$ (H_j - 2-векторы всех преобразований из A). Приведенные ранее рассуждения позволяют утверждать, что $\boldsymbol{K}_2$ также является конечно-порожденным дифференциальным кольцом и полностью определяется функциями $R(x)$ и H_j.

Очевидно, базис (2.48) является максимальным из возможных и реализуется лишь в гипотетическом случае, когда ДМП A задана графом,

т. е. все образующие имеют порядок 2, а связи между ними не определены, причем f, g и другие образующие заданы различными классами функций. Во всех остальных случаях базис (2.48) избыточен.

Следует заметить, что если некий подкласс уравнений допускает лишь “изолированные” образующие порядка 2 , то применение дифференциальной алгебры становится неактуальным, так как решение любого элемента орбиты вычисляется однократной процедурой, а это, как правило, не вызывает затруднений и не нуждается в прогнозировании.

Поэтому применение аппарата дифференциальной алгебры имеет смысл, если орбита ДМП обладает более сложным строением, а именно, цепочка последовательно выполняемых преобразований состоит из не менее, чем трех элементов.

В этом случае оказывается, что вычисление решения третьего уравнения через решение второго (а не первого) сразу же приводит к очень громоздким выражениям и трудоемким вычислениям. Однако можно воспользоваться тем, что, как только в графе появляется нетривиальный замкнутый цикл, число элементов базиса (2.48) уменьшается, стремясь в пределе, при степенных h_j, к двум - (f, g).

Если ДМП конечна, то от бесконечного кольца $\boldsymbol{K_2}$ можно перейти к конечному множеству $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{K_2}$, замкнутому относительно операции, заданной в ДМП (суперпозиции функций). Таким образом, $\mathrm{H}_j\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}$ для всех j, и ДМП А задает на $\boldsymbol{S}$ конечную метагруппу автоморфизмов.

Определение 2.4. Минимальное непустое $\boldsymbol{S}$ будем называть *сужением кольца* $\boldsymbol{K_2}$ на многообразии решений элементов орбиты ДМП А и обозначать $\boldsymbol{S_*}$.

В силу выполнения соотношений $\mathrm{H}_j\boldsymbol{S_*}=\boldsymbol{S_*}$, $\mathrm{H}_j(\mathrm{H}_l\boldsymbol{S_*})=\boldsymbol{S_*}$, ... (для всех j, l) всякий элемент $\boldsymbol{S_*}$ представим в виде некоторой комбинации “стандартных элементов”, множество которых мы назовем *базисом сужения* $\boldsymbol{B_*}$. Алгебраические операции, определяющие конструкцию произвольного элемента $\boldsymbol{S_*}$, индуцируются исключительно H_j. В частности, как указывалось выше, появление в графе каждого нового нетривиального цикла порождает дополнительное соотношение между элементами $\boldsymbol{B_*}$.

Пусть H_j принадлежит дифференциальному кольцу обобщенных полиномов. Тогда любой элемент $s \in \boldsymbol{S_*}$ представим в виде

$$s = \sum_{(n)} \left(a_n \prod_{(k)} A_k^{\alpha_k} \right) \tag{2.49}$$

где a_n, α_k - элементы конечного множества чисел (векторы (a, α) для различных элементов $\boldsymbol{S_*}$ сопряжены преобразованиями ДМП), $\{A_k\} = \boldsymbol{B_*}$. Это означает, что $\boldsymbol{S_*}$ является сужением кольца $\boldsymbol{K_2}$ над некоторым дискретным конечным множеством чисел (коэффициентов и показателей).

Отметим также следующий факт. Несмотря на то, что все преобразования из А - точечные, получаемый объект имеет дифференциальную природу в силу соотношения

$$y' = \frac{R(x)}{y} + 1, \tag{2.50}$$

так как функция $R(x)$ часто входит в преобразования явно. Таким образом, в $\boldsymbol{S}_*$ помимо обычного дифференцирования отмечено также индуцированное дифференцирование (2.50), определяемое исследуемым классом уравнений. Это будет справедливо и для всех других объектов, как только мы рассматриваем их на многообразии решений класса уравнений А2.

Знание сужения $\boldsymbol{S}_*$ позволяет легко прогнозировать вид решений (в терминах $\boldsymbol{S}_*$) всех элементов орбиты ДМП, не проводя при этом трудоемких выкладок. Следовательно, можно классифицировать ОДУ не только по ДМП, но и по узкому классу функций, представленному указанным сужением. Кроме того, использование для представления решений уравнений орбиты конечного множества (сужения) с прогнозируемыми свойствами позволяет легко контролировать правильность получаемых результатов на основе определяющих соотношений между элементами базиса сужения $\boldsymbol{B}_*$.

Изложенные рассуждения справедливы и в случае применения метода отображений, когда ДМП А, получаемая для исследуемого класса уравнений, “наследуется” от ДМП G, действующей на опорном классе. При этом отображение G $\to$ A задает гомоморфизм (изоморфизм, псевдогомоморфизм) сужения $\boldsymbol{S}_{1*}$ (решения орбиты опорных уравнений) в (на) сужение $\boldsymbol{S}_{2*}$ (решения орбиты исследуемых уравнений).

Ниже приводится таблица некоторых разрешимых орбит с указанием числа уравнений в каждой орбите и соответствующего числа элементов базиса сужения, через которые выражаются решения всех уравнений этой орбиты. Условное название конкретной орбиты дано по типу функций, входящих в базис сужения, за исключением орбиты Эйлера, названной в честь ученого, впервые проинтегрировавшего уравнение $yy'_x - y = -\frac{2}{9}x + A + Bx^{-1/2}$.

Таблица 2.1

Наименование орбиты	Число уравнений в орбите	Число элементов базиса сужения
Орбита полиномов	10	4
Орбита Бесселя	17	6
Орбита Вейерштрасса	19	8
Орбита Эйлера	7	5

Орбита тангенсов	6	8
Орбита эллиптических интегралов	11	4

Заметим, что в каждом случае число уравнений в орбите значительно больше, чем число элементов базиса сужения (следует учитывать, что решение каждого уравнения записывается в параметрическом виде и поэтому содержит две формулы). Так для решений орбиты полиномов, состоящей из 10 уравнений, имеем не 10, а 20 формул, которые записываются всего через 4 базисных элемента.

В качестве примера рассмотрим часть орбиты Бесселя для расширения, соответствующего значению ν=1/3 произвольного индекса в функции Бесселя Z_ν . Приведем только те уравнения, которые имеют явный вид правой части $R(x)$ [25].

1) $R(x) = Ax^{-1/2}$.

Решение: $x = a\tau^{-4/3}Z^{-2}U_1^2,\quad y = a\tau^{-4/3}Z^{-2}U_2,\quad A = -\left(\pm\frac{1}{3}a^{3/2}\right)$.

2) $R(x) = Ax^{-2}$.

Решение: $x = 2a\tau^{4/3}Z^2U_2^{-1},\quad y = \pm 3a\tau^{-2/3}Z^{-1}U_2^{-1}U_3,\quad A = -36a^3$.

3) $R(x) = -\frac{12}{49}x + \frac{6}{49}A\left(x^{1/2} + 8A + 5A^2x^{-1/2}\right)$.

Решение:

$$x = 3aU_1^{-4}\left(5U_1^2 - 7\tau^2Z^2\right)^2,\quad y = 28a\tau^2Z^2U_1^{-4}\left(3\tau^2Z^2 - ZU_1 - 3U_1^2\right),\quad A = 2\sqrt{3a}.$$

4) $R(x) = -\frac{6}{25}x + \frac{6}{25}A\left(2x^{1/2} + 7A + 4A^2x^{-1/2}\right)$.

Решение: $x = a\tau^{-4}Z^{-6}\left(U_1U_2 - 2U_3\right)^2,\quad y = 5a\tau^{-4}Z^{-6}U_2\left(U_2^2 - U_1U_3\right),\quad A = -\dfrac{\sqrt{a}}{2}$.

5) $R(x) = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \dfrac{3b^2}{16\sqrt{x^2 \pm b^2}}$.

Решение:

$$x = -\frac{a}{4}\tau^{-1}Z^{-3/2}U_1^{-1/2}U_2^{-1}\left[2\tau^2Z^3U_1 - \left(\pm 3U_2^2\right)\right],$$

$$y = -\left[\pm\frac{a}{8}\tau^{-1}Z^{-3/2}U_1^{-1/2}U_2^{-1}\left(3U_2^2 - 12U_1^2U_2 \pm 4\tau^2Z^3U_1\right)\right],\quad b^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

6) $$R(x)=\tfrac{9}{32}x+\tfrac{15}{32}\sqrt{x^2-\left(\pm b^2\right)}-\left(\pm\frac{3b^2}{64\sqrt{x^2-\left(\pm b^2\right)}}\right).$$

Решение:
$$x=-\tfrac{a}{2}\tau^{-1}Z^{-3/2}U_2^{-3/2}U_3^{-1/2}\left(2\tau^2Z^3U_3\pm 3U_2^3\right),$$
$$y=\pm\tfrac{a}{4}\tau^{-1}Z^{-3/2}U_2^{-3/2}U_3^{-1/2}\left(3U_2^3-\left(\pm\tau^2Z^3U_3\right)-3U_3^2\right),\quad b^2=6a^2.$$

7) $$R(x)=-\tfrac{3}{32}x-\tfrac{3}{32}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{15a^2}{64\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Решение: $x=\tfrac{a}{2}U_2^{-3/2}U_3^{-1}\left(U_3^2-U_2^3\right)$, $y=\tfrac{a}{24}U_2^{-3/2}U_3^{-1}\left(3U_3^2-12U_2^3+4\tau^2Z^3U_3\right)$.

Здесь $\boldsymbol{B}_*$: $\{\tau, Z, Z'_\tau, U_1, U_2, U_3\}$, где $Z=Z_{1/3}$,

$$Z_\nu=\begin{cases}C_1J_\nu(\tau)+C_2Y_\nu(\tau),\\ C_1I_\nu(\tau)+C_2K_\nu(\tau),\end{cases}$$

J_ν, Y_ν - функции Бесселя, I_ν, K_ν - модифицированные функции Бесселя (первая строка соответствует верхнему знаку, вторая - нижнему знаку, в формулах элементов базиса сужения и решений)

$$U_1=\tau Z'_\tau+\tfrac{1}{3}Z,\quad U_2=U_1^2\pm\tau^2Z^2,\quad U_3=\pm\tfrac{2}{3}\tau^2Z^3-2U_1U_2.$$

При этом справедливы следующие тождества

$$U'_{1\tau}=\tfrac{1}{3}Z'_\tau-\left(\pm1-\frac{1}{9\tau^2}\right)\tau Z,\qquad \tau ZU'_{1\tau}-\tau Z'_\tau U_1-\tfrac{2}{3}ZU_1=-U_2,$$
$$\tfrac{1}{3}U_1-\tau U'_{1\tau}=\pm\tau^2Z,\qquad \tau ZU'_{2\tau}-2\tau Z'_\tau U_2-\tfrac{4}{3}ZU_2=U_3,$$
$$\tau U'_{2\tau}-\tfrac{2}{3}U_2=\pm\tfrac{2}{3}\tau^2Z^2,\qquad \tau ZU'_{3\tau}-\tau Z'_\tau U_3-\tfrac{4}{3}ZU_3=2U_2^2,$$
$$\tau U'_{3\tau}-U_3=\pm\tau^2Z\left(U_2+\tfrac{1}{3}ZU_1\right),\qquad Z\left(\tau U'_{3\tau}-U_3\right)-U_1U_3=2U_2^2.$$

Таким образом, мы легко можем прогнозировать вид решения любого уравнения орбиты в терминах очень узкого класса функций (базиса сужения дифференциального кольца $\boldsymbol{K}_2$), не проводя при этом практически никаких вычислений.

Очевидно, что минимальный базис сужения состоит из двух элементов - решения в параметрическом виде исходного интегрируемого уравнения. Однако представление всех решений элементов орбиты через этот базис не позволяет “раскрыть” внутреннюю симметрию орбиты, как это происходит в показанных выше примерах. Минимальный базис можно эффективно использовать при расчетах орбит на ЭВМ [28] .

Наличие конечного сужения дифференциального кольца решений позволяет легко табулировать (на основе базиса сужения) его элементы для численного анализа задач, которые сводятся к уравнениям, являющимся элементами разрешимых орбит. Это означает, что любое уравнение разрешимой орбиты может быть выбрано в качестве модели, поскольку базисная таблица уже имеется.

ГЛАВА 3

УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ 2-ГО РОДА, ОБЛАДАЮЩИЕ ПОЛУФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ РЕШЕНИЙ

В этой главе рассматриваются вопросы, относящиеся к классической задаче построения общего решения ОДУ первого порядка через его частные решения, а также к задаче поиска ОДУ, обладающих ПФСР.

3.1. <u>Основные определения и вводные замечания</u>.

<u>Определение 3.1.</u> Говорят, что система ОДУ

$$\frac{dx^i}{dt} = F^i\left(t, x^1, \ldots, x^n\right), \; i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

обладает фундаментальной системой решений (ФСР), если общее решение этой системы выражается через конечное число m произвольно выбранных различных частных решений

$$x_k = \left(x_k^1, \ldots, x_k^n\right), \; k = 1, \ldots, m \tag{3.2}$$

формулами, представленными в явном виде

$$x^i = \varphi^i\left(x_1, \ldots, x_m, C_1, \ldots, C_n\right) \tag{3.3}$$

и содержащими n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$. Частные решения (3.2) (которые считаются функционально независимыми) называют при этом ФСР системы уравнений (3.1).

Общий вид уравнений, обладающих ФСР нашел С. Ли, который доказал следующую основную теорему [67].

<u>Теорема 3.1</u>. Система уравнений (3.1) обладает ФСР, если она представима в специальном виде

$$\frac{dx^i}{dt} = T_1(t)\xi_1^i(x) + \ \ldots \ + T_r(t)\xi_r^i(x) \tag{3.4}$$

так, что операторы

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1,\dots,r \qquad (3.5)$$

образуют r-мерную алгебру Ли. При этом число m необходимых частных (фундаментальных) решений (3.2) удовлетворяет условию

$$nm \geq r\,.$$

Определение 3.2. Будем говорить, что система ОДУ (3.1) обладает *ПФСР 1-го рода*, если ее общее решение выражается через конечное число m фиксированных различных частных решений (3.2). Частные решения (3.2) назовем при этом *ПФСР 1-го рода* системы уравнений (3.1).

Замечание 3.1. Формула общего решения может иметь явный, неявный или параметрический вид.

Определение 3.3. Будем говорить, что система ОДУ (3.1) обладает *ПФСР 2-го рода*, если общее решение этой системы выражается через конечное число m произвольно выбранных различных частных решений (3.2), и формула его решения записывается в неявном (обычно параметрическом) виде. Частные решения (3.2) назовем при этом *ПФСР 2-го рода* системы уравнений (3.1).

Замечание 3.2. Поскольку в настоящей работе рассматривается не система, а одно ОДУ, то требование функциональной независимости частных решений в определении 3.1 является лишним. Кроме того, для нелинейных уравнений не обязательна и линейная независимость ФСР и ПФСР [16].

Очевидно, ФСР позволяет выписать общее решение ОДУ, как только будет найдено необходимое число любых его частных решений. В приложениях важную роль играет возможность установления на основе ФСР нелинейного принципа суперпозиции.

В случае линейных ОДУ эта задача решена однозначно, так как для них всегда существует ФСР. Значительно сложнее обстоит дело с нелинейными ОДУ [16, 18, 32]. Известны некоторые классы уравнений, обладающие ФСР. Приведем два примера.

Пример 1. Уравнение Риккати

$$\frac{dx}{dt} = P(t) + Q(t)x + S(t)x^2$$

удовлетворяет условиям теоремы Ли, так как имеет вид (3.4), где r=3, а операторы (3.5)

$$X_1 = \frac{d}{dx}\ ,\ X_2 = x\frac{d}{dx}\ ,\ X_3 = x^2\frac{d}{dx}$$

образуют трехмерную алгебру Ли. Условие $nm \geq r$ дает $m \geq 3$, так что для выражения общего решения требуется не менее трех частных решений. На самом деле достаточно знать 3 частных решения, так как известно, что любые 4 решения уравнения Риккати связаны условием постоянства их ангармонического отношения

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4}\,.$$

Пример 2. Уравнение Риккати 2-го порядка

$$y'' + 3yy' + y^3 + f_1(x)y + f_0(x) = 0$$

подстановкой $y = \dfrac{u'}{u}$ приводится к линейному уравнению 3-го порядка

$$u''' + f_1(x)u' + f_0(x)u = 0\,,$$

обладающему ФСР. Следовательно, исходное уравнение также обладает ФСР.

В некоторых случаях общее решение ОДУ представимо через ФСР другого ОДУ.

Пример 3. Общее решение уравнения Ермакова [8]

$$y'' + b(x)y = ky^{-3}, \quad k=\mathrm{const}$$

при $y(x_0) = y_0 \neq 0$, $y'(x_0) = y_1$ имеет вид

$$y(x) = \left[u^2(x) + kW^{-2}v^2(x)\right]^{1/2},$$

где u, v - линейно-независимые решения “укороченного” линейного уравнения

$$y'' + b(x)y = 0$$

такие, что $u(x_0) = y_0$, $u'(x_0) = y_1$, $v(x_0) = 0$, $v'(x_0) \neq 0$, $W = uv' - u'v = \mathrm{const} \neq 0$ - вронскиан, т.е. обшее решение исходного уравнения выражается через ФСР соответствующего “укороченного” линейного уравнения.

Большинство же нелинейных ОДУ в общем случае либо не имеют ФСР, либо ею обладают некоторые их специализации, так что задача сводится к поиску этих конкретных подклассов уравнений. В частности, уравнение А2, записанное в виде

$$y' = f_1(x) + f_2(x)y^{-1},$$

не допускает ФСР при произвольных f_1 и f_2, поскольку для различных коммутаторов верно равенство

$$\left[\left[X_1, X_2\right] \ldots X_2\right] = y^{-k} \partial_y \neq X_1, X_2,$$

где k=2, 3, ... , и, следовательно, допускаемые операторы

$$X_1 = \partial_y, \; X_2 = y^{-1} \partial_y$$

образуют бесконечномерную алгебру Ли [31, 33].

Как выяснилось в процессе этого исследования, возможны также случаи, когда общее решение ОДУ можно представить через систему частных, не образующих ФСР, но являющихся ПФСР.

Для уравнений первого порядка наиболее важные результаты в этом направлении получены при изучении уравнения Дарбу [47, 54, 61, 62]

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{3.6}$$

где P и Q - полиномы относительно x и y степени не выше m. Дарбу доказал теорему о том, что

1) если для уравнения (3.6) известно $\frac{1}{2} m(m+1) + 2$ частных решений, то общий интеграл может быть найден без квадратур;
2) если для (3.6) известно частных решений на единицу меньше, то может быть найден интегрирующий множитель;
3) если уравнение (3.6) имеет q критических точек, то для построения общего интеграла требуется частных решений $\frac{1}{2} m(m+1) + 2 - q$.

3.2. Алгоритм Кояловича и обратная задача поиска уравнений А2, обладающих общим интегралом заданного вида.

Как уже отмечалось ранее, уравнение А2 - наиболее простое по внешнему виду ОДУ 1-го порядка, для которого не известна форма общего решения. Методами ДГА проинтегрировано значительное число уравнений этого класса [24, 25]. Однако с теоретической точки зрения построение общего решения уравнения А2 из частных, а также поиск подклассов, обладающих общими решениями заданного вида (обратная задача), являются более актуальными.

В конце прошлого века Б. М. Кояловичем [39] был предложен алгоритм получения общего интеграла (ОИ) некоторых уравнений А2 (1.1) в форме

$$\prod_{j=1}^{n}\left(y-\alpha_j\right)^{m_j}=C\,, \tag{3.7}$$

где α_j – различные частные решения уравнения (1.1), m_j – некоторые константы.

Суть алгоритма, который является прямым, состоит в том, что по заданной функции $R(x)$ и числу M ($m_1+\ldots+m_n=M$) достаточно сложным способом, с использованием некоторого логичного подбора, ищутся частные решения α_j . Необходимое и достаточное условие существования формы (3.7) есть

$$\frac{m_1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{m_n}{\alpha_n}=0\,. \tag{3.8}$$

Справедливо и обратное - если (3.8) выполняется, то существует интеграл данного вида. Коялович назвал частные решения α_j (j=1,...,n), удовлетворяющие уравнению (1.1) при каком-либо n его *канонческими решениями*.

Коялович утверждал, что канонические решения существуют лишь в случае, если

$$R(x)=ax+bx^{l}\,, \qquad (l\leq 0), \tag{3.9}$$

где a, b - некоторые константы.

Он предлагал, что если для заданного уравнения А2 (1.1) при некотором n алгоритм не дал результата, то необходимо взять другое значение n и повторить алгоритм снова. При этом множество уравнений, обладающих интегралами вида (3.7), ограничено лишь формулой (3.9).

Незамкнутость алгоритма (каждый раз, применяя его к конкретному уравнению А2 (1.1), мы не знаем - получим положительный результат или нет) приводит к тому, что перебор вариантов в поисках уравнений А2, имеющих канонические решения, можно продолжать сколь угодно долго. Кроме того, алгоритм Кояловича является достаточно трудоемким, требующим большого количества промежуточных вычислений. Все это не только значительно снижает его эффективность, но и не позволяет делать никакого прогноза результата, который является наиболее ценным свойством современных алгоритмов.

Поэтому в настоящей работе была поставлена обратная задача. А именно, по форме ОИ (3.7), вообще говоря, с неизвестными частными решениями, найти множество уравнений, обладающих ОИ такого вида. Решение этой задачи привело к несколько неожиданным результатам, которые излагаются ниже.

Докажем лемму, выводы которой будут использоваться далее.

Лемма. Уравнение А2 с линейной правой частью

$$yy'_x - y = Ax + B\,, \tag{3.10}$$

где A и B – константы, имеет не более двух различных частных решений в виде линейной функции.

Доказательство. Подставим функцию $y_0 = ax + b$, где a и b – произвольные постоянные, в левую часть уравнения А2 (3.10), получим

$$\left(a^2 - a\right)x + (a-1)b = Ax + B\,,$$

отсюда следует, что a и b должны удовлетворять следующему условию

$$\begin{cases} a^2 - a = A\,, \\ (a-1)b = B\,. \end{cases}$$

Поскольку первое уравнение этой системы квадратное относительно a, то a (а, следовательно, и b) имеет не более двух различных значений, что и доказывает справедливость леммы.

Теорема. Для каждого значения n существует единственное уравнение А2 (1.1)

$$yy'_x - y = R(x)\,,$$

обладающее ОИ вида (3.7) и не сводящееся к случаю $s < n$.

Доказательство. Поскольку уравнение А2 (1.1) можно представить в виде

$$f(x)y^{\nu}\left[yy' - y - R(x)\right] = 0\,, \tag{3.11}$$

где ν - некоторое число, $f(x)$ - произвольная функция, то продифференцировав (3.11) и приведя подобные члены, получим ОДУ 1-го порядка, которое для каждого значения n сводится к уравнению А2 (1.1) $n-1$ способом. А именно, присваивая коэффициентам при соответствующих степенях $y^{\nu+1}y'$, $y^{\nu+1}$, y^{ν} необходимые для получения уравнения А2 (1.1) значения, приходим к $n-1$ системе дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). При этом ν принимает значения от 0 до $n-2$. Для наглядности запишем эти системы в виде следующей таблицы 3.1, где M - произвольная константа, f=$f(x)$, R= $R(x)$ - правая часть уравнения А2 (1.1).

Таблица 3.1.

		S1	**S2**	**...**	**S(n-2)**	**S(n-1)**
$y^{n-1}y'$	$m_1+m_2+\ldots+m_n$	M	0	...	0	0
$y^{n-2}y'$	$-\left[m_1(\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})\right]$	0	M	...	0	0
$y^{n-3}y'$	$m_1(\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n)+\ldots$ $\ldots+m_n(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})$	0	0	...	0	0
...	. . . .	...	...	...	...	...
y^3y'	$(-1)^n\left[m_1(\alpha_2\ldots\alpha_{n-3}+\ldots+\alpha_5\ldots\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n(\alpha_1\ldots\alpha_{n-4}+\ldots+\alpha_4\ldots\alpha_{n-1})\right]$	0	0	...	0	0
y^2y'	$(-1)^{n-1}\left[m_1(\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_4\ldots\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n(\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}+\ldots+\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})\right]$	0	0	...	f	0
yy'	$(-1)^n\left[m_1(\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_3\ldots\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n(\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})\right]$	0	0	...	0	f
y'	$(-1)^{n-1}\left[m_1\alpha_2\ldots\alpha_n+\ldots+m_n\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\right]$	0	0	...	0	0
y^{n-1}	$-\left[m_1\alpha_1'+\ldots+m_n\alpha_n'\right]$	$-M$	0	...	0	0
y^{n-2}	$m_1\alpha_1'(\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+\ldots+m_n\alpha_n'(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})$	$-MR$	$-M$	...	0	0
y^{n-3}	$-\left[m_1\alpha_1'(\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n\alpha_n'(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1})\right]$	0	$-MR$	...	0	0
...	. . . .	0	0	...	0	0
y^3	$(-1)^{n-1}\left[m_1\alpha_1'(\alpha_2\ldots\alpha_{n-3}+\ldots+\alpha_5\ldots\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n\alpha_n'(\alpha_1\ldots\alpha_{n-4}+\ldots+\alpha_4\ldots\alpha_{n-1})\right]$	0	0	...	0	0
y^2	$(-1)^n\left[m_1\alpha_1'(\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_4\ldots\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n\alpha_n'(\alpha_1\ldots\alpha_{n-3}+\ldots\alpha_3\ldots\alpha_{n-1})\right]$	0	0	...	$-f$	0
y	$(-1)^{n-1}\left[m_1\alpha_1'(\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_3\ldots\alpha_n)+\ldots\right.$ $\left.\ldots+m_n\alpha_n'(\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}+\ldots+\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})\right]$	0	0	...	$-fR$	$-f$
y^0	$(-1)^n\left[m_1\alpha_1'\alpha_2\ldots\alpha_n+\ldots+m_n\alpha_n'\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\right]$	0	0	...	0	$-fR$

Так как все частные решения α_j (j=1,…,n), входящие в ОИ (3.7), различны, то пусть α_j являются корнями алгебраического уравнения n-й степени

$$\alpha^n + P_1(x)\alpha^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)\alpha + P_n(x) = 0\,, \tag{3.12}$$

для которого выполняются известные соотношения

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -P_1(x),\\
&\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = P_2(x),\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -P_3(x),\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n P_n(x).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Кроме того, для уравнения А2 (1.1) справедлива формула

$$\alpha'_j = \frac{R(x)}{\alpha_j} + 1\,, \quad (j = \overline{1,n}). \tag{3.14}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1. При n=2 имеем одну систему вида $S1$

$$\begin{cases}
m_1 + m_2 = M\,,\\
m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1 = 0\,,\\
m_1\alpha'_1 + m_2\alpha'_2 = M\,,\\
m_1\alpha'_1\alpha_2 + m_2\alpha'_2\alpha_1 = -MR\,.
\end{cases} \tag{3.15}$$

Она, с учетом (3.13) и (3.14), легко сводится к системе двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases}
\alpha_1 + \alpha_2 = x + \dfrac{N}{M},\\
m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = Mx + N.
\end{cases}$$

Откуда находим

$$\alpha_1 = \frac{m_2}{m_2 - m_1}\left(x + \frac{N}{M}\right), \quad \alpha_2 = -\frac{m_1}{m_2 - m_1}\left(x + \frac{N}{M}\right), \quad R(x) = \frac{m_1 m_2}{(m_2 - m_1)^2}\left(x + \frac{N}{M}\right).$$

Очевидно, что для этого случая теорема верна.

2. При n=3 получаем две системы ДАУ, которые запишем как таблицу 3.2.

Таблица 3.2

	n=3	$S1$	$S2$
y^2y'	$m_1 + m_2 + m_3$	M	0
yy'	$-\left[m_1(\alpha_2 + \alpha_3) + m_2(\alpha_1 + \alpha_3) + m_3(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$	0	f

y'	$m_1\alpha_2\alpha_3 + m_2\alpha_1\alpha_3 + m_3\alpha_1\alpha_2$	0	0
y^2	$-\left(m_1\alpha_1' + m_2\alpha_2' + m_3\alpha_3'\right)$	$-M$	0
y	$m_1\alpha_1'\left(\alpha_2 + \alpha_3\right) + m_2\alpha_2'\left(\alpha_1 + \alpha_3\right) + m_3\alpha_3'\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)$	$-MR$	$-f$
y^0	$-\left(m_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_3 + m_2\alpha_2'\alpha_1\alpha_3 + m_3\alpha_3'\alpha_1\alpha_2\right)$	0	$-fR$

Пусть ни одно из частных решений α_j (j=1,2,3) не равно нулю, т.е. выполняется следующее условие

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0 . \tag{3.16}$$

Рассмотрим систему $S1$ (табл. 3.2) с учетом этого условия, а также формул (3.13) и (3.14), тогда ее можно представить в виде системы четырех алгебраических уравнений с тремя неизвестными α_j (j=1,2,3)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x + \dfrac{N}{M}, \\ m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 = Mx + N, \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1} + \dfrac{m_2}{\alpha_2} + \dfrac{m_3}{\alpha_3} = 0, \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1^2} + \dfrac{m_2}{\alpha_2^2} + \dfrac{m_3}{\alpha_3^2} = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение этой системы на $(-M)$ и складывая со вторым уравнением, приходим к системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x + \dfrac{N}{M} , \\ \left(m_1 - M\right)\alpha_1 + \left(m_2 - M\right)\alpha_2 + \left(m_3 - M\right)\alpha_3 = 0 , \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1} + \dfrac{m_2}{\alpha_2} + \dfrac{m_3}{\alpha_3} = 0 , \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1^2} + \dfrac{m_2}{\alpha_2^2} + \dfrac{m_3}{\alpha_3^2} = 0 . \end{cases} \tag{3.17}$$

Последние три уравнения системы (3.17) являются однородными алгебраическими уравнениями с постоянными коэффициентами. Это означает, что каждое α_j может быть

а) константой,

б) $\alpha_j = C_j\, q(x)$, где $q(x)$ - произвольная функция, C_i - произвольные константы (j=1,2,3).

Однако в случае а) первое уравнение системы (3.17) не удовлетворяется, а значит, исходное предположение (3.16) неверно. Положим α_3 =0, тогда из третьего уравнения исходной системы $S1$ (табл. 3.2) с необходимостью следует, что m_3=0, т.е. получаем систему (3.15), соответствующую n=2. В случае б) первое уравнение системы (3.17) дает

$$q(x) = \frac{1}{C}\left(x + \frac{N}{M}\right), \qquad C = C_1 + C_2 + C_3 \, .$$

Следовательно, каждое α_j есть линейная функция от x. Отсюда вытекает, что уравнение А2 имеет три различных частных решения в виде линейной функции от x. А это, в свою очередь, противоречит лемме. Таким образом, какие-то два из трех частных решений α_j совпадают, что автоматически приводит к случаю n=2 .

Рассмотрим вторую систему $S2$ (табл. 3.2). Учитывая соотношения (3.13) и (3.14), получаем следующую систему трех алгебраических уравнений относительно трех неизвестных α_j (j=1,2,3)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2x + \dfrac{N}{M}, \\ m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 = M, \\ m_1\alpha_1^2 + m_2\alpha_2^2 + m_3\alpha_3^2 = 2x + N. \end{cases} \tag{3.18}$$

Очевидно, что эта система является “новой” [2], т. е. не сводится к предыдущему случаю (n=2). Решая ее, легко находим значения α_j (j=1,2,3) и $R(x)$.

Таким образом, для n=3 получили единственное уравнение А2 , имеющее ОИ вида (3.7).

3. Для n=4 таблица 3.1 будет содержать три системы ДАУ и примет следующий вид

Таблица 3.3.

	n=4	$S1$	$S2$	$S3$
y^3y'	$m_1 + m_2 + m_3 + m_4$	M	0	0
y^2y'	$-\left[m_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \ldots + m_4(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\right]$	0	f	0
yy'	$m_1(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4) + \ldots$ $\ldots + m_4(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)$	0	0	f
y'	$-(m_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \ldots + m_4\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$	0	0	0
y^3	$-(m_1\alpha_1' + \ldots + m_4\alpha_4')$	$-M$	0	0
y^2	$m_1\alpha_1'(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \ldots + m_4\alpha_4'(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$	$-MR$	$-f$	0

y	$-\left[m_1\alpha_1'\left(\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4\right)+\ldots \right.$ $\left. \ldots+m_4\alpha_4'\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\right)\right]$	0	$-fR$	$-f$
y^0	$m_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\ldots+m_4\alpha_4'\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	0	0	$-fR$

Пусть

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \neq 0, \tag{3.19}$$

тогда для системы $S1$ (табл. 3.3), учитывая формулы (3.13) и (3.14), получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = x+\dfrac{N}{M}, \\ m_1\alpha_1+\ldots+m_4\alpha_4 = Mx+N\,, \\ m_1\alpha_1^{-1}+\ldots+m_4\alpha_4^{-1}=0\,, \\ m_1\alpha_1^{-2}+\ldots+m_4\alpha_4^{-2}=0\,, \\ m_1\alpha_1^{-3}+\ldots+m_4\alpha_4^{-3}=0\,, \end{cases}$$

которую, рассуждая аналогично случаю n=3 (см. систему $S1$ табл. 3.2), сводим к системе (3.17), соответствующей, в свою очередь, случаю n=2 .

Рассмотрим систему $S2$ (табл. 3.3). Опять же, используя соотношения (3.13) и (3.14), приходим к системе пяти алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными α_j (j=1,…,4)

$$\begin{cases} \alpha_1+\ldots+\alpha_4 = 2x+\dfrac{N}{M}, \\ m_1\alpha_1+\ldots+m_4\alpha_4 = M\,, \\ m_1\alpha_1^{2}+\ldots+m_4\alpha_4^{2}=2Mx+N\,, \\ m_1\alpha_1^{-1}+\ldots+m_4\alpha_4^{-1}=0\,, \\ m_1\alpha_1^{-2}+\ldots+m_4\alpha_4^{-2}=0\,. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на ($-M$) и складывая с третьим уравнением, получим следующую систему

$$\begin{cases} \alpha_1+\ldots+\alpha_4 = 2x+\dfrac{N}{M}\,, \\ m_1\alpha_1+\ldots+m_4\alpha_4 = M\,, \\ \left(m_1\alpha_1-M\right)\alpha_1+\ldots+\left(m_4\alpha_4-M\right)\alpha_4=0\,, \\ m_1\alpha_1^{-1}+\ldots+m_4\alpha_4^{-1}=0\,, \\ m_1\alpha_1^{-2}+\ldots+m_4\alpha_4^{-2}=0\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

Последние четыре уравнения этой системы суть алгебраические уравнения с постоянными коэффициентами, причем два из них - неоднородные. Отсюда следует, что частные решения α_j $(j=1,\ldots,4)$ могут быть только константами, т. е.

$$\alpha_j=C_j ,$$

где C_j - произвольные константы. Но тогда первое уравнение системы (3.20) несовместно с остальными. Следовательно, исходное предположение (3.19) неверно. Положим $\alpha_4=0$, тогда из 4-го уравнения системы $S2$ (табл. 3.3) вытекает, что и $m_4=0$, т. е. получаем систему (3.18), соответствующую предыдущему значению n ($n=3$).

Третья система $S3$ (табл. 3.3) легко приводится к системе четырех алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными α_j $(j=1,\ldots,4)$

$$\begin{cases} \alpha_1+\ldots+\alpha_4=3x+\dfrac{N}{M} , \\ m_1\alpha_1+\ldots+m_4\alpha_4=0 , \\ m_1\alpha_1^2+\ldots+m_4\alpha_4^2=M , \\ m_1\alpha_1^3+\ldots+m_4\alpha_4^3=3Mx+N . \end{cases} \tag{3.21}$$

Очевидно, что последняя система не сводится ни к одному из предыдущих случаев. Решая ее, можно найти значения α_j $(j=1,\ldots,4)$ и $R(x)$.

Таким образом, доказано, что для $n=4$ существует единственное уравнение A2 (1.1), которое имеет ОИ вида (3.7).

4. Пусть условия теоремы выполняются для $n=k-1$. Докажем, что тогда теорема верна и для $n=k$.

При $n=k-1$ последняя система $S(k-2)$ (табл. 3.1) сводится к системе $k-1$ алгебраического уравнения относительно $k-1$ неизвестного α_j $(j=1,\ldots,k-1)$

$$\begin{cases} \alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1}=(k-2)x+\dfrac{N}{M} , \\ m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1}=0 , \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_1\alpha_1^{k-4}+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1}^{k-4}=0 , \\ m_1\alpha_1^{k-3}+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1}^{k-3}=M , \\ m_1\alpha_1^{k-2}+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1}^{k-2}=(k-2)Mx+N , \end{cases} \tag{3.22}$$

которая соответствует тому единственному уравнению A2, обладающему ОИ вида (3.7).

Рассмотрим случай $n=k$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что предпоследняя $(k–2)$-я система сводится к последней системе $S(k–2)$ предыдущего $(n=k–1)$ случая.

Пусть

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \neq 0 , \qquad (3.23)$$

т. е. ни одно из частных решений не обращается тождественно в нуль, тогда, учитывая соотношения (3.13) и (3.14), преобразуем систему $S(k–2)$ (табл. 3.1) к виду

$$\begin{cases} \alpha_1+\ldots+\alpha_k = (k-2)x + \dfrac{N}{M} , \\ m_1\alpha_1+\ldots+m_k\alpha_k = 0 , \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ m_1\alpha_1^{k-4}+\ldots+m_k\alpha_k^{k-4} = 0 , \\ m_1\alpha_1^{k-3}+\ldots+m_k\alpha_k^{k-3} = M , \\ m_1\alpha_1^{k-2}+\ldots+m_k\alpha_k^{k-2} = (k-2)Mx + N , \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1}+\ldots+\dfrac{m_k}{\alpha_k} = 0 , \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1^2}+\ldots+\dfrac{m_k}{\alpha_k^2} = 0 . \end{cases}$$

Умножая первое уравнение этой системы на $(-M)$ и складывая с $(k–1)$-м уравнением, получим следующую систему $k+1$ алгебраического уравнения относительно k неизвестных α_j $(j=1,\ldots,k)$.

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\ \ldots\ +\alpha_k = (k-2)x + \dfrac{N}{M} , \\ m_1\alpha_1+\ \ldots\ +m_k\alpha_k = 0 , \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ m_1\alpha_1^{k-4}+\ \ldots\ +m_k\alpha_k^{k-4} = 0 , \\ m_1\alpha_1^{k-3}+\ \ldots\ +m_k\alpha_k^{k-3} = M , \\ \left(m_1\alpha_1^{k-3}-M\right)\alpha_1+\ \ldots\ +\left(m_k\alpha_k^{k-3}-M\right)\alpha_k = 0 , \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1}+\ \ldots\ +\dfrac{m_k}{\alpha_k} = 0 , \\ \dfrac{m_1}{\alpha_1^2}+\ \ldots\ +\dfrac{m_k}{\alpha_k^2} = 0 . \end{cases} \qquad (3.24)$$

Из последних k уравнений (алгебраических с постоянными коэффициентами, среди которых имеются неоднородные) следует, что

$$\alpha_j=C_j,$$

где C_j - произвольные константы. Однако в этом случае первое уравнение системы (3.24) несовместно с остальными , а следовательно, начальное предположение (3.23) неверно. Положим α_k =0, тогда получим, что m_k=0, и система (3.24) сводится к системе (3.22), т.е. к предыдущему случаю $n=k-1$.

Легко показать, что последняя (k–1)-я ($S(k)$, табл. 3.1) система приводится к системе k алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = (k-1)x + \dfrac{N}{M} , \\ m_1\alpha_1 + \ldots + m_k\alpha_k = 0 , \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ m_1\alpha_1^{k-3} + \ldots + m_k\alpha_k^{k-3} = 0 , \\ m_1\alpha_1^{k-2} + \ldots + m_k\alpha_k^{k-2} = M , \\ m_1\alpha_1^{k-1} + \ldots + m_k\alpha_k^{k-1} = (k-1)Mx + N , \end{cases}$$

которая является “новой”, т.е. для заданного значения n существует единственное уравнение А2 (1.1) с ОИ вида (3.7).

Теорема доказана.

Из полученного результата следует, что множество уравнений А2 (1.1), имеющих общий интеграл (3.7), счетно. Для каждого значения n такое уравнение единственно и (*принципиально*) может быть найдено, поскольку частные решения α_j (j=1,...,n), как корни некоторого алгебраического уравнения n-й степени с коэффициентами в виде обобщенных полиномов, по основной теореме алгебры всегда существуют.

Таким образом, алгоритм Кояловича становится не нужен, так как решение обратной задачи позволило, с одной стороны, принципиально описать множество уравнений А2, допускающих ОИ (3.7), а с другой - предложить способ нахождения ОИ такого вида для каждого уравнения из этого множества. Тем самым, доказанная выше теорема “закрывает” проблему алгоритма Кояловича.

В качестве примера приведем уравнения А2 и их частные решения, входящие в формулу ОИ (3.7), которые соответствуют значениям n=3; 4; 6 (для n=6 укажем частный случай). Результаты для n=2 были приведены ранее в теореме.

А. n=3 : $$R(x) = -\tfrac{2}{9}x + A_1 + B_1 x^{-1/2} , \qquad (3.25)$$

$$\alpha_j = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}\varepsilon_j x^{1/2} + \frac{3B_1}{\varepsilon_j} ,$$

где ε_j - корни уравнения $\varepsilon^3 - \frac{9}{2}A_1\varepsilon - \frac{9}{2}B_1 = 0 \quad (j = 1,2,3)$,

A_1, B_1 - произвольные константы.

B. n=4 : $$R(x) = -\tfrac{3}{16}x + A_2 x^{-1/3} + B_2 x^{-5/3}, \tag{3.26}$$

$$\alpha_{1,2} = \tfrac{3}{4}x \pm \sqrt{3A_2 + \tfrac{3}{2}\sqrt{-3B_2}\,x^{1/3} + \sqrt{-3B_2}\,x^{-1/3}},$$

$$\alpha_{3,4} = \tfrac{3}{4}x \pm \sqrt{3A_2 - \tfrac{3}{2}\sqrt{-3B_2}\,x^{1/3} - \sqrt{-3B_2}\,x^{-1/3}},$$

A_2, B_2 - произвольные константы.

C. n=6 : $$R(x) = -\tfrac{5}{36}x + A_3 x^{-3/5} + B_3 x^{-7/5}, \tag{3.27}$$

A_3, B_3 - произвольные константы.

Случай n=6 является частным: уравнение Эйлера (3.25) (n=3) приводится к уравнению (3.27) простым преобразованием [24], “удваивающим“ n.

Замечание 3.3. Каждое из уравнений (3.25), (3.26), (3.27) линеаризуется повышением порядка до соответствующего линейного уравнения с постоянными коэффициентами. При этом для n=3 имеем линейное уравнение 3-го порядка, характеристическое уравнение которого является кубическим, для n=4 - линейное уравнение 4-го порядка, а для n=6 характеристическое уравнение соответствующего линейного уравнения будет бикубическим, что дает частный случай C.

Выясним свойства частных решений, входящих в формулу ОИ (3.7). Очевидно, что они удовлетворяют определению 3.2, и, следовательно, образуют ПФСР 1-го рода. Учитывая замечание 3.3, легко показать, что частные решения уравнений (3.25), (3.26), (3.27) могут быть также получены из ФСР соответствующих линейных уравнений, при этом формулы общего решения этих уравнений будут иметь параметрический вид. Это означает, что указанные уравнения обладают ПФСР как 1-го, так и 2-го рода.

Поиск конкретных уравнений A2, допускающих ОИ (3.7), и их решений для произвольного значения n выходит за рамки данного исследования, поскольку это является алгебраической задачей и требует применения теории Галуа.

Заметим, что частные решения уравнений (3.25), (3.26), (3.27) можно использовать для построения ДМП согласно теореме 1.3 (глава 1). Тем самым, становится очевидно, что всякий новый результат, полученный для симметрий или разрешимости уравнений A2, влечет появление большого числа индуцированных новых симметрий и других интегрируемых уравнений A2. Это показывает, что теоретические (исследование симметрий) и прикладные (поиск новых разрешимых случаев) аспекты изучения уравнений A2 неразрывно связаны между собой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные в настоящей работе, следует рассматривать как единый комплекс, основанный на тесной взаимосвязи симметрий уравнений A2 и их решений.

Хотя, как указывалось во введении, разрешимость не является самоцелью, наличие этого свойства у уравнений A2 и представление их решений в замкнутом виде через известные функции настолько важно для построения и изучения симметрий этих уравнений (как дискретных, так и непрерывных), что нахождение общих решений уравнений A2, об интегрируемости которых ранее не было известно, может иметь принципиальное значение. С другой стороны, определение этого комплекса само по себе позволяет на основе симметрий находить новые разрешимые случаи. Так появление еще хотя бы одного нового интегрируемого уравнения A2 дает нам новые симметрии согласно результатам главы 1 и новые орбиты и разрешимые случаи согласно главе 2 .

Применение методов ДГА и аппарата общей и дифференциальной алгебры позволило провести разностороннее симметрийное исследование уравнений A2 , что, в частности, дало возможность полностью решить классическую задачу Кояловича. В тоже время, полученные результаты могут быть использованы для изучения симметрий других нелинейных ОДУ 1-го порядка (например, уравнений Абеля 1-го рода, которые так же как и уравнение A2 представляют значительный интерес), а также, в связи с выводами третьей главы, послужить предметом исследования для других областей математики. Кроме того, как симметрии, так и большое число разрешимых случаев уравнений A2, известных в настоящее время, играют исключительную роль в разнообразных приложениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Харьков, ОНТИ, 1939. - 719 с.
2. Алексеева Т. А. К проблеме фундаментальных решений уравнений Абеля 2-го рода // Тезисы докл. семинара по теории функций. - Сыктывкар, 1993. - С. 3.
3. Алексеева Т. А., Зайцев В. Ф., Швец Т. Б. О дискретных симметриях уравнения Абеля 2-го рода // Сборник “Прикладная механика и математика”. - М.: МФТИ, 1992 . - С. 4-11.
4. Богатушин И. Я., Зайцев В. Ф. Об одной форме общего интеграла нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Сборник “Дифференциальные уравнения и прикладные задачи”. - Тула: ТПИ, 1989. - С. 13-15.
5. Горбузов В. Н., Самодуров А. А. Уравнения Риккати и Абеля. - Гродно: ГрГУ, 1986. - 101 с.
6. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. - М.: Мир, 1971. - 247 с.
7. Ермаков В. П. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, имеющие интегрирующий множитель факториальной формы. - Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 8, 1904. - С. 113-122.
8. Ермаков В. П. Замена переменных, как способ для разыскания интегрирующего множителя дифференциального уравнения и как средство для понижения порядка системы дифференциальных уравнений. - Киев: Киевск. Унив., 1880-1881.
9. Ермаков В. П. Преобразование дифференциальных уравнений 1-го порядка к новым переменным. - Киев: Киевск. Унив. Изв., 1881.
10. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений: изд. 3-е, переработанное и дополненное. - Минск : Наука и техника, 1979. - 744 с.
11. Зайцев В. Ф. Групповой анализ и интегрирование уравнения Абеля второго рода // Сборник “Управление динамическими системами”. - Л.: ЛГУ. ВИНИТИ № 5942-83 Деп. 3.11.83. - С. 21-25.

12. Зайцев В. Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений / Дифференциальные уравнения, 1989, т. 25, № 3. - С. 379-387 .

13. Зайцев В. Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений. - Л.: ЛГПИ, 1989. - 80 с.

14. Зайцев В. Ф. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч. 1. - Л.: ЛГУ. ВИНИТИ № 5739-82 Деп. 22.11.82. - 120 с.

15. Зайцев В. Ф. К вопросу о конечных группах преобразований нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Дифференциальные уравнения, сборник трудов матем. кафедр пединститутов РСФСР, вып. 7. - Рязань, 1976. - С. 57-62 .

16. Зайцев В. Ф. К определению фундаментальной системы решений нелинейных уравнений // Тезисы докл. семинара по теории функций. - Сыктывкар, 1993. - С. 17.

17. Зайцев В. Ф. О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений / ДАН СССР, 1988, т. 299, № 3. - С. 542-545 .

18. Зайцев В. Ф. О фундаментальных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Сборник “Прикладная механика и математика”. - М.: МФТИ, 1992 . - С. 64-71.

19. Зайцев В. Ф. Об интегрировании уравнений Абеля второго рода // Сборник “Управление в динамических системах”, вып. 2. - Л.: ЛГУ. ВИНИТИ № 2916-81 Деп. 18.06.81. - С. 110-118 .

20. Зайцев В. Ф. Построение точной модели, обладающей некоторой точечной симметрией / Математическое моделирование, 1995, т. 7, № 5. - С. 12-14.

21. Зайцев В. Ф., А. Перес Лопес, Хакимова З. Н. и др. Современный групповой анализ: методы и приложения. Дискретно-групповой анализ, препринт № 107. - Л.: ЛИИАН, 1989. - 58 с.

22. Зайцев В. Ф., Кормилицына Т. В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч. 2. - Л.: ЛГПИ. ВИНИТИ № 3720-85 Деп. 29.05.85. - 150 с.

23. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Дискретно-групповой метод интегрирования уравнений нелинейной механики, препринт № 339. - М.: ИПМ АН СССР, 1988. - 44 с.

24. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. - М.: Наука, 1993. - 464 с.
25. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: точные решения. - М.: Физматлит, 1995. - 560 с.
26. Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Методы и алгоритмы, препринт № 84. - Л.: ЛИИАН, 1988. - 66 с.
27. Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - Л.: ЛИИАН, 1991. - 240 с.
28. Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Конечные системы полиномиальных функций, замкнутые на некотором классе преобразований обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера / Методы и средства информационной технологии в науке и производстве. - Л.: Наука, 1992 . - С. 67-73.
29. Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В., Хакимова З. Н. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Точные решения уравнений, препринт № 105. - Л.: ЛИИАН, 1989. - 61 с.
30. Зайцев В. Ф., Хакимова З. Н. О дискретно-групповом анализе уравнения $y'' = A_1 x^{n_1} y^{m_1} y'^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2} y'^{l_2}$. - Л.: ЛГПИ. ВИНИТИ № 9030-В86 Деп. 30.12.86. - 31 с.
31. Ибрагимов Н. Х. Азбука группового анализа. - М.: Знание, 1989. - 47 с.
32. Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / УМН, 1992, т. 47, вып. 4 (286). - С. 83-144.
33. Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Знание, 1991. - 48 с.
34. Имшенецкий В. Г. Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядка. - М.: Изд. Моск. мат. общества, 1916. - 412 с.
35. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. Под ред. Н. Х. Розова: Изд. 5-е. - М.: Наука, 1976. - 576 с.

36. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. - М.: ИЛ, 1959. - 85 с.

37. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. - М.: Наука, 1980. - 240 с.

38. Коркин А. Н. Изыскания о множителях дифференциальнных уравнений 1-го порядка / Математ. сборник. (Издание московского матем. общества), т. 24, вып. 2, 3, 1903-1904. - С. 194-416.

39. Коялович Б. М. Исследования о дифференциальном уравнении $ydy - ydx = Rdx$. - Спб: Типогр. Академии Наук, 1894. - 261 с.

40. Коялович Б. М. К вопросу об интегрировании дифференциального уравнения $ydy - ydx = Rdx$ // Сборник памяти акад. Граве, М.-Л.: ГИИТЛ, !940. - С. 79-87.

41. Куренский М. К. Дифференциальные уравнения, кн. 1. - Л.: изд. Арт. Акад. РККА, 1933. - 315 с.

42. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. - М.: Наука, 1973. - 400 с.

43. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. - М.: Наука, 1974. - 160 с.

44. Летников А. Ueber die Bedingungen der Integrabilitdt einiger Differentialgleichungen. - Dresden, 1867. - s. 11-18.

45. Максимович В. П. Разыскание общих дифференциальных уравнений первого порядка, интегрирующихся в конечном виде, и доказательство невозможности такого интегрирования для общего дифференциального уравнения 2-го порядка. - Казань, 1885.

46. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: Изд. 3-е. - М.: Высшая школа, 1967. - 564 с.

47. Миндинг Ф. Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений 1-го порядка с двумя переменными. - Спб, 1862.

48. Мордухай-Болтовский Д. Д. Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений 1-го порядка, ст. 1, 2. - Харьков, 1907, 1909.

49. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

50. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. - М.: Мир, 1989. - 640 с.

51. Полянин А. Д. Уравнения Абеля и связанные с ними уравнения нелинейной механики, интегрируемые в квадратурах, препринт № 271. - М.: ИПМ АН СССР, 1986. - 68 с.

52. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. - М.: Гостехиздат, 1954.

53. Савелов А. А. Плоские кривые. - М.: Физматлит, 1960. - 296 с.

54. Синцов Д. М. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. - Харьков, 1913. - 388 с.

55. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1953. - 8 с.

56. Сушкевич А. К. Теория обобщенных групп. - Харьков-Киев: ОНТИ, 1937. - 176 с.

57. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Пер. с латинского С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского, т. 1. - М.: Гостехиздат, 1956. - 415 с.

58. Abel N. H. Sur l’equations differentielle $(y+s)dy+\left(p+qy+ry^2\right)dx=0$. - Oeuvres completes, t. 2, 1881. - P. 26-35.

59. Appel M. P. Sur les invariants de quelques equations differentielles // Jorn. de Math. - 1889, № 5(4). - P. 361-423.

60. Boutroux P. Annals of Math. (2), 22 (1920-1921). - P. 1-10.

61. Darboux G. Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre. - Bulletin Darboux, t. 2, 1878.

62. Darboux G. Sur les equations differentialle du premier ordre et du premier degre. - Comptes Rendus, t. LXXXVI, 1878. - P. 533-536.

63. Euler L. Institutiones Calculi Integralis (изд. III, 1824-1827). Tomus I. - P. 269.

64. Haentschel E. Journel f. Math. 112 (1893). - P. 148-155.

65. Halphen M. Sur l′integration d′une equation differentielle / Comptes Rendus, 1879. - t. 88, № 11, p. 562-565.

66. Hill J. M. Abel’s differential equation / Math. Scientist. - 1982, vol. 7, № 2. - P. 115-126.

67. Lie S. Vorlesungen ьber continuierliche Gruppen. - Leiptzig: Teubner, 1893. - 805 с.

68. Liouville R. Acta Math. 27 (1903), p. 55-78.

69. Liouville R. Sur certaines equations differentielles du premier ordre. - C.R., t. CV, p. 476-479.

70. Painleve. Memoire sur les equations differentielles du 1-er ordre. - Annales de l'Ec. Norm., t. VIII, IX, 1891, 1892 .

71. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Discrete group methods for integrating equations of nonlinear mechanics. - Boca Raton, CRC Press, 1994. - 312 p.

72. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. - Boca Raton, CRC Press, 1995. - 721 p.

73. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: изд. 2-е, стереотипное. - М.: Наука, 1969. - 424 с.