

Министерство образования и науки РФ  
Московский физико-технический институт (государственный университет)

*На правах рукописи*

*Челноков Федор Борисович*

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДЕФОРМАЦИОННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
В СРЕДАХ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ**

**Специальность 05.13.18**

**Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**ДИССЕРТАЦИЯ**

**на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель:  
*д. ф.-м. н., проф. Петров И. Б.*

Москва – 2005

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	<b>6</b>
0.1. Способы дискретизации уравнений механики . . . . .	7
0.2. Способы построения сетки в области интегрирования . . . . .	10
0.2.1. Квадратная регулярная сетка . . . . .	10
0.2.2. Регулярная сетка из четырехугольников, сопряженная с границами области интегрирования . . . . .	12
0.2.3. Нерегулярная треугольная сетка . . . . .	14
0.2.4. Изменение сетки при деформировании тел . . . . .	14
<b>Глава 1. Численное решение уравнений упругости</b> . . . . .	<b>18</b>
1.1. Математическая модель . . . . .	19
1.2. Выбор системы координат . . . . .	20
1.3. Обобщение записи дифференциальных уравнений . . . . .	22
1.4. Спектральное исследование системы . . . . .	23
1.4.1. Прямая задача . . . . .	24
1.4.2. Сопряженная задача . . . . .	26
1.4.3. Нормировка собственных векторов . . . . .	29
1.4.4. Нулевые собственные значения . . . . .	29
1.4.5. Матрицы $\Lambda$ , $\Omega$ , $\Omega^{-1}$ . . . . .	30
1.5. Покоординатное расщепление . . . . .	31
1.6. Разностные схемы . . . . .	35
1.7. Сеточно-характеристические схемы . . . . .	39
1.8. Расчет на границе области интегрирования . . . . .	42
1.8.1. Заданная внешняя сила . . . . .	44

1.8.2. Заданная скорость границы . . . . .	47
1.8.3. Смешанные условия . . . . .	48
1.8.4. Условия поглощения и симметрии . . . . .	49
1.8.5. Решение на границе при наличии правой части . . . . .	52
1.9. Контакт между двумя телами . . . . .	54
1.9.1. Полное сцепление . . . . .	54
1.9.2. Свободное скольжение . . . . .	55
1.10. Интегрирование уравнений акустики . . . . .	56
1.11. Двумерные уравнения упругости . . . . .	57
1.12. Эйлерова сетка и границы из маркеров . . . . .	58
<b>Глава 2. Построение нерегулярной треугольной сетки . . . . .</b>	<b>61</b>
2.1. Представление триангуляции в программе . . . . .	63
2.1.1. Наиболее компактный формат . . . . .	63
2.1.2. Расширенные структуры данных для ускорения поиска . . . . .	65
2.2. Триангуляция невыпуклого многоугольника с полостями . . . . .	68
2.3. Оптимальная триангуляция Делоне . . . . .	74
2.4. Поддержание заданной плотности сетки . . . . .	77
2.4.1. Сокращение граничных вершин . . . . .	79
2.5. Обоснование корректности алгоритма . . . . .	81
2.6. Размеры внутренних треугольников сетки . . . . .	85
2.7. Допустимые размеры длины граничного ребра . . . . .	89
2.7.1. Минимальный угол границы тела . . . . .	91
2.7.2. Обработка треугольников с двумя граничными ребрами . . . . .	92
2.8. Трудоемкость поиска треугольника . . . . .	95
2.9. Момент вырождения сетки при движении вершин с постоянной скоростью . . . . .	97
2.10. Примеры работы алгоритмов . . . . .	99
<b>Глава 3. Контакт между телами в динамических задачах . . . . .</b>	<b>103</b>

3.1. Поиск сегментов контактирующих границ . . . . .	104
3.1.1. Структуры многомерного поиска . . . . .	105
3.1.2. Триангуляция пространства между телами . . . . .	106
3.2. Проверка сблизившихся узлов . . . . .	109
3.3. Несовпадение узлов в контактирующих телах . . . . .	110
3.4. Примеры расчетов с контактом нескольких тел . . . . .	113
<b>Глава 4. Интерполяция в треугольнике . . . . .</b>	<b>121</b>
4.1. Реконструкция полинома заданного порядка . . . . .	122
4.2. Кусочно-линейная интерполяция . . . . .	127
4.3. Градиент интерполяционного полинома . . . . .	130
4.4. Вычисление интеграла полинома в треугольнике . . . . .	132
4.5. Монотонная квадратичная реконструкция . . . . .	134
4.6. Борьба с ростом вариации при интерполяции . . . . .	138
4.7. Сравнение численных методов, использующих регулярную и нерегулярную сетки . . . . .	140
4.7.1. Выполнение законов сохранения импульса и энергии . . . . .	147
<b>Глава 5. Численный метод для бесструктурных сеток . . . . .</b>	<b>149</b>
5.1. Уравнение переноса . . . . .	149
5.2. Гиперболическая система уравнений . . . . .	157
5.3. Сравнение одномерных схем на решении уравнения переноса . . . . .	160
<b>Глава 6. Распространение упругих волн в массивных породах 167</b>	
6.1. Введение . . . . .	167
6.2. Начальное состояние среды . . . . .	171
6.3. Граничные условия . . . . .	173
6.3.1. Поверхности трещин . . . . .	174
6.4. Примененная неравномерная треугольная сетка . . . . .	176
6.5. Исследование энергии в области интегрирования . . . . .	177
6.6. Равномерность распределения полостей . . . . .	178

6.7. Оценка вариации плотности тела со случайным распределением круговых полостей . . . . .	181
6.7.1. Полости одного размера . . . . .	182
6.7.2. Случайное распределение размеров полостей . . . . .	183
6.8. Детали численных экспериментов . . . . .	185
6.9. Анализ результатов расчетов . . . . .	187
<b>Глава 7. Распространение волн в перфорированных средах</b>	<b>198</b>
7.1. Двумерная постановка задачи . . . . .	199
7.2. Трехмерная постановка задачи . . . . .	201
<b>Глава 8. Высокоскоростной удар по многослойной преграде</b>	<b>209</b>
8.1. Постановка задачи . . . . .	211
8.2. Изменение скорости и положения шарика со временем . . . . .	214
8.3. Подвижная расчетная сетка . . . . .	215
8.3.1. Перестройка сетки как задача оптимизации . . . . .	219
8.4. Учет разрушения материалов . . . . .	222
8.4.1. Результаты расчетов . . . . .	226
8.4.2. Увеличение рассчитываемого периода соударения за счет фрагментации . . . . .	228
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>240</b>
<b>Список использованных источников</b> . . . . .	<b>243</b>

# Введение

В механике деформируемого твердого тела к настоящему времени разработано большое количество моделей [1–5], описывающих поведение сплошных сред, фазовые переходы в них, критерии разрушения и фрагментации тел под действием интенсивной нагрузки, а также континуальные модели развития разрушений.

Часть этих моделей хорошо исследована и не ставится под сомнение, однако вычислить аналитическим образом вытекающие из них следствия можно лишь для бесконечно-малых воздействий и очень простых по форме тел, желательно обладающих различного рода симметриями. Исследование поведения реальных тел со сложной геометрией, подвергающихся значительным внешним воздействиям, приводящим к конечным деформациям, на основании этих моделей выполнить невозможно без привлечения компьютера.

Другая часть моделей призвана описать наблюдаемые явления, такие как формирование сложного вида разрушений возле места сильного удара. Однако ответить на вопрос, действительно ли модель адекватно описывает данное явление невозможно, без проведения ряда компьютерных моделирований, называемых численными экспериментами. К задачам численного исследования стоит отнести и определение зачастую многочисленных параметров той или иной модели, которые практически невозможно измерить напрямую.

Успешные попытки выполнения численного моделирования предпринимаются уже почти целый век, и за этот период достигнут существенный

прогресс в способах построения эффективных программ численного расчета. Однако часть трудностей, по-видимому, носит фундаментальный характер, и их преодоление актуально и сейчас. К ним можно отнести численное исследование многомерных динамических задач, включающее в качестве подзадачи необходимость описания мгновенного состояния тел (введение надлежащей сетки, методы интерполяции и т.д.), подвергающихся значительным деформациям и фрагментации на отдельные части. Не менее важным вопросом остается достижение высокой точности решения за приемлемое время на имеющемся компьютерном оборудовании, а также борьба с нефизичными эффектами, которые не следуют из сформулированной физической модели, а возникают в результате приближенного характера замены законов механики в интегральной или дифференциальной формах конечными соотношениями.

Краткие обзоры-классификации используемых численных методов и видов сеток можно найти в работах [5, 6].

## 0.1. Способы дискретизации уравнений механики

К настоящему времени разработаны несколько принципиальных методов численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Большинство этих методов являются сеточными.

Существует множество толкований термина сетка. Здесь мы будем придерживаться следующего определения. *Сеткой* (mesh) в двумерном пространстве называют планарный граф, вершины которого соответствуют выбранным точкам (узлам сетки). Ребра графа составляют сеточные линии, а области, ограниченные ребрами, также носят названия ячеек сетки. Численный метод описывает состояние среды, ассоциируя данные с некоторыми объектами сетки (узлами, ребрами, ячейками).

Для сеточных численных методов существует понятие *шаблона* (stencil)

— множества узлов сетки (или сеток для нескольких моментов времени для динамических уравнений), через значения в которых аппроксимируются уравнения в данной окрестности.

Метод *конечных разностей* (finite-difference method) основывается на замене производных в поставленных дифференциальных уравнениях на конечные, недифференциальные комбинации (в простейшем случае — разности) значений, определенных в точках сетки. Приближенное решение состоит из значений  $U_{ij}^n$  (в двумерном случае), представляющих поточечное приближение к решению в узлах сетки  $(x_i, y_j)$  во время  $t_n$ :

$$U_{ij}^n \approx u(x_i, y_j, t_n).$$

Метод *конечных объемов* (finite-volume method), с другой стороны, основывается на приближении средних значений  $u$  в ячейках сетки

$$U_{ij}^n \approx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, y, t_n) dx dy.$$

Для дифференциальных уравнений, которые возникают из законов сохранения и потоков сохраняющейся величины, это очень естественный подход. Дифференциальные уравнения часто возникают из более фундаментальной интегральной формы, констатирующей, что интеграл от  $u$  по конечному объему меняется со временем только вследствие потоков через границу этого объема. Если объем совпадает с ячейкой сетки, то это приводит к формуле обновления среднего по ячейке исходя из численных значений потока через границы ячейки. В этом заключается преимущество над конечно-разностной формулировкой, поскольку численный метод получается консервативным, точно выполняя законы сохранения.

Программы, реализующие как метод конечных разностей, так и метод конечных объемов, могут хранить рассчитанные параметры  $U_{ij}^n$  в виде прямоугольной таблицы. В первом случае в таблицу попадут значения в некоторых точках тела, во втором — усредненные значения по ячейкам.



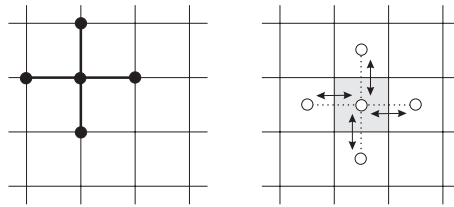


Рис. 1. Используемые значения в методах конечных разностей (слева) и конечных объемов (справа), стрелками показаны потоки между ячейками.

Но алгоритмы численных методов, записанные как действия над элементами таблицы, в обоих случаях будут очень похожи (рис. 1) и могут даже совпадать для линейных уравнений.

Метод *конечных элементов* (finite element method), примененный, например, в [7–9], относится к вариационным методам [10]. Решение в нем ищется среди конечного множества функций, определенных согласованно с текущей сеткой. Метод конечных элементов наиболее часто используется в случае нерегулярности сетки из-за простоты его обобщения на этот случай.

Методы конечных объемов и конечных элементов высоких порядков аппроксимации с упрощенной, аналитической реконструкцией для неструктурированных сеток получили названия методов *спектральных объемов* (spectral volume method) [11] и *спектральных элементов* (spectral element method) [12] соответственно. Некоторые соображения, лежащие в их основе, были заимствованы в данной работе для построения сеточно-характеристического метода второго порядка на неструктурированных сетках.

Методы частиц [13] и *гладких частиц* (smoothed particle hydrodynamics) [14–16], или метод свободных точек [17] применяются при моделировании значительных деформаций тел и разрушений в них, приводящих к отколу множества обломков.

*Сеточно-характеристический метод* (grid-characteristic method) [18–34], используемый в данной работе, ближе всего к конечно-разностным методам в том смысле, что в точках сетки хранятся приближенные зна-

чения численного решения в этих точках, и в качестве основы используется дифференциальная форма записи уравнений механики. Однако вместо производных, входящих в исходные уравнения, аппроксимации подвергаются производные вдоль характеристических направлений, что обеспечивает большую точность. Также отличительной особенностью сеточно-характеристического метода является удобство вычисления на границе области интегрирования с привлечением ровно того же числа граничных условий, которые необходимы для корректного замыкания системы дифференциальных уравнений.

## 0.2. Способы построения сетки в области интегрирования

Методы введения сеток для расчета деформируемых тел классифицируются по трем основным признакам:

- наличие связи между положением сеточных линий и границ исследуемых тел,
- способностью меняться по мере деформирования моделируемых тел и
- наличие структуры (регулярности) в сетке.

Рассмотрим далее возможные способы введения сетки на примере плоского тела простейшей треугольной формы.

### 0.2.1. Квадратная регулярная сетка

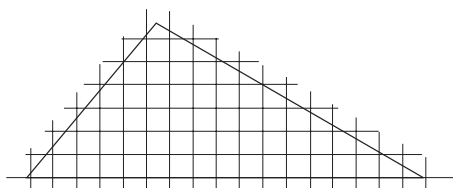


Рис. 2. Квадратная регулярная сетка в окрестности исследуемого объекта.

Квадратная регулярная сетка (иногда употребляется термин декартова решетка (cartesian grid) — наиболее простой вид сетки, которая строится независимо от положения границ моделируемых тел (рис. 2). Достоинством этого подхода является исключительная простота вычисления положения точек сетки, в результате чего можно даже не хранить их координаты в программе, а вычислять каждый раз налету. Кроме того, одинаковая квадратная форма всех ячеек и равное расстояние между точками сетки значительно упрощает запись численных методов.

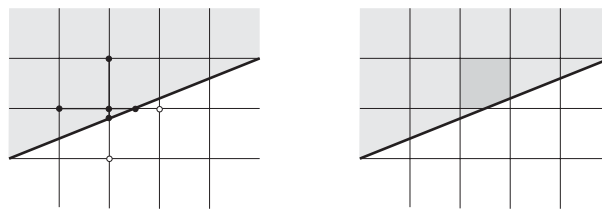


Рис. 3. Декартова решетка вблизи границы области интегрирования. Слева отмечен несимметричный шаблон конечно-разностных схем, справа — ячейка неправильной формы конечно-объемных методов.

К недостаткам решетки следует отнести сложность построения численных методов вблизи границ объектов. Здесь обычно избирается один из двух способов: использование точек или ячеек, не лежащих целиком внутри тела, либо введение дополнительных точек сетки в местах пересечения линий решетки с границами (рис. 3). В первом варианте приходится пользоваться каким-либо методом экстраполяции для определения значений в точках, лежащих за пределами рассчитываемого тела [6], что нелегко сопрячь с поставленными граничными условиями. Во втором варианте в конечно-разностном подходе расстояния до точек сетки вблизи границы могут сокращаться до бесконечно малых величин, а в конечно-объемном подходе также образовываться ячейки сложной формы. Поскольку размеры минимальной ячейки в задачах динамики диктуют ограничение на допустимый шаг интегрирования, то эта особенность становится особенно неприятной. В любом случае построение алгоритмов для расчета возле границы не является столь же простым делом, как для внутренних точек,

а также приводит к ухудшению качества решения в сравнении с другими подходами — утрачивается основное достоинство квадратных регулярных сеток. Поэтому такой метод применяют в основном, когда границы области интегрирования совпадают с осями выбранной декартовой системы координат.

### 0.2.2. Регулярная сетка из четырехугольников, сопряженная с границами области интегрирования

Под регулярной сеткой (grid) обычно понимается такая сетка, через каждую точку которой проходит ровно две сеточные линии (у внутренних узлов — четыре примыкающих ребра), и существует взаимнооднозначное непрерывное отображение точек регулярной решетки на точки декартовой решетки.

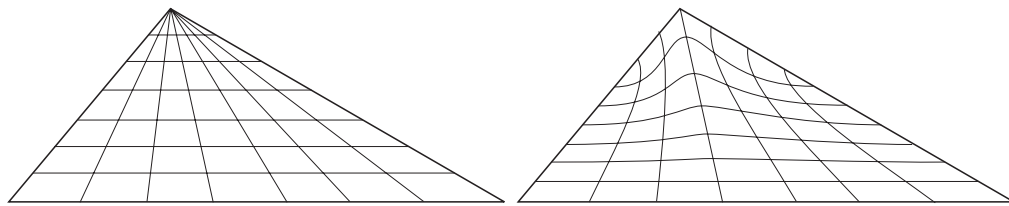


Рис. 4. Возможные способы построения регулярной сетки в треугольной области.

Существуют алгоритмы [35, 36], позволяющие так разместить точки регулярной сетки (body-fitted grid), чтобы они не выходили за пределы тела, а образованные ячейки между линиями сетки были максимально близки по размерам друг к другу и похожи по форме на квадрат. При этом сетка и шаблоны численных методов не отличаются принципиально внутри и на границе области интегрирования. На рис. 4 представлены возможные виды регулярной сетки для области треугольной формы. Предлагаемые алгоритмы обычно решают задачу оптимизации итерационными методами, последовательно приближаясь к оптимальному значению. Как следствие, полученная сетка существенно зависит от начального приближения, а при плохом выборе не всегда обеспечивается сходимость алгоритма

и отыскание глобального экстремума. Сложность построения регулярной сетки в телах сложной геометрии заставляет некоторых исследователей [6] возвращаться к декартовой решетке с ее упомянутыми недостатками.

Даже для тела такой простой треугольной формы не могут одновременно гарантироваться следующие важные для качества решения параметры:

- отсутствие острых углов между пересекающимися сеточными линиями,
- малая кривизна сеточных линий,
- примерно равные площади ячеек, расстояния между узлами вдоль сеточных линий и плотность узлов сетки во всех ее частях.

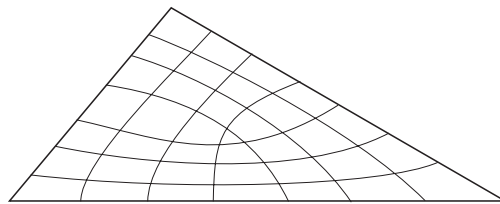


Рис. 5. Сетка, части которой являются регулярными.

На рис. 5 представлена еще одна сетка, через каждую точку которой проходит ровно две сеточные линии, однако взаимнооднозначное отображение на решетку отсутствует, и, следовательно, сетка не может считаться регулярной. Такого рода сетки возникают при разбиении исходной области на ряд четырехугольных частей, в каждой из которых сетки строятся независимо, после чего они «сшиваются». Если конечно-разностному численному методу для расчета узла важно лишь наличие четырех расположенных симметрично соседних узлов, то такого рода сетка может быть использована вместо регулярной. Однако, например, для методов, в которых уравнения «расщепляются» вдоль сеточных линий, эта сетка не подойдет.

### 0.2.3. Нерегулярная треугольная сетка

На форму и расположение ячеек нерегулярной сетки налагается наименьшее количество ограничений. Из-за этого численные методы должны адаптивно подбирать шаблон в окрестности каждого узла. Как правило, это воспринимается как существенная сложность, особенно для методов высокого порядка точности, шаблон которых содержит большое количество узлов. Однако компенсируется этот недостаток тем, что в нерегулярной решетке можно обеспечить заданные рамки для размеров всех ячеек, не зависимо от сложности формы области интегрирования. Кроме того, построение и уточнение нерегулярной сетки заметно быстрее вариационных методов оптимизации регулярной сетки.

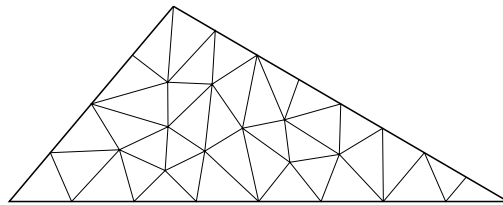


Рис. 6. Нерегулярная сетка в треугольной области.

Чаще всего используются нерегулярные сетки (рис. 6) с простейшей формой ячейки — треугольником, хотя иногда применяют четырехугольные и смешанные (треугольно-четырёхугольные) нерегулярные сетки. Ячейки более сложной формы используются намного реже.

### 0.2.4. Изменение сетки при деформировании тел

Для решения эволюционных задач выбираются несколько промежуточных моментов времени, называемых временными слоями, между исходным состоянием и полным временем моделирования. Решение последовательно отыскивается на каждом слое, причем расчетная сетка может также меняться. В совокупности сетки из всех слоев образуют единую сетку в пространстве координат-времени. Численные методы также классифицируются по виду движения узлов между отдельными сетками при переходе

к следующему слою.

В механике сплошной среды принято записывать динамические уравнения в одном из двух видов переменных [5]: эйлеровых — фиксированных в пространстве и лагранжевых — движущихся вместе с точками тела. Аналогично выделяют и два основных типа сеток, но кроме них используют и другие [19]. Рассмотрим далее каждый из них отдельно.

- *Эйлерова сетка* строится однократно и в дальнейшем не изменяется. Это может быть наилучшим решением для тел с фиксированными границами. Для решения задач с конечными деформациями границ выбирают наиболее простую форму эйлеровой сетки — декартову решетку, потому что, независимо от формы ячеек, неподвижные узлы и ребра сетки не будут совпадать в каждый момент времени с движущимися границами, и неизбежны сложности, описанные для декартовых решеток.
- Точки *лагранжевой сетки* смещаются вместе с точками тела, поэтому границы тела всегда совпадают с сеточными линиями. Однако при наличии сдвиговых деформаций в теле, ячейки лагранжевой сетки могут постепенно вырождаться и пересекать друг друга. Численные методы при вырождении сетки обнаруживают неустойчивость и счет приходится прекращать. Поэтому неизбежен подход, называемый *лагранжева сетка с перестройкой*, в котором, как только детектируется приближение сетки к вырожденному состоянию, производится построение новой сетки, а значения в новых узлах интерполируются из прежних значений. Процедура интерполяции сама по себе приводит к потере точности решения, поэтому желательно перестраивать сетку как можно реже. В противном случае имеет смысл обратиться к подвижной сетке. Задачи о соударении в лагранжевых переменных рассматривались в работах [37, 38].

- *Подвижная сетка* является обобщением лагранжевой, ее точки движутся от слоя к слою с ненулевыми скоростями и смещаются как относительно неподвижной системы координат, так и относительно точек тела. Их движение может быть подобрано таким образом, чтобы исключить вырождение сетки со временем. Однако использование подвижной сетки требует вносить изменения в решаемые уравнения для учета конвективных членов.
- По-координатная комбинация разных типов движения сетки рассматривается в статье [19]. Например, если правая и левая границы области интегрирования неподвижны, то  $x$ -координата узлов может быть эйлеровой и не храниться в памяти программы, а  $y$ -координата — лагранжевой.
- Совместная эйлерово-лагранжева сетка представлена в работе [39]. Подобная сетка имеет неподвижные точки внутри тела и движущиеся вместе с поверхностью тела точки на ее границе. Основная сложность работы с такими сетками — обеспечить сопряжение двух типов узлов в приграничной полосе. В другой работе [40] исследование задач о соударении в эйлеровых переменных приводило к необходимости использовать метода маркеров.
- Иной вариант совмещения эйлерового и лагранжевого подхода предлагается в методе «частиц в ячейке» Ф. Харлоу [13,17]. Метод использует две сетки частиц: лагранжеву сетку для описания частиц, представляющих элементы жидкости, движущихся по неподвижной эйлеровой сетке. Другой пример совмещения неподвижной сетки с подвижными частицами дает работа [41].
- Неструктурированная лагранжева сетка с перестройкой (изменением «соседства») используется в методике «Медуза», также изложенной в [17]. Область интегрирования разбивается на построенные вокруг



заданного набора точек многоугольные ячейки («глобулы»), во многом схожие с ячейками диаграммы Вороного [42]. Заметную трудность в этой методике представляет расчет граничных ячеек, поскольку их стороны не совпадают с контуром области интегрирования.

- В данной работе предлагается численный метод, основанный на нерегулярной лагранжевой сетке с локальной перестройкой. Для достижения порядков аппроксимации выше первого в этом методе рассчитываются узлы, находящиеся не только в вершинах треугольников сетки, но также и дополнительные узлы, например, лежащие в центре ребер. Поэтому первые узлы являются лагранжевыми, а вторые — подвижными.

# Глава 1

## Численное решение уравнений теории линейной упругости

Численное решение уравнений линейной теории упругости представляет неподдельный интерес для механики деформируемого твердого тела, несмотря на то, что реальные материалы удовлетворяют этим уравнениям лишь при незначительных быстрых нагрузках. Дело в том, что численное исследование сложных реологических моделей (упругопластической, упруговязкопластической и других сред) применением метода расщепления по физическим процессам может быть сведено к некоторой корректировке упругого решения [43].

В настоящей главе рассматриваются сеточно-характеристические схемы решения уравнений теории упругости в случае произвольного выбора базиса в пространстве, который зависит от локальной формы разностной сетки. Представленная явная форма записи схем имеет вычислительные преимущества перед стандартной формулировкой [19]. Особое внимание уделено решению на поверхности области интегрирования при различных типах граничных условий, а также случаю контакта двух упругих сред.

## 1.1. Математическая модель

Сформулируем здесь уравнения, которым согласно [5] подчиняется состояние бесконечно малого объема сплошной линейно-упругой среды. Во-первых, это локальное уравнение движения:

$$\rho \dot{\vec{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T}^T.$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала,  $\vec{v}$  — скорость движения среды в данной точке,  $\nabla$  — градиент по пространственным координатам,  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши.

В силу закона парности касательных напряжений [5]  $\mathbf{T}$  является симметричным тензором. Компоненты свертки градиента с этим тензором задаются равенством

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}^T)_k = (\mathbf{T} \cdot \nabla)_k = (\nabla \cdot \mathbf{T})_k = \sum_i \nabla_i \mathbf{T}_{ki},$$

где  $\nabla_i$  — скалярный дифференциальный оператор. Здесь и далее предполагается, что индексы  $(i, j, k, l, \dots)$  перебирают числа 1,2,3. В записи  $(\mathbf{T} \cdot \nabla)$  необходимо помнить, что дифференциальный оператор действует на  $\mathbf{T}$ , а не на последующие множители.

Введем симметричный тензор малых деформаций

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \nabla),$$

где  $\vec{u}$  — поле перемещений ( $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ ),  $\otimes$  — оператор тензорного произведения:  $(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j$ . В произведении  $(\vec{u} \otimes \nabla)$  дифференцированию также подвергается  $\vec{u}$ , а не последующие множители:

$$(\nabla \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \nabla)_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i.$$

(Ниже по тексту поле перемещений больше не рассматривается, а символ  $\vec{u}$  будет использоваться в другом смысле.)

Линейная упругость материала подразумевает следующую связь напряжений с деформациями (закон Гука):

$$\mathbf{T} = \lambda(\mathbf{e} : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \quad (1.1)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала (существуют взаимоднозначные формулы связи параметров Ляме с одной стороны и модуля Юнга и коэффициента Пуассона с другой),  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, «:» — двойное скалярное произведение<sup>1</sup> (свертка):

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij}.$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно скоростей и напряжений остается только продифференцировать по времени связь напряжений с деформациями.

$$\begin{aligned} \rho \dot{\vec{v}} &= \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \dot{\mathbf{T}} &= \lambda(\nabla \cdot \vec{v})\mathbf{I} + \mu(\nabla \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \nabla). \end{aligned} \quad (1.2)$$

## 1.2. Выбор системы координат

Особенностью численного интегрирования дифференциальных уравнений можно назвать тот факт, что в программной реализации бывает удобно хранить состояние среды (в данном случае это компоненты скорости и напряжения) в некоторой фиксированной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . В то же время производные приближенно вычисляются вдоль направлений  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , выбираемых в зависимости от локальной конфигурации узлов сетки.

При расчете на регулярной кубической сетке такая система координат возникает, если ввести (не обязательно единичные) базисные векторы, исходя из координат шести ближайших к данному узлов  $\vec{r}_{-,i}$ ,  $\vec{r}_{+,i}$ :

$$\vec{\xi}_i = \frac{\vec{r}_{+,i} - \vec{r}_{-,i}}{2}.$$

---

<sup>1</sup>двойная свертка с единичным тензором — это сумма диагональных элементов тензора или его след.

В этом же случае непосредственно вычислимы производные функции  $u$ , значения которой известны в узлах сетки, лишь вдоль направлений  $\xi_i$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_i} \approx \frac{u_{+,i} - u_{-,i}}{2}.$$

Приближенные равенства справедливы с точностью  $O(\|\vec{\xi}_i\|^2)$  в центре отрезка, соединяющего  $\vec{r}_{-,i}$  и  $\vec{r}_{+,i}$ , и с точностью  $O(\|\vec{\xi}_i\|)$  в прочих точках.

Чтобы найти производную  $u$  вдоль других направлений, рассмотрим равенства

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \begin{bmatrix} \vec{\xi}_1 & \vec{\xi}_2 & \vec{\xi}_3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \left( \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1^T \\ \vec{q}_2^T \\ \vec{q}_3^T \end{bmatrix},$$

$$\vec{q}_i \cdot \vec{\xi}_j = \delta_{ij}.$$

Здесь было обозначено

$$\vec{q}_j \equiv \frac{\partial \xi_j}{\partial \vec{x}}.$$

То есть  $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$  является биортогональным базисом по отношению к  $(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)$ :

$$\vec{q}_1 = \frac{[\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3]}{(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)}, \quad \vec{q}_2 = \frac{[\vec{\xi}_3, \vec{\xi}_1]}{(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)}, \quad \vec{q}_3 = \frac{[\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2]}{(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)},$$

здесь в числителе имеет место векторное произведение, а в знаменателе — смешанное.

Для заметного упрощения последующих формул свяжем с каждым из векторов  $\vec{q}_j$  ортонормированный базис  $(\vec{n}_{j,0}, \vec{n}_{j,1}, \vec{n}_{j,2})$ , в котором  $\vec{n}_{j,0}$  сонаправлен с  $\vec{q}_j$ :

$$\vec{n}_{j,0} = \frac{\vec{q}_j}{\|\vec{q}_j\|}, \quad l_j = \|\vec{q}_j\|,$$

а единичные вектора  $\vec{n}_{j,1}, \vec{n}_{j,2}$  выбираются произвольно. Далее мы будем опускать первый индекс  $j$ , а в  $\vec{n}_{j,0}$  — второй индекс 0, если потерю можно восстановить из контекста.

Уравнения (1.2) записаны в форме, независимой от выбора той или иной системы координат. Необходимо лишь специально указать, какие операторы подставлять вместо компонент градиента. В декартовой системе

координат

$$\nabla = \{\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3\} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В ином случае применим правила замены переменных:

$$\nabla_i = \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad \nabla = \{\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3\} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \quad (1.3)$$

### 1.3. Обобщение записи дифференциальных уравнений

В вычислительной математике для анализа системы уравнений и построения разностных схем для нее принято приводить ее запись к канонической форме

$$\dot{\vec{u}} + \sum_j \mathbf{A}_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_j} = 0, \quad (1.4)$$

где в вектор  $\vec{u}$  собираются все переменные системы, в нашем случае (1.2) это

$$\vec{u} = \{\vec{v}, \mathbf{T}\}^T = \{v_1, v_2, v_3, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{22}, t_{23}, t_{33}\}^T.$$

Чтобы получить запись матриц  $\mathbf{A}_j$ , представим оператор градиента (1.3) в виде суммы трех операторов, каждый из которых содержит производные лишь по одному направлению  $\xi_j$ :

$$\nabla = \sum_j \nabla^j, \quad \nabla^j = \frac{\partial \xi_j}{\partial \vec{x}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \vec{q}_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} = l_j \vec{n}_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Подстановка

$$\nabla = \sum_j l_j \vec{n}_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (1.5)$$

в (1.2) приводит к следующей записи действия матриц на произвольный вектор:

$$\mathbf{A}_j \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = -l_j \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} (\vec{n}_j \cdot \mathbf{T}) \\ \lambda (\vec{n}_j \cdot \vec{v}) \mathbf{I} + \mu (\vec{n}_j \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}_j) \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

В запись разностных схем входит как сама матрица  $\mathbf{A}_j$ , так и различные функции от нее. Чтобы иметь возможность в явном виде вычислять

разностные схемы, исключая процедуры, например, обращения матриц и приближенного вычисления ее собственных величин, проводится следующее исследование свойств  $\mathbf{A}_j$ .

Желание получить явную и максимально упрощенную запись разностных схем мотивируется стремлением эффективного использования машинных ресурсов и оптимизацией программы с точки зрения размеров и скорости счета, а также повышением ее точности за счет уменьшения ошибок округления и даже надежности за счет исключения методов, которые могут завершиться остановкой программы, например, обращение вырожденной матрицы.

#### 1.4. Спектральное исследование системы

Целью данного раздела является нахождение всех собственных значений  $c$  и собственных векторов  $\vec{u} = \{\vec{v}, \mathbf{T}\}^T$  матриц  $\mathbf{A}_j$ :

$$\mathbf{A}\vec{u} = c\vec{u} \quad (1.7)$$

(до конца раздела нижний индекс  $j$  опускается). Собственные значения должны иметь размерность скорости, чтобы приведенное выражение было согласованным с точки зрения размерности.

Если предположить, что у матриц  $\mathbf{A}$  есть полный набор собственных значений  $\{c_i\}$  и собственных векторов  $\{\vec{u}_i\}$  (что соответствует действительности, и будет показано ниже), то можно ввести следующие обозначения:

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{c_i\}$$

— диагональная матрица, составленная из собственных значений  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \{\vec{u}_i\}$$

— матрица, столбцами которой являются собственные векторы, следующие в том же порядке, что и собственные значения в  $\mathbf{\Lambda}$ . Поскольку полный набор собственных векторов образует линейно независимый базис, то имеется

полное право обозначить невырожденную матрицу, образованную ими, как обратную от некоторой другой невырожденной матрицы. Условие того, что каждый столбец  $\mathbf{\Omega}^{-1}$  является собственным вектором  $\mathbf{A}$  можно записать как

$$\mathbf{A}\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}.$$

После домножения справа на  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega},$$

и домножения слева на  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}.$$

Из последнего равенства видно, что каждая строка  $\mathbf{\Omega}$  является собственной строкой  $\mathbf{A}$  или, что то же самое, после транспонирования — собственным вектором  $\mathbf{A}^T$ . Найти эти собственные векторы можно из решения сопряженной задачи по отношению к (1.7):

$$\mathbf{A}^T \vec{u} = c\vec{u}. \quad (1.8)$$

Из приведенных выкладок следует, что сопряженная задача будет иметь тот же набор собственных значений, а собственные вектора можно подобрать согласованно:

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Отсюда: размерности элементов  $\mathbf{\Omega}$  — обратные скорости и напряжения, которые после домножения на  $\mathbf{\Omega}^{-1}$  дают безразмерные единицы в  $\mathbf{I}$ .

#### 1.4.1. Прямая задача

Возвращаясь от обобщенной записи (1.7) через подстановку (1.6) к переменным  $\vec{v}$  и  $\mathbf{T}$ , получаем систему определяющих уравнений

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \mathbf{T} &= -l^{-1}c\rho\vec{v}, \\ \lambda(\vec{n} \cdot \vec{v})\mathbf{I} + \mu(\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}) &= -l^{-1}c\mathbf{T}. \end{aligned} \quad (1.9)$$



После подстановки одного уравнения в другое

$$\lambda(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + \mu\vec{n} \cdot (\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}) = l^{-2}c^2\rho\vec{v}$$

и учета тождества

$$\vec{n} \cdot (\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + \vec{v}$$

приходим к

$$(\lambda + \mu)(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} = (l^{-2}c^2\rho - \mu)\vec{v}.$$

Последнее уравнение имеет три качественно различные группы решений.

1. Векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{n}$  коллинеарны, тогда  $c^2 = l^2 \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ .

После введения обозначения (продольная скорость звука в упругом материале)

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.10)$$

получаем пару собственных значений и векторов

$$c = \pm lc_1, \quad \vec{v} = \alpha\vec{n}, \quad \mathbf{T} = \mp \frac{\alpha}{c_1}(\lambda\mathbf{I} + 2\mu\vec{n} \otimes \vec{n}),$$

где  $\alpha$  — произвольный ненулевой множитель с размерностью скорости.

2. Векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{n}$  ортогональны и  $\vec{v} \neq 0$ . Левая часть уравнения обращается в нуль. Тогда оно справедливо только лишь, когда правая часть обращается в нуль также:  $c^2 = \frac{\mu}{\rho}l^2$ .

После введения другого обозначения (поперечная скорость звука)

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.11)$$

можно описать это семейство собственных значений и векторов

$$c = \pm lc_2, \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0, \quad \mathbf{T} = \mp \frac{\mu}{c_2}(\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}).$$

Уравнение  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  имеет два линейно независимых решения, следовательно, всего в данном семействе четыре линейно независимых

собственных вектора  $\{\vec{v}, \mathbf{T}\}$ , но лишь два собственных значения, отличающихся знаком.

3. Собственное значение равно нулю и компоненты собственного вектора, сопоставленные скорости равны нулю. Возвращаясь к (1.9) получаем уравнение на оставшиеся компоненты собственного вектора:

$$c = 0, \quad \vec{v} = 0, \quad \vec{n} \cdot \mathbf{T} = 0. \quad (1.12)$$

Равенство  $\vec{n} \cdot \mathbf{T} = 0$  содержит три скалярных произведения векторов, учитывая, что в  $\mathbf{T}$  шесть независимых компонент, получается три линейно независимых собственных вектора, отвечающих нулевому собственному значению.

В пункте (1) найдено 2 собственных вектора, в пункте (2) — 4 собственных вектора и еще 3 — в пункте (3). Итого, найдены все 9 линейно независимых пар: собственное значение – собственный вектор.

#### 1.4.2. Сопряженная задача

Операция транспонирования матрицы  $\mathbf{A}_j$  (1.6) определяется из равенства

$$\vec{u}_1 \cdot \mathbf{A}_j^T \vec{u} = \vec{u} \cdot \mathbf{A}_j \vec{u}_1.$$

Раскроем правую часть и перегруппируем множители в ней:

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_j \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \mathbf{T}_1 \end{bmatrix} &= l\vec{v} \cdot \frac{1}{\rho}(\vec{n}_j \cdot \mathbf{T}_1) + l\mathbf{T} : [\lambda(\vec{n}_j \cdot \vec{v}_1)\mathbf{I} + \mu(\vec{n}_j \otimes \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \otimes \vec{n}_j)] = \\ &= l\mathbf{T}_1 : \frac{1}{2\rho}(\vec{v} \otimes \vec{n}_j + \vec{n}_j \otimes \vec{v}) + l\vec{v}_1 \cdot [\lambda(\mathbf{T} : \mathbf{I})\vec{n}_j + 2\mu\vec{n}_j \cdot \mathbf{T}]. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\mathbf{A}_j^T \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = -l_j \begin{bmatrix} \lambda(\mathbf{T} : \mathbf{I})\vec{n}_j + 2\mu\vec{n}_j \cdot \mathbf{T} \\ \frac{1}{2\rho}(\vec{v} \otimes \vec{n}_j + \vec{n}_j \otimes \vec{v}) \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Как уже обсуждалось после (1.8), величины  $\vec{v}$  и  $\mathbf{T}$  здесь имеют размерности обратных скоростей и напряжений соответственно.

Рассуждая аналогичным образом, приходим к трем группам собственных значений и собственных векторов:

$$\begin{aligned} c &= \pm lc_1, & \vec{v} &= \alpha \vec{n}, & \mathbf{T} &= \mp \frac{\alpha}{c_1 \rho} \vec{n} \otimes \vec{n}; \\ c &= \pm lc_2, & \vec{n} \cdot \vec{v} &= 0, & \mathbf{T} &= \mp \frac{1}{2c_2 \rho} (\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}); \\ c &= 0, & \vec{v} &= 0, & \lambda(\mathbf{T} : \mathbf{I})\vec{n} + 2\mu\vec{n} \cdot \mathbf{T} &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

### Важные обозначения и соотношения

Ненадолго прервемся и посвятим данный подраздел тому, что введем дополнительные обозначения, а также сформулируем наиболее примечательные тождества между введенными векторами и матрицами, на которые будем ссылаться многократно ниже по тексту.

Определим симметричные матрицы  $\mathbf{N}_{ij} = \mathbf{N}_{ji}$  как

$$\mathbf{N}_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{n}_i \otimes \vec{n}_j + \vec{n}_j \otimes \vec{n}_i). \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

Матрицы  $\mathbf{N}_{ij}$  ортогональны между собой относительно операции двойного скалярного произведения:

$$\forall i \leq j, k \leq l: \quad \mathbf{N}_{ij} : \mathbf{N}_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \frac{1 + \delta_{ij}}{2}.$$

Последние соотношения легко проверить, если обратиться, в частности, к тождествам

$$\begin{aligned} \vec{a} \otimes \vec{a} : \mathbf{I} &= \|\vec{a}\|^2, & \vec{a} \otimes \vec{b} : \vec{a} \otimes \vec{b} &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2, & \vec{a} \otimes \vec{b} : \vec{b} \otimes \vec{a} &= (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \\ \vec{a} \otimes \vec{a} : \vec{a} \otimes \vec{b} &= \vec{a} \otimes \vec{a} : \vec{b} \otimes \vec{a} &= \|\vec{a}\|^2 \vec{a} \cdot \vec{b}, \end{aligned}$$

справедливым для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Нетрудно показать также, каково будет действие  $\mathbf{N}_{ij}$  на вектор  $\vec{n}_k$ :

$$\forall i, j, k: \quad \mathbf{N}_{ij} \cdot \vec{n}_k = \frac{1}{2}((\vec{n}_j \cdot \vec{n}_k)\vec{n}_i + (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_k)\vec{n}_j).$$

Следовательно  $\mathbf{N}_{11}$ ,  $\mathbf{N}_{12}$ ,  $\mathbf{N}_{22}$ , а также всевозможные их линейные комбинации при действии на  $\vec{n}$  дают нуль, а значит, являются собственными векторами прямой задачи.

Другими важным свойством матриц  $\mathbf{N}_{ij}$  является результат двойной свертки с произвольной симметричной матрицей  $\mathbf{T}$

$$\forall i, j : \quad \mathbf{N}_{ij} : \mathbf{T} = \vec{n}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n}_j, \quad (1.15)$$

что в случае единичной матрицы дает

$$\forall i, j : \quad \mathbf{N}_{ij} : \mathbf{I} = \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \delta_{ij}.$$

$$\mathbf{N}_{00} + \mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} = \mathbf{I}. \quad (1.16)$$

Разложение произвольного вектора  $\vec{v}$  по ортонормированному базису:

$$\vec{v} = (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + (\vec{n}_1 \cdot \vec{v})\vec{n}_1 + (\vec{n}_2 \cdot \vec{v})\vec{n}_2, \quad (1.17)$$

приводит к

$$\frac{1}{2}(\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{v})\mathbf{N}_{00} + (\vec{n}_1 \cdot \vec{v})\mathbf{N}_{01} + (\vec{n}_2 \cdot \vec{v})\mathbf{N}_{02}. \quad (1.18)$$

Система  $\mathbf{N}_{00}$ ,  $\mathbf{N}_{01}$ ,  $\mathbf{N}_{02}$ ,  $\mathbf{N}_{12}$ ,  $\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}$ ,  $\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}$  также ортогональна, но не полностью нормирована ( $\|\mathbf{N}\| = \sqrt{\mathbf{N} : \mathbf{N}}$ ), следовательно, разложение произвольной симметричной матрицы  $\mathbf{T}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & (\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T})\mathbf{N}_{00} + 2(\mathbf{N}_{01} : \mathbf{T})\mathbf{N}_{01} + 2(\mathbf{N}_{02} : \mathbf{T})\mathbf{N}_{02} + 2(\mathbf{N}_{12} : \mathbf{T})\mathbf{N}_{12} + \\ & + \frac{1}{2}((\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) : \mathbf{T})(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) + \frac{1}{2}((\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}) : \mathbf{T})(\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Применение (1.17) к вектору  $\mathbf{T} \cdot \vec{n}$  дает

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \vec{n} &= (\vec{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{n}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n})\vec{n}_1 + (\vec{n}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n})\vec{n}_2 = \\ &= (\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T})\vec{n} + (\mathbf{N}_{01} : \mathbf{T})\vec{n}_1 + (\mathbf{N}_{02} : \mathbf{T})\vec{n}_2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Применение (1.18) к вектору  $\mathbf{T} \cdot \vec{n}$  дает

$$\frac{1}{2}((\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n})) = (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})\mathbf{N}_{00} + (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{01})\mathbf{N}_{01} + (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{02})\mathbf{N}_{02}. \quad (1.21)$$

### 1.4.3. Нормировка собственных векторов

Скалярное произведение собственных векторов прямой задачи  $\{\vec{v}_d, \mathbf{T}_d\}$ , составляющих столбцы  $\mathbf{\Omega}^{-1}$ , и сопряженной задачи  $\{\vec{v}_c, \mathbf{T}_c\}$ , составляющих строки  $\mathbf{\Omega}$ , должно равняться единице для соответствующих пар векторов (и нулю для прочих пар):

$$\vec{v}_d \cdot \vec{v}_c + \mathbf{T}_d : \mathbf{T}_c = 1.$$

Подставим в это равенство найденные выше значения собственных векторов, чтобы согласовать их длину.

Для первой группы собственных векторов имеем

$$c = \pm lc_1, \quad \vec{v}_c = \vec{n}, \quad \mathbf{T}_c = \mp \frac{1}{c_1 \rho} \mathbf{N}_{00}, \quad \vec{v}_d = \alpha \vec{n}, \quad \mathbf{T}_d = \mp \frac{\alpha}{c_1} (\lambda \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{N}_{00}),$$

где длина собственного вектора сопряженной задачи была произвольным образом фиксирована, а  $\alpha = \frac{l^2}{1+l^2}$ .

Для второй группы —

$$c = \pm lc_2, \quad \vec{v}_c = \vec{n}_k, \quad \mathbf{T}_c = \mp \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{0k}, \quad \vec{v}_d = \alpha \vec{n}_k, \quad \mathbf{T}_d = \mp \frac{2\alpha}{c_2} \mu \mathbf{N}_{0k},$$

( $k = 1, 2$ ) при том же значении  $\alpha$ .

### 1.4.4. Нулевые собственные значения

Вектора  $\{0, \mathbf{T}_{c,i}\}$ , где

$$\mathbf{T}_{c,1} = \mathbf{N}_{12}, \quad \mathbf{T}_{c,2} = \mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}, \quad \mathbf{T}_{c,3} = \mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{N}_{00},$$

удовлетворяют условиям на собственный вектор сопряженной задачи (1.14).

Система биортогональных к ним векторов, подходящих прямой задаче (1.12),

такова:

$$\mathbf{T}_{d,1} = 2\mathbf{N}_{12}, \quad \mathbf{T}_{d,2} = \frac{1}{2}(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}), \quad \mathbf{T}_{d,3} = \frac{1}{2}(\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}).$$

Коэффициенты подбирались так, чтобы

$$\forall i, j : \quad \mathbf{T}_{c,i} : \mathbf{T}_{d,j} = \delta_{ij}.$$

1.4.5. Матрицы  $\Lambda$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega^{-1}$ 

Можно подвести итог предшествующих подразделов, представив явный вид матриц, на которые раскладывается  $\mathbf{A}$ :

$$\Lambda = l \operatorname{diag}\{c_1, -c_1, c_2, -c_2, c_2, -c_2, 0, 0, 0\}, \quad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{v} - \frac{1}{c_1 \rho} \mathbf{N}_{00} : \mathbf{T} \\ \vec{n} \cdot \vec{v} + \frac{1}{c_1 \rho} \mathbf{N}_{00} : \mathbf{T} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{v} - \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{01} : \mathbf{T} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{v} + \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{01} : \mathbf{T} \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{v} - \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{02} : \mathbf{T} \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{v} + \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{02} : \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_{12} : \mathbf{T} \\ (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) : \mathbf{T} \\ (\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} - \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \mathbf{N}_{00}) : \mathbf{T} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

К сожалению, исследование собственных векторов системы (1.7) позволяет выписать лишь действие матрицы  $\Omega^{-1}$  на вектор, находящийся слева:  $\vec{w}^T \Omega^{-1}$ , но не справа:  $\Omega^{-1} \vec{w}$ , для чего потребуются дополнительные усилия.

Чтобы определить  $\vec{u} = \Omega^{-1} \vec{w}$ , будем решать систему уравнений  $\Omega \vec{u} = \vec{w}$ . После сложения трех первых пар строк (1.23)

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \frac{w_1 + w_2}{2}, \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{v} = \frac{w_3 + w_4}{2}, \quad \vec{n}_2 \cdot \vec{v} = \frac{w_5 + w_6}{2}.$$

Подставляя это в (1.17), имеем

$$\vec{v} = \frac{w_1 + w_2}{2} \vec{n} + \frac{w_3 + w_4}{2} \vec{n}_1 + \frac{w_5 + w_6}{2} \vec{n}_2.$$

Теперь попарно вычтем те же строки системы уравнений:

$$\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T} = c_1 \rho \frac{w_2 - w_1}{2}, \quad \mathbf{N}_{01} : \mathbf{T} = c_2 \rho \frac{w_4 - w_3}{2}, \quad \mathbf{N}_{02} : \mathbf{T} = c_2 \rho \frac{w_6 - w_5}{2}.$$

Последние строки дают

$$\mathbf{N}_{12} : \mathbf{T} = w_7, \quad (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) : \mathbf{T} = w_8, \quad (\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}) : \mathbf{T} = w_9 + \frac{c_1 \rho \lambda}{\lambda + 2\mu} (w_2 - w_1).$$

Также подставим это в (1.19) и сразу заменим сумму  $\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}$  по формуле (1.16):

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}^{-1} \vec{w} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (w_1 + w_2)\vec{n} + (w_3 + w_4)\vec{n}_1 + (w_5 + w_6)\vec{n}_2 \\ \rho(w_2 - w_1)[(c_1 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}] + \\ + 2c_2\rho(w_4 - w_3)\mathbf{N}_{01} + 2c_2\rho(w_6 - w_5)\mathbf{N}_{02} + \\ + 4w_7\mathbf{N}_{12} + w_8(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) + w_9(\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

В дальнейшем нам потребуются оперировать отдельными столбцами  $\mathbf{\Omega}^{-1}$ . Чтобы получить каждый из них, достаточно помножить матрицу на соответствующий единичный вектор:

$$\vec{w}^{*,i} \equiv \mathbf{\Omega}^{-1} \vec{e}_i,$$

или, что то же самое, положить в записи (1.24)  $w_j = \delta_{ij}$ . Постолбцовая запись  $\mathbf{\Omega}^{-1}$ :

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{n} & \vec{n}_1 & \vec{n}_1 \\ -\rho[(c_1 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}] & \rho[(c_1 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}] & -2c_2\rho\mathbf{N}_{01} & 2c_2\rho\mathbf{N}_{01} \\ \vec{n}_2 & \vec{n}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -2c_2\rho\mathbf{N}_{02} & 2c_2\rho\mathbf{N}_{02} & 4\mathbf{N}_{12} & \mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22} & \mathbf{I} - \mathbf{N}_{00} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

## 1.5. Покоординатное расщепление

Запись уравнений в форме (1.4) удобна тем, что позволяет построить разностную схему интегрирования в трехмерном пространстве, если исследованы одномерные схемы для системы уравнений

$$\dot{\vec{u}} + \mathbf{A}_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_j} = 0. \quad (1.26)$$

Обозначим действия одномерной схемы оператором перехода  $f$  между последовательными временными слоями:

$$\vec{u}^{n+1} = f_j(\mathbf{A}_j) \vec{u}^n.$$

В дальнейшем будем отождествлять схему и соответствующий ей оператор  $f$ , например, говоря: «схема  $f$ ».

Для всех одномерных явных схем, приведенных далее в данной работе, справедливо ограничение на максимальный шаг интегрирования по времени:

$$\tau_j < \tau_j^{\max} = \frac{1}{c_j^{\max}} = \frac{1}{c_1 l_j},$$

где  $c_j^{\max}$  — максимальное по модулю собственное значение  $\mathbf{A}_j$ ,  $c_1$  — продольная скорость звука (1.10). Также в этом условии предполагается, что шаг между узлами сетки в направлении  $\xi_j$  равен единице.

Подход, состоящий в комбинировании операторов перехода для одномерных систем (1.26), чтобы построить разностные схемы для трехмерных систем (1.4), носит название *расщепление* по пространственным координатам. Приведем далее (без доказательства) несколько принципиальных способов построения схем расщеплением, каждый из которых использовался в последующих главах.

### Простейший способ

Трехмерный оператор перехода ( $\vec{u}^{n+1} = F(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)\vec{u}^n$ )

$$F(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \sum_j \alpha_j f_j \left( \frac{1}{\alpha_j} \mathbf{A}_j \right) \quad (1.27)$$

при условиях

$$\sum_j \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0$$

обеспечивает первый порядок аппроксимации, если в качестве базисных ( $f_j$ ) были взяты схемы как минимум первого порядка. Набор  $\{\alpha_j\}$  подбирается из условия максимизации допустимого шага интегрирования

$$\frac{c_1^{\max}}{\alpha_1} = \frac{c_2^{\max}}{\alpha_2} = \frac{c_3^{\max}}{\alpha_3},$$

которое приводит к

$$\alpha_i = \frac{c_i^{\max}}{c_1^{\max} + c_2^{\max} + c_3^{\max}}.$$



и

$$\tau < \tau^{\max} = \left( \sum_j c_j^{\max} \right)^{-1} = \left( c_1 \sum_j l_j \right)^{-1}. \quad (1.28)$$

Видно, что максимально допустимый шаг интегрирования, тем не менее, снижается по сравнению с одномерным случаем.

Если операторы  $f_j(\mathbf{A}_j)$  являются линейными функциями своего аргумента, что, как правило, имеет место для схем первого порядка точности, то (1.27) заметно упрощается:

$$F(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \sum_j f_j(\mathbf{A}_j).$$

Хотя величины  $\{\alpha_j\}$  уже не фигурируют в формуле, но более строгие ограничения на шаг интегрирования по сравнению с одномерным случаем сохраняются.

### Расщепление второго порядка точности

Чтобы обеспечить второй порядок аппроксимации трехмерной схемы, если в качестве базисных были взяты одномерные схемы как минимум второго порядка, используют такую комбинацию

$$F(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \frac{1}{6} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} f_i(\mathbf{A}_i) f_j(\mathbf{A}_j) f_k(\mathbf{A}_k), \quad (1.29)$$

где суммирование осуществляется по всем шести возможным перестановкам набора цифр (1,2,3).

Получившаяся схема наследует максимально допустимый шаг интегрирования от «худшей» базисной схемы  $f_j$  («худшего» направления  $\xi_j$ ):

$$\tau < \tau^{\max} = \left( \max_j \{c_j^{\max}\} \right)^{-1} = \left( c_1 \max_j l_j \right)^{-1}.$$

Однако расщепление (1.29) обладает рядом недостатков по сравнению с расщеплением (1.27) при практической реализации на компьютере. Можно предложить два алгоритма вычисления (1.29). Первый алгоритм

требует вычисления  $3! \cdot 3 = 18$  действий оператора  $f$  и памяти для хранения вспомогательного слоя  $\vec{u}'$ :

$$\begin{aligned}\vec{u}' &:= f_3 \vec{u}^n, \vec{u}' := f_2 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := f_1 \vec{u}'. \\ \vec{u}' &:= f_3 \vec{u}^n, \vec{u}' := f_1 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := \vec{u}^{n+1} + f_2 \vec{u}'. \\ \dots \\ \vec{u}' &:= f_1 \vec{u}^n, \vec{u}' := f_3 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := \vec{u}^{n+1} + f_2 \vec{u}'. \\ \vec{u}' &:= f_1 \vec{u}^n, \vec{u}' := f_2 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := \frac{1}{6}(\vec{u}^{n+1} + f_3 \vec{u}').\end{aligned}$$

Второй алгоритм позволяет сократить число вычислений  $f$  до 15 за счет использования второго вспомогательного слоя  $\vec{u}''$ :

$$\begin{aligned}\vec{u}' &:= f_3 \vec{u}^n, \vec{u}'' := f_2 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := f_1 \vec{u}'', \\ \vec{u}'' &:= f_1 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := \vec{u}^{n+1} + f_2 \vec{u}''. \\ \dots \\ \vec{u}' &:= f_1 \vec{u}^n, \vec{u}'' := f_3 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := \vec{u}^{n+1} + f_2 \vec{u}'', \\ \vec{u}'' &:= f_2 \vec{u}', \vec{u}^{n+1} := \frac{1}{6}(\vec{u}^{n+1} + f_3 \vec{u}'').\end{aligned}$$

Сравните это с тремя вычислениями  $f$  в подходе (1.27).

### Компромиссный вариант

Практика показала, что если в (1.29) вычислять только одно любое слагаемое из шести, например,

$$F(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = f_3(\mathbf{A}_3) f_2(\mathbf{A}_2) f_1(\mathbf{A}_1), \quad (1.30)$$

то получившаяся схема будет давать результаты очень близкие к способу (1.29). К тому же сохраняется возможность интегрировать с большим шагом по времени, присущим (1.29).

Вычисление (1.30):

$$\vec{u}' = f_1 \vec{u}^n, \quad \vec{u}'' = f_2 \vec{u}', \quad \vec{u}^{n+1} = f_3 \vec{u}'',$$

может быть выполнено даже более эффективно, чем вычисление (1.27), за счет того, что разные слои  $(\vec{u}^n, \vec{u}', \vec{u}'', \vec{u}^{n+1})$  будут являться лишь псевдонимами одной области памяти.

Единственным существенным недостатком такого подхода является несимметрия получающейся схемы, что, впрочем, обычно не критично.

Такой способ расщепления использовался, например, в [31], однако, в сочетании с ограничением шага (1.28).

## 1.6. Разностные схемы

В этом и последующих разделах будем исследовать только одномерные разностные схемы для системы (1.26), опуская нижний индекс  $j$ , имея в виду построение из них трехмерных схем обозначенными выше способами.

### Схема Лакса [44]

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n - \tau \mathbf{A} \Delta \vec{u}^n + \Delta^2 \vec{u}^n, \quad (1.31)$$

где действие матрицы  $\mathbf{A}$  рассчитывается по формуле (1.6),

$$\Delta \vec{u}^n = \frac{1}{2}(\vec{u}_{+1}^n - \vec{u}_{-1}^n), \quad \Delta^2 \vec{u}^n = \frac{1}{2}(\vec{u}_{+1}^n - 2\vec{u}_0^n + \vec{u}_{-1}^n).$$

### Схема Лакса – Вендроффа [45]

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора для представления решения на следующем шаге по времени:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \tau \frac{d\vec{u}^n}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2\vec{u}^n}{dt^2} + O(\tau^3).$$

Из (1.26)

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\mathbf{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \mathbf{A}^2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \xi^2},$$

что после подстановки в ряд Тейлора дает формулу

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n - \tau \mathbf{A} \left( \frac{\partial \vec{u}^n}{\partial \xi} - \tau \mathbf{A} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{u}^n}{\partial \xi^2} \right) + O(\tau^3),$$

удобную для численного расчета по схеме Лакса – Вендроффа:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n - \tau \mathbf{A} (\Delta \vec{u}^n - \tau \mathbf{A} \Delta^2 \vec{u}^n). \quad (1.32)$$

## Схема Куранта – Изаксона – Риса [46]

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n - \tau \mathbf{A} \Delta \bar{u}^n + \tau \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega \Delta^2 \bar{u}^n, \quad (1.33)$$

где  $|\Lambda|$  — диагональная матрица, полученная из абсолютных значений  $\Lambda$ .

Явный вид действия матрицы из последнего слагаемого нетрудно получить из выражений (1.23) и (1.24):

$$\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} c_1(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + c_2(\vec{n}_1 \cdot \vec{v})\vec{n}_1 + c_2(\vec{n}_2 \cdot \vec{v})\vec{n}_2 \\ c_1(\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})\mathbf{N}_{00} + 2c_2((\mathbf{T} : \mathbf{N}_{01})\mathbf{N}_{01} + (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{02})\mathbf{N}_{02}) + \\ + c_3(\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})(\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}) \end{bmatrix}.$$

Чтобы его упростить и избавиться от вхождения векторов  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ , воспользуемся для верхней строки тождеством (1.17) и тождествами (1.15), (1.16), (1.21) для нижней строки.

$$\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} c_2 \vec{v} + (c_1 - c_2)(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} \\ (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})[(c_1 - 2c_2 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}] + \\ + c_2[(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n})] \end{bmatrix}.$$

Схема Куранта – Изаксона – Риса также может быть записана в форме

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n - \tau \Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega \Delta^- \bar{u}^n - \tau \Omega^{-1} \Lambda^- \Omega \Delta^+ \bar{u}^n,$$

где

$$\Delta^+ \bar{u}^n = \bar{u}_{+1}^n - \bar{u}_0^n, \quad \Delta^- \bar{u}^n = \bar{u}_0^n - \bar{u}_{-1}^n,$$

$\Lambda^+$ ,  $\Lambda^-$  — диагональные матрицы, содержащие только положительные или только отрицательные собственные значения из  $\Lambda$ . Входящие в эту запись схемы комбинации матриц также легко вычислимы, если принять во внимание, что

$$\Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega + \Omega^{-1} \Lambda^- \Omega = \mathbf{A},$$

$$\Omega^{-1} \Lambda^+ \Omega - \Omega^{-1} \Lambda^- \Omega = \Omega^{-1} |\Lambda| \Omega :$$

$$\begin{aligned}
-\Omega^{-1}\Lambda^{-}\Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} &= \frac{l}{2} \begin{bmatrix} c_2\vec{v} + (c_1 - c_2)(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} + \frac{1}{\rho}(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \\ \lambda(\vec{n} \cdot \vec{v})\mathbf{I} + \mu(\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v}) + \\ + (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})[(c_1 - 2c_2 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}] + \\ + c_2[(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n})] \end{bmatrix}, \\
\Omega^{-1}\Lambda^{+}\Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} &= \frac{l}{2} \begin{bmatrix} c_2\vec{v} + (c_1 - c_2)(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \frac{1}{\rho}(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \\ -\lambda(\vec{n} \cdot \vec{v})\mathbf{I} - \mu(\vec{v} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{v}) + \\ + (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})[(c_1 - 2c_2 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}] + \\ + c_2[(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n})] \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### Обобщение трех схем

Можно предложить следующее однопараметрическое семейство схем, которое включало бы в себя каждую из представленных выше схем:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n - \tau \mathbf{A} \Delta \vec{u}^n + \tau^\alpha \Omega^{-1} |\Lambda|^\alpha \Omega \Delta^2 \vec{u}^n, \quad (1.34)$$

где  $|\Lambda|^\alpha$  — результат возведения каждого элемента  $|\Lambda|$  в степень  $\alpha$ . При  $\alpha = 1$  получаем схему Куранта – Изаксона – Риса (1.33), при  $\alpha = 2$  получаем схему Лакса – Вендроффа (1.32). Случай  $\alpha = 0$  порождает схему, максимально похожую на схему Лакса (1.31):  $|\Lambda|^\alpha$  при стремлении  $\alpha$  к нулю отлична от  $\mathbf{I}$  лишь для нулевых собственных значениях.

В работе [47] была отмечена малая анизотропия решения, полученного по схеме Лакса, в сравнении с другими схемами. У схемы (1.34) при  $\alpha = 0$  анизотропия гораздо сильнее. Это обстоятельство натолкнуло на гипотезу, что дополнительное слагаемое  $\Omega^{-1}(\mathbf{I} - |\Lambda|^0)\Omega \Delta^2 \vec{u}^n$  позволяет существенно повысить изотропность схемы, что было подтверждено экспериментально.

При нецелых  $\alpha$  из интервала  $(0, 2)$  должны получаться также устойчивые схемы, свойства которых как-то «усредняют» свойства опорных схем,

что называется гибридизацией схемы.

$$\Omega^{-1}|\Lambda|^\alpha\Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = l^\alpha \begin{bmatrix} c_2^\alpha \vec{v} + (c_1^\alpha - c_2^\alpha)(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} \\ (\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})[(c_1^\alpha - 2c_2^\alpha - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}c_1^\alpha)\mathbf{N}_{00} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}c_1^\alpha\mathbf{I}] + \\ + c_2^\alpha[(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n})] \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Для проверки формулы можно убедиться, что подстановка  $\alpha = 2$ :

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_1^2 - 2c_2^2 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}c_1^2 = 0,$$

дает квадрат (1.6):

$$\Omega^{-1}|\Lambda|^2\Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \frac{l^2}{\rho} \begin{bmatrix} \mu + (\lambda + \mu)(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} \\ \lambda(\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})\mathbf{I} + \mu[(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n})] \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2 \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}.$$

Подстановка  $\alpha = 0$ :

$$\Omega^{-1}|\Lambda|^0\Omega \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \frac{\mathbf{T}:\mathbf{N}_{00}}{\lambda+2\mu}[-2(\lambda + \mu)\mathbf{N}_{00} + \lambda\mathbf{I}] + [(\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n})] \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

### Симметричная схема 4-го порядка точности

Будем действовать аналогично выводу схемы Лакса – Вендроффа:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{n+1} &= \bar{u}^n + \tau \frac{d\bar{u}^n}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2\bar{u}^n}{dt^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{d^3\bar{u}^n}{dt^3} + \frac{\tau^4}{24} \frac{d^4\bar{u}^n}{dt^4} + O(\tau^5); \\ \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\mathbf{A} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} = \mathbf{A}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}, \quad \frac{d^3\bar{u}}{dt^3} = -\mathbf{A}^3 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \xi^3}, \quad \frac{d^4\bar{u}}{dt^4} = \mathbf{A}^4 \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \xi^4}; \\ \bar{u}^{n+1} &= \bar{u}^n - \tau \mathbf{A} \left( \frac{\partial \bar{u}^n}{\partial \xi} - \tau \mathbf{A} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}^n}{\partial \xi^2} - \tau \mathbf{A} \left( \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}^n}{\partial \xi^3} - \tau \mathbf{A} \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \bar{u}^n}{\partial \xi^4} \right) \right) \right) + O(\tau^3); \\ \bar{u}^{n+1} &= \bar{u}^n - \tau \mathbf{A} (\Delta \bar{u}^n - \tau \mathbf{A} (\Delta^2 \bar{u}^n - \tau \mathbf{A} (\Delta^3 \bar{u}^n - \tau \mathbf{A} \Delta^4 \bar{u}^n))). \quad (1.37) \end{aligned}$$

Здесь разности аппроксимируют соответствующие производные с точностью 4-го порядка:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{u}^n &= \frac{1}{24}(-2\bar{u}_{+2}^n + 16\bar{u}_{+1}^n - 16\bar{u}_{-1}^n + 2\bar{u}_{-2}^n), \\ \Delta^2 \bar{u}^n &= \frac{1}{24}(-\bar{u}_{+2}^n + 16\bar{u}_{+1}^n - 30\bar{u}_0^n + 16\bar{u}_{-1}^n - \bar{u}_{-2}^n), \\ \Delta^3 \bar{u}^n &= \frac{1}{24}(2\bar{u}_{+2}^n - 4\bar{u}_{+1}^n + 4\bar{u}_{-1}^n - 2\bar{u}_{-2}^n), \\ \Delta^4 \bar{u}^n &= \frac{1}{24}(\bar{u}_{+2}^n - 4\bar{u}_{+1}^n + 6\bar{u}_0^n - 4\bar{u}_{-1}^n + \bar{u}_{-2}^n).\end{aligned}$$

## 1.7. Сеточно-характеристические схемы

Среди всех разностных схем для гиперболических уравнений (1.26), т.е. таких, матрица которых имеет полный набор собственных векторов и только действительные собственные значения:

$$\dot{\vec{u}} + \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} = 0, \quad (1.38)$$

принято выделять так называемые *сеточно-характеристические* схемы [22], которые существенно учитывают особенности таких уравнений. Специфика гиперболических уравнений состоит в *характеристических* гиперповерхностях (при одной пространственной координате — прямых), на которых уравнения не содержат выводящих производных.

Видно, что система (1.38) при замене переменных на самом деле распадается на ряд независимых скалярных уравнений переноса

$$\dot{\vec{v}} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi} = 0. \quad (\vec{v} \equiv \mathbf{\Omega} \vec{u})$$

Уравнения переноса решаются весьма просто (рис. 1.1). Из того узла  $m$  временного слоя  $n + 1$ , в котором требуется получить решение, опускаются характеристики. Из точки пересечения характеристики со слоем  $n$  соответствующая компонента вектора  $\vec{v}$  переносится в точку  $\xi_m^{n+1}$ :

$$v_i^{n+1}(\xi_m) = v_i^n(\xi_m - \lambda_i \tau).$$

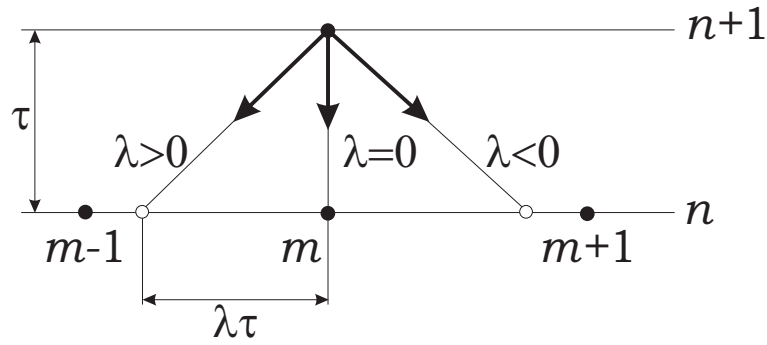


Рис. 1.1. Сеточно-характеристический принцип расчета узла.

В последующем мы будем опускать  $\xi_m$ , записывая просто  $v_i^{n+1} = v_i^n(-\lambda_i\tau)$ .

Если характеристика не попадает точно в расчетный узел, то применяются те или иные способы реконструкции решения в данной точке (интерполяция). Выбор способа реконструкции решения на предыдущем слое обуславливает степень аппроксимации сеточно-характеристической разностной схемы. В работе [22] приводится вывод сеточно-характеристических схем первого (Куранта – Изаксона – Риса) и второго (Лакса – Вендорффа) порядков.

После того, как все компоненты  $\vec{v}$  перенесены, восстанавливается само решение:

$$\vec{u}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1}\vec{v}^{n+1}.$$

В некоторых программных реализациях сеточно-характеристического метода непосредственно производится обращение матрицы или эквивалентное ей решение системы линейных уравнений. Здесь же будет предложен другой подход. Подставим одно из последних выражений в другое

$$\begin{aligned} \vec{u}^{n+1} &= \mathbf{\Omega}^{-1} \begin{bmatrix} \dots \\ v_i^n(-\lambda_i\tau) \\ \dots \end{bmatrix} = \mathbf{\Omega}^{-1} \begin{bmatrix} \dots \\ \vec{\omega}^i \cdot \vec{u}^n(-\lambda_i\tau) \\ \dots \end{bmatrix} = \sum_i [\vec{\omega}^i \cdot \vec{u}^n(-\lambda_i\tau)] \vec{\omega}^{*,i} = \\ &= \sum_i [\vec{\omega}^{*,i} \vec{\omega}^i] \vec{u}^n(-\lambda_i\tau), \end{aligned}$$

где  $\vec{\omega}^i$  —  $i$ -ая строка  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\vec{\omega}^{*,i}$  —  $i$ -ый столбец  $\mathbf{\Omega}^{-1}$ . Обозначив  $\mathbf{X}^i = \vec{\omega}^{*,i} \vec{\omega}^i$ ,



окончательно получаем

$$\bar{u}^{n+1} = \sum_i \mathbf{X}^i \bar{u}^n(-\lambda_i \tau). \quad (1.39)$$

Альтернативно можно собрать вместе сумму всех элементов, отвечающих одному и тому же собственному значению:

$$\mathbf{X}^c = \sum_{\lambda_i=c} \bar{\omega}^{*,i} \bar{\omega}^i.$$

Поскольку

$$\mathbf{I} = (\mathbf{\Omega}^{-1})^T \mathbf{\Omega}^T = \sum_i \mathbf{X}^i,$$

то

$$\sum_{\lambda_i=0} \mathbf{X}^i = \mathbf{I} - \sum_{\lambda_i \neq 0} \mathbf{X}^i,$$

и можно придать (1.39) форму часто более удобную для применения:

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n + \sum_{\lambda_i \neq 0} \mathbf{X}^i [\bar{u}^n(-\lambda_i \tau) - \bar{u}^n]. \quad (1.40)$$

Еще раз подчеркнем, что полученная формула справедлива для любой сеточно-характеристической схемы, не зависимо от того, какого порядка реконструкция функции на предыдущем слое по времени будет использоваться.

## Характеристические матрицы для системы уравнений упругости

Вывести действие матриц  $\mathbf{X}$  на вектор не составит труда, если обратиться к выражениям (1.25) и (1.23):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{\pm c_1} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} (\vec{n} \cdot \vec{v} \mp \frac{1}{c_1 \rho} \mathbf{N}_{00} : \mathbf{T}) \begin{bmatrix} \vec{n} \\ \mp \rho [(c_1 - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}] \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{n} \mp \frac{1}{c_1 \rho} (\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T}) \vec{n} \\ \mp \rho (\vec{n} \cdot \vec{v}) [(c_1 - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}] + \frac{\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00}}{\lambda + 2\mu} (\lambda \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^{\pm c_2} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\vec{n}_1 \cdot \vec{v} \mp \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{01} : \mathbf{T}) \begin{bmatrix} \vec{n}_1 \\ \mp 2c_2 \rho \mathbf{N}_{01} \end{bmatrix} + \\ + \frac{1}{2} (\vec{n}_2 \cdot \vec{v} \mp \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{02} : \mathbf{T}) \begin{bmatrix} \vec{n}_2 \\ \mp 2c_2 \rho \mathbf{N}_{02} \end{bmatrix}.$$

Чтобы во второй формуле оставить только  $\vec{n}$  и  $\mathbf{N}_{00}$ , воспользуемся тождествами (1.17), (1.18), (1.20), (1.21). Тогда

$$\mathbf{X}^{\pm c_2} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{v} - (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} \mp \frac{1}{c_2 \rho} [\mathbf{T} \cdot \vec{n} - (\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T})\vec{n}] \\ \mp c_2 \rho [\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n} - 2(\vec{n} \cdot \vec{v})\mathbf{N}_{00}] + \\ + (\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n}) - 2(\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00})\mathbf{N}_{00} \end{bmatrix}.$$

Сумма характеристических матриц для положительных (отрицательных) собственных значений определяется суммированием двух последних выражений:

$$\mathbf{X}^{\pm} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^{\pm c_1} + \mathbf{X}^{\pm c_2}) \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{v} \mp \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{T} \cdot \vec{n} \pm \frac{1}{\rho} (\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}) (\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T}) \vec{n} \\ \mp \rho (\vec{n} \cdot \vec{v}) [(c_1 - 2c_2 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}] \mp c_2 \rho (\vec{n} \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \vec{n}) + \\ + \frac{\mathbf{T} : \mathbf{N}_{00}}{\lambda + 2\mu} [\lambda \mathbf{I} - 2(\lambda + \mu)\mathbf{N}_{00}] + (\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Нетрудно проверить, что  $\mathbf{X}^- + \mathbf{X}^+ = \mathbf{\Omega}^{-1} |\mathbf{\Lambda}|^0 \mathbf{\Omega}$ , см. (1.36).

## 1.8. Расчет на границе области интегрирования

Формулы (1.39) и (1.40) не могут быть непосредственно применены вблизи границы, поскольку в них входят величины  $\vec{u}^n(-\lambda_i \tau)$ , которые находятся за пределами области интегрирования. Корректное решение задачи на границе требует постановки граничных условий в количестве равном числу выходящих характеристик [22]. Для левой границы области выходящими являются характеристики, отвечающие положительным собственным значениям, для правой границы — отрицательным (рис. 1.1). Общий

вид линейных граничных условий имеет вид

$$\mathbf{B}\vec{u}^{n+1} = \vec{b}, \quad (1.42)$$

где  $\mathbf{B}$  — прямоугольная матрица,  $\vec{b}$  — вектор правых частей.

Разделим все множество собственных значений  $\mathbf{A}$  на две группы по признаку попадания характеристик внутрь области на предыдущем временном слое:  $\lambda^{int}$  и  $\lambda^{out}$ . Будем считать, что выражение (1.39) сохраняет справедливость и для граничных узлов, если величины  $\vec{u}^n(-\lambda_i\tau)$ ,  $\lambda_i \in \lambda^{out}$  специально подобраны так, что выполнено (1.42):

$$\mathbf{B} \sum_i \mathbf{X}^i \vec{u}^n(-\lambda_i\tau) = \vec{b},$$

что эквивалентно

$$\mathbf{B} \left[ \sum_{\lambda_i \in \lambda^{in}} \mathbf{X}^i \vec{u}^n(-\lambda_i\tau) + \sum_{\lambda_i \in \lambda^{out}} \alpha_i \vec{\omega}^{*,i} \right] = \vec{b},$$

где  $\alpha_i$  — некоторые коэффициенты, при которых справедлив знак равенства. Обозначим первую сумму как  $\vec{u}^{in}$ , а все столбцы  $\vec{\omega}^{*,i}$  и коэффициенты  $\alpha_i$  из второй суммы соберем в прямоугольную матрицу  $\mathbf{\Omega}^{*,out}$  и вектор  $\vec{\alpha}$  соответственно:

$$\mathbf{B} [\vec{u}^{in} + \mathbf{\Omega}^{*,out} \vec{\alpha}] = \vec{b}.$$

Значения вектора  $\vec{\alpha}$  вычислять нет необходимости, поэтому исключим его из последнего выражения:

$$\vec{\alpha} = (\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1} (\vec{b} - \mathbf{B}\vec{u}^{in}).$$

Подставляя его обратно в (1.39), находим

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{in} + \mathbf{\Omega}^{*,out} (\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1} (\vec{b} - \mathbf{B}\vec{u}^{in}). \quad (1.43)$$

В итоге получилась обобщенная запись метода расчета приграничного узла (хоть одна выходящая характеристика из которого не попадает внутрь

области интегрирования на предыдущем шаге по времени). Формула справедлива для любого порядка точности реконструкции функции на слое  $n$  и для любого набора граничных условий  $\{\mathbf{B}, \vec{b}\}$ .

Выражение (1.43) помимо прочего задает критерий корректности постановки того или иного граничного условия, а именно: невырожденность матрицы  $\mathbf{B}\Omega^{*,out}$ .

В последующих подразделах будет показано, как эта запись упрощается для уравнений линейной упругости с определяющей матрицей (1.6) и конкретного вида граничных условий.

### 1.8.1. Заданная внешняя сила

Данное условие заключается в том, что на границе тела задана поверхностная плотность силы воздействия со стороны внешних тел. В частном случае эта сила может быть равна нулю, тогда говорят о свободной границе тела. Условие формализуется следующей записью:

$$\mathbf{T}\vec{p} = \vec{f},$$

где  $\vec{p}$  определяет перпендикуляр (единичной длины) к поверхности тела, направленный наружу,  $\vec{f}$  — поверхностная плотность внешних сил. Данная запись содержит три скалярных условия, которые компенсируют отсутствие данных для трех выходящих характеристик. Приводя граничные условия к виду (1.42), получаем

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\vec{p}, \quad \vec{b} = \vec{f}.$$

Что после подстановки в (1.43) дает

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{in} - \Omega^{*,out} (\mathbf{B}\Omega^{*,out})^{-1} (\mathbf{T}^{in}\vec{p} - \vec{f}), \quad (1.44)$$

где  $\vec{u}^{in} = \{\vec{v}^{in}, \mathbf{T}^{in}\}$ .

Действие  $\mathbf{\Omega}^{*,out}$  устанавливается из (1.24):

$$\mathbf{\Omega}^{*,out} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_1 \vec{n} + w_2 \vec{n}_1 + w_3 \vec{n}_2 \\ \mp \rho [w_1 ((c_1 - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}) + 2c_2 (w_2 \mathbf{N}_{01} + w_3 \mathbf{N}_{02})] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \mp \frac{\rho}{2} [w_1 ((c_1 - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}) + 2c_2 (w_2 \mathbf{N}_{01} + w_3 \mathbf{N}_{02})] \vec{p},$$

где знак минус относится к левой, а плюс — к правой границе области.

Для раскрытия (1.44) необходимо в выражении

$$\mp \frac{2}{\rho} \vec{w} = (\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1} \vec{z} \quad \Leftrightarrow \quad \mp \frac{2}{\rho} \mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out} \vec{w} = \vec{z}$$

вычислять  $\vec{w}$  для произвольного  $\vec{z} = \mathbf{T}^{in} \vec{p} - \vec{f}$ , коэффициент  $\mp \frac{2}{\rho}$  выбран для упрощения последующих формул. Помножим  $\vec{z} = \mp \frac{2}{\rho} \mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out} \vec{w}$  последовательно на  $\vec{n}$ ,  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$ :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{z} &= w_1 c_1 (\vec{n} \cdot \vec{p}) + w_2 c_2 (\vec{n}_1 \cdot \vec{p}) + w_3 c_2 (\vec{n}_2 \cdot \vec{p}), \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{z} &= w_1 c_3 (\vec{n}_1 \cdot \vec{p}) + w_2 c_2 (\vec{n} \cdot \vec{p}), \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{z} &= w_1 c_3 (\vec{n}_2 \cdot \vec{p}) + w_3 c_2 (\vec{n} \cdot \vec{p}). \end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{(\vec{n} \cdot \vec{p})(\vec{n} \cdot \vec{z}) - (\vec{n}_1 \cdot \vec{p})(\vec{n}_1 \cdot \vec{z}) - (\vec{n}_2 \cdot \vec{p})(\vec{n}_2 \cdot \vec{z})}{c_1 (\vec{n} \cdot \vec{p})^2 - c_3 [(\vec{n}_1 \cdot \vec{p})^2 + (\vec{n}_2 \cdot \vec{p})^2]}, \\ w_2 &= \vec{n}_1 \cdot \vec{b}, \quad w_3 = \vec{n}_2 \cdot \vec{b}, \\ \vec{b}(\vec{z}) &\equiv \frac{1}{c_2 (\vec{n} \cdot \vec{p})} (\vec{z} - w_1 c_3 \vec{p}). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Практическая реализация в программе иногда требует, чтобы формулы не содержали векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , в выборе которых есть некоторая степень свободы. Чтобы исключить их, распишем скалярное произведение произвольных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в ортогональной системе координат с базисом  $(\vec{n}_{(0)}, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$ :

$$\sum_i (\vec{n}_i \cdot \vec{a})(\vec{n}_i \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

что дает

$$w_1(\vec{z}) = \frac{2(\vec{n} \cdot \vec{p})(\vec{n} \cdot \vec{z}) - (\vec{p} \cdot \vec{z})}{(c_1 + c_3)(\vec{n} \cdot \vec{p})^2 - c_3\|\vec{p}\|^2}. \quad (1.46)$$

Окончательно, учитывая тождество (1.18) для вектора  $\vec{b}$ ,

$$\mathbf{\Omega}^{*,out} (\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1} \vec{z} = \begin{bmatrix} \mp \frac{1}{\rho} [(w_1 - \vec{b} \cdot \vec{n})\vec{n} + \vec{b}] \\ [(c_1 - c_3)w_1 - 2c_2(\vec{n} \cdot \vec{b})]\mathbf{N}_{00} + c_3w_1\mathbf{I} + c_2(\vec{b} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{b}) \end{bmatrix},$$

где  $\vec{b}$  и  $w_1$  есть функции  $\vec{z} = \mathbf{T}^{in}\vec{p} - \vec{f}$ : (1.45) и (1.46) соответственно.

### Поверхность тела лежит в координатной плоскости сетки

Дальнейшие упрощения возникают, когда две прочие линии сетки по отношению к той, для которой строятся расчетные формулы, точно совпадают с поверхностью тела. Это имеет место, например, при моделировании тела лагранжевой сеткой, узлы которой сдвигаются вместе с границей. Тогда нормаль к границе будет совпадать с перпендикуляром к двум прочим линиям сетки, то есть с вектором биортогонального базиса. Без ограничения общности можно считать, что

$$\vec{p} = \mp \vec{n},$$

где знак минус относится к левой, а плюс — к правой границе области.

Тогда, обозначив  $\vec{z} = \mp \mathbf{T}^{in}\vec{n} - \vec{f}$ ,

$$w_1 = \mp \frac{1}{c_1}(\vec{n} \cdot \vec{z}), \quad \vec{b} = \mp \frac{1}{c_2} \left[ \vec{z} - \frac{c_3(\vec{n} \cdot \vec{z})}{c_1} \vec{n} \right], \quad \vec{n} \cdot \vec{b} = \mp \frac{1}{c_2}(\vec{n} \cdot \vec{z}) \left[ 1 - \frac{c_3}{c_1} \right].$$

Окончательно (1.44) приобретает такой покомпонентный вид для границы, перпендикуляр которой коллинеарен вектору биортогонального базиса  $\vec{n}$ ,

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^{in} - \frac{1}{\rho c_2} \vec{z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) (\vec{z} \cdot \vec{n}) \vec{n}, \quad (\vec{z} = \mp \mathbf{T}^{in}\vec{n} - \vec{f}) \quad (1.47)$$

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^{in} \pm [\vec{z} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{z}] \pm \frac{\vec{z} \cdot \vec{n}}{\lambda + 2\mu} (\lambda \mathbf{I} - 2(\lambda + \mu) \mathbf{N}_{00}),$$

где, напомним, верхний знак относится к левой, а нижний — к правой границе области интегрирования.

### 1.8.2. Заданная скорость границы

Данное условие заключается в том, что на границе тела задана скорость движения тела, например, это может быть скорость внешнего тела, контактирующего с данным. В частном случае скорость может быть равна нулю, тогда граница тела будет неподвижна. Условие формализуется следующей записью:

$$\vec{v} = \vec{V},$$

где  $\vec{V}$  — заданная скорость. Данная запись содержит три скалярных условия, которые компенсируют отсутствие данных для трех выходящих характеристик. Приводя граничные условия к виду (1.42), получаем

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \vec{v}, \quad \vec{b} = \vec{V}.$$

Действуя аналогично с условием заданной силы на границе, последовательно находим

$$2\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out}\vec{w} = w_1\vec{n} + w_2\vec{n}_1 + w_3\vec{n}_2,$$

обозначаем «невязку»  $\vec{z} = \vec{v}^{in} - \vec{V}$ , разрешаем

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1} \vec{z} = \begin{bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{z} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{z} \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{z} \end{bmatrix},$$

подставляем

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}^{*,out} (\mathbf{B}\mathbf{\Omega}^{*,out})^{-1} \vec{z} &= 2\mathbf{\Omega}^{*,out} \begin{bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{z} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{z} \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \vec{z} \\ \mp\rho[(\vec{n} \cdot \vec{z})((c_1 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}) + 2c_2((\vec{n}_1 \cdot \vec{z})\mathbf{N}_{01} + (\vec{n}_2 \cdot \vec{z})\mathbf{N}_{02})] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Окончательный покомпонентный вид корректировки на границе с за-

данной скоростью, учитывая тождество (1.18) для вектора  $\vec{z}$ , имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{v}^{n+1} &= \vec{V}, \\ \mathbf{T}^{n+1} &= \mathbf{T}^{in} \pm \rho[(\vec{n} \cdot \vec{z})((c_1 - 2c_2 - c_3)\mathbf{N}_{00} + c_3\mathbf{I}) + c_2(\vec{z} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{z})],\end{aligned}\tag{1.48}$$

где  $\vec{z} = \bar{v}^{in} - \vec{V}$  и, напомним, верхний знак относится к левой, а нижний — к правой границе области интегрирования.

### 1.8.3. Смешанные условия

Первое смешанное условие заключается в том, что заданы нормальная скорость движения границы и тангенциальная составляющая силы. Такое условие возникает в случае контакта с другим телом. Тангенциальная составляющая силы равна нулю в случае отсутствия трения при контакте и пропорциональна скорости скольжения в противном случае.

Обозначим заданную касательную силу символом  $\vec{f}_\tau$ , компонента этого вектора в направлении нормали может быть произвольной, заданную нормальную скорость —  $V_p$ . Тогда смешанное условие формализуется записью

$$\mathbf{T}\vec{p} = \vec{f}, \quad \vec{v} \cdot \vec{p} = V_p, \quad \vec{f} = \vec{f}_\tau - (\vec{f}_\tau \cdot \vec{p})\vec{p} + (\vec{f} \cdot \vec{p})\vec{p},$$

где  $(\vec{f} \cdot \vec{p})$  предстоит установить.

Умножим первое уравнение в (1.47) на  $\vec{n}$ :

$$(\bar{v}^{n+1} \cdot \vec{n}) = (\bar{v}^{in} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{\rho c_1}(\vec{z} \cdot \vec{n}), \quad (\vec{z} = \mp \mathbf{T}^{in} \vec{n} - \vec{f})\tag{1.49}$$

левая часть равенства есть  $\mp V_p$ , следовательно

$$(\vec{f} \cdot \vec{n}) = \mp \mathbf{T}^{in} : \mathbf{N}_{00} - \rho c_1[(\bar{v}^{in} \cdot \vec{n}) \pm V_p],$$

откуда вычисляется поверхностная плотность силы, действующей в данной точке

$$\vec{f} = \vec{f}_\tau + \vec{n}[\mp \rho c_1 V_p + (\mp \mathbf{T}^{in} \cdot \vec{n} - \rho c_1 \bar{v}^{in} - \vec{f}_\tau) \cdot \vec{n}],\tag{1.50}$$



верхний знак относится к левой, а нижний — к правой границе области интегрирования.

Расчет границы, на которой выставлено первое смешанное условие, ведется по формуле (1.47), в которую подставляется  $\vec{f}$ , представленное в последней формуле.

Для полноты картины опишем другое смешанное условие, когда заданы тангенциальная скорость движения границы и нормальная составляющая силы. Если обе заданные величины равны нулю, мы имеем дело с «шершавой» свободной границей, где точке границы разрешено двигаться только перпендикулярно, но зато внешняя нормальная сила равна нулю. На практике потребность во втором смешанном условии чаще связана с задачами, описанными в подразделе 1.8.4.

Обозначим заданную касательную скорость символом  $\vec{V}_\tau$  (компонента этого вектора в направлении нормали может быть произвольной), нормальное давление на границе —  $f_p$ . Тогда второе смешанное условие формализуется записью

$$\vec{p} \cdot \mathbf{T}\vec{p} = f_p, \quad \vec{v} = \vec{V}_\tau - (\vec{V}_\tau \cdot \vec{p})\vec{p} + (\vec{v} \cdot \vec{p})\vec{p},$$

где  $(\vec{v} \cdot \vec{p})$  устанавливается из (1.49):

$$\vec{v} = \vec{V}_\tau + \vec{n} \left[ (\vec{v}^{in} - \vec{V}_\tau) \cdot \vec{n} \pm \frac{1}{\rho c_1} (\vec{n} \cdot \mathbf{T}^{in} \vec{n} - f_p) \right], \quad (1.51)$$

верхний знак относится к левой, а нижний — к правой границе области интегрирования.

Расчет границы, на которой выставлено второе смешанное условие, ведется по формуле (1.48), в которую подставляется  $\vec{v}$ , представленная в последней формуле.

#### 1.8.4. Условия поглощения и симметрии

Рассмотрим пример моделирования распространения плоских волн от дневной поверхности (*геол.*) вглубь некоторой породы, в котором нас

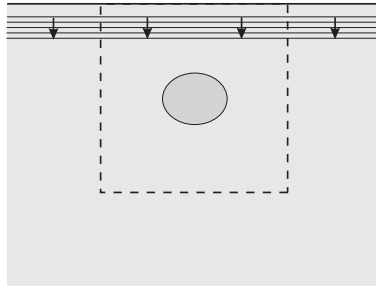


Рис. 1.2. Пример, когда некоторые границы области интегрирования (пунктир) не являются физическими границами моделируемой сплошной среды.

интересует отражение от неоднородностей среды, также наблюдаемое на поверхности (рис. 1.2). Область моделирования показана пунктирной линией. При этом верхняя ее граница совпадает с дневной поверхностью, и там логично поставить условия нулевой внешней силы. Тогда как боковые и нижняя границы проведены произвольно, но для численного расчета на них также требуется постановка граничного условия.

Для того чтобы боковые границы не вносили искажений в результат наблюдения, они должны выбираться по возможности сильно удаленными от неоднородностей среды, являющихся источником отраженных сигналов. В этих условиях состояние среды на этих границах будет зависеть только от возмущения, исходящего от дневной поверхности. Поскольку это возмущение имеет плоский фронт, то картина слева и справа от вертикальной границы будет симметричной.

Граничные условия на боковых поверхностях существенно зависят от вида падающей волны: продольная она или поперечная. Для продольной волны составляющая скорости в направлении нормали к данной границе должна быть нулевой. Из-за того что главные оси тензора напряжений должны совпадать с боковой границей, тангенциальная составляющая силы, действующей между частями среды, условно разделенными данной границей, также обращается в нуль. Поэтому здесь мы можем производить расчет по правилам смешанной границы (подраздел 1.8.3) с условиями

$$\vec{f}_\tau = 0, \quad V_p = 0.$$

Для поперечной волны, наоборот, должны выполняться равенства

$$f_p = 0, \quad \vec{V}_\tau = 0.$$

Эти условия становятся очевидными, если обратиться к виду собственных векторов (1.25), одному из которых (в зависимости от типа и направления движения волны) пропорциональны скорости и напряжения во всех точках падающей плоской волны (вектор  $\vec{p}$  направлен вдоль волнового фронта).

Для нижней границы ситуация иная. Здесь требуется, чтобы граница не отражала падающий на нее сигнал, а полностью поглощала его, поскольку предполагается, что реальная граница тела, от которой возможно отражение, находится на бесконечности. За волну, распространяющуюся от границы тела, отвечают компоненты  $\vec{\omega}^{iT} \vec{u}$  состояния граничного узла  $\vec{u}$ , относящиеся к выходящим характеристикам. Поэтому условие на поглощающей границе, приведенное к виду (1.42), примет вид

$$\mathbf{\Omega}^{out} \vec{u} = 0,$$

где  $\mathbf{\Omega}^{out}$  — прямоугольная матрица, состоящая из строк  $\mathbf{\Omega}$  (1.23), относящихся к выходящим характеристикам для данной границы. Однако реализовать полное поглощение энергии таким способом возможно лишь для волн распространяющихся в направлении  $\vec{p}$ . Для прочих волн гарантируется лишь частичное поглощение, поэтому условия поглощения желательно комбинировать с удалением такой границы на возможно большее расстояние.

Второй этап расчета для поглощающей границы определяется из выражения (1.43):

$$\vec{u}^{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}^{*,out} \mathbf{\Omega}^{out}) \vec{u}^{in}.$$

Произведение матриц  $\mathbf{\Omega}^{*,out} \mathbf{\Omega}^{out}$  для  $\vec{p} = \mp \vec{n}$  равняется  $\mathbf{X}^\pm$  (1.41). Отсюда

покомпонентная запись (1.43):

$$\begin{aligned} \vec{v}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ \vec{v}^{in} \pm \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{T}^{in} \cdot \vec{n} \mp \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right) (\mathbf{N}_{00} : \mathbf{T}^{in}) \vec{n} \right] \\ \mathbf{T}^{n+1} &= \mathbf{T}^{in} + \frac{1}{2} \{ \pm \rho (\vec{n} \cdot \vec{v}^{in}) [(c_1 - 2c_2 - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}] \pm c_2 \rho (\vec{n} \otimes \vec{v}^{in} + \vec{v}^{in} \otimes \vec{n}) - \\ &\quad - \frac{\mathbf{T}^{in} : \mathbf{N}_{00}}{\lambda + 2\mu} [\lambda \mathbf{I} - 2(\lambda + \mu) \mathbf{N}_{00}] - [(\mathbf{T}^{in} \cdot \vec{n}) \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes (\mathbf{T}^{in} \cdot \vec{n})] \}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Если сравнить эти выражения с (1.47) и (1.48), то окажется, что нет необходимости реализовывать (1.52) в программе отдельно. Достаточно взять полусумму результатов, полученных указанными корректорами для свободной ( $\vec{f} = 0$ ) и фиксированной ( $\vec{V} = 0$ ) границ.

После достижения времени, необходимого излученной с дневной поверхности плоской волне полностью пройти нижнюю границу области моделирования, условия на боковых границах желательно изменить на условия поглощения.

### 1.8.5. Решение на границе при наличии правой части

В этом подразделе рассматривается расчет граничного узла для неоднородной системы уравнений вида (1.26), которая содержит правую часть  $\vec{r}$ , являющуюся линейной функцией решения:

$$\vec{r} = \mathbf{R}\vec{u}.$$

Обычно в таком случае прибегают к методу расщепления. Переход от  $\vec{u}^n$  к  $\vec{u}^{n+1}$  осуществляется в два этапа через вспомогательный слой  $\vec{u}'$ :

$$\vec{u}^n \rightarrow \vec{u}' \rightarrow \vec{u}^{n+1}.$$

В качестве одного из этапов выступает интегрирование однородной системы уравнений (1.26), решение которого уже было выписано (1.43).

Другим этапом является интегрирование неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\dot{\vec{u}} = \vec{r}.$$

Решение этого уравнения можно представить как действие матрицы  $\mathbf{F}$ , зависящей от шага интегрирования и  $\mathbf{R}$ :

$$\vec{u}(t + \tau) = \mathbf{F}\vec{u}(t).$$

Например, для неявного метода первого порядка  $\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \tau\mathbf{R})^{-1}$ .

Если на первом этапе ( $\vec{u}^n \rightarrow \vec{u}'$ ) решается однородное уравнение, а на втором ( $\vec{u}' \rightarrow \vec{u}^{n+1}$ ) — учитывается наличие правой части, то

$$\vec{u}^{n+1} = \mathbf{F}\vec{u}^{in} + \mathbf{F}\Omega^{*,out} (\mathbf{B}\Omega^{*,out})^{-1} (\vec{b} - \mathbf{B}\vec{u}^{in}). \quad (1.53)$$

Если поменять порядок следования этапов: сначала «добавляем» правую часть, затем решаем однородное уравнение, то

$$\vec{u}^{n+1} = \mathbf{F}\vec{u}^{in} + \Omega^{*,out} (\mathbf{B}\Omega^{*,out})^{-1} (\vec{b} - \mathbf{B}\mathbf{F}\vec{u}^{in}). \quad (1.54)$$

В качестве третьего способа рассмотрим более сложную конструкцию. Пусть интегрирование правой части уравнения составляет второй этап, но при этом потребуем выполнения граничных условий для  $\vec{u}^{n+1}$  (1.42). Повторяя действия, изложенные в ходе получения (1.43), запишем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= \vec{u}^{in} + \Omega^{*,out} \vec{\alpha}, \\ \vec{u}^{n+1} &= \mathbf{F}\vec{u}', \\ \mathbf{B}\vec{u}^{n+1} &= \vec{b}. \end{aligned}$$

После исключения из нее  $\vec{u}'$  и  $\vec{\alpha}$ :

$$\vec{u}^{n+1} = \mathbf{F}\vec{u}^{in} + \mathbf{F}\Omega^{*,out} (\mathbf{B}\mathbf{F}\Omega^{*,out})^{-1} (\vec{b} - \mathbf{B}\mathbf{F}\vec{u}^{in}). \quad (1.55)$$

Выражения (1.53), (1.54), (1.55) стремятся друг к другу при  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{I}$ . Результаты их применения также оказываются очень похожими. Однако расчеты контактных границ при осевой симметрии задачи [48], проводимые в цилиндрической системе координат (переход в которую приводит к появлению правых частей в уравнениях), показали, что только (1.55) полностью исключает проявление неустойчивости вблизи контактных поверхностей.

## 1.9. Контакт между двумя телами

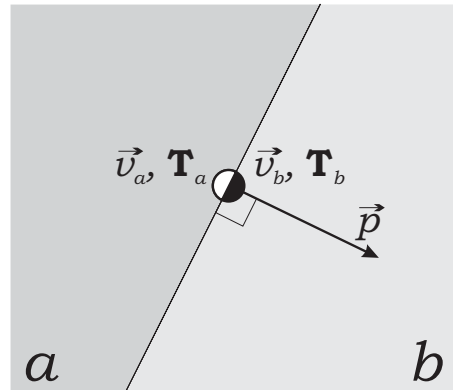


Рис. 1.3. Контакт двух областей. Расчетный узел содержит по набору переменных для каждой из областей.

Предположим, что два тела  $a$  и  $b$ , возможно из различных материалов, соприкасаются в рассматриваемой точке вдоль какой-то поверхности с нормалью  $\vec{p}$ , внешней по отношению к телу  $a$ . Кроме того, два граничных узла из сеток, построенных в телах  $a$  и  $b$ , полностью совпадают (рис. 1.3). Необходимо для данных узлов построить корректоры в стиле раздела 1.8, которые бы компенсировали недостаток характеристик, попадающих в свое тело, и учитывали особенности того или иного типа контакта между телами. Далее рассматриваются различные типы контактов.

### 1.9.1. Полное слипание

При полном слипании двух тел, скорости соприкасающихся граничных точек должны совпадать, а внешние силы, действующие на каждое тело, равны с точностью до инвертирования направления:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_b = \vec{V}, \quad \vec{f}_a = -\vec{f}_b. \quad (1.56)$$

Внешние силы, действующие на тела на следующем шаге, равны соответственно

$$\vec{f}_a = \mathbf{T}_a^{n+1} \vec{p}, \quad \vec{f}_b = \mathbf{T}_b^{n+1} (-\vec{p}).$$

Домножим второе выражение в (1.48) скалярно на  $\vec{p}$ :

$$\begin{aligned} \vec{f}_a &= \mathbf{T}_a^{n+1} \vec{p} = \mathbf{T}_a^{in} \vec{p} - \rho_a \{ (\vec{p} \cdot \vec{z}_a) (c_{a1} - c_{a2}) \vec{p} + c_{a2} \vec{z}_a \}, \quad (\vec{z}_a = \vec{v}_a^{in} - \vec{V}) \\ -\vec{f}_b &= \mathbf{T}_b^{n+1} \vec{p} = \mathbf{T}_b^{in} \vec{p} + \rho_b \{ (\vec{p} \cdot \vec{z}_b) (c_{b1} - c_{b2}) \vec{p} + c_{b2} \vec{z}_b \}. \quad (\vec{z}_b = \vec{v}_b^{in} - \vec{V}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Расписывая разность

$$(\mathbf{T}_a^{n+1} - \mathbf{T}_b^{n+1}) \vec{p} = 0,$$

не составляет большого труда определить общую скорость обоих контактирующих узлов:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{1}{\rho_a c_{a2} + \rho_b c_{b2}} \{ \rho_a [ (\vec{p} \cdot \vec{v}_a^{in}) (c_{a1} - c_{a2}) \vec{p} + c_{a2} \vec{v}_a^{in} ] + \\ &+ \rho_b [ (\vec{p} \cdot \vec{v}_b^{in}) (c_{b1} - c_{b2}) \vec{p} + c_{b2} \vec{v}_b^{in} ] - (\mathbf{T}_a^{in} - \mathbf{T}_b^{in}) \vec{p} - \\ &- \frac{\rho_a (c_{a1} - c_{a2}) + \rho_b (c_{b1} - c_{b2})}{\rho_a c_{a1} + \rho_b c_{b1}} (\vec{p} \cdot [ \rho_a c_{a1} \vec{v}_a^{in} + \rho_b c_{b1} \vec{v}_b^{in} - (\mathbf{T}_a^{in} - \mathbf{T}_b^{in}) \vec{p} ]) \vec{p} \}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Как и следовало ожидать, получившееся выражение инвариантно относительно переименования областей  $a \leftrightarrow b$  с одновременным изменением знака у  $\vec{p}$ . После того как скорость найдена, значения в каждом из узлов корректируются независимо по формулам (1.48).

### 1.9.2. Свободное скольжение

При свободном скольжении двух тел вдоль общей поверхности раздела должны совпадать лишь нормальные составляющие скорости, и нормальные компоненты силы должны компенсировать друг друга, в то время как тангенциальные компоненты силы обращаются в нуль:

$$\vec{v}_a \cdot \vec{p} = \vec{v}_b \cdot \vec{p} = V_p, \quad f_p^a = -f_p^b, \quad \vec{f}_\tau^a = \vec{f}_\tau^b = 0. \quad (1.59)$$

Внешние силы, действующие на каждое из тел, определяются из (1.50):

$$\begin{aligned} f_p^a &= \rho_a c_{a1} V_p + (\mathbf{T}_a^{in} \vec{p} - \rho_a c_{a1} \vec{v}_a^{in}) \cdot \vec{p} \\ f_p^b &= \rho_b c_{b1} V_p + (-\mathbf{T}_b^{in} \vec{p} - \rho_b c_{b1} \vec{v}_b^{in}) \cdot \vec{p}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Из того, что сумма этих сил должна равняться нулю, следует

$$V_p = \frac{1}{\rho_a c_{a1} + \rho_b c_{b1}} [\rho_a c_{a1} \vec{v}_a^{in} + \rho_b c_{b1} \vec{v}_b^{in} - (\mathbf{T}_a^{in} - \mathbf{T}_b^{in}) \vec{p}] \cdot \vec{p}. \quad (1.61)$$

Заметим, что это выражение совпадает с нормальной составляющей скорости при полном слипании (1.58). Таким образом, нормальная скорость движения контакта, а следовательно, и нормальная составляющая силы между телами не зависит от типа контакта.

Если свойства упругих материалов обоих тел совпадают, то

$$V_p = \frac{1}{2} \left[ \vec{v}_a^{in} + \vec{v}_b^{in} - \frac{1}{\rho c_1} (\mathbf{T}_a^{in} - \mathbf{T}_b^{in}) \vec{p} \right] \cdot \vec{p}.$$

Найденная нормальная скорость движения контактной границы может быть подставлена в выражение для расчета границы при поставленном смешанном условии (1.50). Так же, как и для случая полного слипания, коррекция контактирующих узлов далее ведется независимо.

## 1.10. Интегрирование уравнений акустики

Важным частным случаем уравнений упругости (1.2) являются уравнения акустики. Они возникают, когда тензор напряжений имеет шаровую, «гидростатическую» форму:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$$

и, следовательно,  $\mu = 0$ . Упрощенная система (1.2) получается

$$\begin{aligned} \rho \dot{\vec{v}} &= -\nabla p, \\ \dot{p} &= -\lambda(\nabla \cdot \vec{v}). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Приведем далее вид наиболее важных формул, полученных в результате исследования уравнений упругости и численных методов их интегрирования.

Выражение (1.4) остается справедливым, если под вектором  $\vec{u}$  понимать

$$\vec{u} = \{\vec{v}, p\}^T = \{v_1, v_2, v_3, p\}^T,$$



а действие матрицы  $\mathbf{A}_j$  на произвольный вектор

$$\mathbf{A}_j \begin{bmatrix} \vec{v} \\ p \end{bmatrix} = l_j \begin{bmatrix} \frac{p}{\rho} \vec{n}_j \\ \lambda(\vec{n}_j \cdot \vec{v}) \end{bmatrix}.$$

Комбинации констант:

$$c_1 = c_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}, \quad c_2 = 0.$$

У матриц  $\mathbf{A}$  два нулевых и два ненулевых собственных значения:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= l \operatorname{diag}\{c_1, -c_1, 0, 0\}, \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} &= \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{v} + \frac{p}{c_1 \rho} \\ \vec{n} \cdot \vec{v} - \frac{p}{c_1 \rho} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{v} \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{v} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \vec{v} \\ p \end{bmatrix} &= \mathbf{\Omega}^{-1} \vec{w} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (w_1 + w_2) \vec{n} + w_3 \vec{n}_1 + w_4 \vec{n}_2 \\ c_1 \rho (w_1 - w_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Важная комбинация матриц

$$\mathbf{\Omega}^{-1} |\mathbf{\Lambda}|^\alpha \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ p \end{bmatrix} = c_1^\alpha \begin{bmatrix} (\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{n} \\ p \end{bmatrix}$$

позволяет воспроизвести запись любой из приведенных разностных схем.

## 1.11. Двумерные уравнения упругости

Хотя главной задачей данной главы является исследование трехмерных уравнений упругости и разностных схем для них, очень часто оказывается, что ввиду той или иной симметрии задачу можно свести к двумерной. Также бывает удобно начинать тестирование разностных методов именно с двумерного случая.

Система дифференциальных уравнений (1.2), а также запись (1.6) остаются в силе, при условии того, что вектор скорости и тензор напряжений теперь включают меньшее количество компонент:

$$\vec{u} = \{\vec{v}, \mathbf{T}\}^T = \{v_1, v_2, t_{11}, t_{12}, t_{22}\}^T.$$

У матриц  $\mathbf{A}$  две пары ненулевых и одно нулевое собственное значение:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= l \operatorname{diag}\{c_1, -c_1, c_2, -c_2, 0\}, \\ \begin{bmatrix} w_1, w_2 \\ w_3, w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} &= \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{v} \mp \frac{1}{c_1 \rho} \mathbf{N}_{00} : \mathbf{T} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{v} \mp \frac{1}{c_2 \rho} \mathbf{N}_{01} : \mathbf{T} \\ (\mathbf{N}_{11} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{N}_{00}) : \mathbf{T} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} &= \mathbf{\Omega}^{-1} \vec{w} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (w_1 + w_2) \vec{n} + (w_3 + w_4) \vec{n}_1 \\ \rho(w_2 - w_1)[(c_1 - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}] + \\ + 2c_2 \rho(w_4 - w_3) \mathbf{N}_{01} + 2w_5 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Omega}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{n}_1 & 0 \\ \mp \rho[(c_1 - c_3) \mathbf{N}_{00} + c_3 \mathbf{I}] & \mp 2c_2 \rho \mathbf{N}_{01} & 2(\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь для упрощения записи элементы (строки и столбцы) матриц, отличающиеся лишь знаком, объединены, причем верхний знак в  $\mp$  соответствует первому элементу, а нижний — последующему. Запись комбинации матриц  $\mathbf{\Omega}^{-1} |\mathbf{\Lambda}|^\alpha \mathbf{\Omega}$  (1.35) при этом также сохраняется.

## 1.12. Эйлерова сетка и границы из маркеров

Под эйлеровым подходом понимают способ определения параметров решения в фиксированных в пространстве точках тела. Однако при решении динамических задач невозможно расположить точки так, чтобы они попадали на поверхности движущихся и деформирующихся тел в любой момент времени. Поэтому расчет в фиксированных точках ведется лишь внутри тел, а на их поверхности вводятся дополнительные подвижные точки (маркеры), смещающиеся вместе с телом.

Для расчета во внутренних неподвижных узлах необходимо учитывать наличие конвективных членов, появляющихся из-за движения тела относительно узлов сетки:

$$\dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{u}.$$

Тогда, по-прежнему, будет справедлива запись системы уравнений в форме (1.4), если только переопределить входящие в нее матрицы:

$$\tilde{\mathbf{A}}_j = l_j(\vec{n}_j \cdot \vec{v})\mathbf{I} + \mathbf{A}_j,$$

где  $l_j(\vec{n}_j \cdot \vec{v})$  — контравариантные координаты скорости тела в данной точке относительно выбранного базиса  $\{\vec{\xi}_j\}$  и взаимного к нему  $\{l_j \vec{n}_j\}$ ,  $\mathbf{A}_j$  определяются выражением (1.6).

Максимальные абсолютные величины собственных значений  $\tilde{\mathbf{A}}_j$  равны

$$c_1^j = c_1 + |l_j(\vec{n}_j \cdot \vec{v})|.$$

Именно эти величины будут определять максимально допустимый шаг интегрирования.

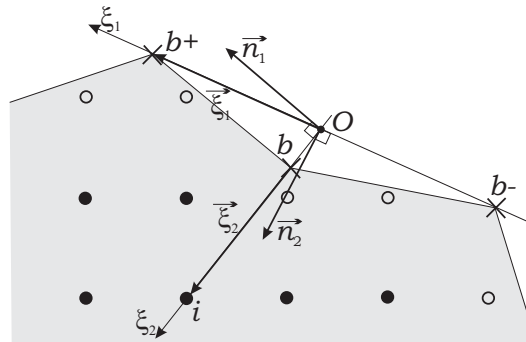


Рис. 1.4. Расчет граничного узла при совместном использовании подвижных маркеров (крестики) с регулярной квадратной эйлеровой решеткой (кружки). Значения во внутренних узлах, отмеченных полными кружками, определяются интерполяцией.

Алгоритмы расчета неподвижного внутреннего узла и подвижного граничного узла не отличаются от изложенных в предшествующих разделах. Для внутренних узлов следует иметь в виду, что они могут располагаться сколь угодно близко к линии границы. Поэтому непосредственный

расчет таких узлов будет диктовать стремящийся к нулю шаг интегрирования. Из-за чего внутренние узлы имеет смысл разделить на два класса: 1) отстоящие от границы дальше, чем от соседей по решетке и 2) прочие приграничные внутренние узлы (рис. 1.4). Для первых — напрямую применять один из разностных методов, а для вторых — получать значения интерполяцией по ближайшим уже рассчитанным внутренним и граничным узлам.

Здесь также имеет смысл рассмотреть каким образом можно аппроксимировать частные производные при совместном использовании подвижных маркеров с регулярной квадратной эйлеровой решеткой. Допустим, необходимо получить значения, отвечающие следующему моменту времени для граничного узла  $b$  (рис. 1.4). Если введено такое направление обхода границы, что внутренность тела остается слева, то можно обозначить предшествующий граничный узел как  $b-$ , а последующий — как  $b+$ . Также для расчета потребуются данные одного из внутренних узлов тела, который мы обозначим  $i$ .

Перейдем в систему координат  $(\xi_1, \xi_2)$ , которая определяется своими единичными векторами (в мировой системе координат их длина не единичная)

$$\vec{\xi}_1 = \frac{\vec{r}_{b+} - \vec{r}_{b-}}{2}, \quad \vec{\xi}_2 = \vec{r}_i - \vec{r}_b,$$

где символом  $\vec{r}$  обозначено положение узлов. Нуль  $O$  в этой системе координат совпадает с точкой пересечения двух прямых: одной проходящей через узлы  $b-$ ,  $b+$ , другой —  $b$ ,  $i$ . Предполагается, что мелкость сетки выбрана так, что узел  $b$ , точка  $O$  и центр отрезка  $[b-, b+]$  практически совпадают, то есть можно пренебречь изломом границы около узла  $b$  и считать плотность узлов на границе равномерной. Вдоль линий новой системы координат легко определить первые и вторые разности, которые подставляются в формулы разностных схем (см. раздел 1.6):

$$\Delta_{\xi_1} \vec{u}_b = \frac{\vec{u}_{b+} - \vec{u}_{b-}}{2}, \quad \Delta_{\xi_1}^2 \vec{u}_b = \frac{\vec{u}_{b+} - 2\vec{u}_b + \vec{u}_{b-}}{2}, \quad \Delta_{\xi_2}^+ \vec{u}_b = \vec{u}_i - \vec{u}_b.$$

## Глава 2

# Построение нерегулярной треугольной сетки

При численном моделировании для описания состояния тела обычно вводится некоторый конечный набор точек в теле, в которых и только в них запоминаются значения переменных. В остальных точках решение можно приближенно восстановить из значений, хранимых в нескольких близлежащих точках набора, откуда следует важность отыскания необходимого количества ближайших точек. Под *сеткой* понимают комбинацию из введенного набора точек (далее *узлы сетки*) и дополнительной информации о их соседстве. Численный метод расчета ответственен за вычисление значений в узлах сетки в следующий момент времени по их прежним значениям.

В вычислительной математике принято разделять сетки на структурированные (регулярные) и неструктурированные (нерегулярные). В структурированных сетках информация о соседстве существенно более проста, примером может служить прямоугольная сетка, использованная во множестве работ, где для каждого внутреннего узла можно узнать ссылки на четырех соседей вдоль линий решетки. В неструктурированных сетках ограничения на количество соседей и положения узлов существенно слабее, зато информация о соседстве устроена значительно сложнее.

Потребность в моделирование тел со сложной геометрией, которая задана изначально, либо формируется в результате деформаций в процессе

расчета, возникает все чаще. Однако даже для таких задач исследователи зачастую продолжают использовать регулярные сетки. Существенным недостатком является возможность их использования лишь для ограниченных классов геометрий тел, поскольку форма границ тела и наличие в нем полостей вводят ограничение на возможное положение узлов сетки. Как правило, для автоматического построения структурированной сетки требуется односвязность области. Кроме того, даже если регулярную сетку удастся построить, бывает невозможно гарантировать одинаковую плотность узлов во всех частях сетки, а также малую кривизну сеточных линий. Например, в круговой области деформированная решетка сгущается и искривляется при приближении к четырем точкам границы [49]. Эти особенности приводят к деградации точности решения для численных методов, основанных на использовании решеток. Кроме того, изменение оптимального положения узлов решетки при деформации тела зачастую требует постоянного решения ресурсоемкой многомерной задачи минимизации некоторого функционала [35]. Также из регулярной решетки невозможно произвольно выкидывать отдельные узлы, скажем, для уменьшения их плотности в местах сильного сжатия и поддержания стабильного шага интегрирования. Фрагментация тел возможна лишь вдоль линий или плоскостей решетки. В работе [17] более подробно обсуждаются проблемы, связанные с использованием структурированных сеток, и описываются различные базовые подходы решения динамических задач на неструктурированных сетках.

Данная глава посвящена алгоритмам работы с треугольной неструктурированной сеткой. Описывается формат представления сетки в памяти компьютера — двусвязный список ребер, обеспечивающий константное время выполнения большинства элементарных операций поиска и модификации сетки. Приводятся подробные изложения алгоритмов, необходимых для создания начальной сетки исходя только из контуров тела, а также

методы ее перестройки, обеспечивающие требуемые свойства сетки при деформировании тела в процессе моделирования. Построенная сетка является триангуляцией Делоне. Доказывается ряд утверждений касательно размеров ячеек получаемой в результате работы алгоритмов сетки. Формулируется ограничение на максимальный шаг интегрирования, при котором гарантируется невырожденность сетки. Глава завершается несколькими примерами сеток, полученных в результате выполнения описанных алгоритмов.

## 2.1. Представление триангуляции в программе

Прежде чем приступить к описанию алгоритмов построения и выравнивания сетки необходимо объяснить, в виде каких структур данных триангуляция тела хранилась в программе. Выбор формата данных определяет временные характеристики и затраты памяти алгоритмов, обрабатывающих сетку, поэтому чрезвычайно важно выбрать такое представление сетки в памяти, чтобы максимально облегчить последующие операции с ней.

### 2.1.1. Наиболее компактный формат

Часто для описания тела, разбитого на треугольники, используют два массива: один, ставящий в соответствие номеру узла его координаты, и другой, формирующий треугольники, используя номера трех его вершин. Элементы этих массивов на языке Си можно объявить следующим образом:

```
struct node_data {
    float x, y; //position
    ... //other node's data
};
struct tri_data {
```

```
    unsigned int nodes[3]; //vertices
    ... //other triangle's data
};
```

Подобное описание обладает рядом положительных качеств:

- *Минимальность и простота.* Трудно придумать другое описание, которое бы занимало существенно меньше места и было бы столь же очевидным в интерпретации. Ввиду этого оно идеально подходит для долговременного хранения треугольных сеток.
- *Удобство.* Ряду алгоритмов машинной графики необходимо лишь быстро перебирать треугольники и в каждом из них учитывать только значения локальных вершин. К этому ряду принадлежит, например, алгоритм построения изолиний *marching cubes*.
- *Широкое распространение.* В таком виде данные принимают многие приложения, генерирующие сетку или использующие ее.

Однако бывает, что выполнение некоторых операций при таких структурах данных затруднено необходимостью затрачивать долгое время (пропорциональное числу узлов или треугольников) на поиск:

- Модификация сетки: введение или исключение новой вершины с инцидентными ей ребрами и смежными треугольниками, переключение ребра внутри пары треугольников и т. д.
- Однократное рисование каждого ребра сетки. Если выводить ребра всех треугольников, то каждое ребро за исключением граничных будет выведено дважды (по количеству треугольников, которые ее разделяют).
- Переход от одного треугольника к соседнему через общее ребро. Это может потребоваться, например, для построения гладких изолиний, когда нужно усреднять нормали к линиям по соседним треугольникам.



- При реализации численных методов и переинтерполяции на новую сетку важен поиск треугольника, в который попадает точка, находящаяся от некоторого узла на определенном смещении.

Ввиду этих потребностей после загрузки сетки с долговременного носителя в память программы, ее внутреннее представление должно быть расширено, но желательно все же заботиться об экономии памяти и не хранить те данные, которые могут быть вычислены за константное время.

### 2.1.2. Расширенные структуры данных для ускорения поиска

Поскольку треугольная сетка является частным случаем планарного графа, то в качестве основы ее представления в данной работе была выбрана структура данных, предназначенная для программного описания подразделений плоскости, наиболее близким известным аналогом которой является *двусвязный список ребер* (doubly-connected edge list) [42], в который были внесены некоторые модификации, представленные здесь.

Несмотря на наличие в названии слова «список», сетка представлялась главным образом с помощью нескольких массивов, а не списков, которые содержат объекты сетки без пропусков для рационального расходования памяти. Ссылкой на объект сетки в таком случае является просто индекс в соответствующем массиве. Хранимыми объектами являются узлы, полу-ребра, ребра, треугольники. Элементы этих массивов можно объявить следующим образом:

```
struct node_data {
    float x, y; //position
    int he; //index of an incident half-edge
           //or -1 if the node has no incident edges
    ... //other node's data
};
```

```

struct half_edge_data {
    int tri; // index of triangle to the left
            //or -1 if no left triangle exists
    unsigned int node; // index of base node
    unsigned int next; // index of next half-edge (of the same
                    // node) in counter-clockwise order
    ... //other half-edge's data
};

struct edge_data {
    ... //other edge's data
};

struct tri_data {
    unsigned int nodes[3]; // indices of vertices
    ... //other tri's data
};

```

Из всех объектов наиболее сложным образом представлены грани: записями сразу в двух массивах. Каждое ребро условно разбивается на две половины — полу-ребра, которые в отличие от целого ребра являются направленными, и для них определены понятия «слева» и «справа». Каждое полу-ребро хранит ссылки на смежный треугольник, находящийся слева, базовый узел, из которого полу-ребро «растет» и следующее полу-ребро данного узла в направлении против часовой стрелки. Ссылка на парное (twin) полу-ребро не хранится, а вычисляется, поскольку они всегда возникают и исчезают парами, и в массиве всегда располагаются в смежных позициях. Количество элементов в массиве ребер вдвое меньше, чем в массиве полу-ребер, а индексы ребра  $e$  и его частей  $h_0$ ,  $h_1$  связаны простым соотношением:  $h_1 - 1 = h_0 = 2e$ . Ребро не хранит никакую информацию, необходимую для поиска в сетке, а необходимо лишь как контейнер для ассоциированных с ребром данных.

Каждый узел помимо своих координат содержит ссылку на одно из инцидентных полу-ребер.

Треугольник, по-прежнему, представляется ссылками на три свои вершины. Однако в результате экспериментов с такой структурой данных выяснилось, что все же удобнее вместо ссылок на вершины хранить ссылки на полу-ребра, оставляющие треугольник слева, или даже всего на одно из таких полу-ребер для экономии памяти.

Помимо массивов также поддерживался набор индексов граничных полу-ребер, представляющих каждое одну из границ в сетке. Это позволяет осуществлять перебор только граничных вершин, ребер или треугольников. Хотя необходимость поддержания этого набора может замедлить процедуры модификации сетки.

Отдельного упоминания заслуживает процедура удаления объектов из сетки. Поскольку пропуски в массивах не допускаются, то удаленный элемент заменялся последним элементом массива с сокращением на единицу размера последнего. Поэтому удаление элементов приводит к недействительности внешних ссылок на оставшиеся элементы этого массива. В большинстве случаев алгоритмы могут быть легко модифицированы с учетом этого обстоятельства. Например, процедура сканирования всех элементов массива в порядке возрастания индексов с удалением объектов, удовлетворяющих некоторому критерию, должна быть видоизменена так, чтобы после удаления повторно проверялся элемент с тем же индексом. Однако иногда бывает иначе, когда потеря состоятельности ссылок недопустима. Для таких случаев специально были разработаны процедуры удаления с отложенной перенумерацией оставшихся элементов.

## 2.2. Триангуляция невыпуклого многоугольника с полостями

Метод построения сетки, приведенный далее, основывается на имеющейся триангуляции тела. В самом начале расчета программа обладает информацией лишь о контурах тела, на основании которой ей необходимо породить какую-либо триангуляцию области. В самом общем случае форма тела задается ломанными контурами своих единственной внешней и возможно нескольких внутренних границ. Таким образом, появляется потребность триангулировать произвольный невыпуклый многоугольник, содержащий множество полостей. Количество полостей в проведенных расчетах достигало нескольких тысяч, поэтому этот аспект подчеркивается не случайно.

Можно пойти по простому пути, использованному в работе [50]. В ней предлагается сводить неодносвязную область к односвязной введением дополнительных разрезов «методами теории функций комплексного переменного». С одной стороны, действительно, всегда можно добавить в тело число разрезов, равное количеству внутренних полостей для получения односвязности. С другой стороны, в классической математике и, в том числе, в теории функций комплексного переменного доказывается лишь существование решения, но не исследуется количество операций, необходимых для его построения, и тем более не рассматриваются проблемы конечной точности работы компьютера с действительными числами.

Разрез, являющийся отрезком прямой линии, между точками двух несвязных контуров может быть введен только в том случае, если он не пересекает никаких контуров в задаче. Следовательно, для каждой такой пары точек необходимо проверить пересечение будущего разреза с каждым отрезком существующих контуров, в случае обнаружения пересечения взять другую пару точек и так далее. Если обозначить при помощи

$n$  суммарное число вершин (равное числу отрезков) в исходных замкнутых контурах триангулируемой области, то проверка пересечения некоторого отрезка со всеми контурами тела потребует  $O(n)$  операций, а выбор пары концевых точек разреза возможен  $O(n^2)$  способами. Полное количество необходимых разрезов на единицу меньше числа контуров может быть  $O(n)$ . Таким образом, непосредственная реализация такого метода устранения неодносвязности будет характеризоваться временем выполнения  $O(n^4)$ . Для тысяч входных контуров и десятков тысяч вершин на них не стоит ожидать завершения этого алгоритма в разумное время на современных компьютерах. Но даже если дождаться его завершения, результат может оказаться неудовлетворительным: введенные разрезы могут касаться существовавших контуров. Это происходит от того, что тест пересечения двух отрезков подвержен ошибкам из-за конечной точности оперирования компьютером с действительными числами, и сам по себе является сложной вычислительной задачей [51].

После получения односвязной области в статье [50] предлагается триангулировать ее, образуя треугольники из пары последовательных ребер с контура границы и нового ребра, если оно не пересечет контур в других местах. Здесь уместны ровно те же замечания касательно времени работы и потенциальной опасности ошибок округления.

Поэтому в данной работе использовался более сложный в реализации алгоритм триангуляции многосвязных невыпуклых областей, который, однако, обеспечивает лучшую производительность и на практике меньше «страдает» от ошибок округления. В работе [42] предлагается алгоритм, основанный на разбиении области на ряд монотонных многоугольников, которые пересекаются любой прямой параллельной некоторой заданной не более чем в паре точек. Это свойство позволяет триангулировать монотонные многоугольники за линейное время относительно сложности их границы. Алгоритм, приведенный далее, использует родственные идеи и имеет

ту же оценку количества операций по порядку величины, однако не выполняет явно разбиение исходной области на монотонные куски, что упрощает реализацию и дает некоторый выигрыш во времени.

### Алгоритм триангуляции

Алгоритм во время своей работы оперирует со структурой данных, введенной в предшествующем разделе. В начале работы алгоритма эта структура уже не пуста и содержит вершины и ребра с контуров области, которую необходимо триангулировать. Каждый контур указывается одним из полу-ребер, входящим в контур и оставляющим внутренность области справа. По исходному полу-ребру легко перечислить все оставшиеся вершины и так же ориентированные полу-ребра контура за линейное время относительно сложности контура.

Все индексы полу-ребер сортируются согласно положению вершины, из которой они исходят, в лексикографическом порядке: сначала по  $x$ , затем при равных  $x$  по  $y$ . В алгоритме сортируются полу-ребра вместо вершин, потому что полу-ребро однозначно определяет и вершину, и проходящую через нее границу. Пример, когда через одну вершину проходит две границы приведен на рис. 2.4.

Следующим этапом является выборка полу-ребер в отсортированном порядке и совершения действий в зависимости от местного характера границы, заключающихся в построении треугольников в окрестности текущей вершины, что приводит к постоянному изменению границ оставшейся области, а также в поддержании дополнительной структуры данных. Можно представить, что обработка сопровождается движением вертикальной прямой слева направо, при прохождении которой через очередную вершину производится некоторая работа (разновидность *plane sweep algorithm*). Вместе с движением прямой поддерживается сбалансированное бинарное дерево полу-ребер, которые ей пересекаются и оставляют внутренность об-

ласти выше (рис. 2.1). Предикатом, отвечающим за размещение элементов в дереве, является сравнение их  $y$ -координаты. В начале алгоритма и в его конце дерево является пустым. Количество пересекаемых прямой ребер всегда четное, они распадаются на пары, соответствующие верхней и нижней границе одной из частей области. Поэтому в дереве хранится лишь нижнее полу-ребро пары. С каждым элементом в дереве также ассоциировано хранится ссылка на вершину (определяемая индексом соответствующего полу-ребра), которая была пройдена вертикальной линией в текущей части дерева последней. Эта вершина принадлежит либо одному из пересекаемых ребер, либо является пройденной объединяющей вершиной (см. далее).

Следующее утверждение является истинным (инвариант цикла) перед и после выполнения действий над любой вершиной: часть текущей границы, состоящей только из ребер, целиком лежащих левее вертикальной линии, имеет внутренние углы только большие или равные  $\pi$  (является выпуклой направо).

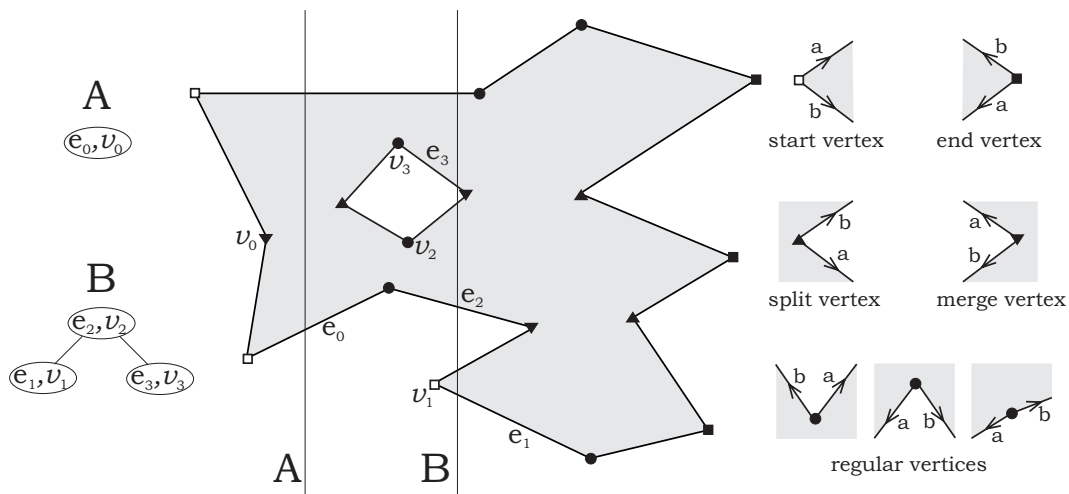


Рис. 2.1. Деревья пересекаемых ребер для двух различных вертикальных линий и классификация типов вершин в алгоритме триангуляции.

Работа, производимая при прохождении вершины зависит от ее типа, который в свою очередь определяется направлением двух граничных полу-ребер  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , выходящих из нее:  $\vec{a}$  оставляет триангулируемую область

справа,  $\vec{b}$  — слева (рис. 2.1). Для упрощения изложения предположим, что  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  не являются строго вертикальными, хотя в программе такого предположения не делалось (подобные случаи встречались и корректно обрабатывались). После выполнения работы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  добавляются в дерево пересекаемых движущейся прямой полу-ребер, если они оставляют триангулируемую область выше и направлены в правую сторону, либо исключаются, если — в левую.

Классификация вершин была заимствована из [42] и имеет непосредственное отношение к разбиению многоугольника на монотонные части. При прохождении *начальной* (start) или *расщепляющей* (split) вершины число ребер, пересекаемых вертикальной линией, увеличивается на два. Наоборот, *конечная* (end) или *объединяющая* (merge) вершины сокращают это число на два. При прохождении *обычной* (regular) вершины, число пересекаемых ребер не изменяется.

Обработка начальной вершины ( $a_x > 0$ ,  $b_x > 0$ ,  $[\vec{a}, \vec{b}] < 0$ ) наиболее проста. Никаких действий, за исключением запоминания нижнего пересекаемого ребра и самой вершины в дереве при этом не производится.

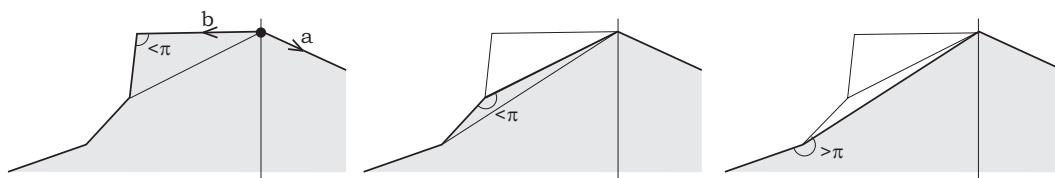


Рис. 2.2. Обычная вершина границы. Последовательное создание треугольников определяется углом между предшествующей парой ребер границы. Серым обозначена область, подлежащая триангуляции.

В обычной вершине ( $a_x b_x < 0$ ) внимание обращается на предшествующую последовательную пару ребер границы (рис. 2.2): если они оба пройдены вертикальной линией и образуют между собой угол меньший  $\pi$ , то они становятся ребрами нового треугольника, а третье ребро треугольника заменяет их на границе, после чего проверка возможности создания еще одного треугольника повторяется снова. Текущая вершина запомина-



ется в дереве пересекаемых ребер, как последняя обработанная для данного участка.

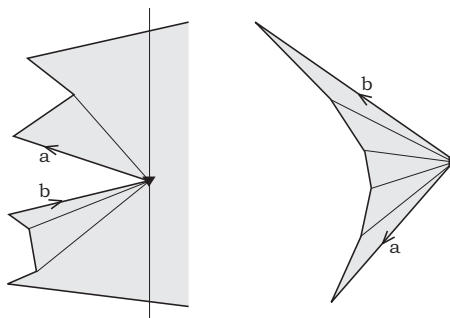


Рис. 2.3. Триангуляция в окрестности объединяющей (слева) и конечной (справа) вершин сводится к процедуре, разработанной для обычных вершин.

Конечную вершину ( $a_x < 0$ ,  $b_x < 0$ ,  $[\vec{a}, \vec{b}] < 0$ ) можно не выделять от обычных, разве что не выполнять проверку на угол вводимых треугольников из-за того, что она всегда будет успешно пройдена. Обработка объединяющей вершины ( $a_x < 0$ ,  $b_x < 0$ ,  $[\vec{a}, \vec{b}] > 0$ ) эквивалентна действием над парой обычных вершин для участка границы выше и ниже (рис. 2.3). Из двух пересекаемых вертикальной линией донных ребер в окрестности вершины одно удаляется из дерева, а текущая вершина ассоциируется с оставшимся в дереве ребром.

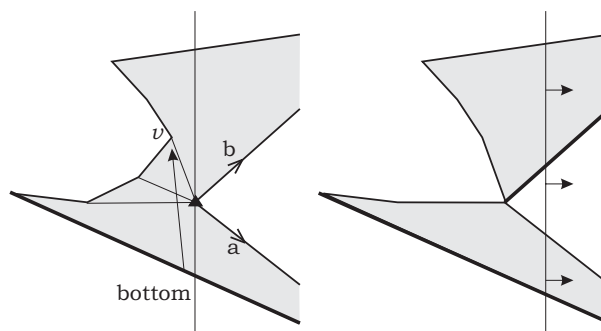


Рис. 2.4. Обработка расщепляющей вершины: слева — ситуация до обработки, показаны порождаемые треугольники, справа — ситуация после. Серым цветом выделена та область тела, которая еще не триангулирована. Bottom — ближайшее снизу полу-ребро, пересекаемое вертикальной линией,  $v$  — ассоциированная с ней вершина.

Действия, производимые в расщепляющей вершине ( $a_x > 0$ ,  $b_x > 0$ ,  $[\vec{a}, \vec{b}] > 0$ ), показаны на рис. 2.4. В дереве находится ближайшее к вершине

нижнее (bottom) полу-ребро, с которым хранится ссылка на последнюю обработанную на этом участке вершину  $v$ . Эта вершина «видна» из любой точки, лежащей на отрезке вертикальной линии между нижней и верхней границей текущей части многоугольника. Поэтому расщепляющая вершина соединяется новым ребром с  $v$ . Также кроме  $v$  из расщепляющей вершины могут быть видны соседние (и только соседние в силу выпуклости) с ней ребра текущей границы. Эти ребра и расщепляющая вершина служат основой для вводимых треугольников.

Операция сортировки имеет трудоемкость  $O(n \log n)$ . При проходе каждой вершины в сбалансированном бинарном дереве проводится поиск нижнего полу-ребра, после чего, возможно, производится обновление ассоциированных данных ребра, его удаление, замена или добавление ребра, лежащего непосредственно выше. Это требует  $O(\log n)$  операций для обработки одной вершины [52], или  $O(n \log n)$  — для всех вершин. Количество прочих действий, совершаемых в каждой вершине пропорционально количеству создаваемых треугольников. А так как общее количество треугольников в триангуляции есть  $O(n)$ , то так же ограничено и полное количество действий, не связанных с деревом пересекаемых ребер. Таким образом, сложность алгоритма есть  $O(n \log n)$ .

### 2.3. Оптимальная триангуляция Делоне

*Триангуляцией Делоне* (Delaunay) [42] набора точек называется такая триангуляция, которая максимизирует в лексикографическом смысле набор величин всех углов треугольников, отсортированный по возрастанию (т. е. в первую очередь максимизируется минимальный угол).

Критерием триангуляции Делоне является отсутствие внутри описанной окружности любого треугольника каких-либо других вершин (для ограниченной триангуляции рассматривается только часть окружности,

лежащая по ту же сторону границы, что и треугольник). Если вершины отсутствуют и на самой окружности, то триангуляция Делоне заданного набора точек определяется однозначно.

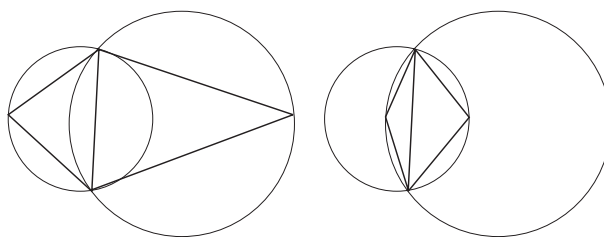


Рис. 2.5. Два принципиальных сценария отношения описанных окружностей и вершин смежных непересекающихся треугольников.

Рассмотрим пару смежных непересекающихся треугольников (пересечение совпадает с общим ребром треугольников). Легко видеть, что возможны лишь два сценария: либо обе описанные окружности треугольников не содержат всех вершин другого треугольника, либо обе они содержат все четыре вершины (рис. 2.5).

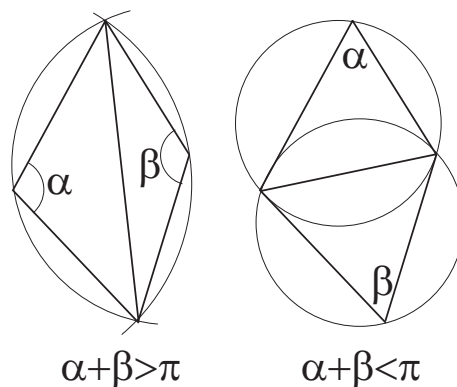


Рис. 2.6. Перещелкивание (flip) ребра между парой смежных треугольников.

На практике триангуляция Делоне обычно строится из произвольной триангуляции при помощи ряда операций «перещелкивания» (flip) ребра между парой смежных треугольников, для которых не выполнен критерий (рис. 2.6). До перещелкивания обе описанные окружности включают все вершины смежных треугольников. После перещелкивания описанные вокруг новых треугольников окружности по определению имеют минимальный радиус из всех окружностей, включающих все три вершины треуголь-

ника. Следовательно, после перещелкивания радиусы новых описанных окружностей становятся меньше обоих радиусов окружностей до перещелкивания. По теореме синусов синус угла равен отношению противолежащей стороны к удвоенному радиусу описанной окружности. Поэтому углы треугольников, расположенные против внешних ребер условного четырехугольника, (один из которых имел минимальную величину до изменения триангуляции) в результате перещелкивания увеличиваются. Углы против общего ребра треугольников (диагонали) равны сумме двух углов в другой конфигурации. Следовательно, операция перещелкивания для треугольников с невыполненным критерием Делоне увеличивает минимальный угол.

Алгоритм построения оптимальной триангуляции Делоне сводится к проверке всех внутренних ребер триангуляции и смежных с ними треугольников, а также ребер треугольников, порожденных в результате перещелкивания.

Все вершины двух смежных треугольников лежат на одной окружности, если сумма противолежащих общему ребру (хорде окружности) углов равна  $\pi$ . Если эта сумма больше  $\pi$ , то четвертая вершина попадает во внутренность окружности. Таким образом, критерием является выражение (рис. 2.6)

$$\alpha + \beta \leq \pi.$$

Непосредственное вычисление углов из координат вершин требует обращения к медленным обратным тригонометрическим функциям. Чтобы этого избежать, рассмотрим эквивалентное выражение

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta) \geq 0.$$

Синусы и косинусы углов равны отношению векторных и скалярных произведений векторов ребер треугольника, отнесенные к произведению длин этих векторов. Но так как сравнение ведется с нулем, то для проверки достаточно вычисления лишь простых скалярных и векторных произведений. Дополнительного выигрыша в скорости можно достичь, заметив, что

синусы углов треугольника всегда положительны. Поэтому если  $\cos \alpha \geq 0$  и  $\cos \beta \geq 0$ , то критерий выполнен и, наоборот, если  $\cos \alpha < 0$  и  $\cos \beta < 0$ , то критерий нарушен.

Проверка критерия существенно затрудняется конечной точностью вычислений в компьютере и наличием ошибок округления. Например, когда  $\sin \alpha \cos \beta$  и  $\sin \beta \cos \alpha$  примерно равны по модулю и противоположны по знаку, то знак неравенства может быть определен ошибочно. Это может привести к тому, что алгоритм заикнется и будет выполнять перещелкивания в соседних парах треугольников до бесконечности. Чтобы избежать этого, вычисления можно проводить с большей точностью, что отрицательно скажется на производительности. В статье [51] исследуется этот и другие геометрические предикаты и показывается, как избежать ошибок и существенных потерь производительности, используя так называемую адаптивную точность вычислений. В данной работе для избежания заикливания использовалась проверка

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha > -\varepsilon. \quad (\varepsilon > 0)$$

В этом случае критерий Делоне может нарушаться, но только для пар треугольников, описанные окружности которых практически совпадают, что приводит к также достаточно качественной триангуляции.

## 2.4. Поддержание заданной плотности сетки

Автором был разработан алгоритм построения равномерной треугольной сетки, который исходит из заданной триангуляции тела, внося в нее минимальные изменения. В качестве исходной обычно берется триангуляция тела с предшествующего шага интегрирования, вершины которой смещены на произведение скорости тела в этих точках и величины шага интегрирования. Можно так определить порог на временной интервал между шагами (см. раздел 2.9), что даже после смещения триангуляция остается

невырожденной (никакие два треугольника не имеют пересечение большее их общего ребра).

Мелкость сетки и допустимая степень ее неравномерности определяются двумя числовыми параметрами алгоритма:  $l_{\min}^i > 0$  и  $\alpha > 1$  соответственно. Как будет доказано ниже алгоритм гарантирует, что (при отсутствии слишком острых углов с внутренней стороны любой границы области [53]) для всех треугольников в сетке выполняются условия на их минимальный и максимальный размеры (теорема 1).

Минимальность вносимых изменений в сетку (появление и удаление вершин) обеспечивается за счет увеличения параметра  $\alpha$  (в расчетах использовалось  $\alpha = 1.1$ ). Идея заключается в том, что каждое ребро в триангуляции может иметь длину от некоторого минимального размера  $l_{\min}$  до размера большего в  $2\alpha$  раз. При этом допустимые пределы на размеры объектов сетки увеличиваются за счет ее равномерности. В результате растяжения тела вводятся новые ребра длиной не меньше  $\alpha l_{\min}$ . Если бы размер максимально допустимого ребра не превосходил более чем вдвое размер минимального ребра, то введение дополнительных вершин могло породить слишком короткие ребра. Когда растяжение тела сменится сжатием (например, в случае малых колебаний тела), то у нового ребра будет некоторый запас уменьшения длины, прежде чем его потребуется удалить из триангуляции.

Отличие предлагаемого алгоритма от уже известных способов построения сетки [53] заключается в ориентации на расчет эволюционных процессов, что подразумевает создание сетки близкой к равномерной. Также при расчете по явным сеточно-характеристическим схемам оказывается важным наличие нижней границы на высоту в любом треугольнике сетки (см. главу 5).

Алгоритм поддержания заданной плотности сетки состоит из следующих шагов:

1. Построение триангуляции Делоне из данной изначально и поддержание этого свойства в дальнейшем.
2. Сокращение граничных вершин до тех пор, пока имеются граничные ребра короче  $l_{\min}^b < l_{\min}^i$ .
3. Введение дополнительных вершин в центрах граничных ребер длиннее  $l_{\max}^b = 2\alpha l_{\min}^b$ .
4. Сокращение внутренних вершин, одно из ребер которых короче  $l_{\min}^i$ .
5. Введение новых внутренних вершин в центрах описанных окружностей треугольников сетки, если их радиус больше  $R_{\max}^i = \alpha l_{\min}^i$ , а центр попадает внутрь тела.
6. Проверка границы триангуляции на наличие в ней треугольника, сразу два ребра которого являются граничными, а высота меньше  $h_{\min}^b$ . В случае обнаружения таких треугольников в их окрестности вводятся (и, возможно, удаляются) дополнительные внутренние вершины, чтобы обновленная триангуляция Делоне более не включала подобных вырожденных треугольников. Практика показывает, что вероятность их возникновения крайне низка и данный шаг алгоритма можно при желании опускать.

Величины  $l_{\min}^b$ ,  $l_{\max}^b$ ,  $h_{\min}^b$  являются функциями  $l_{\min}^i$ ,  $\alpha$  и будут определены ниже. Рассмотрим наиболее сложные не описанные выше шаги алгоритма подробнее.

#### 2.4.1. Сокращение граничных вершин

Простейшая реализация шага 2 алгоритма не представляет никаких затруднений. Необходимо лишь удалять одну из вершин слишком коротких граничных ребер до тех пор, пока на границе тела не останется ни одного

короткого ребра. Недостаток такого пути проявляется в расчете контактного взаимодействия нескольких тел (глава 3). Дело в том, что в результате удаления вершин на вогнутой границе площадь тела может немного увеличиться, и оно «залезет» на контактирующий с ним объект.

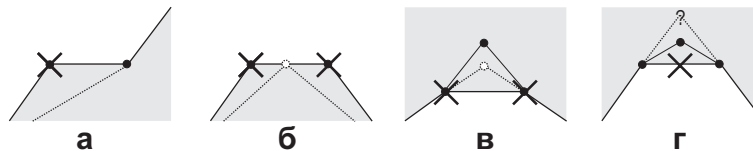


Рис. 2.7. Необходимые действия для сокращения граничного ребра без увеличения площади тела в зависимости от выпуклости или вогнутости тела в окрестности. Черными точками показаны существующие вершины, белыми точками — добавляемые, крестиками — удаление вершин или отдельных ребер.

Чтобы избежать увеличения площади тела в следствие сокращения граничных вершин предлагается исследовать окрестность короткого граничного ребра и действовать одним из перечисленных способов. Если в районе одной из граничных вершин тело выпукло, а в районе другой — вогнуто (рис. 2.7, а), то удаляется «выпуклая» вершина. Если тело выпукло в окрестности обеих вершин (рис. 2.7, б), то они удаляются, но, чтобы сокращение площади не было чрезмерным, вводится новая вершина в центре бывшего граничного ребра. Когда тело вогнуто, то для принятия решения необходимо определить, попадает ли точка пересечения продленных двух соседних граничных ребер внутрь треугольника, гранью которого является короткое граничное ребро. Если да (рис. 2.7, в), то также удаляются обе вершины и вводится одна в исследованной точке пересечения. Если нет (рис. 2.7, г), то удаляется лишь только короткое ребро и содержащий его треугольник, а два прочих ребра удаленного треугольника становятся граничными.

С другой стороны, сокращение площади при выравнивании плотности сетки на границе не компенсируется другими процессами, и при моделировании продолжительных динамических задач тела могут стать заметно меньше в размерах. Если такая трудность возникает, то необходимо



уменьшить мелкость сетки, и тогда потери площади также сократятся.

## 2.5. Обоснование корректности алгоритма

Разобьем анализ алгоритма на формулировку и доказательство ряда утверждений.

**Утверждение 1.** *В триангуляции Делоне вообще и в построенной сетке, в частности, у любой вершины всегда есть ребро, соединяющее ее с наиболее близкой другой вершиной.*

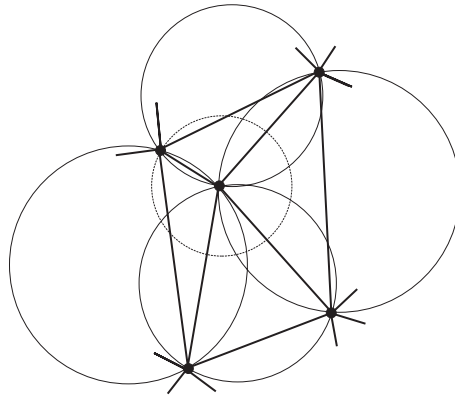


Рис. 2.8. Произвольная вершина сетки со всеми смежными треугольниками. Сплошные описанные вокруг треугольников окружности очерчивают зону, где не могут присутствовать другие вершины в триангуляции Делоне. Пунктирная окружность с центром в данной вершине имеет радиус равный самому короткому ее ребру и полностью содержится внутри описанных окружностей.

*Доказательство.* Все точки, расположенные к данной вершине ближе, чем длина ее самого короткого ребра, находятся внутри объединения описанных окружностей вокруг соседних с вершиной треугольников (рис. 2.8). Применяя критерий триангуляции Делоне, приходим к сформулированному утверждению.  $\square$

**Утверждение 2.** *После выполнения шага 4 алгоритма расстояние между любой вершиной сетки, не лежащей на границе, и любой другой вершиной сетки не менее  $l_{\min}^i$ . Это свойство поддерживается на последующих шагах.*

*Доказательство.* Шаг 4 алгоритма устраняет в сетке все внутренние вершины, имеющие ребра длиннее  $l_{\min}^i$ . Следовательно, длина самого короткого ребра у внутренних вершин не меньше  $l_{\min}^i$ . Доказательство вытекает из утверждения 1.  $\square$

Это утверждение можно было бы перенести на длину любого внутреннего ребра, если бы не существовало внутренних ребер, обе вершины которых принадлежат границе. Справедливость утверждения в таком случае зависит от состоятельности контуров тел, поданных на вход алгоритма. Необходимо, чтобы контуры не приближались друг к другу на расстояние менее  $l_{\min}^i$ , а также не имели слишком острых внутренних углов (подробнее в подразделе 2.7.1). При тех же условиях расстояние от любой граничной вершины до ближайшего своего соседа не меньше  $l_{\min}^b$ .

Далее будем называть *внутренним треугольником* сетки такой треугольник, не более одной вершины которого принадлежит границе тела.

**Утверждение 3.** Если  $l_{\max}^b \leq 2l_{\min}^i$ , то при выполнении шага 5 алгоритма центр описанной окружности любого внутреннего треугольника лежит внутри тела.

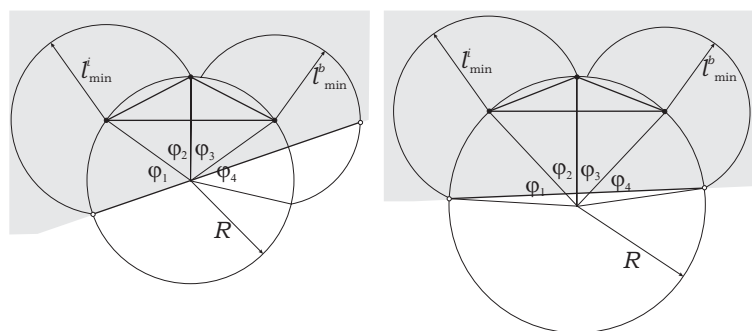


Рис. 2.9. Внутренний треугольник сетки, центр описанной окружности которого лежит за пределами тела (обозначено серым цветом). Никакие вершины сетки не могут располагаться внутри представленных окружностей по свойствам триангуляции Делоне. Размер и положение минимального граничного ребра зависит от  $\varphi_i$ :  $\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i > \frac{\pi}{2}$  (слева) и  $\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$  (справа).

*Доказательство.* Предположим противное: в текущем состоянии сетки, являющейся триангуляцией Делоне, нашелся внутренний треугольник, центр

описанной окружности которого лежит за пределами тела (рис. 2.9). По свойствам триангуляции Делоне никакие другие вершины сетки не могут находиться внутри этой описанной окружности, а также внутри окружностей с центрами в вершинах треугольника и радиусами  $l_{\min}^i$  или  $l_{\min}^b$  в зависимости от типа вершины. Это накладывает ограничение снизу на размер граничного ребра, которое пересекается описанной окружностью треугольника.

Если радиус описанной окружности достаточно большой, то имеет место ситуация, представленная на рис. 2.9 справа, и наиболее короткое граничное ребро имеет концы в точках пересечения указанных окружностей. Углы секторов, образованных линиями, соединяющими вершины треугольника и эти точки с центром описанной окружности, обозначены как  $\varphi_i$ . Критерием «достаточно большого радиуса» является условие  $\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$ . Если учесть, что расстояние между точками не меньше  $l_{\min}^i$  для внутренних узлов и  $l_{\min}^b$  для граничных, то

$$\sin \frac{\varphi_{1,2,3}}{2} \geq \frac{l_{\min}^i}{2R}, \quad \sin \frac{\varphi_4}{2} \geq \frac{l_{\min}^b}{2R}.$$

Условие на длину пересекаемого граничного ребра можно записать следующим образом

$$l^b \geq 2R \cdot \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i > \frac{\pi}{2}, \\ \sin(\frac{1}{2} \sum_i \varphi_i), & \text{если } \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Минимум выражения  $l^b = 2R$  достигается, когда треугольник имеет такой радиус, что

$$\sin \frac{\varphi_{1,2,3}}{2} = \frac{l_{\min}^i}{2R}, \quad \sin \frac{\varphi_4}{2} = \frac{l_{\min}^b}{2R}, \quad \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$3 \arcsin \frac{l_{\min}^i}{2R} + \arcsin \frac{l_{\min}^b}{2R} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{l_{\min}^i}{2R} < \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow l_{\max}^b \geq l^b = 2R > 2l_{\min}^i.$$

Получено противоречие с условиями утверждения.  $\square$

Достаточное условие, фигурирующее в условии утверждения, может быть ослаблено, но для данного исследования это не потребуется.

**Утверждение 4.** *Выполнение шага 5 алгоритма всегда завершается, и если  $l_{\max}^b \leq 2l_{\min}^i$ , то длины ребер всех внутренних треугольников после завершения не превышают  $2R_{\max}^i$ .*

*Доказательство.* Введение новых вершин не может продолжаться до бесконечности, поскольку вершины сетки не могут находиться на расстоянии меньшем чем  $l_{\min}^i$  друг от друга. Поэтому для заданного  $l_{\min}^i$  есть предел сверху на количество вершин, которые могут быть расположены в теле заданной формы и размеров.

Если  $l_{\max}^b \leq 2l_{\min}^i$ , то согласно утверждению 3 не может найтись внутреннего треугольника, описанная окружность которого имеет центр за пределами тела. Поэтому после завершения шага 5 алгоритма не остается внутренних треугольников, радиус описанной окружности которых более  $R_{\max}^i$ , и, следовательно, ни одно ребро внутренних треугольников не длиннее  $2R_{\max}^i$ . □

## 2.6. Размеры внутренних треугольников сетки

**Теорема 1.** После окончания работы алгоритма при условии  $l_{\max}^b \leq 2l_{\min}^i$  справедливы следующие оценки для внутренних треугольников сетки:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{3}}l_{\min}^i &\leq R^i \leq \alpha l_{\min}^i, \\
 l_{\min}^i &\leq l^i \leq 2\alpha l_{\min}^i, \\
 \frac{\pi}{6} \approx \arcsin \frac{1}{2\alpha} &\leq \varphi^i \leq \pi - 2 \arcsin \frac{1}{2\alpha} \approx \frac{2\pi}{3}, \\
 3 = \left\lceil \frac{2\pi}{\varphi_{\max}^i} \right\rceil &\leq n^i \leq \left\lfloor \frac{2\pi}{\varphi_{\min}^i} \right\rfloor \geq 12, \\
 \frac{\sqrt{4\alpha^2 - 1}}{4\alpha^2} (l_{\min}^i)^2 &\leq S^i \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \alpha^2 (l_{\min}^i)^2, \\
 3l_{\min}^i &\leq p^i \leq 3\sqrt{3}\alpha l_{\min}^i, \\
 \frac{1}{2\alpha} l_{\min}^i &\leq h^i \leq \left( \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha^2 - 1} \right) l_{\min}^i, \\
 \frac{4\alpha^2 - 1}{4\alpha^2(\sqrt{4\alpha^2 - 1} + 2\alpha^3)} l_{\min}^i &\leq r^i \leq \frac{\alpha}{2} l_{\min}^i.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $R$  — радиус описанной окружности вокруг треугольника,  $l$  — длина ребра,  $\varphi$  — угол треугольника,  $n$  — число смежных треугольников у вершины,  $S$  — площадь треугольника,  $p$  — периметр треугольника,  $h$  — высота, опущенная из произвольной вершины треугольника,  $r$  — радиус вписанной окружности. Причем эти оценки являются точными и могут быть достигнуты.

*Доказательство.* Оценки для длины ребра и ограничение на радиус описанной окружности сверху были получены в утверждениях 2, 4.

Минимальный радиус описанной окружности для внутреннего треугольника сетки, очевидно, достигается для правильного треугольника, все ребра которого имеют минимально возможную длину  $l_{\min}^i$ . Записывая теорему косинусов для «трети» этого правильного треугольника, получаем уравнение на радиус:  $(l_{\min}^i)^2 = 2(R_{\min}^i)^2(1 - \cos \frac{2\pi}{3})$ , откуда находим  $R_{\min}^i = \frac{1}{\sqrt{3}}l_{\min}^i$ . Следует отметить, что треугольник, вписанный в окруж-

ность минимального радиуса, — единственен (с точностью до произвольного сдвига и поворота), тогда как с увеличением радиуса количество форм вписанных треугольников возрастает. Поэтому экстремальные характеристики треугольников в большинстве случаев следует искать либо у единственного минимального правильного треугольника, либо у одного из треугольников, вписанных в окружность максимального радиуса.

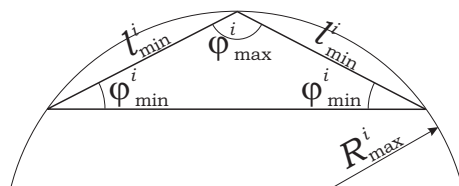


Рис. 2.10. Наиболее вырожденный внутренний треугольник сетки: два его угла равны минимальному, третий — максимальному. Этот треугольник также имеет минимальную площадь, высоту и радиус вписанной окружности.

Возможные углы в треугольнике сетки можно оценить из теоремы синусов, согласно которой отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, минимальный угол достигается в треугольнике, вписанном в окружность максимального радиуса  $R_{\max}^i$ , против стороны минимальной длины  $l_{\min}^i$ :  $\sin \varphi_{\min}^i = \frac{l_{\min}^i}{2R_{\max}^i} = \frac{1}{2\alpha}$ . На рис. 2.10 приведен треугольник, имеющий сразу два минимальных угла. В нем же достигается и максимальный угол  $\varphi_{\max}^i = \pi - 2 \arcsin \frac{1}{2\alpha}$ . Для использованного в данной работе значения  $\alpha = 1.1$  получается  $\varphi_{\min}^i \approx 27^\circ$ ,  $\varphi_{\max}^i \approx 126^\circ$ .

Минимальные и максимальные углы треугольников непосредственно отвечают на вопрос возможного числа смежных треугольников у одной вершины:  $n_{\min}^i = \lceil \frac{2\pi}{\varphi_{\max}^i} \rceil$ ,  $n_{\max}^i = \lfloor \frac{2\pi}{\varphi_{\min}^i} \rfloor$ . Рис. 2.11 демонстрирует, что конфигурации с таким количеством смежных треугольников удовлетворяют условиям Делоне.

Определение разброса площадей треугольников сетки. Площадь треугольника есть половина произведения длины одной его стороны  $a$  на высоту  $h$ , опущенную из противоположащей стороне вершины. Среди треуголь-

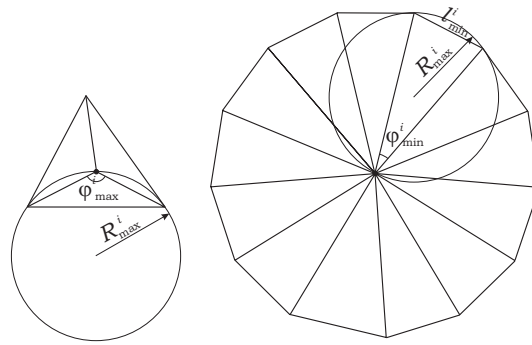


Рис. 2.11. Минимальное и максимальное число смежных треугольников у одной вершины. Описанные окружности не включают вершины других треугольников, поэтому данное расположение треугольников допустимо в триангуляции Делоне.

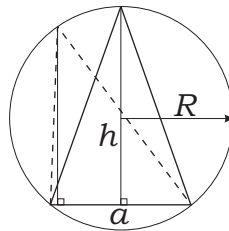


Рис. 2.12. Для вписанных в одну окружность треугольников максимальная площадь будут у одного из равнобедренных треугольников.

ников, вписанных в окружность радиуса  $R$ , максимальную площадь имеет один из равнобедренных треугольников (рис. 2.12):

$$a = 2\sqrt{R^2 - (h - R)^2} = 2\sqrt{2hR - h^2},$$

$$S = \frac{1}{2}ah = \sqrt{2h^3R - h^4},$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial h} = 6h^2R - 4h^3.$$

Приравнивая производную от площади к нулю, узнаем, что максимальная площадь достигается при  $h = \frac{3}{2}R$ ,  $a = \sqrt{3}R$ , т. е. в правильном равностороннем треугольнике,  $S_{\max}^i = \frac{3\sqrt{3}}{4}(R_{\max}^i)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\alpha^2(l_{\min}^i)^2$ .

Минимальная площадь может быть либо у единственного треугольника, вписанного в окружность минимального радиуса  $R_{\min}^i$ :  $S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}(R_{\min}^i)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(l_{\min}^i)^2$ , либо у наиболее вырожденного треугольника, вписанного в окружность максимального радиуса (рис. 2.10):  $S_2 = \frac{1}{2} \sin \varphi_{\max}^i (l_{\min}^i)^2$ . Си-

нус максимального угла можно выписать явно:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_{\max}^i &= \sin(\pi - 2 \arcsin \frac{1}{2\alpha}) = \sin(2 \arcsin \frac{1}{2\alpha}) = \\ &= 2 \sin(\arcsin \frac{1}{2\alpha}) \cos(\arcsin \frac{1}{2\alpha}) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{1}{4\alpha^2}}.\end{aligned}$$

При  $\alpha = 1$  обе площади совпадают:  $S_1 = S_2$ , при  $\alpha > 1$  — меньше  $S_2$ .

Минимальный периметр треугольника, очевидно, равен трем минимальным длинам ребра:  $p_{\min}^i = 3l_{\min}^i$ . Для определения максимального периметра рассмотрим треугольник с углами  $\varphi, \psi, \pi - \varphi - \psi$ . Согласно теореме синусов можем записать

$$(\varphi, \psi) = \arg \max_{\varphi, \psi} p = \arg \max_{\varphi, \psi} \left( \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{1}{\sin \psi} + \frac{1}{\sin(\pi - \varphi - \psi)} \right).$$

Для отыскания максимума приравняем производные выражения по  $\varphi$  и  $\psi$  нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{\cos(\pi - \varphi - \psi)}{\sin^2(\pi - \varphi - \psi)} &= 0, \\ \frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi} - \frac{\cos(\pi - \varphi - \psi)}{\sin^2(\pi - \varphi - \psi)} &= 0.\end{aligned}$$

Функция  $\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$  убывает на интервале  $(0; \pi)$ , поэтому из равенства функций  $\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi}$  следует равенство аргументов  $\varphi = \psi = \pi - \varphi - \psi = \frac{\pi}{3}$ . Таким образом, максимальный периметр достигается в правильном треугольнике, вписанном в максимальную окружность:  $p_{\max}^i = 3\sqrt{3}R_{\max}^i = 3\sqrt{3}\alpha l_{\min}^i$ .

Высота треугольника равна произведению длины одной из его сторон на синус прилежащего к ней угла, который можно выразить, используя теорему синусов, через длину противоположной стороны и радиус описанной окружности:

$$h = \frac{l_1 l_2}{2R}.$$

Поэтому минимальная высота будет в треугольнике, имеющем два наименьших ребра и вписанном в окружность максимального радиуса (рис. 2.10):

$h_{\min}^i = \frac{1}{2\alpha} l_{\min}^i$ . Наибольшая высота достигается в равнобедренном треугольнике, имеющем форму иглы, в котором основание имеет минимальную



длину. Используем формулы, полученные при исследовании площади треугольников:

$$l_{\min}^i = 2\sqrt{2h_{\max}^i R_{\max}^i - (h_{\max}^i)^2},$$

$$h_{\max}^i = R_{\max}^i + \frac{1}{2}\sqrt{4(R_{\max}^i)^2 - (l_{\min}^i)^2} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - 1}\right) l_{\min}^i.$$

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению удвоенной его площади к периметру. Очевидно, что максимальным радиус будет у правильного треугольника, вписанного в наибольшую окружность:

$$r_{\max}^i = \frac{2S_{\max}^i}{3\sqrt{3}R_{\max}^i} = \frac{\alpha}{2}l_{\min}^i.$$

Минимальный радиус вписанной окружности достигается в треугольнике с рис. 2.10:

$$r_{\min}^i = \frac{2S_{\min}^i}{2l_{\min}^i + \frac{2R_{\max}^i}{\sin \varphi_{\max}^i}} = \frac{\frac{\sqrt{4\alpha^2-1}}{2\alpha^2}(l_{\min}^i)^2}{\left(2 + \frac{4\alpha^3}{\sqrt{4\alpha^2-1}}\right)l_{\min}^i} = \frac{4\alpha^2 - 1}{4\alpha^2(\sqrt{4\alpha^2 - 1} + 2\alpha^3)} l_{\min}^i.$$

□

Некоторые оценки этой теоремы были также экспериментально проверены вычислением минимальных и максимальных характеристик треугольников порожденных сеток.

## 2.7. Допустимые размеры длины граничного ребра

Рассмотрим в данном разделе такие треугольники, одно из ребер которых является граничным. Размеры (углы и т. д.) этих треугольников будем снабжать верхним индексом  $b$ .

Если на границе области построения сетки разрешить тот же диапазон длин для ребер треугольников, т. е. допустить  $l^b > 2l_{\min}^i$ , то возникает ситуация, когда внутренний узел сетки может приблизиться к ее границе сколь угодно близко (рис. 2.13, слева). Минимальное расстояние от внутреннего узла до границы обуславливает шаг интегрирования (см. главу 5)

при решении динамических уравнений, поэтому сокращение расстояния, тем более неконтролируемое сокращение, крайне нежелательно. Это с неизбежностью приводит к тому, что пределы размеров для граничных ребер должны быть снижены так, чтобы внутренний узел всегда находился на известном минимальном удалении от границы. Отношение максимального и минимального размеров граничных ребер необходимо оставить таким же ( $2\alpha$ ), как для внутренних ребер по причинам, изложенным в разделе 2.4.

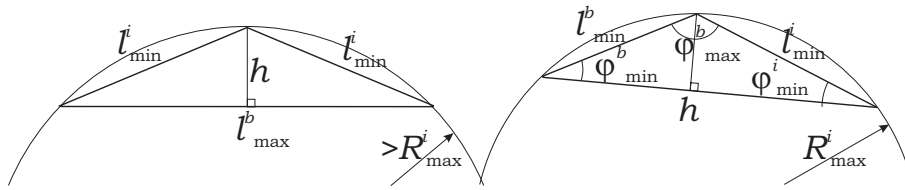


Рис. 2.13. Две причины уменьшения высоты приграничного треугольника по сравнению с минимальной высотой внутренних треугольников  $h_{\min}^i$ : превышение радиусом описанной окружности, центр которой лежит вне тела, порога  $R_{\max}^i$  (слева) и уменьшение длины граничного ребра (справа).

С другой стороны, сокращение  $l_{\min}^b$  приводит к уменьшению высоты в треугольниках даже тогда, когда радиус окружности не превышает предела (рис. 2.13, справа), хотя это и не так критично, как приближение внутренних узлов к границе.

В данной работе было решено выбрать пределы  $l_{\min}^b$ ,  $l_{\max}^b$  таким образом, чтобы минимальные высоты в обоих случаях, изображенных на рис. 2.13 были равны. Из ситуации, изображенной слева:

$$(h_{\min}^b)^2 = (l_{\min}^i)^2 - \frac{1}{4}(l_{\max}^b)^2.$$

Из ситуации, изображенной справа:

$$h_{\min}^b = \frac{l_{\min}^i l_{\min}^b}{2R_{\max}^i} = \frac{l_{\min}^b}{2\alpha} = \frac{l_{\max}^b}{4\alpha^2}.$$

Подставляя выражения одно в другое, получаем

$$h_{\min}^b = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^4}} l_{\min}^i, \quad l_{\min}^b = \frac{2\alpha}{\sqrt{1+4\alpha^4}} l_{\min}^i, \quad l_{\max}^b = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{1+4\alpha^4}} l_{\min}^i.$$

Заметим, что величина  $l_{\max}^b$  при любом  $\alpha$  удовлетворяет условию теоремы 1.

Следовательно, если от любой вершины в сетке сместиться на расстояние не большее  $h_{\min}^b$  (только внутрь области для граничных вершин), то конечная точка окажется внутри одного из треугольников, смежных с исходной вершиной. Для треугольников с двумя граничными ребрами это непосредственно проверяется последним шагом алгоритма.

### 2.7.1. Минимальный угол границы тела

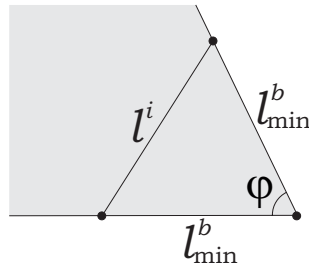


Рис. 2.14. Минимальный угол границы тела, при котором выполняется условие на допустимый размер внутреннего ребра.

Любой алгоритм построения треугольной сетки налагает определенное ограничение на минимальный угол области, в которой строится сетка [53]. Не является исключением и предлагаемый в этом разделе алгоритм. Если рассмотреть треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и углом  $\varphi$  против стороны  $a$ , то справедливо равенство (теорема косинусов):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \varphi.$$

Применяя это равенство к случаю, изображенному на рис. 2.14, приходим к неравенству

$$\frac{\sqrt{1 + 4\alpha^4}}{2\alpha} l_{\min}^b = l_{\min}^i \leq l^i = 2l_{\min}^b (1 - \cos \varphi) \Rightarrow \cos \varphi \leq 1 - \frac{\sqrt{1 + 4\alpha^4}}{4\alpha}.$$

Поскольку  $\alpha > 1$ , то  $\varphi > 63.8^\circ$ . Для использовавшегося в расчетах  $\alpha = 1.1$  необходимо  $\varphi > 66^\circ$ .

### 2.7.2. Обработка треугольников с двумя граничными ребрами

Выше было показано, что для внутренних треугольников сетки и треугольников, одно из ребер которых принадлежит границе, можно гарантировать, что любая их высота будет не меньше величины  $h_{\min}^b$ . Однако для треугольников, имеющих сразу два граничных ребра этот порог должен быть понижен.

Однако есть возможность не изменять оценку высоты, а проверять все подобные треугольники, и в случае обнаружения нарушения оценки, вносить соответствующие изменения в сетку. Именно это имеем место на 6-м шаге алгоритма.

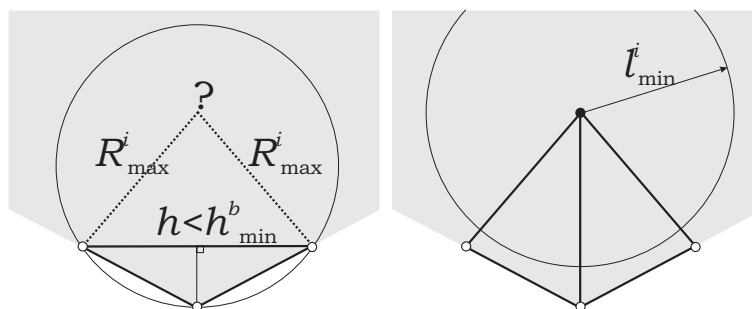


Рис. 2.15. Слева: треугольник с двумя граничными ребрами имеет слишком маленькую высоту; если точка, равноудаленная от вершин внутреннего ребра, находится внутри описанной окружности треугольника, то введение в ней новой вершины может исправить ситуацию. Справа: модифицированная сетка после добавления новой вершины, внутренние вершины из обозначенного круга должны быть удалены.

На рис. 2.15 слева представлен треугольник, для которого нарушается оценка высоты. Если удастся ввести внутри его описанной окружности новую внутреннюю вершину так, что она будет удалена не менее чем на  $R_{\max}^i$  от вершин треугольника, то в обновленной триангуляции Делоне проблемный треугольник исчезнет (рис. 2.15 справа). При этом потребуются удалить все внутренние вершины, расположенные ближе чем  $l_{\min}^i$  от вновь вводимой, а также повторить шаг 5 алгоритма в окрестности, чтобы восстановить возможно нарушенную введение вершины сетку.

Рассмотрим, как часто возникают подобные вырожденные треуголь-

ники и критерии возможности исправления сетки. Оговоримся, что будем исследовать вопрос только для разумных очертаний тела, в частности, без резких изломов (см. подраздел 2.7.1) и областей утончения до величин порядка  $l_{\min}^i$ .

**Утверждение 5.** *Если треугольник с двумя граничными ребрами имеет слишком маленькую высоту:  $h < h_{\min}^b$ , то оба его граничных ребра короче  $l_{\min}^i$ , а приграничный угол треугольника (угол излома границы в этом месте) лежит в диапазоне*

$$2 \arccos \frac{1}{2\alpha} = 2 \arccos \frac{h_{\min}^b}{l_{\min}^b} \leq \varphi \leq \pi - 2 \arcsin \frac{l_{\min}^b}{2R_{\max}^i} = \pi - 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + 4\alpha^4}}.$$

*Доказательство.* Поскольку мы считаем, что очертания тела лишены чересчур острых углов, то исследуемый треугольник должен иметь центр описанной окружности внутри тела, и, следовательно ее радиус не превосходит  $R_{\max}^i$ . В начале раздела было показано, что в любом треугольнике, вписанном в такую или меньшую окружность и имеющем лишь одну сторону короче  $l_{\min}^i$ , высота всегда удовлетворяет условию  $h \geq h_{\min}^b$ . Следовательно, чтобы  $h < h_{\min}^b$ , оба граничных ребра должны быть короче  $l_{\min}^i$ .

Наибольший угол достигается, когда треугольник вписан в окружность максимального радиуса  $R_{\max}^i$ , и в нем имеется два минимальных угла против сторон длиной  $l_{\min}^b$ :

$$\varphi_{\max} = \pi - 2 \arcsin \frac{l_{\min}^b}{2R_{\max}^i}.$$

Наименьший угол треугольника, когда еще  $h \leq h_{\min}^b$ , имеет место также при длине двух граничных ребер  $l_{\min}^b$ :

$$\cos \frac{\varphi_{\min}}{2} = \frac{h_{\min}^b}{l_{\min}^b}.$$

□

Если считать размеры всех граничных ребер независимыми равномерно распределенными случайными величинами на отрезке  $[l_{\min}^b; l_{\max}^b]$ , то

вероятность выполнения необходимого условия на ребра вырожденного треугольника для  $\alpha = 1.1$  менее 3%. К тому же, следует еще произвести умножение на вероятность угла границы также быть в диапазоне  $[126^\circ; 135^\circ]$ . Если моделируемое тело имеет гладкие границы, а углы являются лишь следствием дискретизации, то появления вырожденных треугольников можно полностью избежать, лишь уменьшив мелкость сетки. Поэтому 6-й шаг алгоритма допустимо пропускать без значимых потерь для численного метода, что было подтверждено экспериментально.

**Утверждение 6.** Если  $\alpha < \sqrt{2 + \frac{\sqrt{11}}{2}} < 1.91$ , то предложенное введение новой внутренней вершины приводит к исключению из триангуляции Делоне граничного треугольника с  $h < h_{\min}^b$ .

*Доказательство.* Как было сказано выше, устранение проблемного треугольника возможно тогда, когда вводимая вершина, отстоящая от вершин треугольника на расстояние  $R_{\max}^i$ , оказывается внутри описывающей треугольник окружности. Следовательно, для доказательства будет достаточно убедиться, что это так для треугольника с окружностью минимально возможного радиуса и минимальной величиной тупого угла. Этот треугольник уже встречался в предшествующем утверждении, где отмечалось минимальное свойство его граничного угла. Найдем его удвоенный радиус, поделив длину меньшей стороны на синус противолежащего ей острого угла:

$$2R = \frac{l_{\min}^b}{\sin \frac{\pi - \varphi_{\min}}{2}} = \frac{l_{\min}^b}{\cos \frac{\varphi_{\min}}{2}} = \frac{(l_{\min}^b)^2}{h_{\min}^b} = l_{\max}^b.$$

Длина ребра  $x$  равнобедренного треугольника, который имеет общее основание с граничным треугольником и вписан в ту же окружность равна (рис. 2.16)

$$x = 2R \sin \psi = 2R \sin \frac{\varphi_{\min}}{2} = l_{\max}^b \sqrt{1 - \frac{1}{4\alpha^2}} = \frac{2\alpha\sqrt{4\alpha^2 - 1}}{\sqrt{1 + 4\alpha^4}} l_{\min}^i.$$

Добавленная новая внутренняя вершина попадает внутрь окружности, ес-

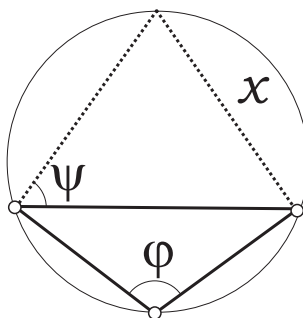


Рис. 2.16. К исследованию максимальной длины ребра  $x$  равнобедренного треугольника, дополняющего данный и содержащийся в его описанной окружности.

ли  $R_{\max}^i < x$ ,

$$4(4\alpha^2 - 1) > 1 + 4\alpha^4 \Leftrightarrow 4(\alpha^2)^2 - 16\alpha^2 + 5 < 0.$$

Решение квадратичного неравенства

$$2 - \frac{\sqrt{11}}{2} < \alpha^2 < 2 + \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Так как всегда  $\alpha > 1$ , то дополнительным ограничением, необходимым для обеспечения исправления вырожденных граничных треугольников является  $\alpha < \sqrt{2 + \frac{\sqrt{11}}{2}}$ .  $\square$

## 2.8. Трудоемкость поиска треугольника

При переинтерполяции функции на новую сетку, а также при реализации сеточно-характеристического метода возникает потребность отыскания треугольника, содержащего точку, отстоящую на заданное смещение  $\vec{d}$  от другой точки, для которой известен включающий ее треугольник. Причем важно, чтобы операция поиска занимала как можно меньше машинного времени.

**Теорема 2.** *Описание равномерной сетки с помощью структур данных, представленных в разделе 2.1, позволяет осуществлять поиск за время  $O(|\vec{d}|/l_{\min}^i)$ .*

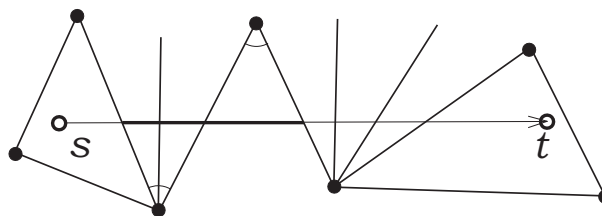


Рис. 2.17. Задача поиска треугольника, содержащего точку  $t$ , смещенную относительно начальной точки  $s$ , для которой известен включающий ее треугольник. Отдельно выделен участок пути между пересечением двух начальных ребер, исходящих из последовательных вершин с одной стороны пути.

*Доказательство.* Алгоритм поиска заключается в переходе от одного треугольника к следующему через ребра, которые пересекает отрезок от начальной до конечной точки (рис. 2.17). Определение стороны треугольника, которую пересекает путь может быть выполнено проверкой всех трех сторон, т. е. за константное время, также как и переход от одного треугольника к смежному через разделяющее их ребро. Таким образом, полное время поиска зависит только от количества треугольников или ребер, которые встретились на прямом пути от начальной до целевой точки.

Рассмотрим две последовательные вершины, расположенные с одной стороны пути, исходящие ребра из которых пересекаются во время поиска, а также третью вершину с другой стороны пути, соединенную ребрами с первыми двумя (рис. 2.17). Согласно теореме 1 угол между первым и последним ребром, исходящим из одной вершины, не меньше  $\varphi_{\min}^i$ , а расстояние между двумя вершинами не меньше  $l_{\min}^i$ . Следовательно, участок пути между местами пересечения первых ребер последовательной пары вершин (отмечен на рис.) не может быть короче  $l_{\min}^i \sin \varphi_{\min}^i = \Theta(l_{\min}^i)$ . Поэтому весь путь может быть разбит на  $O(|\vec{d}|/l_{\min}^i)$  таких участков. По той же теореме количество ребер, исходящих из одной вершины и пересекаемых во время движения по одному участку не превышает некоторой константы. □



## 2.9. Момент вырождения сетки при движении вершин с постоянной скоростью

При решении задач динамики с конечными деформациями в данной работе применялась лагранжева треугольная сетка, вершины которой двигались вместе с телом. Широко известно, что явные численные методы накладывают ограничение на максимальный шаг интегрирования. Оно безусловно учитывалось в данной работе, но кроме этого ограничения анализировалось и другое, имеющее исключительно сеточную природу. Если шаг интегрирования будет слишком большой, то некоторые треугольники по его прошествии окажутся вывернутыми, наедут друг на друга. При этом алгоритмы, обрабатывающие сетку не смогут работать с таким состоянием, поскольку нарушается состоятельность структур данных, например, при выворачивании ячеек, список исходящих из вершины ребер перестает быть отсортированным против часовой стрелки.

Поэтому необходимо выбирать временной шаг таким, чтобы сетка в течении него не успевала выродиться. В таком случае сохраняется возможность выполнить ее перестройку, исключив треугольники близкие к выворачиванию. В данной работе предполагалось, что между временными слоями, на которых численный метод обновляет решение в узлах сетки, вершины треугольников движутся с постоянной скоростью, равной рассчитанной скорости на прошедшем временном слое.

Рассмотрим произвольный треугольник (рис. 2.18) с координатами вершин  $\vec{r}_i$  и скоростями их движения  $\vec{v}_i$ . Если шаг интегрирования обозначить как  $\tau$ , то по его прошествии координаты вершин будут равны  $\vec{r}_i + \tau\vec{v}_i$ .

Критерием вырождения треугольника выберем уменьшение его площади в заданное число раз  $n$ , например, в десять раз. Запишем удвоенную площадь треугольника в момент времени  $\tau$ , используя  $z$ -компоненту век-

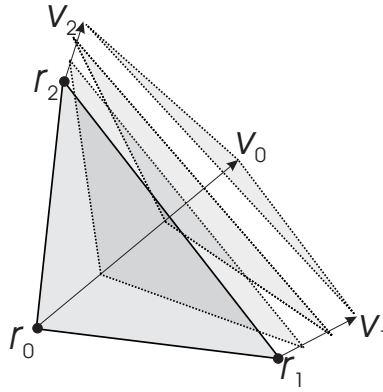


Рис. 2.18. Положение треугольника в начальный момент времени показано сплошной линией, стрелочки — скорости движения его узлов. Пунктиром нарисованы очертания этого же треугольника при различном выборе шага интегрирования.

торного произведения,

$$S(\tau) = [\vec{r}_1(\tau) - \vec{r}_0(\tau), \vec{r}_2(\tau) - \vec{r}_0(\tau)] = [\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \vec{v}_2 - \vec{v}_0]\tau^2 + \\ + ([\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{v}_2 - \vec{v}_0] + [\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0])\tau + [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0].$$

Искомое время  $\tau$  удовлетворяет условию

$$S(\tau) = \frac{S(0)}{n},$$

следовательно,  $\tau$  является наименьшим положительным корнем уравнения

$$a\tau^2 + b\tau + c = 0,$$

$$a = [\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \vec{v}_2 - \vec{v}_0], \quad b = [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{v}_2 - \vec{v}_0] + [\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0], \\ c = \frac{n-1}{n} [\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0].$$

Заметим, что при использованной нумерации вершин треугольника против часовой стрелки, свободный член  $c$  всегда больше нуля.

Если  $a = 0$ , то при  $b < 0$  решением будет  $\tau = -\frac{c}{b}$ , при  $b \geq 0$  ограничения на шаг интегрирования нет (треугольник остается неизменным, либо увеличивает свою площадь).

Если  $a \neq 0$ , то наличие ограничения определяется существованием корней уравнения в принципе. Если они есть ( $D = b^2 - 4ac > 0$ ), то  $\tau = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$  при любом знаке  $a$ .

На практике имея дело лишь с конечной точностью работы компьютера с действительными числами, чтобы избежать деления на очень малое число, проверку  $a$  на ноль следует заменить на сравнение  $a^2 \leq \varepsilon^2(\|\vec{v}_1 - \vec{v}_0\|^2 + \|\vec{v}_2 - \vec{v}_0\|^2)$ , где  $\varepsilon$  — точность представления действительных чисел в компьютере (разница между наименьшим превосходящим единицу числом и единицей). Проверку на отрицательность знака  $b$  в таком случае также стоит заменить на сравнение  $b < -\varepsilon c$ .

## 2.10. Примеры работы алгоритмов

В качестве наглядной демонстрации работы изложенных алгоритмов триангулирования и построения сетки используем ряд примеров. На рис. 2.19 приведены последовательные этапы создания сетки по заданным контурам неодносвязного тела.

На рис. 2.20 приведен ряд все более мелких сеток для квадратной области. Каждая крупная сетка используется в качестве начального приближения, в которое алгоритм лишь добавляет новые вершины.

Алгоритмы поддержания заданной плотности сетки подбирались таким образом, чтобы при лагранжевом движении ее вершин в сетку вносились минимальные изменения. Для тестирования этого свойства в изначально прямоугольной области строилась сетка, каждый узел которой затем смещался вниз на небольшую величину, являющуюся функцией  $x$ -координаты узла. При этом в центральной области смещения были наиболее значительны. Именно там алгоритм перестройки сетки выполнял наибольшее количество изменений, тогда как в отдаленных от центра участках сетка практически не менялась (рис. 2.21), что подтверждает локальность вносимых в нее изменений.

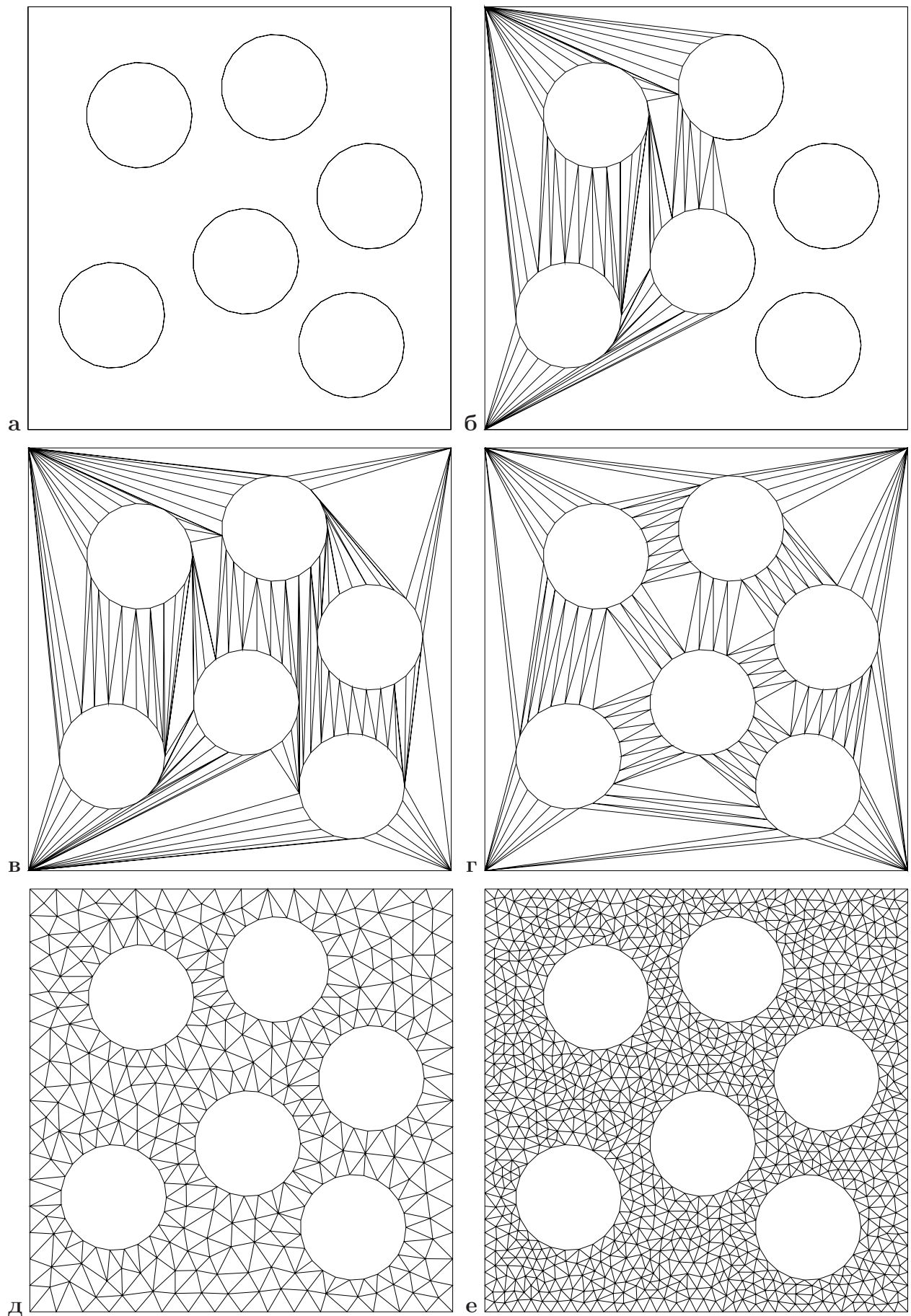


Рис. 2.19. Порядок построения сетки в многоугольнике с полостями: а — исходные контуры, б — промежуточный этап триангулирования, в — после окончания триангулирования, г — оптимальная триангуляция Делоне, д, е — итоговые сетки различной мелкости.

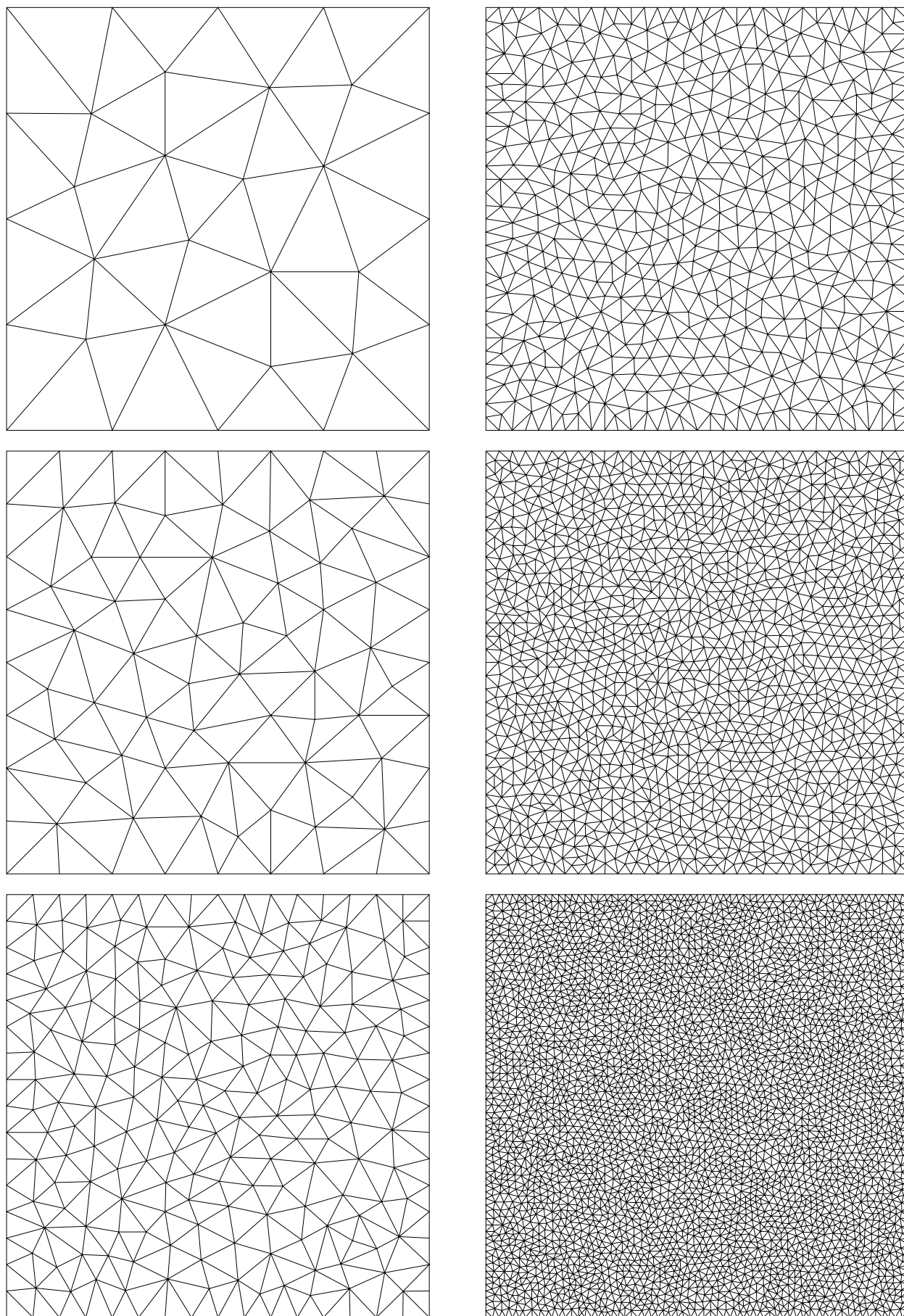


Рис. 2.20. Последовательное измельчение сетки.

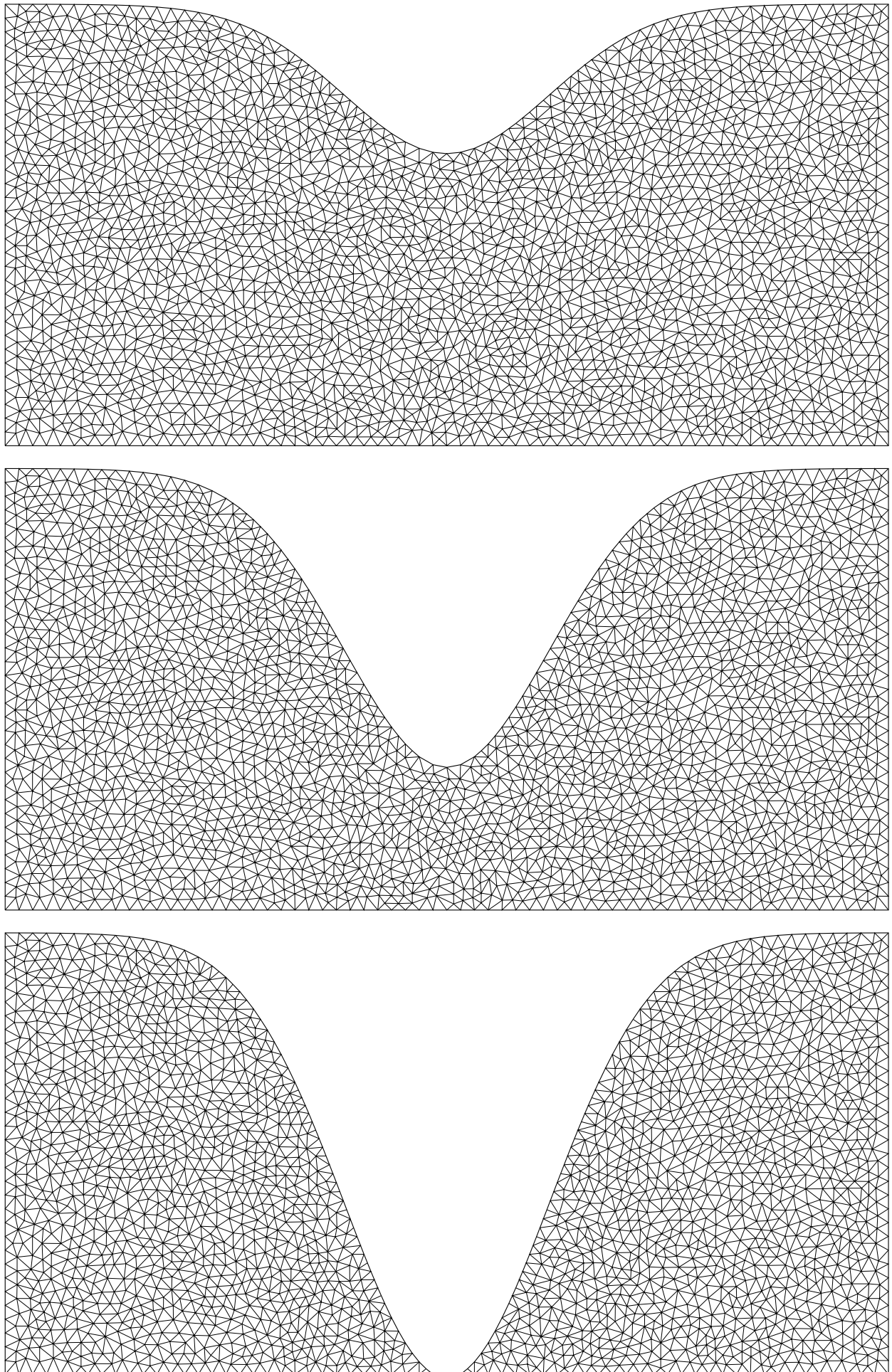


Рис. 2.21. Перестройка сетки при имитации воздействия на прямоугольное тело.

## Глава 3

# Контакт между телами в динамических задачах

В задачах о соударении нескольких деформируемых тел разработчику численного метода приходится отвечать на ряд нетривиальных вопросов.

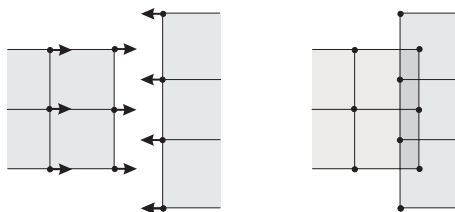


Рис. 3.1. Если шаг интегрирования выбирается без учета взаимного положения и скорости движения тел (слева), то за его период тела могут «наползти» друг на друга (справа).

- Как выбрать допустимый шаг интегрирования, чтобы за его период одно (быстролетящее) тело не проникло вглубь другого или, хуже того, не перескочило бы через него, не «заметив» факт контакта (рис. 3.1)?
- Как для граничного узла быстро (без полного перебора) определить, находится ли он вблизи от какой-либо границы тела, включая границу того же тела, к которому принадлежит исследуемый узел, чтобы учесть возможность контакта между частями одного сильно деформированного тела (рис. 3.2)?

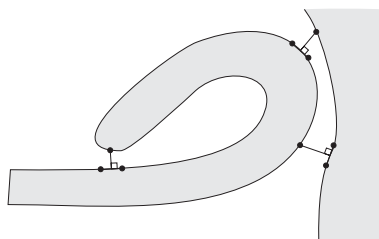


Рис. 3.2. Примеры граничных узлов и ближайших сегментов границ, с которыми они контактируют.

- Каким способом решать контактные уравнения, если вероятность совпадения узлов контактирующих границ невелика, и узел обычно «контактирует» с отрезком между двумя узлами другой границы (рис. 3.1, 3.2)?
- Как определить момент прекращения контакта? Ответить на этот вопрос невозможно с привлечением только геометрической информации, поскольку граничные условия вступивших в контакт тел уравнивают их скорости, и тела навечно «слипаются».

Данная глава содержит ответы на поставленные вопросы, на основе которых был создан программный код и проведены все расчеты в работе.

### 3.1. Поиск сегментов контактирующих границ

Для каждого узла, лежащего на границе, необходимо проверить все близлежащие границы, чтобы из анализа их скоростей определить максимально допустимый временной шаг, при котором тела еще не пересекутся. Также необходимо найти наиболее близко расположенный к исследуемому узлу участок границы, и, если он окажется ближе заданного порога, произвести дальнейшие проверки касательно наличия контакта в этом районе.

Определение ближайших границ можно осуществлять либо при помощи широко-известных методов многомерного поиска, либо на основе специально построенной триангуляции с вершинами в граничных узлах, что позволяет достичь ряда преимуществ по сравнению с первым способом.



### 3.1.1. Структуры многомерного поиска

В вычислительной геометрии хорошо изучены методы, позволяющие после некоторой обработки набора из  $n$  точек быстро перечислять те из них, которые попали в произвольную прямоугольную область — окно (orthogonal range searching). Например, kd-деревья (kd-trees) занимают  $O(n)$  ячеек памяти, требуют  $O(n \log n)$  операций для своего построения и позволяют осуществить поиск за время  $O(\sqrt{n} + k)$ , где  $k$  — количество точек, попавших в окно. Интервальные деревья (range-trees) занимают больше памяти:  $O(n \log n)$ , при той же оценке времени их построения, зато обеспечивают меньшее время поиска:  $O(\log^2 n + k)$  [42].

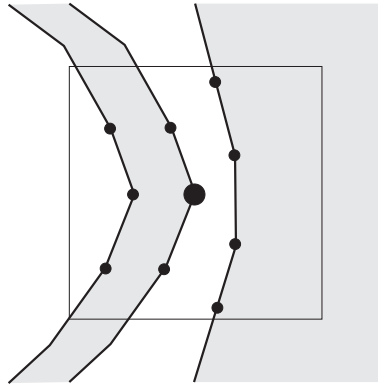


Рис. 3.3. Квадратное окно поиска вокруг граничного узла. Черные точки отмечают найденные вершины.

При расчете очередного временного слоя все граничные узлы всех тел заносятся в единое дерево. Затем для определения контактов вокруг каждого узла производится поиск в квадратном окне с центром в узле и достаточным радиусом (рис. 3.3). В результате анализа найденных узлов обнаруживается либо участок границы, с которым взаимодействует исследуемый узел, либо утверждается отсутствие контакта.

Несмотря на кажущуюся простоту такого подхода, можно отметить следующие его недостатки.

- Чтобы правильно выбрать размеры окна поиска, необходимо знать верхние оценки максимально возможной скорости отдельных точек

тел, а также максимальной длины сегмента границы между двумя соседними узлами. При завышенных оценках время поиска увеличивается.

- Поиск дает точки со всех границ, попавших в окно, включая сам узел и его ближайших соседей. Также в окно могут попасть точки с экранированных границ, например, лежащих на тыльной поверхности того же узкого тела, что и исследуемый узел (рис. 3.3). Поэтому обработка результатов поиска довольно сложна и не сводится к выбору ближайшей точки.
- Суммарное время поиска для всех узлов при условии попадания в окно не более чем константного числа точек составляет  $O(n\sqrt{n})$  для kd-деревьев и  $O(n \log^2 n)$  для интервальных деревьев.
- При переходе к следующему временному слою структуры поиска приходится полностью перестраивать заново (хотя время построения и уступает суммарному времени поиска), даже зная, что каждый узел сместился лишь незначительно.

### 3.1.2. Триангуляция пространства между телами

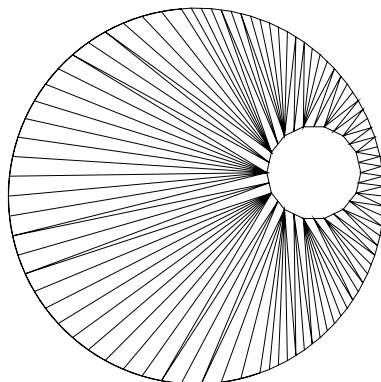


Рис. 3.4. Триангуляция Делоне пустого пространства между телом круглой формы и поверхностью круглого отверстия, внутри которого находится тело.

Другую возможность найти контактирующие границы предоставляет

триангуляция Делоне пустого пространства между моделируемыми телами, ограниченного заданным прямоугольником. Вершинами в этой триангуляции выступают все граничные узлы тел (рис. 3.4) —  $n$  штук. Количество ребер и треугольников, очевидно,  $O(n)$ . Следовательно, количество памяти, необходимой для хранения триангуляции, также составляет  $O(n)$ .

Для построения триангуляции можно использовать те же алгоритмы, что и для сетки из главы 2. Также можно лишь проводить повторную оптимизацию триангуляции после смещения (удаления, добавления) граничных узлов тел, произошедшего в результате перехода к следующему временному слою. Потребность в полной перестройке, как в случае деревьев, отпадает. Отличие от сетки заключается в том, что все вершины треугольников совпадают с граничными узлами тел, и в их подразделении нет необходимости. Ограничение шага интегрирования из раздела 2.9 гарантирует, что никакой треугольник не вырождается, а, значит, границы тел не пересекутся.

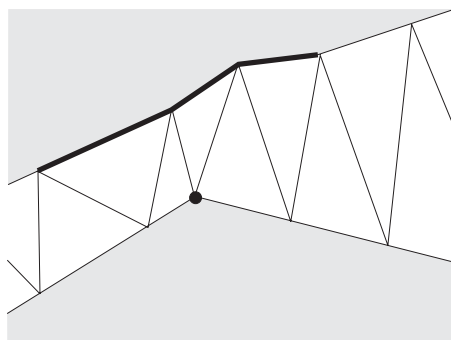


Рис. 3.5. Жирной линией выделен участок границы, на котором осуществляется поиск ближайшей точки к помеченному узлу.

Для определения участка границы, с которым взаимодействует некоторый узел, выполняется перебор всех треугольников, смежных с узлом, и рассматриваются их ребра, лежащие напротив этого узла. Возможны два варианта: это ребро является частью границы одного из тел, это ребро соединяет узлы разных тел. Во втором случае переходим ко второму треугольнику, разделяющему ребро, и исследуем оставшиеся его ребра. Из всех найденных граничных ребер выбирается то, расстояние до которого

от исследуемого узла минимально (рис. 3.5). Время поиска контакта для каждого узла пропорционально количеству инцидентных ему ребер в триангуляции. А поскольку каждое ребро инцидентно лишь двум узлам, то время обработки всех граничных узлов всех тел составляет  $O(n)$ .

Из рис. 3.4 видно, что описанная процедура поиска не позволяет правильно определить ближайшего соседа для узла, который лежит на границе существенно непараллельной противоположной границе. Однако это не является проблемой, так как непараллельные границы обычно располагаются далеко друг от друга, а при вступлении тел в контакт их границы становятся одинаково направленными.

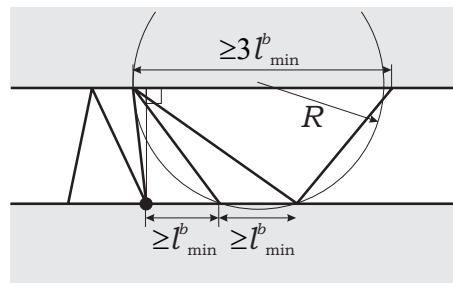


Рис. 3.6. К доказательству того, что поиск с использованием триангуляции позволяет отыскать ближайший сегмент для параллельно расположенных границ.

Покажем, что в случае параллельно расположенных границ с квазиравномерной плотностью узлов процедура поиска всегда находит сегмент границы, содержащий проекцию узла. Предположим противное. Тогда должен найтись треугольник, не смежный исследуемому узлу, но пересекаемый высотой, исходящей из него (рис. 3.6). По свойству триангуляции Делоне в описанной окружности этого треугольника не содержится никаких узлов. Если минимальный размер сегмента границы равен  $l_{\min}^b$ , то, как видно из рисунка, противоположная от узла граница пересекает окружность в двух точках, удаленных на расстояние как минимум  $3l_{\min}^b$ , и сегмент этой границы должен быть не меньше. Однако в сетках, построение которых описано в главе 2, отношение наибольшего и наименьшего ребра границы равно  $2\alpha < 3$ , что противоречит предположению.

### 3.2. Проверка сблизившихся узлов

В этом разделе рассматривается ситуация (рис. 1.3), когда из обработки геометрии тел выяснилось, что расстояние между двумя узлами, принадлежащими разным участкам границы одного или двух тел, меньше, чем заранее определенный порог. Однако еще предстоит установить, воздействуют ли эти участки границ друг на друга либо происходит разрыв контакта, а границы являются свободными.

Рассчитаем нормальную составляющую силы, действующую между телами вблизи исследуемой пары узлов, в предположении, что тела взаимодействуют, и выполнены контактные соотношения. Как было обнаружено в подразделе 1.9.2, нормальная составляющая силы не зависит от типа контакта: будь это полное слипание или свободное скольжение. Для ее расчета сначала определяется нормальная скорость движения контакта (1.61), которая подставляется в (1.60).

Если окажется, что действующая на тело сила притягивает его к другому телу (проекция силы на внешнюю нормаль к поверхности тела положительна), то тела стремятся разлететься, и только контактные условия удерживают их вместе. В этом случае сравниваются величина силы с максимальным сопротивлением разрыву (tear resistance)  $f_{tr} \geq 0$ , характеризующим данный контакт. И если этот предел превышен:

$$\vec{f}_a \cdot \vec{p} = -\vec{f}_b \cdot \vec{p} > f_{tr},$$

то программой принимается решение, что в этих узлах необходимо считать границы свободными (подраздел 1.8.1):  $\vec{f}_a = \vec{f}_b = 0$ , и движущимися с независимыми скоростями  $\vec{v}_a^{n+1}$ ,  $\vec{v}_b^{n+1}$ . Покажем, что при таком решении тела не «налезут» друг на друга, а, напротив, будут удаляться:

$$\vec{v}_a^{n+1} \cdot \vec{p} < \vec{v}_b^{n+1} \cdot \vec{p}.$$

Разность выражений (1.49), выписанных для обоих узлов, после подстанов-

ки  $f_b \cdot \vec{p} = -\vec{f}_a \cdot \vec{p}$  имеет вид

$$(\vec{v}_b^{n+1} - \vec{v}_a^{n+1}) \cdot \vec{p} = (\vec{v}_b^{in} - \vec{v}_a^{in}) \cdot \vec{p} - \frac{1}{\rho c_1} \vec{p} \cdot (\mathbf{T}_b^{in} - \mathbf{T}_a^{in}) \vec{p} - \frac{2}{\rho c_1} \vec{f}_a \cdot \vec{p}.$$

Когда условия контакта выполняются, нормальные скорости движения узлов совпадают, и левая часть выражения обращается в ноль. А из  $\vec{f}_a \cdot \vec{p} > 0$  следует, что сумма первых двух слагаемых правой части больше нуля. В случае расчета узлов как свободных, напротив, последний член обращается в ноль, и обе части равенства оказываются положительными, что и требовалось доказать.

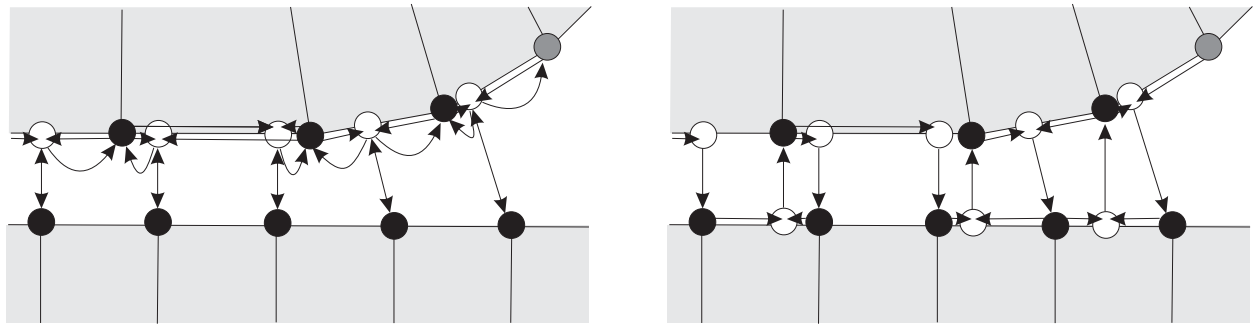
Отдельно стоит описать расчет контактов между телами при наличии трения скольжения, когда модуль касательной составляющей силы взаимодействия тел (силы трения) не может превышать известную функцию нормальной составляющей силы взаимодействия. Сначала можно произвести расчет как при полном слипании тел. И если обнаружится, что условие на величину силы трения нарушается, то надо пересчитать тангенциальную составляющую скорости движения тел, задав максимально допустимую силу трения, как описано в подразделе 1.8.1.

### 3.3. Несовпадение узлов в контактирующих телах

Точное совпадение граничных узлов во взаимодействующих телах является скорее исключением, чем правилом. Для того чтобы взаимно однозначное соответствие имело нужно отказаться от независимого построения сетки на границах тел. В начальный момент времени совместное построение сеток во всех телах представляется оправданным, хотя это, фактически, и требует использование равного пространственного шага в смежных сетках. Однако надеяться на сохранение соответствия между узлами в процессе моделирования можно только для границ, на которых поставлено условие слипания, либо в приближении бесконечно малых деформаций. В прочих случаях расчета процессов конечной деформации тел необходимо

выработать способы обработки границ с несовпадением узлов.

Рассмотрим два возможных способа разрешения этой проблемы (рис. 3.7), их сильные и слабые стороны.



а. Односторонний расчет контакта

б. Симметричный расчет контакта

Рис. 3.7. Способы расчета контакта между телами при отсутствии точного совпадения узлов. Черными кружками обозначены действительные граничные узлы; серыми — узлы, не вступающие в контакт; белыми — вспомогательные мнимые узлы. Стрелками показаны зависимости по данным.

*Односторонний расчет контакта* предложен в [54]. В одном из контактирующих тел (ведомая сторона контакта) вводятся вспомогательные мнимые узлы напротив каждого граничного узла другого тела (ведущая сторона контакта). Параметры в них определяются интерполяцией по ближайшим действительным граничным узлам, порядок которой согласован со степенью аппроксимации используемого численного метода. В результате образуются пары из одного действительного и одного мнимого совпадающих узлов, расчет которых описан в предыдущем разделе. По окончании расчета значения в действительных узлах ведомой стороны получаются опять-таки интерполяцией из ближайших мнимых узлов. Перечислим важнейшие особенности одностороннего расчета.

- Реальное решение контактных уравнений проводится ровно столько раз, сколько граничных узлов присутствует на ведущей стороне контакта. Это очень хороший показатель, который вряд ли может быть улучшен.
- Величины в действительных узлах ведомой стороны получаются в ре-

зультате проведения в общей сложности двух интерполяций, что может отрицательно сказаться на качестве.

- Для проведения второй интерполяции важно, чтобы действительный узел был окружен с обеих сторон мнимыми узлами. Для узлов, расположенных по краям области соприкосновения тел, это условие, очевидно, никогда не выполняется. Проблема становится тем острее, чем выше порядок интерполяции и, следовательно, привлекаемое для нее число опорных точек.
- Наличествует явное неравноправие сторон. При смене ведущей и ведомой стороны, результат расчета может значительно измениться. Для компенсации отсутствия симметрии можно каждый шаг менять ведущую и ведомую стороны, что легко реализовать при контакте различных тел. Однако при контакте частей одного и того же тела между собой организация чередования статуса сторон затруднительна.

*Симметричный расчет контакта.* В этом способе сделана попытка преодолеть недостатки, отмеченные для одностороннего подхода. Мнимые узлы вводятся на обеих сторонах. При расчете каждого действительного узла проводится лишь одна интерполяция, что обеспечивает большую точность, однако количество необходимых решений контактных уравнений возрастает и равно сумме граничных узлов по обе стороны контакта.

Решения контактных уравнений в мнимых узлах утрачиваются, из-за чего возможно рассогласование сил, действующих между телами. Теоретически можно представить себе ситуацию, когда действительные узлы одной стороны контакта «почувствовали» давление со стороны другой стороны, а действительные узлы другой стороны были рассчитаны как свободные. То есть неравноправие сторон сохраняется, но уже по другим причинам. Однако на практике эта проблема не стоит остро и компенсируется за счет статистических эффектов при измельчении сетки. Во всех расчетах данной



работы использовался симметричный способ расчета контактов.

### 3.4. Примеры расчетов с контактом нескольких тел

Для исследования значительного разрушения сложных конструкций и сооружений под действием высокоэнергетичный ударников (самолет, метеорит и т. д.) прежде преимущественно привлекались бессеточные методы [16]. Также как и для моделирования глубокого внедрения ударника в среду [14]. С использованием неструктурированных сеток и приведенных в этой главе способов работы с контактными границами становится возможным повторить эти расчеты, но с большей точностью, труднодостижимой для бессеточных методов.

На рис. 3.9 – 3.13 приведены результаты расчетов, сетки в телах и триангуляция пространства между ними, полученные в ходе моделирования ударов по упругим решетчатым конструкциям различных конфигураций. В подписях к рисункам указано расчетное время в относительных единицах.

На рис. 3.14 показаны результаты моделирования процесса наклонного попадания продолговатого ударника в преграду. Исследовалось влияние пластичности у ударника и преграды на характер деформаций. Упругие и пластические параметры всех тел были выбраны одинаковыми.

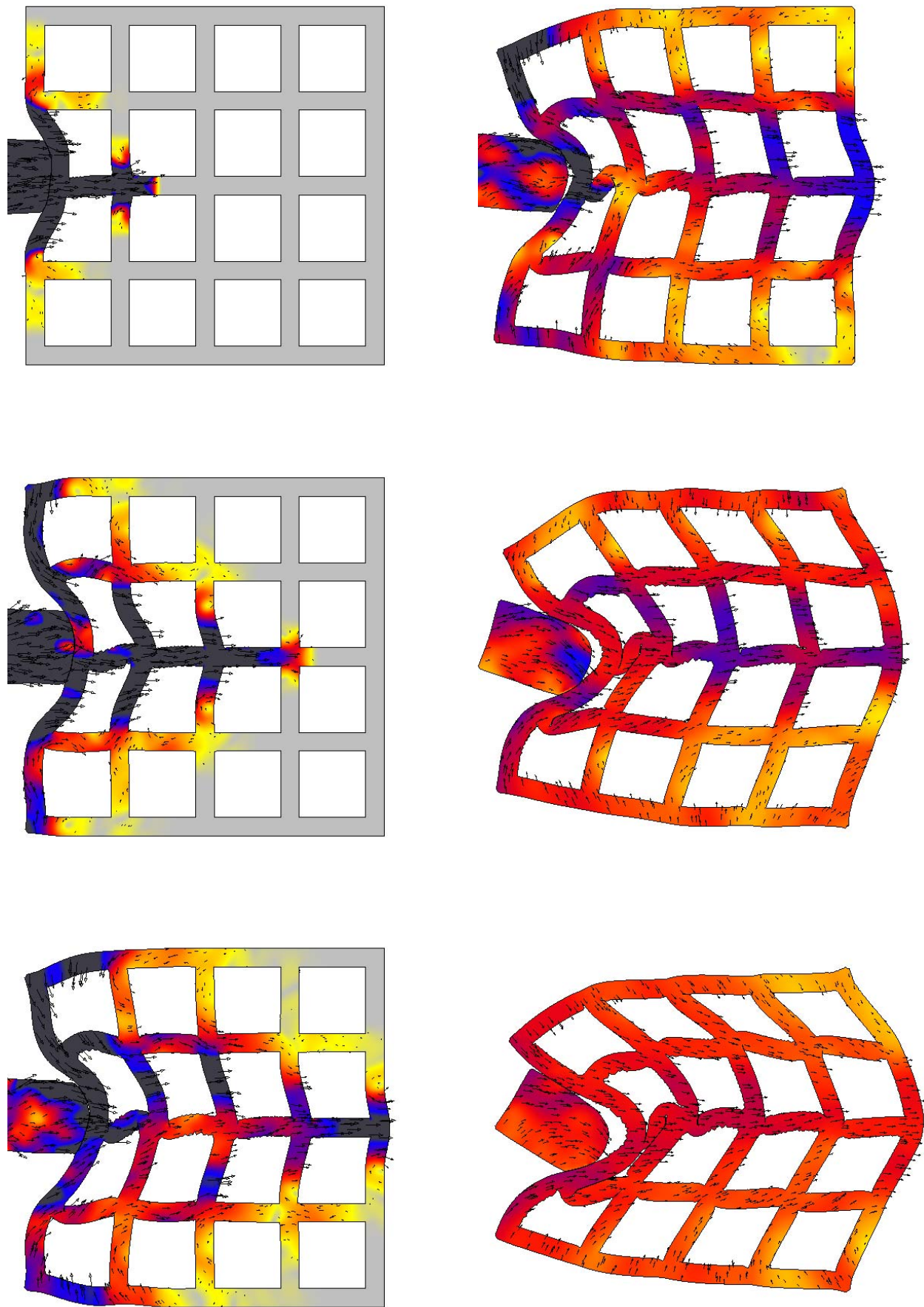


Рис. 3.8. Удар по упругой решетчатой конструкции  $4 \times 4$ . Поле скоростей.  $t = 5, 10, 15, 20, 35, 50$ .

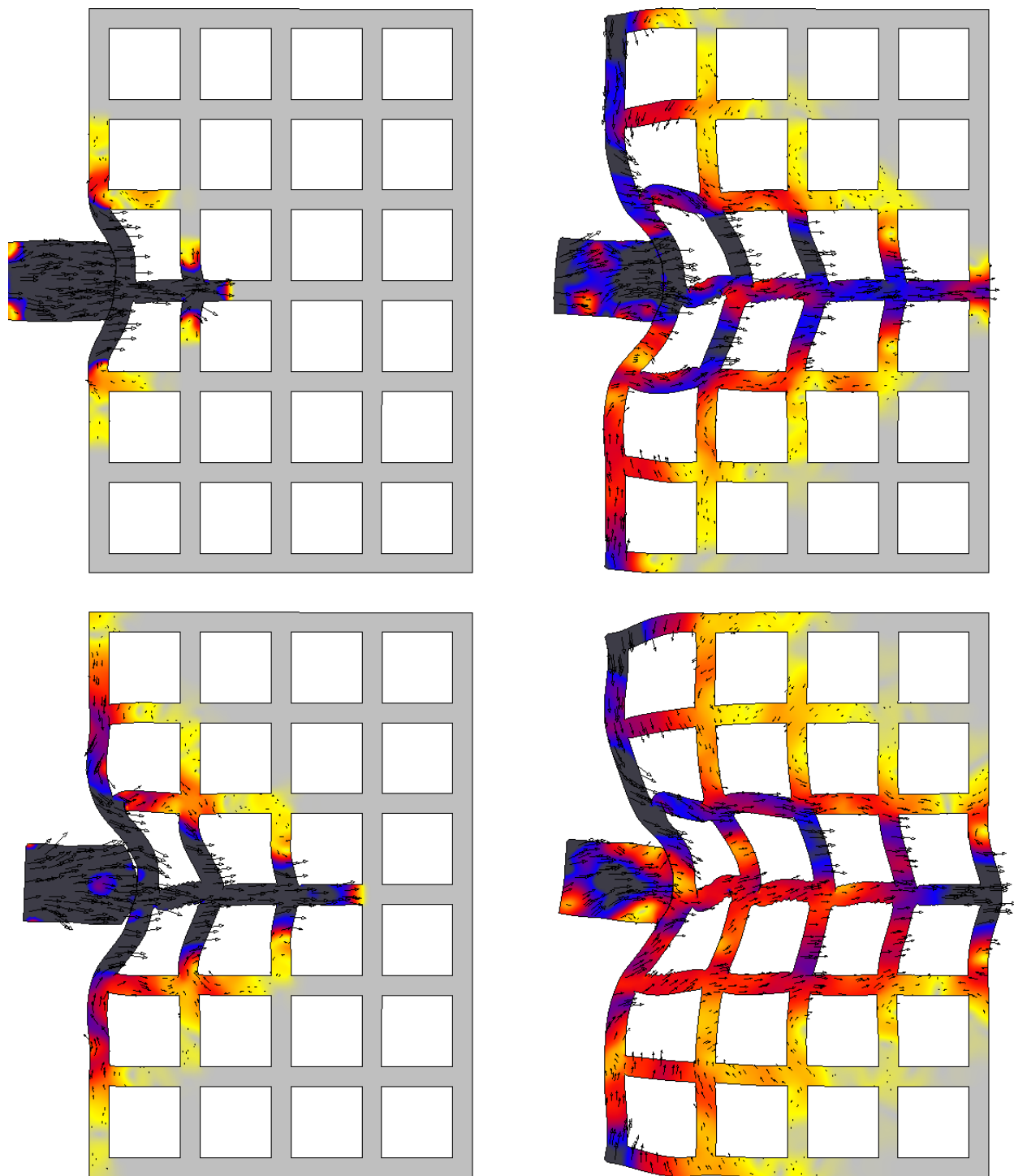


Рис. 3.9. Удар по упругой решетчатой конструкции  $8 \times 4$ . Поле скоростей.  $t = 5, 9, 13, 17$ .

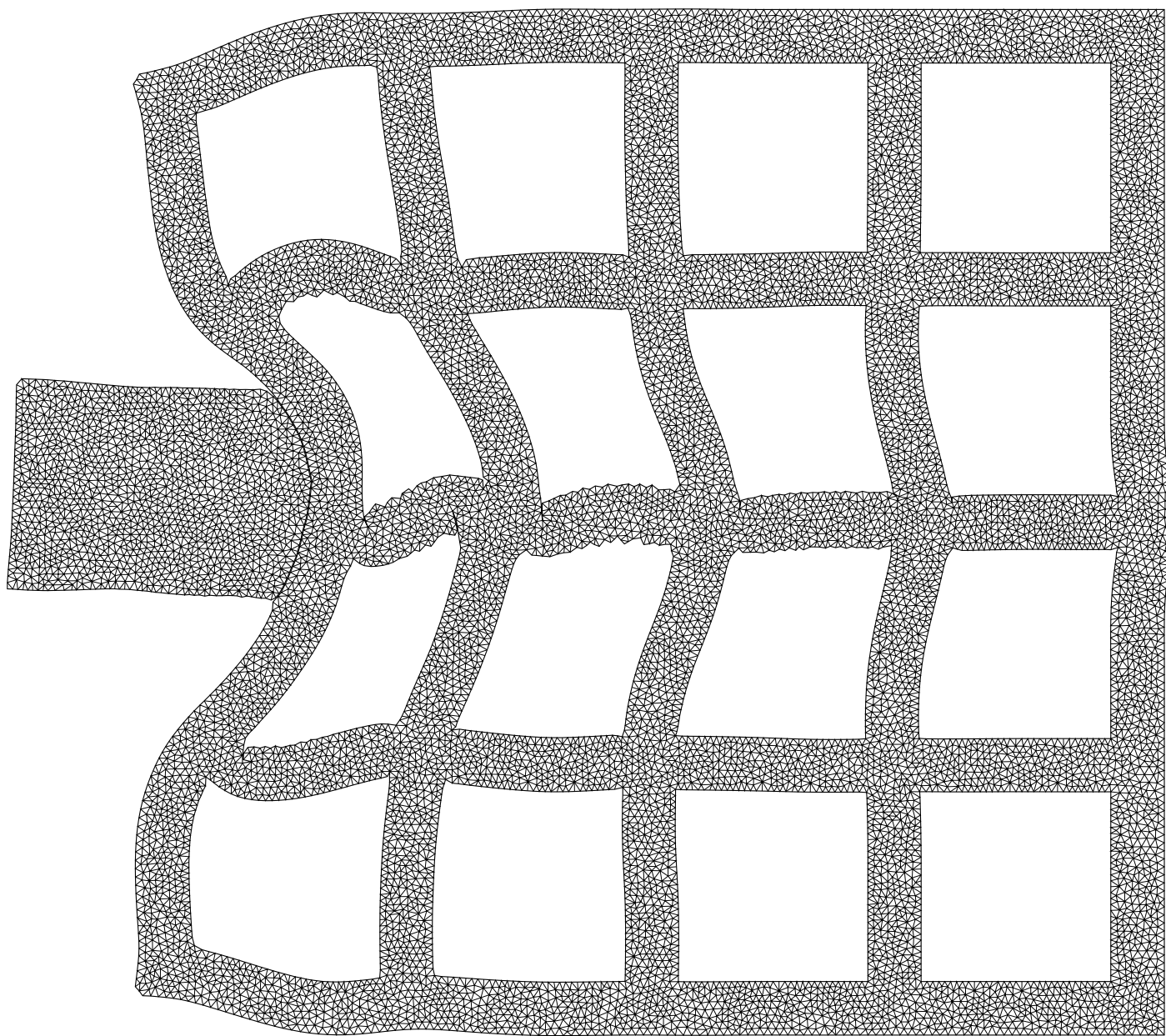


Рис. 3.10. Удар по упругой решетчатой конструкции  $4 \times 4$ . Сетка.  $t = 14$ .

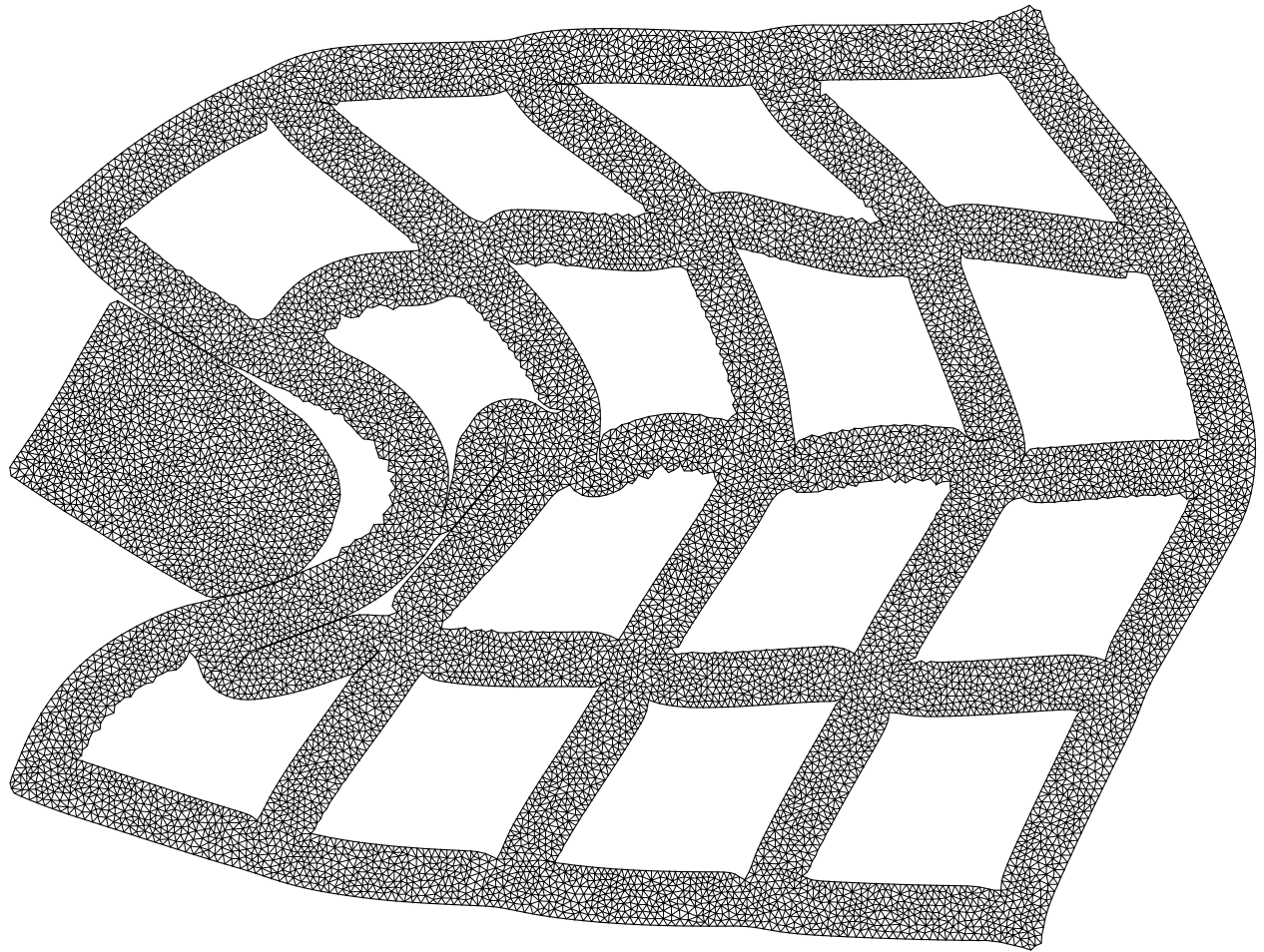


Рис. 3.11. Удар по упругой решетчатой конструкции  $4 \times 4$ . Сетка.  $t = 50$ .

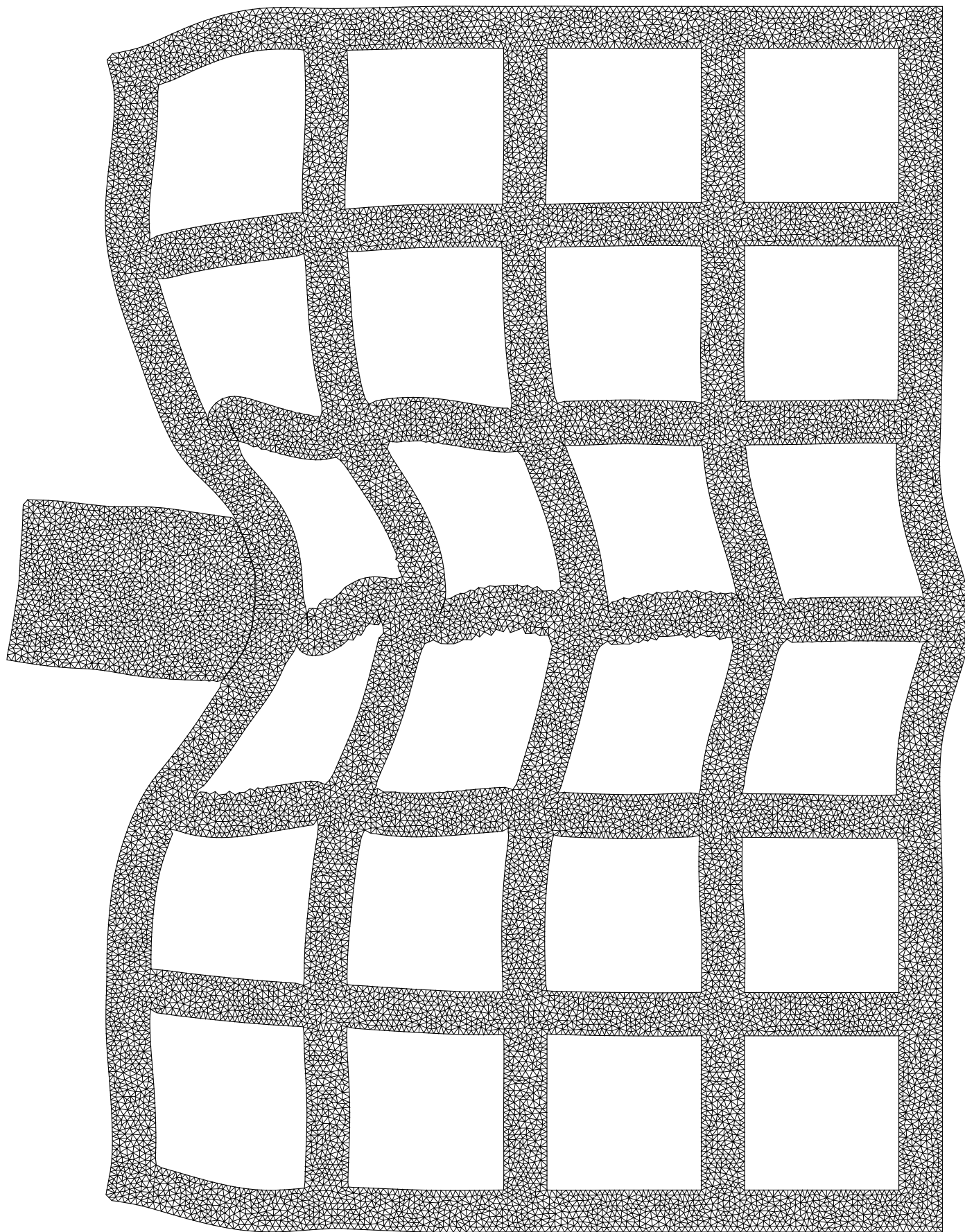


Рис. 3.12. Удар по упругой решетчатой конструкции  $8 \times 4$ . Сетка.  $t = 17$ .

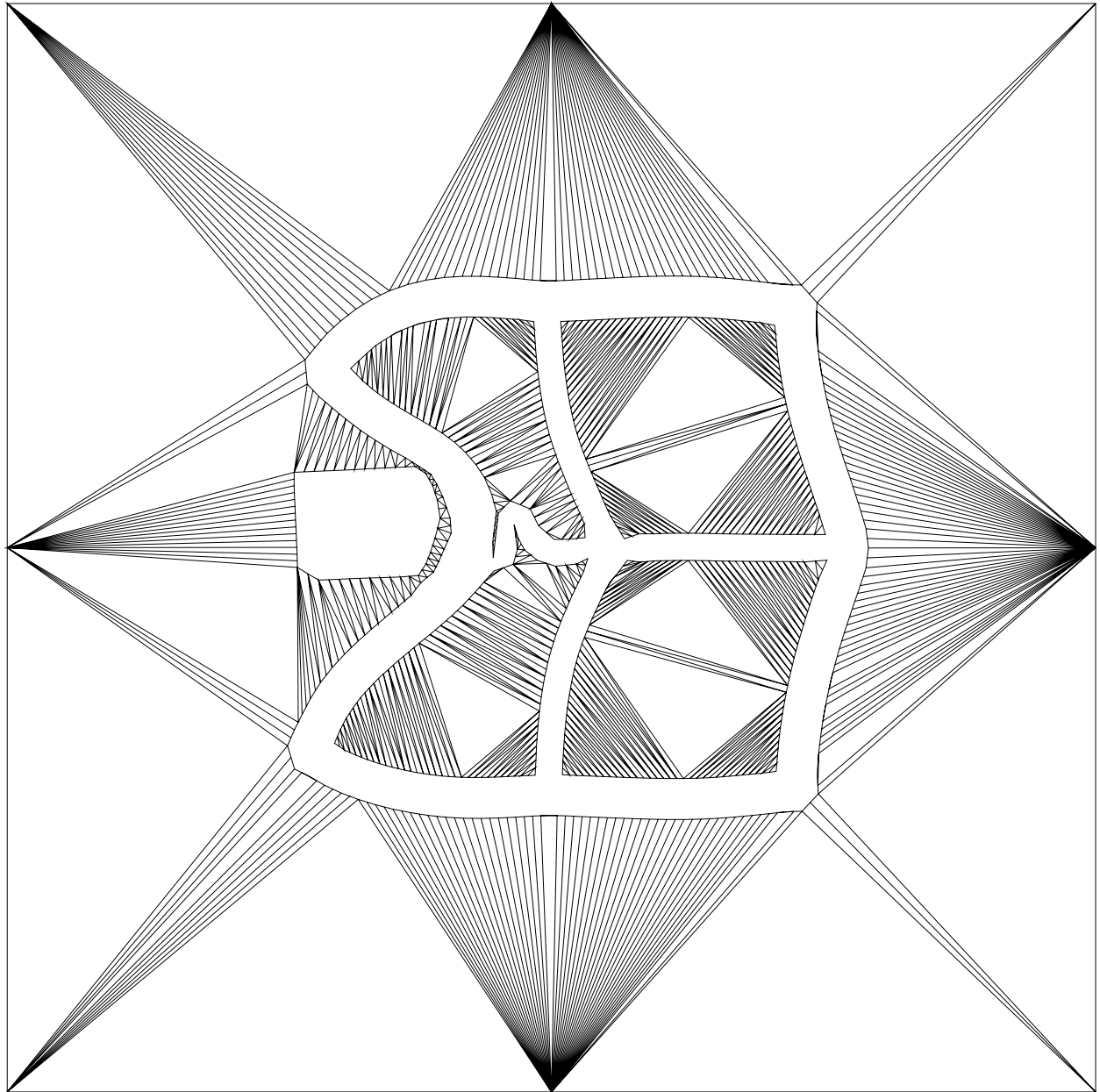


Рис. 3.13. Удар по упругой решетчатой конструкции  $2 \times 2$ . Триангуляция пространства между заключенными в ограниченный объем телами, используемая для установления контактов.

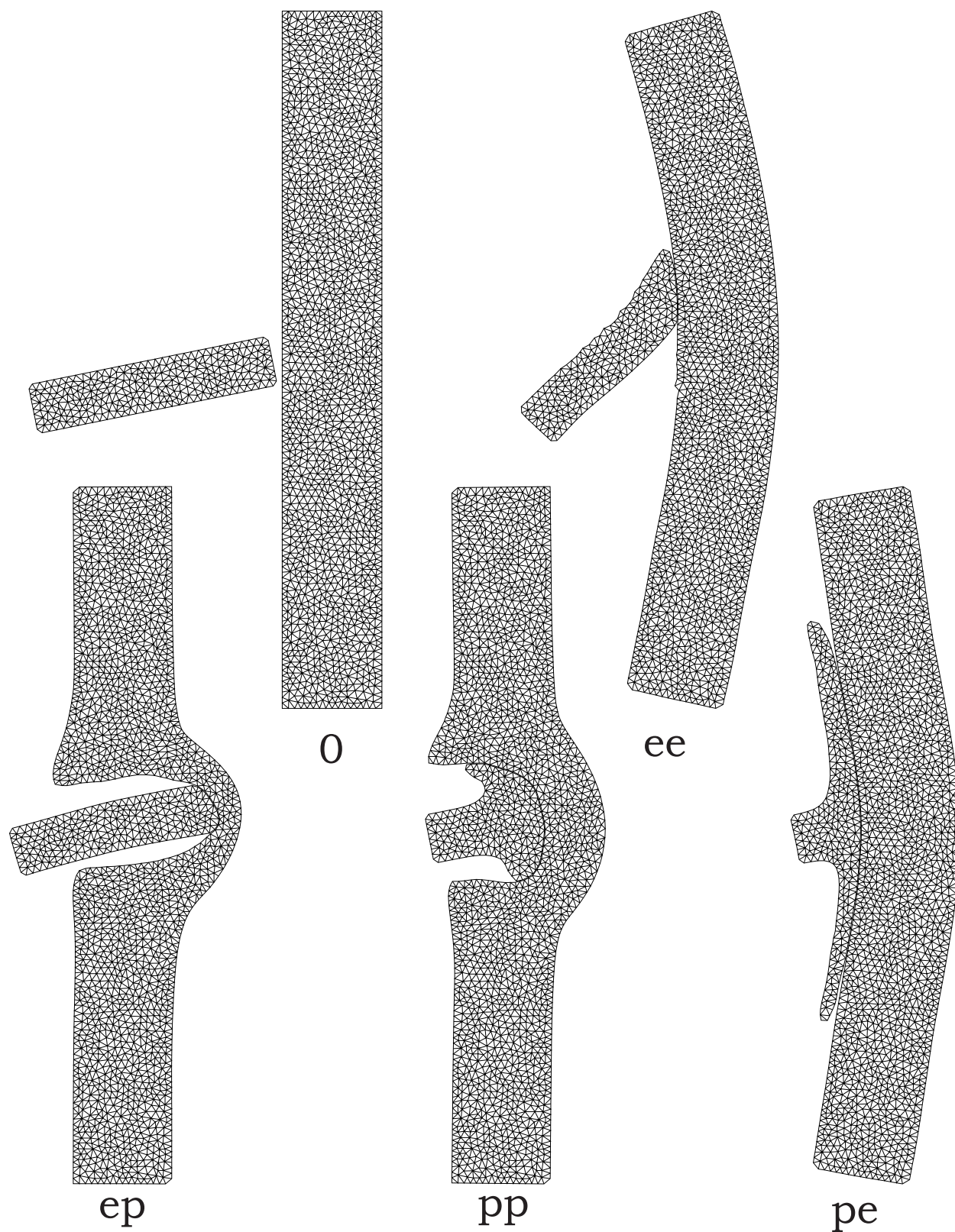


Рис. 3.14. Моделирование наклонного попадания ударника в преграду. 0 — начальное состояние тел. Прочие изображения приведены для одного момента времени и отличаются наличием пластичности (p) или ее отсутствием (e): первая буква подписи отвечает за ударник, вторая — преграду.



## Глава 4

# Интерполяция в треугольнике

В предшествующих главах обосновывалась необходимость использования неструктурированных треугольных сеток для численного моделирования динамических процессов. Однако, как правило, при выборе такого типа сеток ограничиваются [33] методами первого порядка аппроксимации. Это происходит по той причине, что вычисляются значения лишь в вершинах треугольников сетки, а для определения функции более сложной, чем линейная, требуется привлечение значений функции в большем количестве точек. Их выбор требует анализа соседних треугольников, с увеличением степени функции — все более сложного, кроме того, этот выбор не является однозначным.

Для сеточно-характеристического метода возможность сочетания неструктурированных сеток и порядка аппроксимации выше первого была продемонстрирована в [47]. Возникает потребность в процедуре, которая позволяла бы определять решение с необходимой точностью в месте пересечения характеристики с предшествующим слоем по времени, исходя из значений в близлежащих узлах. Поскольку положения этих мест зависят от выбора координатных осей и шага интегрирования, то желательно уметь восстанавливать (интерполировать) решение в любой точке. Также эта процедура будет востребована при введении новых треугольников в сетку, значения узлов которых необходимо инициализировать.

В данной работе предлагается вводить расчетные узлы во всех вершинах, а также, в зависимости от требуемого порядка интерполяции, на границах и внутри треугольников нерегулярной сетки. Выбор положения узлов должен быть таким, чтобы значение поля в любой точке любого треугольника могло быть вычислимо однозначно, исходя только из значений в узлах данного треугольника, что избавляет от потребности отыскания опорных точек. А значения на каждом из ребер должны быть также однозначно вычислимы только по узлам, расположенным на данном ребре, что автоматически обеспечивает непрерывность восстановленного поля при переходе от одного треугольника к другому. Чтобы получающаяся на основе реконструкции разностная схема не порождала нефизичных осцилляций возле сильных градиентов решения, полная вариация [55] интерполяционной функции должна быть ограничена, поэтому в этой главе приводятся два метода устранения экстремумов.

#### 4.1. Реконструкция полинома заданного порядка

Данный раздел посвящен проблеме реконструкции или интерполяции поля в треугольнике по заданным значениям в нескольких точках, которые мы будем называть опорными.

Пусть это будет поле, являющееся полиномом заданной степени  $N$ . Для линейной функции потребуется восстановить три коэффициента: постоянный член и множители перед  $x$  и  $y$ . Для квадратичной — шесть: те же три плюс еще три коэффициента перед  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ . Для кубической — десять величин и т. д. Для общего случая полинома степени  $N$  количество коэффициентов в нем задается формулой  $\frac{(N+2)(N+1)}{2}$ . Опорных точек в треугольнике должно быть ровно такое же число, причем они не должны лежать, например, все на одной прямой.

Ниже предлагается один из способов расстановки опорных точек, при

котором задача вычисления коэффициентов полинома является разрешимой, а также описывается способ непосредственного вычисления значения полинома в любой точке.

В произвольном треугольнике  $ABC$  проведем прямые, параллельные его сторонам, которые делят каждую из его сторон на  $N$  частей (рис. 4.1). В результате исходный треугольник подразделяется на  $N^2$  меньших треугольников, равных друг другу и подобных всему треугольнику. Количество точек внутри треугольника, в которых прямые пересекаются между собой и со сторонами треугольника, равно  $\frac{(N+2)(N+1)}{2}$ . Именно эти точки пересечения мы выберем в качестве опорных, храня в них значения полинома, используемые для восстановления его величины во всех прочих точках.

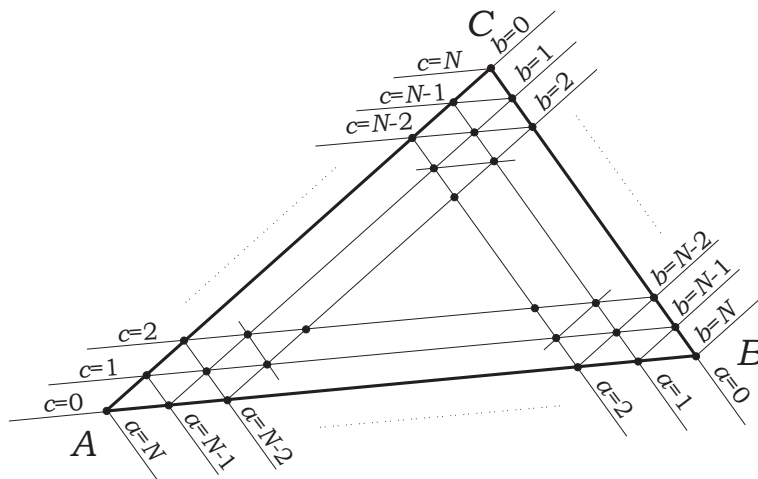


Рис. 4.1. Равномерное распределение опорных точек в треугольнике.

Обозначим координаты вершин треугольника символами  $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ , а ссылаться на опорные точки будем при помощи  $\vec{r}_{abc}$ . Индекс состоит из трех частей, каждая из которых описывает место пересечения прямой, проходящей через опорную точку и параллельной определенной стороне, с другой стороной треугольника (рис. 4.1). Для индексов любой опорной точки справедливо

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0, \quad a + b + c = N.$$

Координаты опорной точки могут быть выражены через координаты вер-

шин треугольника с использованием любой пары индексов из трех:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{abc} &= \vec{r}_A + \frac{b}{N}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \frac{c}{N}(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \\ &= \vec{r}_B + \frac{c}{N}(\vec{r}_C - \vec{r}_B) + \frac{a}{N}(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = \\ &= \vec{r}_C + \frac{a}{N}(\vec{r}_A - \vec{r}_C) + \frac{b}{N}(\vec{r}_B - \vec{r}_C).\end{aligned}$$

Пусть необходимо реконструировать значение полинома  $v$  в произвольной точке  $\vec{r}$ , которая может находиться как внутри треугольника, так и за его пределами. Введем в рассмотрение площади трех треугольников, которые формируются сторонами исходного треугольника и отрезками, соединяющими его вершины с точкой  $\vec{r}$ :

$$S_A = \frac{1}{2}[\vec{r}_C - \vec{r}_B, \vec{r} - \vec{r}_B], \quad S_B = \frac{1}{2}[\vec{r}_A - \vec{r}_C, \vec{r} - \vec{r}_C], \quad S_C = \frac{1}{2}[\vec{r}_B - \vec{r}_A, \vec{r} - \vec{r}_A],$$

где  $S_i$  — площадь того треугольника, одной из сторон которого является сторона исходного треугольника ABC, противоположная его вершине  $i$ . Квадратными скобками обозначено векторное произведение векторов с плоскости, результат которого ортогонален плоскости и может считаться скаляром. Если  $\vec{r}$  лежит внутри ABC, то все три площади положительны, в противном случае одна или две «площади» могут быть отрицательными. Но даже в этом случае, независимо от положения  $\vec{r}$ , их сумма будет равна площади треугольника ABC:

$$S_A + S_B + S_C = S = \frac{1}{2}[\vec{r}_B - \vec{r}_A, \vec{r}_C - \vec{r}_A].$$

Введем также относительные площади тех же треугольников, величины которых для точки  $\vec{r}$ , лежащей внутри ABC, могут изменяться от нуля до единицы:

$$s_A = \frac{S_A}{S}, \quad s_B = \frac{S_B}{S}, \quad s_C = \frac{S_C}{S}, \quad s_A + s_B + s_C = 1.$$

Относительные площади обладают следующим интересным свойством: на прямой  $a = i$  (рис. 4.1)  $s_A = \frac{i}{N}$ , аналогично для двух других типов прямых:  $b = j \iff s_B = \frac{j}{N}$ ,  $c = k \iff s_C = \frac{k}{N}$ .

Значение полинома  $v(\vec{r})$  в точке  $\vec{r}$  необходимо выразить через значения  $v_{abc}$ , которые он принимает в опорных точках:

$$v(\vec{r}) = \sum_{a,b,c} w_{abc}(\vec{r}) v_{abc},$$

где  $w_{abc}(\vec{r})$  — вес опорной точки  $\vec{r}_{abc}$ , также являющийся полиномом степени  $N$ . Поскольку в опорных точках полином должен обращаться в заданные значения, то

$$w_{abc}(\vec{r}_{ijk}) = \delta_{ai}\delta_{bj}\delta_{ck},$$

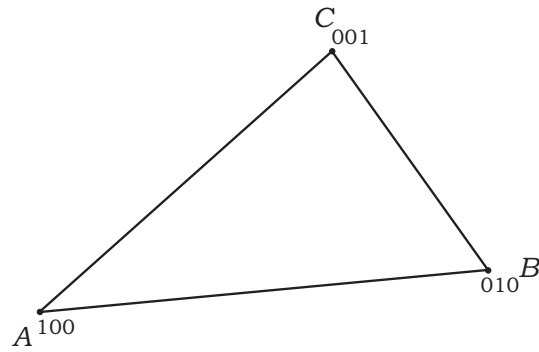
иными словами, каждый вес обращается в единицу в одной опорной точке и в ноль во всех остальных опорных точках. Следующая функция удовлетворяет поставленным условиям:

$$w_{abc}(\vec{r}) = \frac{\prod_{i=1}^N (s_{T_i}(\vec{r}) - \frac{n_i}{N})}{\prod_{i=1}^N (s_{T_i}(\vec{r}_{abc}) - \frac{n_i}{N})}, \quad (T_i \in \{A, B, C\}, 0 \leq n_i \leq N) \quad (4.1)$$

при условии правильного подбора величин  $\{T_i\}$  и  $\{n_i\}$ . Для этого необходимо воспользоваться описанным выше свойством относительных площадей принимать фиксированное значение на прямой, проходящей сразу через несколько опорных точек. Первый множитель должен подбираться так, чтобы обнулить вес в  $N + 1$  опорной точки, второй — чтобы дополнительно обнулить его еще в  $N$  опорных точках и т. д. В точке  $\vec{r}_{abc}$  вес должен быть равен единице, для этого необходим ненулевой знаменатель, следовательно, если  $T_i = A$ , то  $n_i \neq a$ ; если  $T_i = B$ , то  $n_i \neq b$ ; если  $T_i = C$ , то  $n_i \neq c$ . Любопытной особенностью формулы, как будет видно из примеров, является тот факт, что множители с площадью  $s_A$  встречаются в ней ровно  $a$  раз, множители с  $s_B$  —  $b$  раз, множители с  $s_C$  —  $c$  раз.

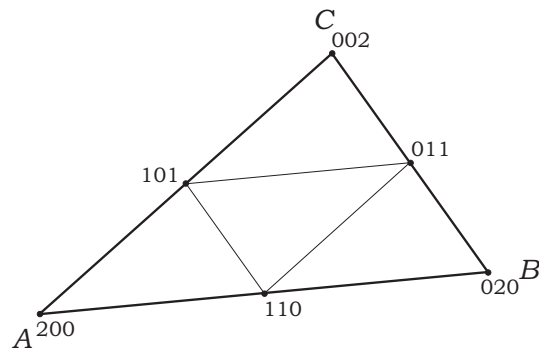
Покажем далее, какой конкретный вид приобретает (4.1) для полиномов нескольких младших порядков. При этом нет необходимости выписывать все веса. Если индексы двух опорных точек совпадают с точностью до перестановки, например  $w_{abc}$  и  $w_{cab}$ , то функции их весов совпадают с точностью до той же перестановки величин в  $\{T_i\}$ .

## Линейная интерполяция



$$w_{100} = s_A, \quad w_{010} = s_B, \quad w_{001} = s_C.$$

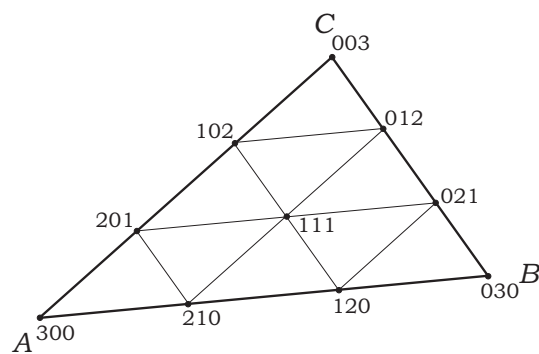
## Квадратичная интерполяция



$$w_{200} = \frac{s_A(s_A - \frac{1}{2})}{1 \cdot \frac{1}{2}} = s_A(2s_A - 1),$$

$$w_{110} = \frac{s_A s_B}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4s_A s_B.$$

## Кубическая интерполяция

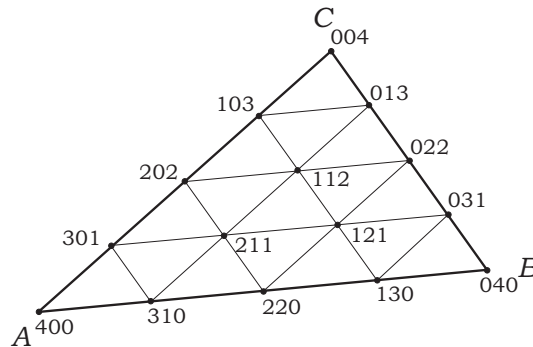


$$w_{300} = \frac{s_A(s_A - \frac{1}{3})(s_A - \frac{2}{3})}{1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}s_A(3s_A - 1)(3s_A - 2),$$

$$w_{210} = \frac{s_A(s_A - \frac{1}{3})s_B}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{9}{2}s_A(3s_A - 1)s_B,$$

$$w_{111} = \frac{s_A s_B s_C}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 27s_A s_B s_C.$$

### Интерполяция четвертого порядка



$$w_{400} = \frac{s_A(s_A - \frac{1}{4})(s_A - \frac{1}{2})(s_A - \frac{3}{4})}{1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}s_A(4s_A - 1)(2s_A - 1)(4s_A - 3),$$

$$w_{310} = \frac{s_A(s_A - \frac{1}{4})(s_A - \frac{1}{2})s_B}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{16}{3}s_A(4s_A - 1)(2s_A - 1)s_B,$$

$$w_{220} = \frac{s_A(s_A - \frac{1}{4})s_B(s_B - \frac{1}{4})}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = 4s_A(4s_A - 1)s_B(4s_B - 1),$$

$$w_{211} = \frac{s_A(s_A - \frac{1}{4})s_B s_C}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}} = 32s_A(4s_A - 1)s_B s_C.$$

## 4.2. Кусочно-линейная интерполяция

Для разбиения треугольника (рис. 4.1), выбранного для выполнения интерполяции степени  $N > 1$ , имеет смысл также рассмотреть кусочно-линейную интерполяцию, в которой значение в любой точке треугольника определяется лишь величинами в трех вершинах того подтреугольника, в который она попала. Достоинство кусочно-линейной интерполяции в том,

что полученная функция не может иметь строгих экстремумов ни в каких точках кроме опорных. Кроме того, кусочно-линейная интерполяция может использоваться для отладки численных методов высокого порядка, поскольку может быть сформулирована для любого разбиения треугольника.

Пусть для точки  $\vec{r}$  уже известны относительные площади  $s_A, s_B, s_C$  треугольников, на которые условно делится исходный треугольник, заданием  $\vec{r}$ . Необходимо определить в какой подтреугольник разбиения (рис. 4.1) попадает  $\vec{r}$ , а также найти веса, с которыми вершины подтреугольника участвуют в  $v(\vec{r})$ . Последнее эквивалентно поиску относительных площадей  $s'_A, s'_B, s'_C$  треугольников, на которые  $\vec{r}$  условно делит найденный подтреугольник.

Из анализа относительных площадей можно определить (рис. 4.1), что точка  $\vec{r}$  находится между прямыми  $a$  и  $a + 1$ , параллельными стороне ВС; прямыми  $b$  и  $b + 1$ , параллельными стороне СА; прямыми  $c$  и  $c + 1$ , параллельными стороне АВ, если

$$\frac{a}{N} \leq s_A \leq \frac{a+1}{N}, \quad \frac{b}{N} \leq s_B \leq \frac{b+1}{N}, \quad \frac{c}{N} \leq s_C \leq \frac{c+1}{N}.$$

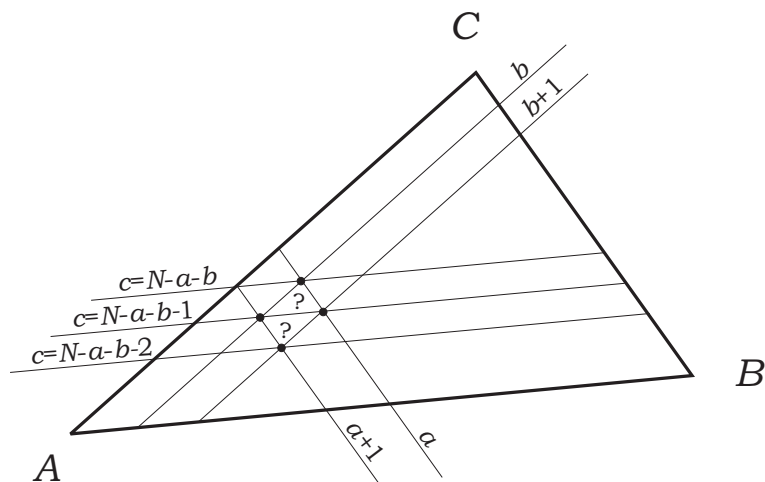


Рис. 4.2. Определение типа подтреугольника из индексов его вершин.

Все подтреугольники можно разделить на два типа в зависимости от их ориентации. К первому типу отнесем подтреугольники, являющиеся



уменьшенной копией исходного треугольника. Ко второму — уменьшенные и повернутые на  $180^\circ$ .

Параллелограмм, задаваемый пересечением полос между парами прямых  $a$ ,  $a + 1$  и  $b$ ,  $b + 1$ , включает два подтреугольника разных типов (рис. 4.2). Выбрать из них тот, который включает  $\vec{r}$ , позволяет исследование величины  $s$ .

Если  $c = N - a - b - 1$ , то мы имеем дело с подтреугольником первого типа. Его вершинами являются точки

$$A' = \{a + 1, b, N - a - b - 1\}, \quad B' = \{a, b + 1, N - a - b - 1\},$$

$$C' = \{a, b, N - a - b\}.$$

Высота, опущенная из  $\vec{r}$  на прямую  $a$ , равна

$$h_a = \frac{2S(s_A - \frac{a}{N})}{|CB|}.$$

$$s'_A = \frac{h_a |C'B'|}{2S'}$$

Сторона подтреугольника  $C'B'$  меньше  $CB$  в  $N$  раз, а площадь  $S'$  меньше  $S$  в  $N^2$  раз. Следовательно,

$$s'_A = Ns_A - a, \quad s'_B = Ns_B - b, \quad s'_C = Ns_C - c.$$

Если  $c = N - a - b - 2$ , то точка  $\vec{r}$  попала в треугольник второго типа. Его вершины:

$$A' = \{a, b + 1, N - a - b - 1\}, \quad B' = \{a + 1, b, N - a - b - 1\},$$

$$C' = \{a + 1, b + 1, N - a - b - 2\}.$$

Относительные площади  $\vec{r}$  в этом подтреугольнике

$$s'_A = a + 1 - Ns_A, \quad s'_B = b + 1 - Ns_B, \quad s'_C = c + 1 - Ns_C.$$

На примере  $N = 2$  приведем окончательную формулу вычисления кусочно-линейной функции:

$$v(\vec{r}) = \begin{cases} (2s_A - 1)u_{200} + 2s_B u_{110} + 2s_C u_{101}, & \text{если } 2s_A > 1, \\ (2s_B - 1)u_{020} + 2s_A u_{110} + 2s_C u_{011}, & \text{если } 2s_B > 1, \\ (2s_C - 1)u_{002} + 2s_A u_{101} + 2s_B u_{011}, & \text{если } 2s_C > 1, \\ (1 - 2s_C)u_{110} + (1 - 2s_A)u_{011} + (1 - 2s_B)u_{101}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

### 4.3. Градиент интерполяционного полинома

Определим вектора  $\vec{l}_i$ :

$$\vec{l}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_B, \quad \vec{l}_B = \vec{r}_A - \vec{r}_C, \quad \vec{l}_C = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

А также вектора  $\vec{k}_i$ , каждый из которых получается из  $\vec{l}_i$  поворотом на  $90^\circ$  и уменьшением в  $2S$  раз:

$$[\vec{l}_i, \vec{k}_i] = \frac{\|\vec{l}_i\|^2}{2S}, \quad \vec{l}_i \cdot \vec{k}_i = 0.$$

Оба набора не являются линейно независимыми:

$$\sum_i \vec{l}_i = 0, \quad \sum_i \vec{k}_i = 0.$$

В новых обозначениях

$$\begin{aligned} s_A &= \frac{1}{2S} [\vec{l}_A, \vec{r} - \vec{r}_B] = \vec{k}_A \cdot (\vec{r} - \vec{r}_B), \\ s_B &= \frac{1}{2S} [\vec{l}_B, \vec{r} - \vec{r}_C] = \vec{k}_B \cdot (\vec{r} - \vec{r}_C), \\ s_C &= \frac{1}{2S} [\vec{l}_C, \vec{r} - \vec{r}_A] = \vec{k}_C \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A). \end{aligned}$$

Дифференциал площадей и их градиент равны

$$ds_i = \frac{1}{2S} [\vec{l}_i, d\vec{r}] = \vec{k}_i \cdot d\vec{r}, \quad \frac{ds_i}{d\vec{r}} = \vec{k}_i.$$

Градиент полинома равен сумме произведений градиентов весов и значений в опорных точках:

$$\frac{dv}{d\vec{r}} = \sum_{a,b,c} \frac{dw_{abc}}{d\vec{r}} v_{abc}.$$

Градиент веса опорной точки

$$\frac{dw_{abc}(\vec{r})}{d\vec{r}} = \frac{\sum_{j=1}^N \vec{k}_{T_j} \prod_{i \neq j} (s_{T_i}(\vec{r}) - \frac{n_i}{N})}{\prod_{i=1}^N (s_{T_i}(\vec{r}_{abc}) - \frac{n_i}{N})}.$$

**Линейная интерполяция**

$$\frac{dw_{100}}{d\vec{r}} = \vec{k}_A, \quad \frac{dw_{010}}{d\vec{r}} = \vec{k}_B, \quad \frac{dw_{001}}{d\vec{r}} = \vec{k}_C.$$

Градиент полинома 1-го порядка постоянен и во всех точках равен

$$\frac{dv}{d\vec{r}} = v_{100}\vec{k}_A + v_{010}\vec{k}_B + v_{001}\vec{k}_C.$$

**Квадратичная интерполяция**

$$\begin{aligned} \frac{dw_{200}}{d\vec{r}} &= (4s_A - 1)\vec{k}_A, \\ \frac{dw_{110}}{d\vec{r}} &= 4(s_B\vec{k}_A + s_A\vec{k}_B). \end{aligned}$$

Градиент квадратного полинома является линейной векторной функцией, которая однозначно определяется своими значениями в трех вершинах треугольника:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{100} &= 3v_{200}\vec{k}_A + (4v_{110} - v_{020})\vec{k}_B + (4v_{101} - v_{002})\vec{k}_C, \\ \vec{V}_{010} &= 3v_{020}\vec{k}_B + (4v_{110} - v_{200})\vec{k}_A + (4v_{011} - v_{002})\vec{k}_C, \\ \vec{V}_{001} &= 3v_{002}\vec{k}_C + (4v_{101} - v_{200})\vec{k}_A + (4v_{011} - v_{020})\vec{k}_B. \end{aligned}$$

**Кубическая интерполяция**

$$\begin{aligned} \frac{dw_{300}}{d\vec{r}} &= \frac{1}{2}(27s_A^2 - 18s_A + 2)\vec{k}_A, \\ \frac{dw_{210}}{d\vec{r}} &= \frac{9}{2}[(6s_A - 1)s_B\vec{k}_A + s_A(3s_A - 1)\vec{k}_B], \\ \frac{dw_{111}}{d\vec{r}} &= 27(s_Bs_C\vec{k}_A + s_As_C\vec{k}_B + s_As_B\vec{k}_C). \end{aligned}$$

#### 4.4. Вычисление интеграла полинома в треугольнике

Для вычисления определенного двойного интеграла от произвольного полинома по треугольнику докажем вспомогательное утверждение, касающееся интегрирования одного слагаемого в полиноме.

**Утверждение 7.**

$$\int_{\Delta} s_A^n s_B^m s_C^l d\vec{r} = 2S \frac{n! m! l!}{(n + m + l + 2)!}.$$

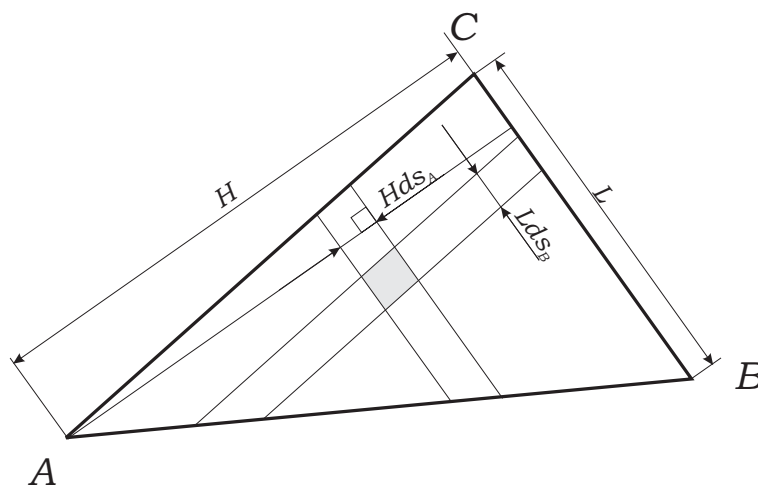


Рис. 4.3. Вычисление интеграла функции в треугольнике.

*Доказательство.* Обозначим искомый интеграл как  $I$ . Сделаем подстановку  $s_C = 1 - s_A - s_B$  и используем разбиение треугольника на бесконечно малые параллелограммы (рис. 4.3). Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_{s_A=0}^1 \int_{s_B=0}^{1-s_A} s_A^n s_B^m (1 - s_A - s_B)^l H ds_A L ds_B = \\ &= 2S \int_{s_A=0}^1 s_A^n \left[ \int_{s_B=0}^{1-s_A} s_B^m (1 - s_A - s_B)^l ds_B \right] ds_A. \end{aligned}$$

Сделаем во внутреннем интеграле  $J(s_A)$  замену переменных  $s_B = (1 - s_A)t$ :

$$J(s_A) = (1 - s_A)^{m+l+1} \int_0^1 t^m (1 - t)^l dt.$$

Получившийся интеграл носит название бета-функции Эйлера, которая может быть выражена через гамма-функцию Эйлера и далее (для параметров

— натуральных чисел) через их факториалы [56]:

$$\int_0^1 t^x(1-t)^y dt = B(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{x!y!}{(x+y+1)!}.$$

Следовательно,

$$I = 2S \frac{m!l!}{(m+l+1)!} \int_{s_A=0}^1 s_A^n (1-s_A)^{m+l+1} ds_A.$$

Снова распознав бета-функцию Эйлера, окончательно получаем

$$I = 2S \frac{n!m!l!}{(n+m+l+2)!}.$$

□

С использованием доказанного утверждения можно установить интегралы нескольких интерполяционных полиномов младших порядков.

### Линейная интерполяция

$$I = \frac{v_{100} + v_{010} + v_{001}}{3} S. \quad (4.2)$$

### Кусочно-линейная интерполяция

Интеграл от кусочно-линейной функции равен сумме интегралов от линейных функций в каждом из  $N^2$  подтреугольников. Каждая вершина треугольника ( $\{abc\} \in V$ ) является также вершиной одного из подтреугольников. Опорная точка, лежащая внутри ребра ( $\{abc\} \in E$ ), является вершиной трех подтреугольников. Внутренние опорные точки ( $\{abc\} \in T$ ) являются вершинами 6 подтреугольников.

$$I = \left( \sum_{\{abc\} \in V} v_{abc} + 3 \sum_{\{abc\} \in E} v_{abc} + 6 \sum_{\{abc\} \in T} v_{abc} \right) \frac{S}{3N^2}. \quad (4.3)$$

**Квадратичная интерполяция**

$$I = \frac{v_{110} + v_{101} + v_{011}}{3} S. \quad (4.4)$$

Обратите внимания, что интеграл не зависит от значений в вершинах треугольника, а зависит только от значений в центрах его ребер. Для сравнения интеграл от кусочно-линейной функции для случая  $N = 2$ :

$$I = (v_{200} + v_{020} + v_{002} + 3v_{110} + 3v_{101} + 3v_{011}) \frac{S}{12}. \quad (4.5)$$

**Кубическая интерполяция**

$$I = \left[ \frac{1}{30}(v_{300} + v_{030} + v_{003}) + \frac{3}{40}(v_{210} + v_{120} + v_{021} + v_{012} + v_{102} + v_{201}) + \frac{9}{20}v_{111} \right] S. \quad (4.6)$$

**Интерполяция четвертого порядка**

$$I = [4(v_{310} + v_{130} + v_{031} + v_{013} + v_{103} + v_{301}) - (v_{220} + v_{202} + v_{022}) + 8(v_{211} + v_{121} + v_{112})] \frac{S}{45}. \quad (4.7)$$

Снова, как и для квадратичной интерполяции, интеграл не зависит от значений в вершинах треугольника.

**4.5. Монотонная квадратичная реконструкция**

Из полученных в разделе 4.1 формул для весов опорных точек видно, что интерполяции порядков выше первого не являются монотонными в том смысле, что если даже, например, значения во всех опорных точках неотрицательны, то интерполяционный полином может принимать отрицательные значения внутри треугольника. С другой стороны, отказ от квад-

ратичной интерполяции в пользу линейной, как в статье [33], приводит к искусственной диссипации и сглаживанию решения.

В этом разделе предлагается гибридный метод интерполяции, который сочетает монотонность кусочно-линейной функции в одних подтреугольниках со вторым порядком квадратичной функции в других подтреугольниках, где это не приведет к формированию дополнительных экстремумов, не совпадающих с опорными точками. Причем результирующая функция при переходе от одного подтреугольника к другому должна оставаться непрерывной. Такая гибридная интерполяция обеспечивает численному методу свойство монотонности и позволяет избежать нефизичных осцилляций решения.

Используется то же разбиение треугольника с тем же положением опорных точек, что и для выведенной в разделе 4.1 квадратичной интерполяции. Полученная квадратичная функция также используется и называется далее пробной, поскольку может не быть монотонной. Для осуществление проверки докажем следующие утверждения.

Будем называть точку *условным экстремумом* функции вдоль заданной проходящей через точку прямой, если одномерная функция, являющаяся ограничением данной функции на прямой, имеет экстремум в этой точке. Если понятие условного экстремума не сопровождается указанием прямой, то имеется ввиду, что такая прямой существует. Любой обычный экстремум определенной на плоскости функции является и условным экстремумом вдоль любой прямой. Обратное не верно: условный экстремум может не быть обычным экстремумом. Например, функция седла

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

имеет условный экстремум в каждой точке, в частности, в точках  $x = 0$  — минимум вдоль прямой  $y = \text{const}$ , в точках  $y = 0$  — максимум вдоль  $x = \text{const}$ . А в точке  $x = y = 0$  функция имеет условный экстремум вдоль любой прямой, но не имеет обычного экстремума.

**Утверждение 8.** *Квадратичная функция*

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

не имеет экстремумов в треугольнике за исключением его вершин, если не имеет условных экстремумов во внутренних точках ребер вдоль ребер (строго монотонна на каждом ребре).

*Доказательство.* Предположим, что в треугольнике нашелся экстремум. Экстремум не может располагаться на ребре, потому что он тогда являлся бы и условным экстремумом. Постоянная функция  $A = B = C = D = E = 0$  не удовлетворяет условию на отсутствие экстремумов на ребрах, а линейная функция  $A = B = C = 0, D^2 + E^2 \neq 0$  не может иметь экстремумов во внутренности любой области. Следовательно,  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ .

В курсе аналитической геометрии и линейной алгебры показывается, что для любой квадратичной функции можно подобрать (при помощи поворота и параллельного переноса) такую ортонормированную систему координат  $(x', y')$ , что функция примет один из видов:

$$f(x', y') = ax'^2 + by'^2 + c \quad \text{или} \quad f(x', y') = ax'^2 + by' + c. \quad (a \neq 0)$$

Вторая функция может иметь экстремум во внутренности любой области только если  $b = 0$ , тогда геометрическим местом всех экстремумов будет прямая. Прямая не может проходить ни через внутреннюю точку ребра, ни через две вершины треугольника, потому что это противоречит отсутствию экстремумов во внутренности ребер. Следовательно, единственным возможным вариантом остается

$$f(x', y') = a(x')^2 + b(y')^2 + c. \quad (ab > 0)$$

Линиями уровня этой функции являются эллипсы с центрами в предполагаемом экстремуме внутри треугольника. Для каждого ребра можно подобрать касающийся его эллипс. В точке касания на ребре будет условный экстремум, что противоречит предположению.  $\square$



Обратное утверждение не верно: при наличии условных экстремумов во внутренних точках ребер обычных экстремумов у квадратичной функции в треугольнике, исключая вершины, может не быть, для примера можно указать на функцию седла, главная ось которой совпадает с одним из ребер треугольника.

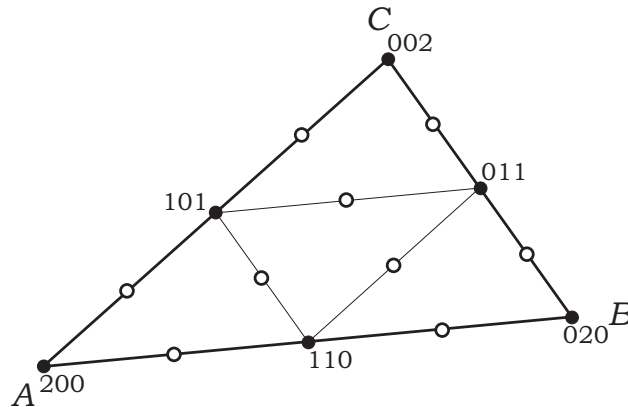


Рис. 4.4. Монотонная квадратичная интерполяция в треугольнике. Черным обозначены опорные точки, значения в которых известны. В качестве промежуточного шага сначала восстанавливаются значения в белых точках. Затем в каждом подтреугольнике определяется своя квадратичная функция.

Утверждение 8 позволяет значительно упростить проверку наличия экстремума в треугольнике за счет перехода к анализу одномерных функций. Строгий экстремум квадратичной функции на отрезке (которым является любое ребро) имеет место быть только тогда, когда производные от функции вдоль отрезка в двух его концах имеют противоположные знаки.

Алгоритм восстановления монотонной функции в треугольнике сетки таков.

1. Определить пробную функцию.
2. Определить значения в центрах ребер четырех подтреугольников (рис. 4.4) следующим образом. Если на данном ребре пробная функция не имеет экстремума, то взять значение пробной функции, в противном случае использовать линейную интерполяцию на данном ребре.

3. Определить окончательные реконструкции в каждом из четырех подтреугольников по значениям в его 6-ти точках.

Согласно утверждению 8 описанный алгоритм в каждом из подтреугольников строит монотонную функцию, не имеющую экстремумов в этом подтреугольнике за исключением его трех вершин. Следовательно, область значений этой функции совпадает с областью значений кусочно-линейной функции в подтреугольнике. С другой стороны, если пробная функция была монотонна на ребре подтреугольника, то построенная функция будет плавно переходить в пробную на этом ребре. Если условие выполнено для всех трех ребер, то будет полное совпадение с пробной функцией в подтреугольнике. Реконструированное поле в теле, разбитом на треугольники, гарантированно будет непрерывным всюду, дифференцируемым во внутренности любого подтреугольника, и во внутренности любого ребра подтреугольника иметь производную по направлению ребра.

#### 4.6. Борьба с ростом вариации при интерполяции

Представленный в предшествующем разделе способ устранения осцилляций в квадратичной интерполяции показал себя на практике с самой лучшей стороны. Однако его будет довольно трудно обобщить даже на случай кубической интерполяции. Поэтому остается интерес к другим методикам устранения осцилляций, которые бы сочетались с интерполяцией любой степени.

Полные вариации (total variation) дискретной  $f_m$  и континуальной  $f(x)$  функций [55] есть соответственно

$$TV_0[f] = \sum_m |f_{m+1} - f_m|, \quad TV[f] = \sup_{x_0 < \dots < x_K} \sum_{k=1}^K |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Сеточно-характеристический метод [22] основывается на сведении исходной системы уравнений к ряду независимых уравнений переноса, инте-

грирование которых заменяется копированием значений из некоторой точки с текущего слоя по времени на новый слой. Следовательно, полная вариация сеточной функции на новом слое не больше полной вариации реконструированного поля текущего слоя. Поэтому если реконструкция поля тоже не увеличивает вариацию сеточной функции, то схема будет TVD-схемой [55].

Реконструкция выше первого порядка не обеспечивает сохранения вариации сеточной функции. Поэтому возникает потребность в ограничителе полинома.

На участке между  $x_{k-1}$  и  $x_k$  рассмотрим выражение

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \min\{f_{k-1}, f_k\}, & f(x) < \min\{f_{k-1}, f_k\}, \\ \max\{f_{k-1}, f_k\}, & f(x) > \max\{f_{k-1}, f_k\}, \\ f(x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оно задает действие ограничителя, гарантирующего сохранение вариации  $f_m$ , если реконструкция является полиномом 2-ой степени, поскольку  $f(x)$  не может одновременно быть немонотонной и не выходить за пределы  $\{f_{k-1}, f_k\}$ .

Простейшим обобщением этого ограничителя на двумерный случай является вычисление  $\min$  и  $\max$  от трех величин в опорных точках соответствующего подтреугольника.

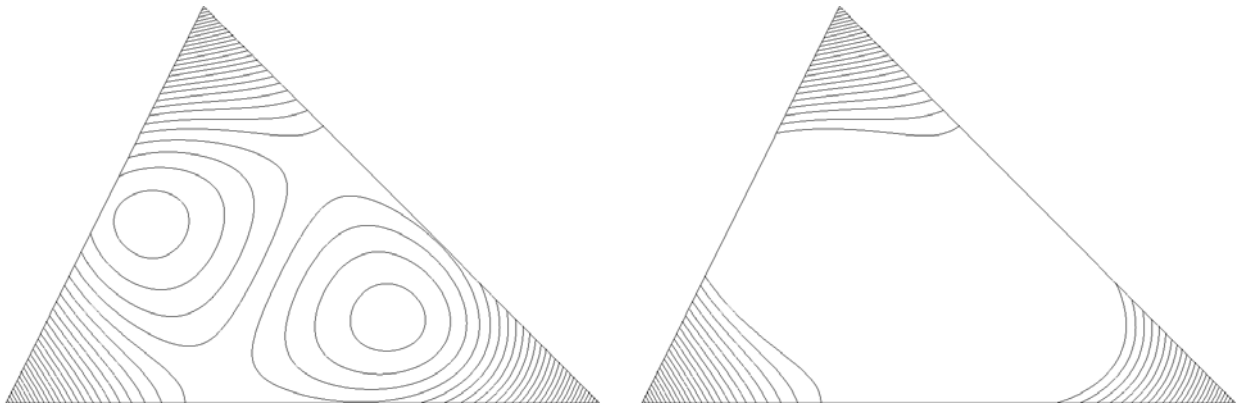


Рис. 4.5. Изолинии полинома третьего порядка без ограничителя (слева) и с ограничителем (справа).

На рис. 4.5 приведен пример работы ограничителя для кубической функции: в правой вершине была задана  $-1$ , в двух других вершинах  $+1$ , в прочих опорных точках — нули. Без ограничителя в функции возникают два лишних экстремума.

#### 4.7. Сравнение численных методов, использующих регулярную и нерегулярную сетки

Выше уже были проанализированы достоинства нерегулярных сеток. Однако не все исследователи стремятся их использовать, предполагая, что это негативно скажется на точности численного решения. В данном разделе предпринимается попытка провести объективное экспериментальное сравнение численных методов, основанных на регулярных и нерегулярных разностных сетках.



Рис. 4.6. Численное решение задачи точечного взрыва.

Зачастую, схемы на регулярных сетках приводят к анизотропным решениям (рис. 4.6). Профили решения в горизонтальном либо вертикальном направлениях существенно отличаются от диагональных профилей, несмотря на наличие центральной симметрии в постановке задачи. В диагональном направлении могут возникнуть осцилляции, даже при наличии ограничителей типа `minmod` на каждом этапе расщепления по направле-

ниям (рис. 4.6). В статье [47] ставится проблема анизотропии численного решения, и предлагаются способы ее оценки.

В данной исследовании численно интегрировались уравнения теории линейной упругости ( $\lambda = \mu = 1, \rho = 1$ ) в области квадратной формы размерами  $[-0.5; 0.5] \times [-0.5; 0.5]$ . Такая область максимально благоприятна для методов, использующих квадратную регулярную сетку. Квадрат разбивался на  $300 \times 300$  ячеек, 90601 узлов (рис. 4.8). Для проведения сравнения использовались консервативные разностные схемы первого порядка: Лакса (Lax) (1.31), Куранта – Изаксона – Риса (upwind, Courant – Isaacson – Rees) (1.33), второго порядка: Лакса – Вендроффа (Lax – Wendroff) (1.32), четвертого порядка (на рисунках: 4th order) (1.37). Схемы порядка выше первого участвовали в сравнении дважды, также дополняясь ограничителем, описанным в разделе 4.6. Построение многомерной схемы осуществлялось методом расщепления по пространственным координатам, когда один шаг интегрирования состоит из двух последовательных проходов вдоль каждой из  $x$  и  $y$  линий сетки соответственно (1.30).

Наихудшего качества решения для регулярной сетки следовало ожидать вдоль диагональных направлений (рис. 4.6), поэтому была поставлена следующая модельная задача. Только в полосе  $\|\vec{r} + (0.1; 0.1)\| \leq 0.03$  (рис. 4.7) задавалось ненулевое начальное возмущение

$$\vec{v} = \vec{n}, \quad \mathbf{T} = -\frac{1}{c_1}(\lambda \mathbf{I} + 2\mu \vec{n} \otimes \vec{n}),$$

где  $\vec{n} = (1; 1)/\sqrt{2}$  задает направление распространения возмущения (коэффициенты в выражении для  $\mathbf{T}$  взяты из спектрального исследования системы упругих уравнений). На границах тела стояло условие отсутствие внешних сил, поэтому происходило порождение отраженных волн, которые интерферировали с изначальным возмущением (рис. 4.7). Но на диагонали тела профиль волны должен сохранить вид ступеньки на момент времени  $t = 0.4$ , в который производилось сравнение численных решений.

Для треугольных нерегулярных сеток использовались сеточно-харак-

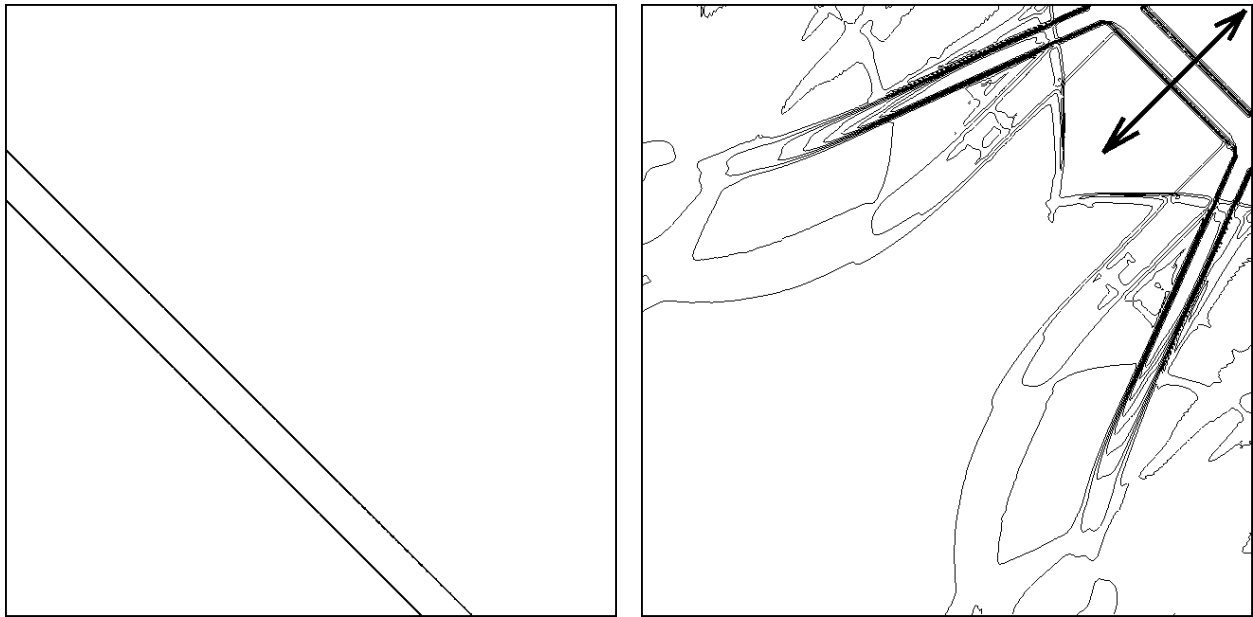


Рис. 4.7. Изолинии модуля скорости в начальный (слева) и конечный (справа) моменты времени периода моделирования. На правом рисунке отмечен диагональный разрез, вдоль которого численные решения сравнивались с аналитическим.

теристические схемы, отличающиеся разбиением треугольников сетки ( $N = 1, 2$ ) и методом интерполяции значений в них, сравнивались (кусочно-) линейная интерполяция, квадратичная интерполяция, квадратичная интерполяция с ограничителем (раздел 4.6), монотонная квадратичная интерполяция (раздел 4.5). Если разбиение треугольников сетки отсутствовало ( $N = 1$ , линейная интерполяция), то сетка насчитывала 91375 вершин треугольников. В остальных случаях ( $N = 2$ ) сетка состояла из 22907 узлов в вершинах треугольников и 68206 узлов в центрах ребер треугольников (рис. 4.8). Шаг по времени для треугольной сетки определялся минимальным расстоянием от узла до ближайшей границы любого из смежных с ним треугольников, полное число шагов равнялось 496. Поскольку такие простые области интегрирования как квадрат являются скорее исключением при решении практически-значимых задач, то ячейки регулярной сетки могут заметно отличаться размерами. Поэтому в этом сравнении регулярные методы делали шаг интегрирования в размере 0.35 (число Куранта) от максимально возможного, полное число шагов — 600.

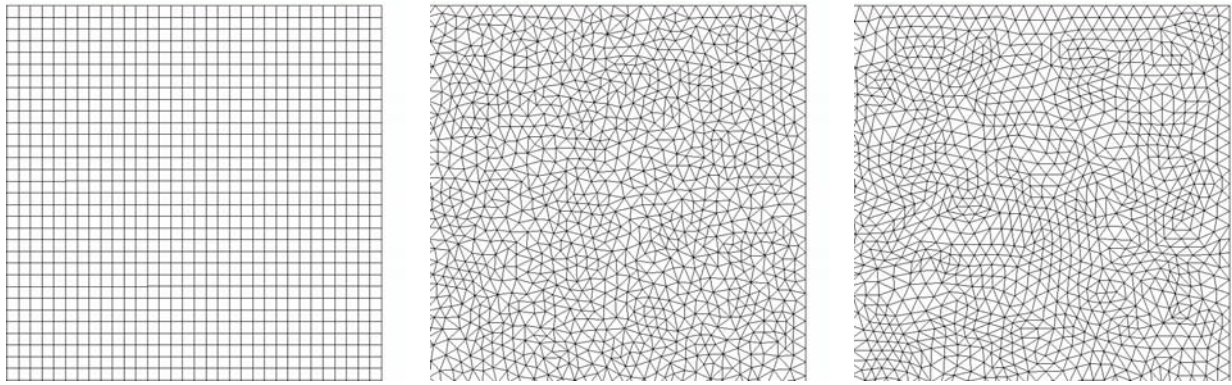


Рис. 4.8. Фрагменты расчетных сеток для регулярных методов (слева), и нерегулярных — первого (в центре) и второго (справа) порядков. На правом рисунке каждый треугольник сетки разбит на четыре части линиями, соединяющими центры ребер.

Результаты исследования представлены на рис. 4.9, а также в таблице 4.1. Колонка  $\Delta$  в таблице принимает значение '+' для треугольной сетки и '-' для квадратной регулярной. Экспериментальные оценки точности схем основывались на сравнении численного решения с аналитическим в узлах диагонального разреза (рис. 4.7). Для нерегулярных сеток сравнивались значения в точках пересечения диагонали с ребрами треугольников. Были использованы следующие статистические оценки, примененные к модулю разности проекции скорости точного и численного решений на направление разреза:  $p_1$  — медиана,  $p_2$  — среднее значение,  $p_3$  — среднеквадратическое значение.

## Выводы

Несмотря на то, что наилучшие оценки точности в таблице 4.1 стоят у схемы 4-го порядка для регулярных сеток, можно утверждать, что точность решений, полученных на треугольной сетке при равной средней плотности узлов и шаге интегрирования, сопоставима с точностью схем того же порядка аппроксимации, разработанных для регулярных квадратных сеток. Однако с точки зрения программной реализации схема с 4-м порядком интерполяции для нерегулярных сеток намного сложнее и, поэтому, не

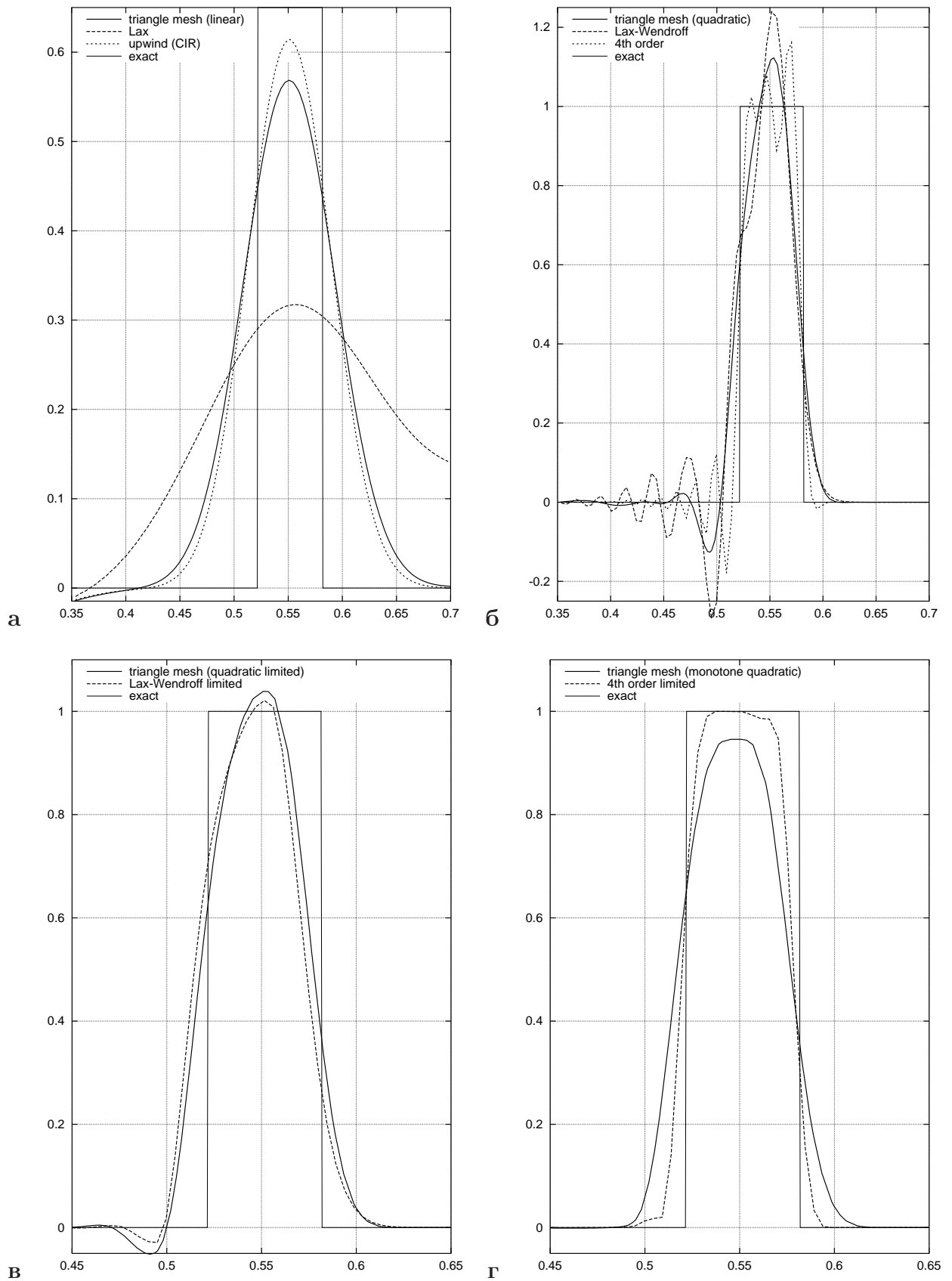


Рис. 4.9. Профили аналитического и численных решений.



участвовала в сравнении.

Из рис. 4.9.а видно, что сочетание линейной интерполяции и треугольной сетки дает результат, намного лучший схемы Лакса и приближающийся к схеме Куранта – Изакона – Риса, для которой в [22] доказана минимальность аппроксимационной вязкости среди всех схем первого порядка.

Среди всех немонотонных схем 2-го порядка аппроксимации (рис. 4.9.б), осцилляции методов на регулярных сетках существенно выше. Возможно, это может объясняться эффектами резонанса определенных частот (более высоких для метода 4-го порядка) при расположении узлов на равных расстояниях. В неструктурированной сетке эти эффекты, по-видимому, возникают в гораздо меньшей степени.

Схемы 2-го порядка с ограничителем, описанным в разделке 4.6, не полностью монотонны (рис. 4.9.в) в двумерных расчетах. Результаты, полученные на регулярных и нерегулярных сетках, отличаются, но назвать лучший метод нельзя.

Монотонная квадратичная интерполяция полностью подавляет осцилляции (рис. 4.9.г).

Расчет велся на обычном персональном компьютере, в последней колонке таблицы 4.1 приведено затраченное время на достижение решения каждым из методов. Из таблицы видно, что регулярные методы существенно выигрывают по скорости счета у своих оппонентов на треугольных сетках. Тому есть объективные объяснения:

- регулярные методы не требуют поиска надлежащего треугольника;
- реконструкция решения на прямой значительно менее трудоемка, чем на плоскости;
- при использовании нерегулярных сеток необходимо хранить координаты узлов даже в задачах с малыми деформациями, тогда как в ре-

гулярном случае их можно вычислять из индексов узлов;

- для регулярных методов в имеющейся программе в каждом узле решетки хранился лишь один набор переменных, в то время как узлы в треугольной сетке хранили по два набора переменных, отвечающих текущему и будущему моментам времени.

Для простейших методов первого порядка точности наблюдается 4 – 6 кратное преимущество регулярных методов, однако, по мере усложнения метода разница в скорости работы скрадывается. Следует помнить, что представленные числа затраченного времени можно рассматривать только как оценки сверху, поскольку программные реализации допускают различные оптимизации. Кроме скорости работы, регулярные методы гораздо проще в реализации, что объясняет их популярность.

Таблица 4.1. Точность численного решения и продолжительность счета различных методов

$\Delta$	Схема / интерполяция	Порядок	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$W/W_0$	$ \vec{p} / \vec{p}_0 $	$t$ , сек
–	Лакса	1	0.19	0.25	0.33	0.18	1.001	33
–	КИР	1	0.050	0.15	0.23	0.39	1.000	50
–	Лакса - Вендроффа	2	0.023	0.093	0.17	0.90	1.000	46
–	ЛВ с ограничителем	2	$8.8 \cdot 10^{-4}$	0.064	0.16	0.75	0.983	179
–	4-го порядка	4	0.0044	0.040	0.092	0.94	1.000	126
–	4-го порядка с огранич.	4	$2.7 \cdot 10^{-5}$	0.029	0.10	0.83	0.998	269
+	Линейная ( $N = 1$ )	1	0.056	0.16	0.24	0.36	1.002	201
+	Кусочно-линейная ( $N = 2$ )	1	0.070	0.16	0.24	0.36	0.999	243
+	Квадратичная	2	0.0042	0.064	0.14	0.85	0.999	243
+	Квадратичная с огранич.	2	0.0018	0.061	0.14	0.79	0.994	269
+	Монотонная квадратичная	2	0.0011	0.065	0.15	0.67	0.976	280

Однако если для регулярной решетки приходится пользоваться чрезвычайно ресурсоемкими алгоритмами глобальной перестройки сетки [36], то с точки зрения скорости счета хаотическая сетка может быть выгоднее, а иногда и являться единственно возможным вариантом.

### 4.7.1. Выполнение законов сохранения импульса и энергии

В процессе расчета модельной задачи по каждой из схем также определялись полный импульс и энергия квадратной области интегрирования:

$$\vec{p} = \int \rho \vec{v} d\vec{r},$$

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{e} : \mathbf{T} + \rho \vec{v}^2) d\vec{r}.$$

Первое слагаемое в выражении для энергии — это потенциальная энергия элемента упругой среды (формула Клайперона [4]), второе слагаемое — кинетическая энергия;  $\mathbf{e}$  — тензор малых деформаций.

Используя связь напряжений  $\mathbf{T}$  и деформаций  $\mathbf{e}$  (1.1), потенциальную энергию можно выразить только через напряжения, непосредственно определяемые численным методом:

$$\frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{T} = \frac{1}{4\mu} \left[ (\mathbf{T} : \mathbf{T}) - \frac{\lambda}{d\lambda + 2\mu} (\mathbf{T} : \mathbf{I})^2 \right],$$

где  $d = 2$  — размерность пространства.

Для треугольников сетки с хранимыми значениями только в вершинах вычисление интеграла велось по формуле (4.2) (точность интегрирования как в известном одномерном методе трапеций), для треугольников с дополнительными значениями в центрах ребер — по формуле (4.5), независимо от способа интерполяции в методе. Для всех методов на регулярной сетке со значениями  $u_{ij}$  в узлах интеграл от одной ячейки принимался равным

$$\int_{\square} u d\vec{r} \approx \frac{h^2}{4} (u_{00} + u_{01} + u_{11} + u_{10}).$$

Отношение энергии в конце счета к начальной энергии и аналогичное отношение для модуля импульса представлены в таблице 4.1. Напомним, что все использованные регулярные схемы без ограничителя являются консервативными, а все схемы для треугольных сеток — неконсервативными. Несмотря на это, для всех схем наблюдается одна и та же картина: закон

сохранения импульса выполняется очень точно (типичное отклонение меньше 1%), а закон сохранения энергии заметно нарушается, тем сильнее, чем ниже порядок аппроксимации схемы: для схемы Лакса уменьшение энергии превышает 80%.

Причина в том, что закон сохранения импульса присутствует в решаемой системе уравнений (1.2) явно ( $\rho \dot{\vec{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T}$ ), в то время как закон сохранения энергии наличествует там лишь неявно (в недивергентной форме):

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \mathbf{T} : (\nabla \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \nabla) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}).$$

Консервативные схемы гарантирует сохранение лишь тех величин, для которых в систему явно включены соответствующие законы. Достоинством системы (1.2) является ее принадлежность классу линейных уравнений с постоянными коэффициентами, которая утрачивается при переходе к другим переменным.

В таблице 4.2 приведены результаты запуска теста при различной мелкости сетки (предшествующие результаты раздела были получены при  $l_{\min}^i = 0.005$ ). В частности, из таблицы видно, что закон сохранения энергии выполняется тем точнее, чем подробнее сетка была использована.

Таблица 4.2. Зависимость качества решения, полученного с использованием монотонной квадратичной интерполяции, от мелкости треугольной сетки

$l_{\min}^i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$W/W_0$	$ \vec{p} / \vec{p}_0 $	$t$ , сек
0.04	0.24	0.31	0.42	0.18	0.924	<1
0.02	0.082	0.20	0.30	0.28	0.885	3
0.01	0.0058	0.11	0.20	0.44	0.911	31
0.005	0.0011	0.065	0.15	0.67	0.976	280
0.0025	$2.4 \cdot 10^{-4}$	0.035	0.11	0.81	0.997	2250
0.00125	$1.4 \cdot 10^{-4}$	0.021	0.082	0.88	0.999	18200

## Глава 5

# Численный метод для бесструктурных треугольных сеток

В предыдущих главах были получены сведения о спектральных свойствах матриц системы уравнений, характеристиках построенной треугольной сетки и способах реконструкции поля в теле с помощью интерполяции в треугольниках сетки. Основываясь на этих результатах в настоящей главе дается окончательная формулировка использованного сеточно-характеристического численного метода на нерегулярных сетках, а также обосновываются основные атрибуты метода, такие как порядок аппроксимации, устойчивость, монотонность, сеточный шаблон, максимальный шаг интегрирования. Показывается, что данный численный метод не является консервативным, однако в главе описывается способ достижения свойства консервативности при том же представлении решения в виде точечных значений в опорных точках треугольной сетки. Исследуется одномерный аналог предлагаемого численного метода в сравнении с известными схемами.

### 5.1. Уравнение переноса

Прежде всего рассмотрим численный метод для решения скалярного уравнения переноса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi_i} = 0. \quad (5.1)$$

Пусть в области интегрирования введена треугольная сетка способом, описанным в главе 2. В качестве узлов сетки, в которых будут храниться приближенно вычисленные значения функции  $u$ , выберем определенные в главе 4 опорные точки в треугольниках сетки для интерполяции того же порядка, что и порядок аппроксимации численного метода, который мы намереваемся построить. Например, для метода первого порядка используем опорные точки линейной интерполяции — только вершины треугольников сетки, для второго порядка — опорные точки квадратичной интерполяции — вершины треугольников и центры ребер, для третьего порядка — вершины треугольников, две точки на каждом ребре, делящие его на равные части, и точки в центре масс треугольников, и т. д.

Формулировка численного метода заключается в описании способа получения значений в узлах на следующем временном слое  $t^{n+1} = t^n + \tau^n$  по известным значениям в узлах на слое  $t^n$ , а также в описании условия на допустимые величины  $\tau^n$ .

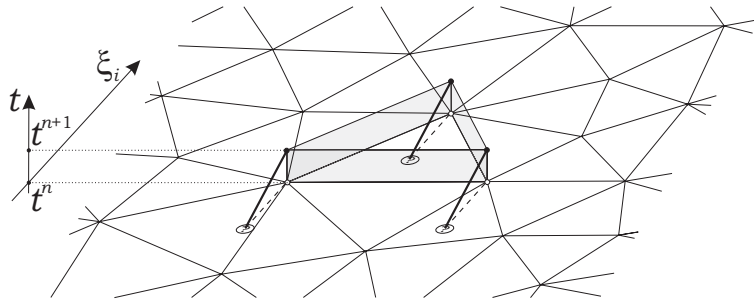


Рис. 5.1. Решение уравнения переноса с первым порядком точности. Значения в узлах сетки на новом временном слое копируются из определяемых характеристиками (показанными жирными линиями) точек на предыдущем слое, значения в которых получаются линейной интерполяцией.

Проведем через  $k$ -ый узел на верхнем временном слое характеристику

$$(\vec{r}, t) + \tau(\lambda \vec{\xi}_i, 1) = (\vec{r}_k, t^{n+1}),$$

где  $\tau$  — параметр прямой, вдоль которой решение должно быть постоянным:  $u = \text{const}$ ,  $\vec{\xi}_i$  — единичный вектор. Характеристика пересечет (рис. 5.1,

5.2) нижний временной слой в точке  $(\vec{r}_k - \lambda\tau^n \vec{\xi}_i, t^n)$ . Если эта точка оказывается внутри области интегрирования, то она принадлежит одному из треугольников сетки, и значение в ней может быть определено интерполяцией внутри этого треугольника. Точка  $\vec{r}_k - \lambda\tau \vec{\xi}_i$  располагается от  $k$ -ого узла сетки на расстоянии  $\lambda\tau$ . Но каким бы не была величина  $\tau$ , расстояние от любой точки внутри сетки до одной из ее вершин не превышает  $R_{\max}^i = O(l)$  (теорема 1), где  $l$  — мелкость сетки. Следовательно, интерполяция в треугольнике порядка  $p$  обеспечивает восстановление значения

$$u^{n+1} = u^n(\vec{r}_k - \lambda\tau \vec{\xi}_i) \quad (5.2)$$

с точностью  $O((\min\{|\lambda|\tau, l\})^{p+1}) = O(\tau^{p+1})$ . Таким образом, предлагаемая схема аналогична конечно-разностной схеме с *порядком аппроксимации*  $p$ , совпадающим с использованным порядком интерполяции в треугольнике.

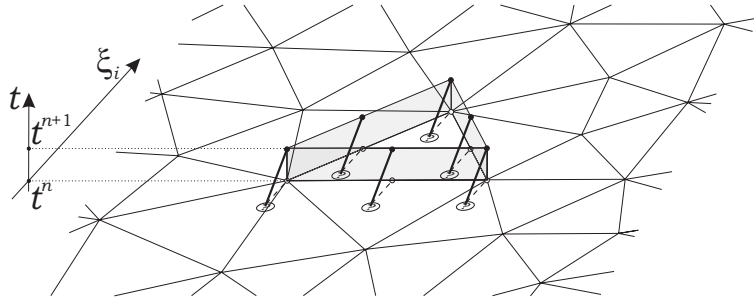


Рис. 5.2. Решение уравнения переноса со вторым порядком точности. Чтобы не выйти за пределы соседних треугольников для каждого узла, максимальный шаг интегрирования вдвое меньше, чем для первого порядка, а значения на предшествующем временном слое определяются при помощи квадратичной интерполяции.

*Шаблон* схемы состоит из одного узла верхнего временного слоя и всех узлов, принадлежащих треугольнику, который пересекла характеристика, на нижнем временном слое. Всего в шаблон входят 4 узла в случае линейной интерполяции на нижнем слое, 7 узлов — квадратичной, 11 узлов — кубической. Общая формула для числа узлов в шаблоне имеет вид  $1 + \frac{(p+2)(p+1)}{2}$ . Если характеристика пересекает ребро треугольника на нижнем слое, то размер шаблона уменьшается до  $1 + (p + 1)$ . Еще менее вероятный случай — попадание характеристики точно в один из узлов,

шаблон в этом случае состоит из 2 узлов. Из теоремы 2 следует, что поиск треугольника и, следовательно, определение шаблона схемы занимает  $O(|\lambda|\tau/l)$  операций.

Поскольку шаблон не фиксирован изначально, а формируется исходя из той точки, в которой характеристика пересекла предыдущий временной слой, то при расчете внутренних, удаленных от границы области интегрирования узлов никаких ограничений на шаг по времени не налагается. При расчете узлов, находящихся поблизости от границы, опущенная характеристика может пересечь границу тела в момент времени  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ , и значение решения в данном узле будет определяться из граничного условия. В ряде случаев может быть не удобным определять граничное условие для всевозможных моментов времени  $t$ , отличных от времен слоев. Если шаг интегрирования не превысит  $\frac{h_{\min}^b}{|\lambda|^p}$ , то все внутренние узлы можно будет рассчитать без привлечения граничного условия, а для узлов, лежащих на границе, потребуется лишь граничное условие в момент времени  $t^{n+1}$ . Более точный порог на шаг интегрирования можно получить, если исследовать все приграничные внутренние вершины в сетке, определив расстояние  $d_k$  от них до границы в направлении  $-\text{sign}(\lambda)\vec{\xi}_i$ :

$$\tau \leq \min_k \frac{d_k}{|\lambda|^p}.$$

Так как  $h_{\min}^i > h_{\min}^b$ , использование одного из представленных условий обеспечивает, что характеристика пересечет один из смежных треугольников по отношению к рассчитываемому узлу. Из теоремы 1 известно, что с каждым узлом «соседствует» не больше константного числа треугольников. Следовательно, определение шаблона может быть выполнено также за константное время (не зависящее от мелкости сетки), и он всегда будет включать рассчитываемый узел на предшествующем слое.

Как показано в разделе 4.1, интерполяционная величина есть линейная комбинация значений в узлах треугольника, причем коэффициенты линейной комбинации (веса узлов) в сумме равны единице. Значит, реше-



ние во внутреннем узле  $u_k^n$  вдалеке от границы может быть выражено как линейная комбинация начальных данных  $u_j^0$  (с суммой коэффициентов равной единице). Устойчивость численного метода имеет место тогда, когда коэффициенты этой линейной комбинации ограничены числом, не зависящим от  $n$ .

В случае линейной интерполяции, веса узлов для точки внутри треугольника неотрицательны, следовательно, неотрицательны и коэффициенты зависимости от начальных данных. А равенство единице их суммы означает, что все коэффициенты также не превосходят единицу. Для метода первого порядка устойчивость доказана.

В случае квадратичной интерполяции веса узлов лежат в большем диапазоне:  $[-\frac{1}{8}; 1]$ , поэтому доказать устойчивость гораздо сложнее. Ограничимся здесь лишь упоминанием того, что на практике никаких признаков нарастающей неустойчивости при решении уравнения переноса методом второго порядка не наблюдалось.

Если метод является неустойчивым, то должно существовать неограниченное по норме решение для ограниченных начальных данных. При использовании гибридных интерполяций из разделов 4.5 и 4.6 модуль интерполяционной величины не превосходит модулей значений в узлах треугольника, следовательно, эти виды интерполяций приводят к устойчивому численному методу.

В двумерном пространстве не определено понятие монотонной функции, также теряют смысл большинство определений понятия монотонной схемы [34]: условие монотонности Годунова, монотонность по Хартену (Harten), монотонность по Ван Лиру (Van Leer). Однако эквивалентное им в одномерном пространстве понятие схемы с положительной аппроксимацией по Фридрихсу (Friedrichs), то есть схемы с неотрицательными весами узлов, по-прежнему применимо. Только численный метод первого порядка удовлетворяет условию Фридрихса, интерполяции выше первого порядка

содержат отрицательные веса узлов. Значения гибридных интерполяций из разделов 4.5 и 4.6 совпадают со значением в некоторой точке того же подтреугольника кусочно-линейной интерполяции. А так как последняя не имеет отрицательных коэффициентов, то численные методы с использованием гибридных интерполяций в треугольнике также можно считать положительно аппроксимирующими.

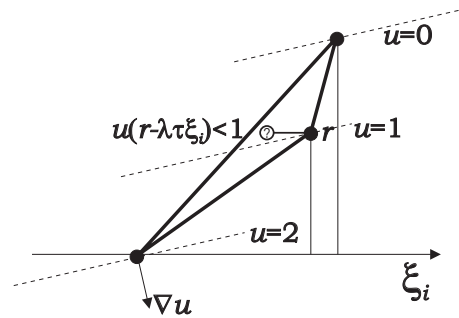


Рис. 5.3. Из того, что значения в вершинах треугольника монотонно убывают с ростом координаты  $\xi_i$  вершины, не следует отрицательность проекции градиента линейной интерполяционной функции на  $\vec{\xi}_i$  (пунктиром показаны изолинии интерполяционной функции).

Однако даже для монотонного метода первого порядка в двумерном пространстве не выполняются некоторые интуитивные ожидания. Если поставить начальные данные, являющиеся строго убывающей (монотонной) функцией  $f$  координаты  $\xi_i$ :

$$u(\vec{r}, 0) = f(\vec{\xi}_i \cdot \vec{r}),$$

то точное решение уравнения переноса будет иметь вид

$$u(\vec{r}, t) = f(\vec{\xi}_i \cdot \vec{r} - \lambda t).$$

То есть решение в каждой точке  $\vec{r}$  со временем должно строго возрастать. Однако при специальном выборе  $f$  в отдельных узлах треугольной сетки за один шаг интегрирования может произойти уменьшение решения:  $u^1 < u^0$  (рис. 5.3).

## Консервативность

Предложенный численный метод (5.2), к сожалению, *не является консервативным* даже для случая постоянного коэффициента  $\lambda$  в уравнении переноса. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть пример с методом первого порядка, в котором начальные данные только в одном узле отличны от нуля. Если направление переноса  $\vec{\xi}_i$  и положение других узлов таково, что следующие значения ни в каких узлах не зависят от данного (рис. 5.4), то на каждом следующем слое отличным от нуля будет оставаться только значение в данном узле, причем оно будет убывать в геометрической прогрессии.

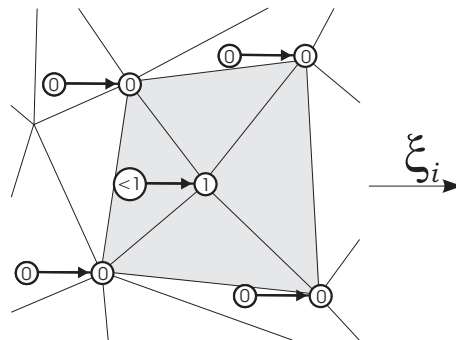


Рис. 5.4. К доказательству неконсервативности численного метода (5.2). Стрелками показано обновление значений в узлах. Серым цветом выделена область, интерполяция в которой дает ненулевое значение.

Отсутствие консервативности метода при решении уравнений (1.2) не является значимым недостатком, что было экспериментально установлено в разделе 4.7. Однако в случае использования метода с другой системой уравнений, ситуация может измениться. Рассмотрим поэтому вопрос придания свойства консервативности предложенному методу.

Консервативный метод решения уравнения переноса (5.1) должен обеспечивать сохранение некоторого дискретного приближения интеграла по площади от величины  $u$ . Из этого вытекает, что приращение интеграла  $u$  в каждом треугольнике сетки должно происходить только вследствие притока этой величины через ребра треугольника. Поток  $u$  в каждой точке

равен  $\lambda u \vec{\xi}_i$ . Поэтому требование консервативности можно записать

$$\int_{\Delta} u(\vec{r}, t^{n+1}) d\vec{r} = \int_{\Delta} u(\vec{r}, t^n) d\vec{r} - \sum_{j=1}^3 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\Delta_j} \lambda u(\vec{r}(l), \tau) \vec{\xi}_i \cdot \vec{n}_j dl d\tau, \quad (5.3)$$

где  $\Delta$  — обозначение треугольника сетки,  $\partial\Delta_j$  —  $j$ -ое ребро треугольника,  $l$  — параметр длины вдоль ребра,  $\vec{r}(l)$  — точка на ребре,  $\vec{n}_j$  — единичная внешняя нормаль к  $j$ -му ребру треугольника.

Количество уравнений вида (5.3) равно числу треугольников в сетке. А количество неизвестных  $u_k^{n+1}$  — числу узлов в сетке. Используя формулу Эйлера для планарного графа [42], можно показать, что отношение числа треугольников в сетке к числу вершин стремится к 2. Поэтому в случае хранения точечных значений в вершинах треугольной сетки, как в методе (5.2) первого порядка, мы приходим к переопределенной системе уравнений не зависимо от способа аппроксимации интегралов в (5.3). Из этого можно заключить, что при подобном описании решения  $u$  построение консервативного метода невозможно.

В случае применения интерполяции второго порядка кроме узлов в вершинах треугольной сетки, дополнительно вводятся узлы в центрах всех ребер. В качестве приближения интеграла по треугольнику логично использовать формулу (4.4). Поскольку в (4.4) не входят значения в вершинах треугольника, их можно вычислять произвольно, не нарушая условий консервативности, например, по формуле (5.2). Количество ребер примерно втрое превосходит число вершин и в 1.5 раза число треугольников, поэтому количество уравнений вида (5.3) теперь недостаточно для однозначного определения значений в центрах ребер, их необходимо дополнить какими-то другими уравнениями. Кроме того, набор уравнений (5.3) приводит к неявной схеме вычисления значений в центрах ребер.

Ситуация становится намного проще при использовании кубической интерполяции в треугольнике, когда в нем насчитывается 10 узлов. Дело в том, что в этом случае один из узлов располагается в центре треугольника,

и его значение влияет только на интеграл по этому треугольнику. Поэтому можно предложить такой консервативный метод расчета: сначала определить новые значения в 9 узлах треугольника, которые он разделяет с соседями, обычным способом (5.2), определить потоки через все три ребра за период времени между слоями, а затем рассматривать выражение (5.3), раскрыв интегралы по треугольнику по формуле (4.6), как уравнение с единственной переменной — значением узла в центре масс треугольника  $u_{111}^{n+1}$ . Для достижения третьего порядка точности метода в целом интегралы потоков через ребра должны вычисляться с точностью  $O(\tau^4)$ , для чего потребуется дополнительно определить стандартным способом решение в узлах на ребре треугольника в моменты времени  $t^n + \frac{1}{3}\tau^n$  и  $t^n + \frac{2}{3}\tau^n$  (рис. 5.5).

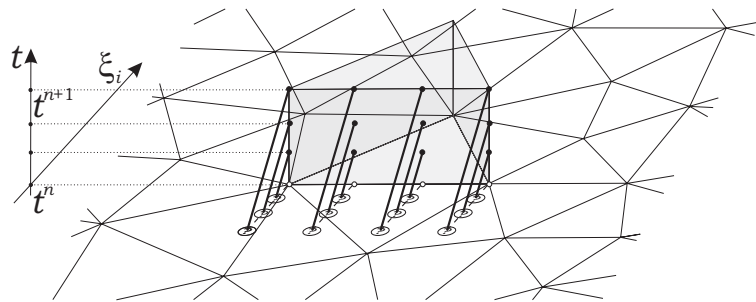


Рис. 5.5. Определение потока через ребро треугольника с точностью  $O(\tau^4)$  при использовании кубической интерполяции требует определения значений на ребре также в промежуточные моменты времени.

## 5.2. Гиперболическая система уравнений

Метод расчета системы уравнений в частных производных гиперболического типа с двумя независимыми пространственными переменными заключается в следующем.

На каждом шаге интегрирования случайным образом выбирается произвольный ортонормированный базис  $(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)$ . В этом базисе система может

быть приведена к виду

$$\dot{\vec{u}} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_1} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_2} = 0, \quad (5.4)$$

где обе матрицы  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  имеют только действительные собственные числа и полный набор собственных векторов.

Затем используется расщепление по направлениям (рис. 5.6): последовательно решаются два уравнения вида (1.26), содержащие лишь производные вдоль одного направления  $\xi_1$  или  $\xi_2$ . Случайный выбор базиса является обобщением известного приема чередования направлений при расщеплении, что позволяет скрыть наличие выделенных направлений и обеспечить максимальную изотропность решения [47].

В разделе 1.7 показано, что система (1.26) эквивалентна набору независимых уравнений переноса для так называемых римановых инвариантов  $v_i = \vec{\omega}_i \cdot \vec{u}$ , где  $\vec{\omega}_i$  — левый собственный вектор текущей матрицы  $\mathbf{A}_j$ . Решение каждого уравнения переноса осуществляется описанным выше способом (5.2). Для повышения эффективности расчета рекомендуется выполнить преобразование  $\vec{v}^n = \mathbf{\Omega} \vec{u}^n$  сразу для всех узлов перед выполнением интерполяции, а не вычислять  $\vec{\omega}_i \cdot \vec{u}$  в необходимых узлах в ходе интерполирования в треугольниках. Величины  $\vec{u}^n$  больше не потребуются в дальнейшем, поэтому нет необходимости выделять отдельный участок памяти для хранения  $\vec{v}^n$ . При наличии нулевых собственных чисел имеет смысл действовать согласно формуле (1.40), т. е. до преобразования скопировать  $\vec{u}^n$  в  $\vec{u}^{n+1}$ , а затем решить уравнения переноса только для ненулевых собственных значений.

Допустимый шаг интегрирования определяется максимальным по модулю собственным значением матриц  $\mathbf{A}_j$ .

Шаблон схемы (множество узлов, значения которых влияют на рассчитываемую величину) для внутренних узлов треугольника состоит только из узлов данного треугольника. Для узлов, лежащих между треугольниками, шаблон может состоять из узлов максимум четырех смежных тре-

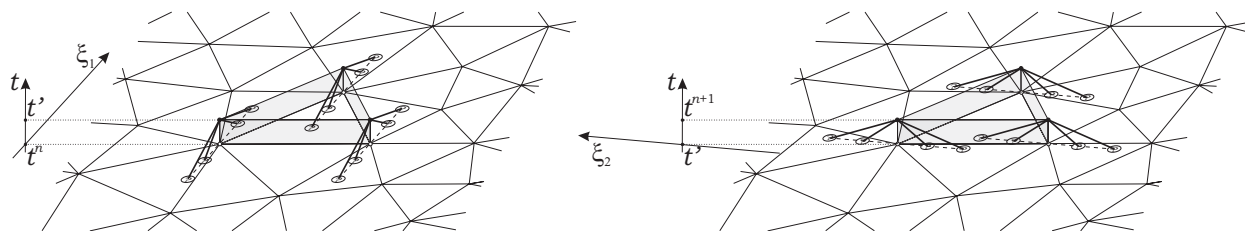


Рис. 5.6. Решение гиперболических уравнений ведется с помощью метода расщепления — в два этапа, на каждом из которых выполняется интегрирование уравнений переноса.

угольников в зависимости от выбора направлений расщепления и наличия у матриц  $\mathbf{A}_j$  собственных значений разных знаков.

Расчет на границе области интегрирования ведется в соответствии с разделом 1.8. Если не все характеристики попадают внутрь области, то с использованием только «внутренних» характеристик формируется величина  $u^{in}$ , которая затем позволяет определить  $u^{n+1}$  с привлечением граничных или контактных условий и корректировки (1.43). Для граничных узлов, лежащих на выпуклой границе тела, наиболее вероятно, что характеристики как вдоль направления  $\xi_1$ , так и вдоль  $\xi_2$  выйдут за пределы области. В этом случае учет граничных условий производится дважды за один шаг интегрирования по времени.

### Движение сетки

Расчет на лагранжевой треугольной сетке подразумевает, что скорость смещения вершин сетки совпадает со скоростью среды. Но в методах второго порядка и выше вводятся дополнительные узлы, отличные от вершин, движение которых задается линейной интерполяцией движений вершин треугольника, в котором они расположены. Даже если скорость всех вершин является лагранжевой, то узлы, не совпадающие с вершинами, смещаются относительно точек среды. Это означает, что при их расчете необходимо учитывать конвективные члены. Отличие скорости этих узлов от скорости среды невелико:  $O(l^2)$ , где  $l$  — мелкость сетки. Собственные значения матриц при поправке на конвекцию также изменятся на  $O(l^2)$ .

Отличие мест пересечения характеристики до и после поправки со слоем  $t^n$  составит  $\tau O(l^2) = O(\tau^3)$ , такого же порядка и отличие в восстанавливаемом интерполяцией решении. Поэтому в методе второго порядка можно не рассматривать отличие движения узлов в центре ребер от лагранжева — это не понизит степень аппроксимации, а в методах третьего порядков и выше поправка необходима.

В случае использования любой подвижной сетки в конце каждого шага, после смещения узлов и вычисления решения на верхнем слое  $u^{n+1}$  производится выравнивание сетки, описанное в разделе 2.4. В процессе выравнивания могут создаваться новые вершины и новые треугольники. Значения их узлов определяются интерполяцией из сетки до выравнивания. Постоянная переинтерполяция ухудшает качество решения, поэтому алгоритм перестройки сетки подбирается так, чтобы минимизировать производимые им изменения в сетке. Однако есть возможность полностью избежать переинтерполяции. Для этого необходимо подготовить выровненную сетку на следующем слое еще до расчета решения в нем. Недостатком такого подхода является несколько большая трудоемкость определения треугольников, которые пересекают характеристики на слое  $t^n$ , потому что сетки на двух слоях больше не совпадают. Также не гарантируется, что характеристики, отвечающие нулевым собственным значениям, пересекут предшествующий слой точно в каком-то узле.

### 5.3. Сравнение одномерных схем на решении уравнения переноса

В этом разделе на примере хорошо изученного уравнения переноса (5.1) с постоянными коэффициентами производится сравнение ряда известных схем со схемами, построенными аналогично методу на нерегулярных сетках из раздела 5.1, но адаптированных к одномерному простран-



ству. Было решено ограничиться сопоставлением негибридных схем с постоянными коэффициентами, но и этого оказалось достаточно, чтобы прийти к определенным заключениям.

Напомним, что двумерная плоскость разбивалась на множество треугольников. Расчетные узлы делились на два типа: принадлежащие одному треугольнику и разделяемые двумя или большим числом треугольников. По аналогии одномерную прямую предлагается разбивать на сегменты, при этом часть узлов будет внутренними для сегмента, а часть разделяться смежными сегментами (рис. 5.7). Количество узлов в сегменте определяется требуемым порядком интерполяции  $p$  и равно  $p + 1$ . При реализации сеточно-характеристического метода используется реконструкция решения, которая непрерывна всюду и является полиномом степени  $p$  внутри каждого сегмента.

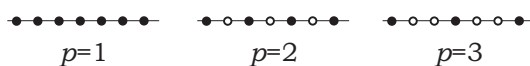


Рис. 5.7. Различные типы расчетных узлов: черные точки обозначают узлы, разделяемые двумя сегментами, белые точки — внутренние узлы сегмента.

В случае использования линейной интерполяции ( $p = 1$ ) сегменты оказываются отрезками между двумя соседними узлами, метод расчета всех узлов одинаков и совпадает со схемой «уголок» (схемой Куранта – Изаксона – Риса [46]).

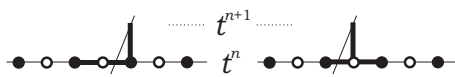


Рис. 5.8. Различие шаблонов расчета четных и нечетных узлов при  $p = 2$ .

В случае квадратичной интерполяции ( $p = 2$ ) сегменты включают три узла. При этом способы расчета четных и нечетных узлов разнятся. Шаблон схемы зависит от того сегмента, который пересекает характеристика, опущенная из узла на следующем временном слое (рис. 5.8). Для узлов — центров сегмента схема расчета совпадает со схемой Лакса – Вендрофф-

фа [45], для узлов — концов сегмента — со схемой Бима — Ворминга [57].

Несмотря на то, что все вышеперечисленные схемы для расчета одномерного уравнения переноса в случае постоянных коэффициентов являются консервативными, интересно было бы понять, чему соответствует предлагаемый подход построения консервативной схемы на треугольной сетке. Достаточно исследовать случай  $p = 2$ , когда в сегменте появляется внутренний узел, не разделяемый с другим сегментом. Узлы, являющиеся концами сегментов, (для определенности с четными индексами) рассчитываются по схеме Бима — Ворминга ( $\sigma = \frac{\lambda\tau}{h} > 0$ ):

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{1}{2}\sigma(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) + \frac{1}{2}\sigma^2(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n), \\ u_j^{n+\frac{1}{2}} &= u_j^n - \frac{1}{4}\sigma(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) + \frac{1}{8}\sigma^2(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \end{aligned}$$

Поток  $F_j$  через границу сегментов за период времени  $[t^n, t^{n+1}]$  определяется по формуле Симпсона [58] с погрешностью  $O(\tau^3)$ :

$$F_j = \frac{\lambda\tau}{6}(u_j^n + 4u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^{n+1}).$$

По той же формуле Симпсона определяется интеграл  $u$  в сегменте, приращение которого идет благодаря потокам через границы сегмента:

$$\frac{h}{3}(u_j^{n+1} + 4u_{j+1}^{n+1} + u_{j+2}^{n+1}) = \frac{h}{3}(u_j^n + 4u_{j+1}^n + u_{j+2}^n) + F_j - F_{j+2}.$$

Отсюда можно получить явную запись схемы расчета центральных узлов сегментов  $u_{j+1}^{n+1}$ :

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n + \left( \sigma \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} + \sigma^2 \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -5 \\ 16 \\ -10 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix} + \sigma^3 \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} u_{j-2}^n \\ u_{j-1}^n \\ u_j^n \\ u_{j+1}^n \\ u_{j+2}^n \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Схема (5.5) по построению имеет второй порядок точности, а ее шаблон содержит 6 точек и несимметричен относительно узла  $j + 1$ .

Сравнение схем производилось на задаче переноса прямоугольного импульса на отрезке  $[0,1]$  с условиями периодичности на концах. Сетка состояла из 1000 узлов, счет велся до достижения  $n = 10600$  шагов при  $\sigma = 0.5$ . Графики импульсов после окончания счета представлены на рис. 5.9. В подписях к графикам были использованы следующие обозначения:

- «exact» — точное решение;
- «upwind (CIR)» — схема Куранта – Изакона – Риса 1-го порядка аппроксимации [46];
- «Lax-Wendroff» — схема Лакса – Вендроффа 2-го порядка аппроксимации [45];
- «Beam-Warming» — схема Бима – Ворминга 2-го порядка аппроксимации [57];
- «Rusanov» — схема Русанова 3-го порядка аппроксимации [59];
- «3rd-order, nearest to monotonic» — наиболее близкая в пространстве неопределенных коэффициентов к монотонным схемам явная схема 3-го порядка аппроксимации на 6-ти точечном шаблоне, выведенная в [22];
- «4th-order» — схема 4-го порядка аппроксимации, аналогичная (1.37);
- «interleaved LW & BW» — расчет, в котором к четным узлам применяется схема Бима – Ворминга, а к нечетным — схема Лакса – Вендроффа;
- «interleaved X & BW» — расчет, в котором к четным узлам применяется схема Бима – Ворминга, а к нечетным — схема (5.5);
- «X» — расчет, в котором ко всем узлам применялась схема (5.5).

Помимо графиков были рассчитаны числовые метрики близости численного решения к точному (таблица 5.1):  $p_0$  — максимальное отклонение численного решения в узлах сетки,  $p_2$  — средний модуль отклонения,  $p_3$  — среднеквадратическое отклонение.

Таблица 5.1. Отклонение численного решения уравнения переноса от точного решения

Схема	$p_0$	$p_2$	$p_3$
upwind (CIR)	0.496	0.082	0.155
Lax-Wendroff	0.649	0.038	0.096
Beam-Warming	0.649	0.038	0.096
X	0.639	0.026	0.082
interleaved LW & BW	0.617	0.022	0.077
interleaved X & BW	0.484	0.010	0.052
3rd-order, nearest to monotonic	0.468	0.010	0.051
Rusanov	0.463	0.010	0.050
4th-order	0.537	0.011	0.046

## Выводы

Изучение одномерного аналога предлагаемой схемы для треугольной сетки привело к методу, в котором узлы одномерной сетки рассчитываются по различным схемам, имеющим также различные шаблоны. Причем чередование схем не зависит от решения, а только от индекса узла. Такой класс схем мало изучен. Есть видимое сходство с гибридными схемами, однако переключение между базовыми схемами в последних происходит в зависимости от поведения решения, что требует в программной реализации использовать медленные инструкции условного перехода, в то время как простое чередование схем может выполняться на современных компьютерах многократно быстрее.

Из рис. 5.9 видно, что чередование схем Лакса – Вендроффа и Бима – Ворминга в сравнении с применением только одной из этих схем приводит к уменьшению амплитуды нефизических осцилляций и существенному

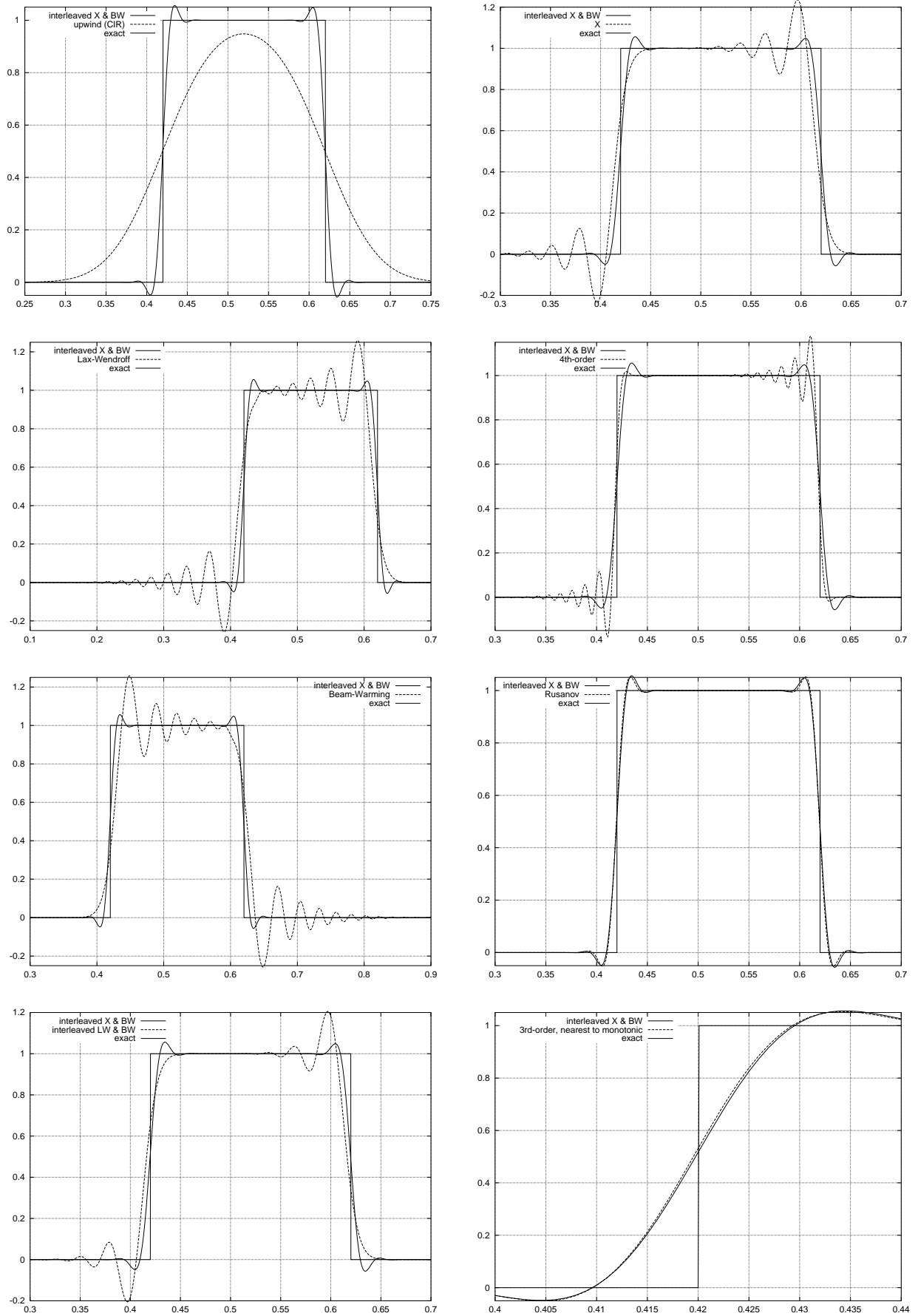


Рис. 5.9. Решение уравнения переноса различными схемами с постоянными коэффициентами для начальных данных прямоугольной формы.

сокращению их количества, также увеличивается точность решения (таблица 5.1).

При чередовании схемы (5.5) и схемы Бима – Ворминга, каждая из которых в отдельности проявляет сильную немонотонность и имеет второй порядок точности, результат еще более впечатляющий. График этого решения очень похож на график решения по схеме Русанова 3-го порядка и практически совпадает с графиком наиболее монотонной схемы 3-го порядка с 6-ти точечным шаблоном (из-за чего на рис. 5.9 был использован крупный масштаб). То есть, чередование схем 2-го порядка эффективно повышает «общий» порядок точности метода до 3-го!

## Глава 6

# Распространение упругих волн в неоднородных массивных породах

В данной главе методом численного моделирования исследуется характер отраженного волнового поля, обусловленного рассеянием упругой энергии от кавернозных и трещиноватых зон в массивных породах. Показано, что с ростом неравномерности распределения микронеоднородностей в таких зонах, т.е. образованием их скоплений – кластеров – интенсивность отклика сейсмической энергии усиливается.

### 6.1. Введение

По мере исчерпания фонда неоткрытых или недостаточно исследованных сейсморазведкой месторождений нефти и газа в слоистых средах осадочного комплекса, все актуальнее становится разработка ее методик и технологий, обеспечивающих выявление коллекторских зон в массивных породах нижнего структурного этажа. К последним относятся массивные карбонаты древних платформ, магнетические и метаморфические породы консолидированного фундамента, в которых коллектора связаны с зонами повышенной концентрации каверн и трещин. Со сходными проблемами сталкиваются при выделении коллекторских зон при разведке органогенных объектов (рифов и атоллов).

Общие представления о кавернозно-трещиноватых коллекторах в массивных породах получены из информации бурения и геофизического исследования скважин на известных месторождениях нефти.

Трещиновато-кавернозные резервуары представляют собой зоны скопления микропустот, в большей или меньшей степени связанные сетью микротрещин и трещин. Если размеры микропустот колеблются от долей миллиметра до десятков сантиметров, то зоны их скоплений – коллекторские резервуары – характеризуются существенно большими размерами: от первых сотен метров до километра и более. При этом распределение в пространстве микрокаверн носит незакономерный характер, а их концентрация неравномерна.

К макрозонам их развития применим термин диффузной кавернозности и трещиноватости. Для них наряду со случайным характером распределения микронеоднородностей в объеме характерно отсутствие резких границ. До последнего времени доминировало представление о невозможности картирования (выявления) сейсморазведкой зон диффузной кавернозности/трещиноватости в массивных породах.

При отсутствии внутриформационных границ, что характерно для массивных пород, единственным носителем информации может быть отклик рассеянной сейсмической энергии от зон развития неоднородностей. В этом отношении осадочные породы находятся в более благоприятных условиях - информацию о концентрации трещин и их направлении несут отраженные волны.

Исследование характера распространения сейсмических колебаний в случайно-неоднородных средах, какими являются зоны развития каверн и трещин аналитическими методами крайне затруднено. Использование эффективных моделей — сплошных сред заведомо будет искажать реальность. Поэтому прогресс в этой области достигается, главным образом, благодаря развитию компьютерной техники и численного моделирования.



В работах [60, 61] для моделирования распространения сейсмического возмущения в осадочных породах использовалось волновое уравнение. К сожалению, этот подход трудно признать подходящим применительно к твердым массивным породам, что, впрочем, признается авторами [60]. Дело в том, что это уравнение описывает распространение только одного типа упругих волн — продольных (как в идеальной жидкости) и никак не учитывает поперечные волны.

Влияние случайной трещиноватости породы на прохождение плоской упругой волны исследуется в статье [62]. В ней в результате численных экспериментов определяются эффективные упругие свойства такой породы: эффективная скорость распространения волны при наличии трещин оказывается ощутимо ниже, и волна оказывается подверженной затуханию, коэффициент которого в зависимости от частоты волны также устанавливается. Отдельно рассматриваются заполненные водой и пустые (dry) трещины. В статье отмечается принципиальная важность исследования пересекающихся трещин в породе. Этот случай мало исследован в теории, а при большой плотности трещин нельзя одновременно надеяться на их статистическую независимость и отсутствие пересечений. Также в [62] перечисляются основные источники ошибок при численном исследовании трещиноватости.

Данное исследование также посвящено влиянию случайной кавернозности и трещиноватости на изученный с дневной поверхности сейсмический сигнал. Причем изучалась как ограниченная зона неоднородностей подобно [60, 63], так и неограниченная (полупространство) [62].

В работе [63] иной акцент — можно ли рассеянные волны использовать для выделения коллекторских резервуаров. С применением численного моделирования были выявлены основные особенности волнового отклика от зоны микронеоднородностей (каверн) с естественно случайным распределением их внутри упомянутой макрозоны. Поэтому, как и в [62, 63],

в данной работе была использована модель изотропного линейно-упругого материала.

Отклик представлял собою многофазный пакет интерферирующих фрагментов отраженных продольных и обменных<sup>1</sup> волн, с временной мощностью, отвечающей толщине кавернозной зоны.

Было высказано предположение, что такого рода волновой отклик обусловлен неравномерной концентрацией микронеоднородностей, образующей участки их разрежения и участки их скопления – кластеры. Размеры последних могут быть уже сопоставимы с длиной волны, а значит, и обеспечивать генерацию локальных отражений, видимых на результатах численного моделирования. Термин «кластер», как скопление неоднородностей широко используется в теории распространения электромагнитных и оптических волн в случайно-неоднородных средах.

Одним из принципиальных отличий данной работы от [60–63] является постановка граничных условий на поверхности раздела между породой и каверной (трещиной) в явном виде. Это позволят достичь сразу двух целей: повысить точность расчета малых неоднородностей (размером всего в несколько ячеек сетки) и допустить постановку контактных условий отличных от полного слипания. Например, моделирование пустых и заполненных жидкостью трещин отличается именно постановкой различных условий на их поверхности. Поэтому вместо квадратной (кубической) сетки в работе используется неструктурированная треугольная сетка, адаптированная к поверхностям неоднородностей. Несмотря на это, численный метод имеет второй порядок аппроксимации, как и в других работах. Предлагаемый численный метод имеет большую общность и пригоден для исследования процессов обтекания сейсмическими волнами макроскопических преград, когда эффектами экранирования и дифракции пренебрегать нельзя.

---

<sup>1</sup>Обменными волнами в геофизике называются поперечные волны, образующиеся на границах в результате преобразования (обмена) продольной волны (P) в поперечную (S).

## 6.2. Начальное состояние среды

Поставленная задача относится к смешанному типу: в начальный момент времени задается состояние всех точек тела, а на внешних и внутренних контактных поверхностях тела выбираются граничные условия (рис. 1.2). Целью задачи является отыскание параметров каждой точки тела области интегрирования в последующие моменты времени.

Нас интересует отражение сейсмической плоской волны, излученной с дневной поверхности вглубь породы. Одним из возможных профилей волны является сигнал Берлаге (Berlage signal):

$$f(t) = t^N e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Синусоида модулируется множителем  $t^N e^{-\beta t}$ , который при увеличении  $t$  сначала достигает своего максимума, а затем быстро затухает. Таким образом, излучаемая волна имеет ограниченный носитель.

В работе полагалось, что параметры  $N$ ,  $\beta$  подбираются так, что сигнал является симметричным, а синусоида успевает совершить лишь два периода колебаний до момента затухания. Такой сигнал удобно описать как третью производную нормальной (или гауссовой) плотности распределения вероятности (рис. 6.1):

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \\ \phi'''(t) &= \frac{1}{\sigma^4} \left[ 3(t-m) - \frac{(t-m)^3}{\sigma^2} \right] \phi(t). \end{aligned}$$

За период  $T$  доминирующей гармоники в  $\phi'''(x)$  можно принять удвоенное расстояние между двумя наибольшими по модулю экстремумами, которые приблизительно совпадают с экстремумами полинома  $3(t-m) - \frac{(t-m)^3}{\sigma^2}$ , находящимися в точках  $t_{1,2} = m \mp \sigma$ , следовательно,  $T = 4\sigma$ .

Естественными для данной задачи представляются начальные условия невозмущенной среды и граничные условия на дневной поверхности,

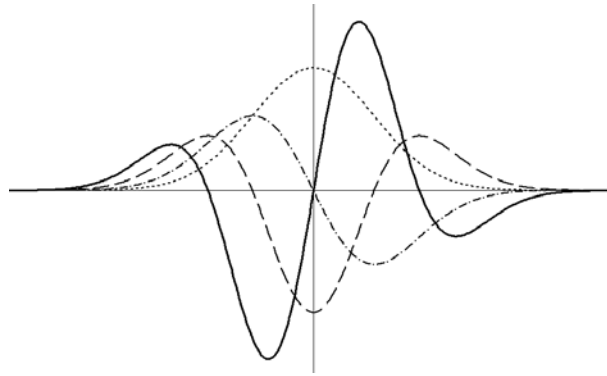


Рис. 6.1. Нормальная функция распределения (пунктир), ее первая (штрих-пунктир), вторая (штрихи) и третья (сплошная линия) производные.

моделирующие излучение сигнала [63]. Однако если область неоднородностей находится на значительном углублении от поверхности, то такое решение сопряжено с напрасной тратой машинных ресурсов при численном моделировании до тех времен, пока волна не достигнет интересующей нас области, а также с потерей точности, поскольку при машинном интегрировании уравнений происходит изменение профиля волны за счет численных ошибок.

В настоящей работе за начальный момент берется время, необходимое переднему фронту излученной волны, чтобы добраться до области кавернозности – трещиноватости. При этом необходимость в особом граничном условии на поверхности отпадает, но начальное состояние точек среды уже не является нулевым и требует особого рассмотрения.

Пусть плоская волна распространяется в направлении  $\vec{n}$ . Выберем ортонормированный декартовый базис так, чтобы первый базисный вектор совпадал с  $\vec{n}$ :  $\vec{\xi}_1 = \vec{n}$ . Тогда  $\vec{\xi}_2$  будет направлен вдоль фронта волны и  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_2} \equiv 0$ . Следовательно, в плоской волне справедливо упрощенное уравнение (1.26). Решение этого уравнения будет распространяться в направлении  $\vec{\xi}_1$ , сохраняя свой профиль, только если состояние точек среды будут пропорциональны столбцу  $\mathbf{\Omega}_1^{-1}$  (1.25), отвечающему отрицательному собственному значению  $\mathbf{A}_1$ . Для продольной волны:

$$\vec{v} = f(\xi_1)c_1\vec{n}, \quad \mathbf{T} = -f(\xi_1)(\lambda\mathbf{I} + 2\mu\vec{n} \otimes \vec{n}), \quad (6.1)$$

для поперечной:

$$\vec{v} = f(\xi_1)c_2\vec{n}_2, \quad \mathbf{T} = -f(\xi_1)\mu(\vec{n} \otimes \vec{n}_2 + \vec{n}_2 \otimes \vec{n}), \quad (6.2)$$

$f(\xi_1)$  — безразмерный множитель, определяющий профиль волны;  $\vec{n}_2$  — единичный вектор, ортогональный  $\vec{n}$ .

### 6.3. Граничные условия

Граничные условия на внешних границах области интегрирования ставились согласно подразделу 1.8.4.

В расчетах на границе каверны (рис. 6.2), заполненной жидкостью, использовались условия свободного скольжения (см. подраздел 1.9.2) из-за того, что идеальная жидкость создает лишь ортогональную силу на своей границе.

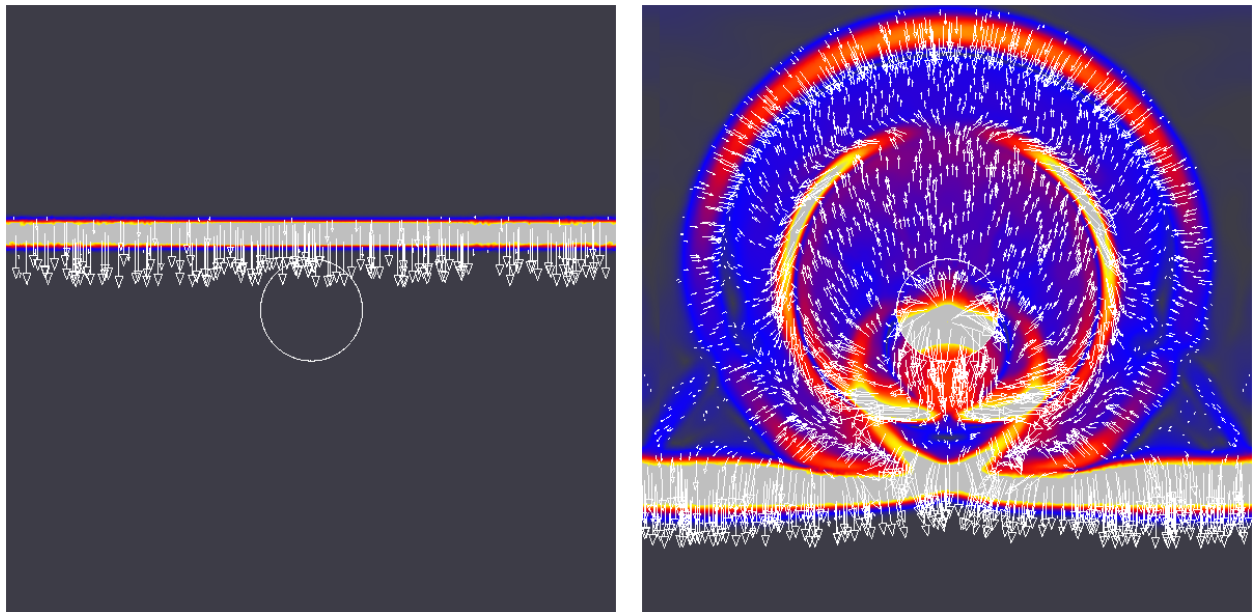


Рис. 6.2. Прохождение продольной плоской волны через жидкостную каверну. Слева: поле скоростей до встречи каверны, справа: после. Отраженный сигнал состоит из продольной волны, распространяющейся преимущественно в обратном направлении, и поперечной волны — в диагональных направлениях.

### 6.3.1. Поверхности трещин

В данной работе выделялось два типа трещин: пустые и заполненные жидкостью. Первые отражают все волны, падающие на них. Вторые пропускают продольные волны (нормальные к поверхности трещины) и отражают поперечные. Разумеется, и те и другие волны проходят через трещиноватую среду за счет эффектов дифракции, если длина трещин меньше длины волны.

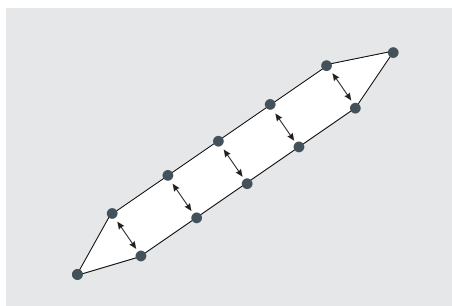
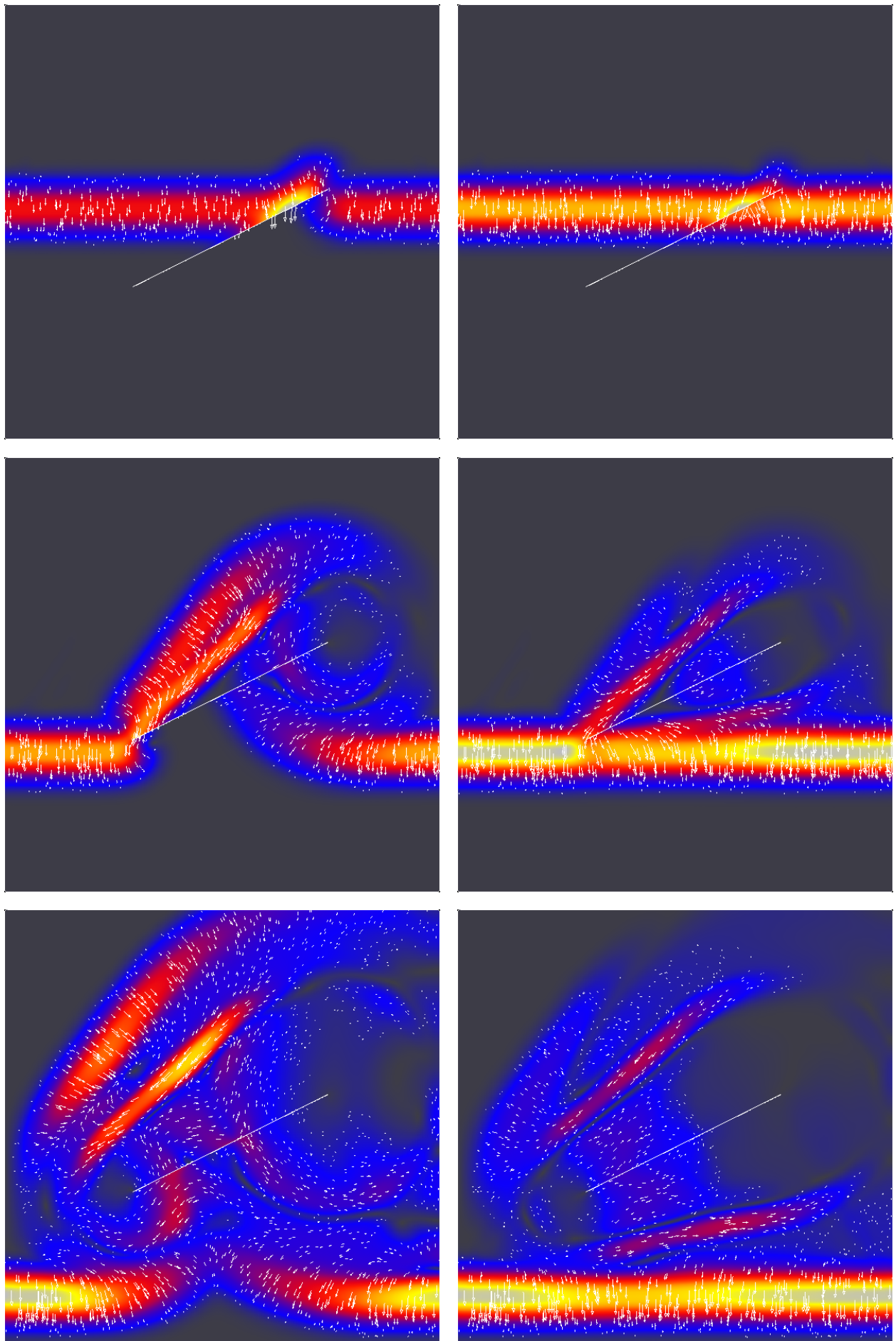


Рис. 6.3. Распределение точек разностной сетки на поверхности трещины. Стрелками указаны пары точек, рассчитываемых совместно для заполненной трещины.

В точках породы, находящиеся на границе с пустой трещиной ставилось условие свободной границы (см. выше). Заполненные трещины можно рассчитывать так же, как и заполненные каверны. Однако тот факт, что их ширина много меньше протяженности, позволяет исключить из расчета жидкость, и считать что справедливы условия (1.59) для случая, когда  $a$  и  $b$  обозначают близко расположенные точки массивной породы, находящиеся на противоположных поверхностях трещины (рис. 6.3). Для двух точек, находящихся на концах бесконечно тонкой трещины, малые смещения почти во всех направлениях не приводят к пересечению контактной границы. Поэтому эти точки в работе не рассматривались как особые и рассчитывались как обычные внутренние.

На рис. 6.4 представлено воздействие наклонной трещины на падающую волну для случая пустого или жидкостного наполнения трещины. Пустая трещина полностью отражает падающую волну, которая распадается



Пустая трещина.

Заполненная трещина.

Рис. 6.4. Прохождение продольной плоской волны через единичную наклонную трещину.

ется на продольную и поперечную волны, движущиеся в немного различных направлениях. Заполненная трещина отражает только поперечную составляющую падающей волны. Интересно отметить, что симметрично ей относительно поверхности трещины распространяется вторая поперечная волна вдогонку основному сигналу. Независимо от типа трещины исходная волна в результате дифракции через некоторое время восстанавливает свой фронт.

#### 6.4. Примененная неравномерная треугольная сетка

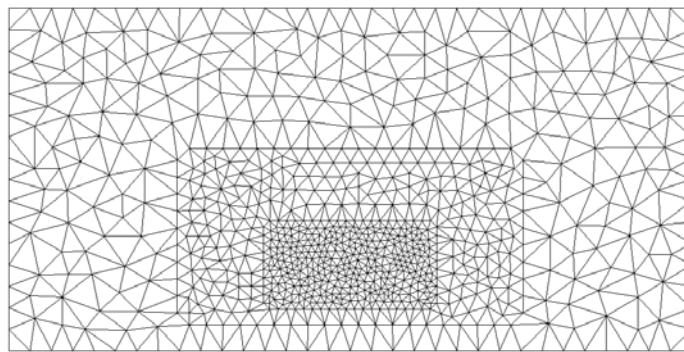


Рис. 6.5. Принципиальная структура сетки в области интегрирования. Ступенчатое уменьшение плотности узлов при удалении от зоны наибольшего интереса.

Как отмечалось выше, для уменьшения негативного влияния границ желательно отодвинуть их от области разуплотнения на максимально возможное расстояние. С другой стороны, равномерная плотность узлов сетки приведет к тому, что большая их часть будет сосредоточена вдали от центральной области, а машинные ресурсы будут расходоваться неэффективно. Поэтому сетка строилась слоями. Внутри каждого слоя плотность узлов постоянная, а при переходе к следующему внешнему слою параметр  $l_{\min}^i$  удваивался. Расстояния между вершинами на границах слоев выбирались так, чтобы удовлетворить условиям на размер граничных ребер  $l^b$  в обоих слоях. Всего в расчетах использовалось до 4 слоев, то есть мелкость сетки в разных ее частях отличалась более чем на порядок. На рис. 6.5 при-



веден примерный вид сетки с тремя слоями мелкости. Поскольку при более редком расположении узлов численное решение быстрее размывается, то на границах слоев образуется разрыв в решении, однако он оказывается недостаточно значительным, чтобы оказать заметное влияние на окончательную волновую картину.

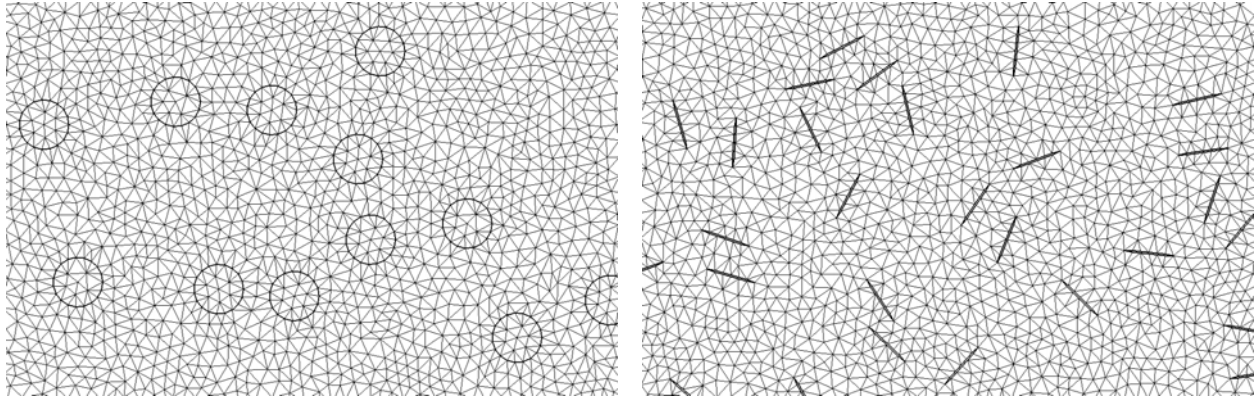


Рис. 6.6. Крупный план сетки рядом с круговыми кавернами и трещинами.

Треугольная сетка позволяет описать любую форму неоднородностей (полостей) внутри массивной породы, будь то круговые каверны или плоские трещины (рис. 6.6). Требуется лишь, чтобы сетка вблизи них была достаточно мелкой: на периметре полости можно было бы уложить некоторое количество ребер сетки с минимально допустимой длиной  $l_{\min}^b$ . Чтобы условия на размеры треугольников в сетке, на которые опирается численный метод, были соблюдены, необходимо также, чтобы расстояние между любыми двумя полостями не были меньше  $l_{\min}^i$ . А если нужно строить сетку внутри полостей, то их размер должен быть заметно больше  $l_{\min}^i$ .

## 6.5. Исследование энергии в области интегрирования

В процессе моделирования также рассчитывалась полная энергия, заключенная в области интегрирования (см. подраздел 4.7.1). Полная энергия не сохраняется в процессе счета. Основной причиной ее уменьшения является «выход» волны через нижнюю поглощающую границу. Также энергия изменяется за счет погрешности численного решения уравнений.

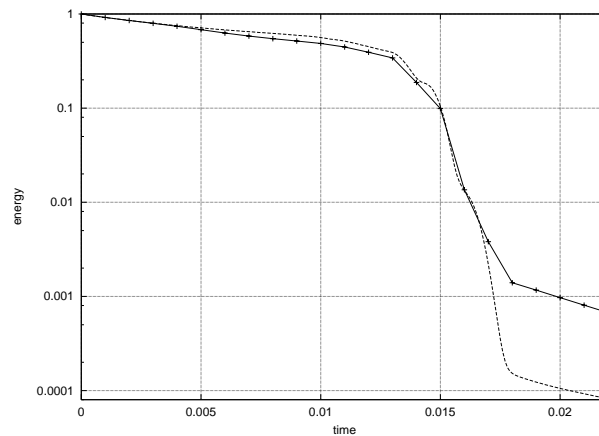


Рис. 6.7. Зависимость полной энергии в области интегрирования от времени для однородной массивной породы (пунктир), и породы с коллекторской зоной, отражающей сигнал (сплошная линия).

На рис. 6.7 представлено относительное изменение энергии в области интегрирования в течение времени. Наибольшее падение энергии вызвано прохождением волны через нижнюю границу. Уменьшение энергии в начальный период времени имеет исключительно численную природу и позволяет составить впечатление о точности полученных результатов. В первую очередь закон сохранения нарушается в приграничных зонах с самыми крупными ячейками сетки.

В конце счета величина энергии характеризует отраженные сигналы от коллекторской зоны. Если бы отражение от каждой трещины и каверны не зависело от расположения соседних неоднородностей, то остаточная энергия для разных распределений полостей в теле была бы одна и та же. Однако, как показывают проведенные расчеты, наблюдается существенная зависимость полной энергии отраженного сигнала от кластеризации неоднородностей.

## 6.6. Равномерность распределения полостей

Для исследования влияния кластеризации каверн и трещин необходимо было породить выборки точек со значительным разбросом величины их равномерности.

Были использованы два отличающихся способа генерации координат центров полостей.

1. Для выборок близких к равномерным использовался программный генератор случайных точек из равномерного на плоскости распределения.
2. Для организации существенного скопления точек сначала, как в предшествующем пункте, выбирались «центры» заданного количества кластеров. Затем случайно равновероятно выбирался один из кластеров, и использовалось нормальное распределение с математическим ожиданием в центре кластера и заданной дисперсией.

Кроме того, существовало ограничение снизу на расстояние между двумя полостями. Это ограничение возникает из требования получить треугольники дискретной сетки определенного размера. Также повышение порога на минимальное расстояние позволяло получать значительно более равномерные выборки. Если генератор вернул точку, которая находится слишком близко к уже выбранным полостям, то новая каверна или трещина в этой точке не создавалась.

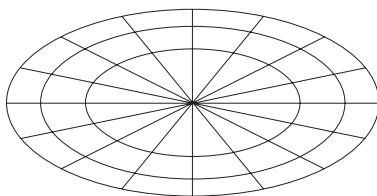


Рис. 6.8. Использованное для построения гистограмм разбиение эллиптической области на ячейки равной площади.

Для того чтобы характеризовать степень неравномерности, с которой каверны и трещины заполняют породу предлагается следующий подход. Разобьем эллиптическую область на некоторое число ячеек равной площади (рис. 6.8), что сделать несложно, если учитывать, что при растяжении круга в эллипс относительная площадь ячеек остается неизменной. Будем подсчитывать число центров каверн или трещин, попавших в каждую

из ячеек. Желательно, чтобы в каждую ячейку попадало статистически-значимое количество объектов. На гистограмме по оси  $x$  откладываются интервалы количества объектов в ячейке: 0–4, 5–9, 10–14 и т. д., по оси  $y$  — число ячеек, количество объектов в которых соответствует диапазону. Заметим, что сумма высот всех столбиков гистограммы всегда равна количеству ячеек, а сумма произведения высот столбиков на середину их диапазона примерно равна общему количеству объектов. Тогда равномерное распределение неоднородностей приведет к гистограмме с одним – двумя столбиками, поскольку количество объектов в каждой ячейке будет примерно равным. Увеличение неравномерности «размывает» гистограмму на большее число столбиков. А ситуация, когда в области есть несколько отделенных кластеров, породит гистограмму с двумя ярко выраженными пиками: возле нулевой плотности и возле средней плотности объектов в кластере (рис. 6.9).

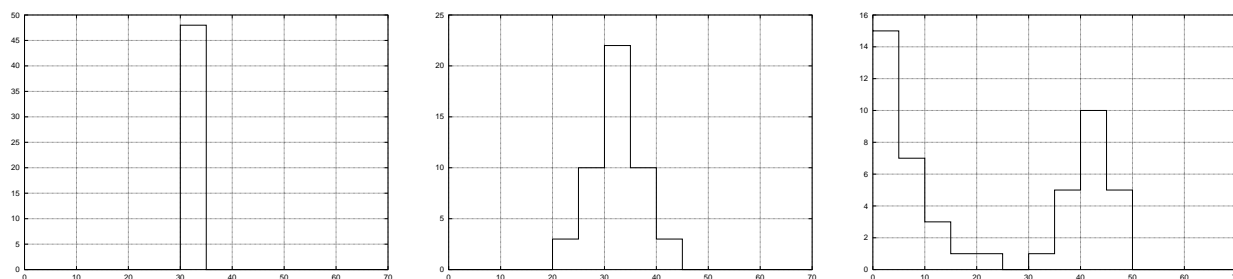


Рис. 6.9. Характерные гистограммы (слева направо): равномерное распределение, умеренно-неравномерное распределение, явное наличие кластерных формирований.

Для числового описания равномерности распределения неоднородностей кроме гистограмм вычислялась еще и энтропия:

$$H = -\frac{\sum_i p_i \ln p_i}{\ln N},$$

где  $p_i$  — доля каверн, попавших в  $i$ -ую ячейку разбиения эллипса,  $N$  — полное количество ячеек. Определенная таким образом энтропия равняется 0, когда все каверны попадают в одну ячейку эллипса, и 1, когда во все ячейки попадает равное число каверн.

## 6.7. Оценка вариации плотности тела со случайным распределением круговых полостей

В данном разделе теоретически изучается вопрос вероятности формирования кластеров из каверн и трещин при полностью случайном их распределении.

Пусть имеется некоторое двумерное твердое тело площадью  $S$ , содержащее помимо основного материала плотностью  $\rho_0$  еще и множество случайно расположенных круговых полостей, заполненных флюидом с плотностью  $\rho_1 < \rho_0$  (рис. 6.10). Известно, что доля площади всех полостей в теле по отношению к общей площади тела равна  $f$ . Таким образом, средняя плотность тела равна

$$\bar{\rho} = \rho_0 - f(\rho_0 - \rho_1).$$

В силу того что полости расположены случайным образом, возможна спонтанная кластеризация полостей, когда в одной части тела  $A$  полостей больше или меньше, чем в другой части тела того же размера. Вопрос заключается в том, насколько сильно может отклониться доля полостей  $f_A$  и, следовательно, средняя плотность  $\rho_A$  от значений для всего тела. Из-за случайности положения полостей, величины  $f_A$ ,  $\rho_A$  также являются случайными и, вообще говоря, могут принимать произвольные значения из диапазонов  $[0, 1]$  и  $[\rho_1, \rho_0]$  соответственно. Мы можем лишь оценить вероятность того или иного отклонения их от среднего значения для тела в целом, используя методы теории вероятностей [64].

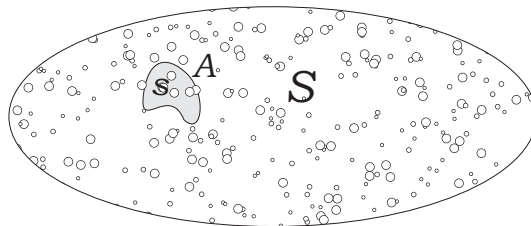


Рис. 6.10. Твердое тело площадью  $S$  содержит случайно расположенные круговые полости, заполненные флюидом. И произвольно выбранная подобласть  $A$  площадью  $s$ .

Сразу отметим, что если распределение полостей равномерно, то вероятность попадания центра полости в область  $A$  равна

$$p = \frac{s}{S}.$$

Пренебрежем возможностью того, что случайно расположенные полости могут пересекаться между собой, а также пересекать границы тела и анализируемой области  $A$ , хотя на рис. 6.10 и представлена противоположная картина. Подобное пренебрежение вполне оправданно, если доля полостей в теле  $f$  мала, их диаметр много меньше размеров тела, и область  $A$  имеет не слишком изрезанную и протяженную границу. Тогда  $p$  будет являться вероятностью того, что полость целиком попадает в область  $A$ .

### 6.7.1. Полости одного размера

Для начала предположим, что все полости в теле имеют одинаковый диаметр  $d$  и площадь  $\frac{\pi d^2}{4}$ . Тогда полное число полостей в теле равно

$$N = \frac{4fS}{\pi d^2}. \quad (6.3)$$

Число полостей  $N_A$  в области  $A$  есть число успехов в схеме Бернулли [64] с количеством испытаний  $N$  и вероятностью успеха  $p$ . Следовательно, можно выписать математическое ожидание и дисперсию для  $N_A$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}N_A &= pN = \frac{4fs}{\pi d^2}, \\ \mathbf{D}N_A &= p(1-p)N = \mathbf{M}N_A \left(1 - \frac{s}{S}\right). \end{aligned}$$

Выпишем неравенство Чебышева [64] для  $N_A$ :

$$\mathbf{P}\{|N_A - \mathbf{M}N_A| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}N_A}{\varepsilon^2}.$$

Теперь перейдем от  $N_A$  к средней плотности в области  $A$ :

$$\begin{aligned} \rho_A &= \rho_0 - N_A \frac{\pi d^2}{4s} (\rho_0 - \rho_1), \\ \mathbf{M}\rho_A &= \rho_0 - \mathbf{M}N_A \frac{\pi d^2}{4s} (\rho_0 - \rho_1) = \bar{\rho}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\left\{|\rho_A - \bar{\rho}| \geq \varepsilon \frac{\pi d^2}{4s} (\rho_0 - \rho_1)\right\} \leq \frac{\mathbf{D}N_A}{\varepsilon^2} = \frac{f}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{s}{S}\right) \frac{4s}{\pi d^2},$$

$$\mathbf{P}\left\{|\rho_A - \bar{\rho}| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{f}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{s}{S}\right) \frac{\pi d^2}{4s} (\rho_0 - \rho_1)^2.$$

Если область  $A$  заметно меньше всего тела, то отличие  $(1 - \frac{s}{S})$  от единицы невелико, поэтому окончательную оценку запишем в виде

$$\mathbf{P}\left\{|\rho_A - \bar{\rho}| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{f}{\varepsilon^2} \frac{\pi d^2}{4s} (\rho_0 - \rho_1)^2. \quad (6.4)$$

Как и следовало ожидать, вероятность отклонения средней плотности в области  $A$  от среднего значения во всем теле убывает по мере увеличения области  $A$  —  $s$ . Также вероятность отклонения убывает при уменьшении диаметра полостей  $d$ , поскольку при заданном  $f$  их количество возрастает и они более равномерно заполняют тело.

### Пример

Пусть полости занимают 10% от площади тела ( $f = 0.1$ ). Плотности материалов таковы:  $\rho_0 = 2.7$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_1 = 1.0$  г/см<sup>3</sup>. Следовательно,  $\bar{\rho} = 2.53$  г/см<sup>3</sup>. Пусть  $d = 5$  см, и нас интересует возможность формирования кластера полостей размером  $s = 1$  м<sup>2</sup> ( $\mathbf{M}N_A \approx 51$ ), в котором из-за большего количества полостей, чем в среднем по телу, плотность отклонится до значения  $\rho_A = 2.4$  г/см<sup>3</sup>. Используя (6.4), получаем оценку

$$\mathbf{P}\left\{|\rho_A - \bar{\rho}| \geq 0.13 \text{ г/см}^3\right\} \leq 3.4\%.$$

### 6.7.2. Случайное распределение размеров полостей

Теперь обратимся к случаю, когда полости имеют различные диаметры, равномерно распределенные в диапазоне  $[d_0, d_1]$ . Можно ввести понятие удельной площадной доли полостей  $f(d)$  диаметра  $d$ , связанной следующим соотношением с долей по площади всех полостей:

$$\int_{d_0}^{d_1} f(d) dd = f.$$

Количественную долю полостей  $n(d)$  диаметра  $d$  в силу равномерного распределения будет считать постоянной:

$$n(d) = \text{const} = n.$$

Связь площадной и количественной доли

$$f(d) = n(d) \frac{\pi d^2}{4S}$$

дает

$$f = n \frac{\pi}{4S} \int_{d_0}^{d_1} d^2 dd = n \frac{\pi}{4S} \frac{d_1^3 - d_0^3}{3}.$$

Отсюда можно выразить  $n$  и полное число полостей  $N = (d_1 - d_0)n$ :

$$N = \frac{4}{\pi} \frac{3(d_1 - d_0)}{d_1^3 - d_0^3} fS = \frac{4}{\pi} \frac{3}{d_1^2 + d_1 d_0 + d_0^2} fS. \quad (6.5)$$

Когда  $d_0 = d_1 = d$ , то, в полном согласии с принципом соответствия, мы получаем формулу (6.3).

Обратимся снова к области  $A$  (рис. 6.10) и рассмотрим для нее следующие случайные величины:  $\sigma_A^1$  — площадь одной произвольной полости в области  $A$ , которая может равняться нулю, если данная полость не попала в  $A$ ;  $\sigma_A$  — площадь всех полостей в  $A$ .  $\sigma_A$  и  $\sigma_A^1$  связаны соотношением

$$\sigma_A = \sum_{1 \leq i \leq N} (\sigma_A^1)_i.$$

Математическое ожидание  $\sigma_A^1$ :

$$\mathbf{M}\sigma_A^1 = (1-p)0 + p \frac{1}{d_1 - d_0} \int_{d_0}^{d_1} \frac{\pi d^2}{4} dd = \frac{s}{S} \frac{\pi}{4} \frac{d_1^3 - d_0^3}{3(d_1 - d_0)} = \frac{s}{S} \frac{\pi}{4} \frac{d_1^2 + d_1 d_0 + d_0^2}{3}.$$

Второй момент  $\sigma_A^1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\sigma_A^1)^2 &= (1-p)0 + p \frac{1}{d_1 - d_0} \int_{d_0}^{d_1} \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)^2 dd = \\ &= \frac{s}{S} \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \frac{d_1^5 - d_0^5}{5(d_1 - d_0)} = \frac{s}{S} \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \frac{d_1^4 + d_1^3 d_0 + d_1^2 d_0^2 + d_1 d_0^3 + d_0^4}{5}. \end{aligned}$$

Дисперсия  $\sigma_A^1$  [64]:

$$\mathbf{D}\sigma_A^1 = \mathbf{M}(\sigma_A^1)^2 - (\mathbf{M}\sigma_A^1)^2.$$



В силу малости  $\frac{s}{5}$  слагаемым  $(\mathbf{M}\sigma_A^1)^2$  можно пренебречь:

$$\mathbf{D}\sigma_A^1 \approx \mathbf{M}(\sigma_A^1)^2.$$

Математическое ожидание площади всех полостей в  $A$ :

$$\mathbf{M}\sigma_A = N\mathbf{M}\sigma_A^1 = fs.$$

Отметим, что равенство  $\mathbf{M}\sigma_A = fs$  было очевидно изначально, и можно было бы воспользоваться им для нахождения полного числа полостей  $N$ .

Независимость положения и размеров полостей позволяет записать [64]:

$$\mathbf{D}\sigma_A = N\mathbf{D}\sigma_A^1 = fs \frac{\pi}{4} \frac{3d_1^4 + d_1^3d_0 + d_1^2d_0^2 + d_1d_0^3 + d_0^4}{5(d_1^2 + d_1d_0 + d_0^2)}.$$

Теперь легко вычислить характеристики средней плотности в области  $A$ :

$$\rho_A = \rho_0 - \frac{\sigma_A}{s}(\rho_0 - \rho_1),$$

$$\mathbf{M}\rho_A = \rho_0 - f(\rho_0 - \rho_1) = \bar{\rho},$$

$$\mathbf{D}\rho_A = \frac{(\rho_0 - \rho_1)^2}{s^2} \mathbf{D}\sigma_A = f \frac{\pi}{4s} \frac{3d_1^4 + d_1^3d_0 + d_1^2d_0^2 + d_1d_0^3 + d_0^4}{5(d_1^2 + d_1d_0 + d_0^2)} (\rho_0 - \rho_1)^2.$$

Запись неравенства Чебышева [64] для  $\rho_A$ :

$$\mathbf{P}\{|\rho_A - \bar{\rho}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}\rho_A}{\varepsilon^2} = \frac{f}{\varepsilon^2} \frac{\pi}{4s} \frac{3d_1^4 + d_1^3d_0 + d_1^2d_0^2 + d_1d_0^3 + d_0^4}{5(d_1^2 + d_1d_0 + d_0^2)} (\rho_0 - \rho_1)^2. \quad (6.6)$$

Если  $d_0$  устремить к нулю, т.е. если в теле равномерно распределены полости от бесконечно малого диаметра до  $d_1 = d$ , то

$$\mathbf{P}\{|\rho_A - \bar{\rho}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{3}{5} \frac{f}{\varepsilon^2} \frac{\pi d^2}{4s} (\rho_0 - \rho_1)^2.$$

Отличие от формулы (6.4) только во множителе  $\frac{3}{5}$ , на который уменьшается вероятность отклонения плотности от средней величины за счет присутствия в теле большего числа мелких полостей.

## 6.8. Детали численных экспериментов

Рассчитываемая область интегрирования имела физические размеры  $400 \times 200 \text{ м}^2$ . Характеристики массивной породы соответствовали граниту:

$\rho = 2,700 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 6,000 \text{ м/с}$ ,  $c_2 = 3,500 \text{ м/с}$ . Эллиптическая область с трещинами либо кавернами была вписана в прямоугольник  $60 \times 30 \text{ м}^2$ , а ее центр находился на углублении  $150 \text{ м}$ . И каверны и трещины считались заполненными водой:  $\rho = 1,000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 1,500 \text{ м/с}$ ,  $c_2 = 100 \text{ м/с}$ . На контактной поверхности породы с жидкостью выбиралось условие скольжения.

Диаметр круговых каверн и длина трещин составляли  $0.3 \text{ м}$ . Минимальная длина внутреннего ребра сетки  $l_{\min}^i = 0.15 \text{ м}$ , параметр однородности сетки  $\alpha = 1.1$ . На пути от центра области кавернозности к границам области интегрирования трижды уменьшалась средняя плотность сетки (рис. 6.5). В общей сложности сетка насчитывала около  $230,000$  треугольников,  $350,000$  ребер и  $120,000$  вершин, таким образом, общее количество расчетных узлов было около  $470,000$ .

В начальный момент расчета центр продольной плоской волны с профилем сигнала Берлаге частоты  $300 \text{ Гц}$  находился на расстоянии  $115 \text{ м}$  от поверхности. Счет продолжался до достижения времени  $0.022 \text{ с}$ , что требовало выполнения  $3,400 - 3,800$  шагов интегрирования,  $\tau \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ .

Использовался персональный компьютер с процессором AMD Athlon XP 2600+ и  $512 \text{ Мб}$  памяти, каждый расчет на котором с обычной точностью представления действительных чисел ( $4 \text{ байта}$ ) укладывался в  $3$  часа.

При исследовании отражения от полупространства нижние  $65 \text{ м}$  прямоугольной области интегрирования заполнялись кавернами и трещинами. Средняя плотность сетки при приближении к границам не менялась и определялась параметром  $l_{\min}^i = 0.5 \text{ м}$ . Размер каверн и трещин вынужденно увеличивался до  $1 \text{ м}$ . В этих условиях сетка насчитывала большее число объектов: около  $370,000$  треугольников,  $570,000$  ребер и  $200,000$  вершин. Однако за счет увеличившегося шага интегрирования (определяющегося наиболее мелкой частью сетки)  $\tau \approx 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ с}$  расчет включал выполне-

ние лишь  $\approx 1200$  шагов, что занимало примерно вдвое меньше машинного времени, чем расчеты с эллиптической областью, заполненной неоднородностями меньшего размера.

## 6.9. Анализ результатов расчетов

### Основные элементы волнового отклика при различных характеристиках внутренней структуры кавернозной зоны

Использовались модели с размером каверн в 1.0 м. На рис. 6.11 представлена композиция из 6 волновых картин:

- а) для «сплошного» эллипса, аналога по форме «кавернозного», но заполненного сплошной средой, где скорость и плотность, равны средним величинам для кавернозной зоны;
- б) для эллипса с равномерным распределением микрон неоднородностей;
- в) для эллипса с нерезкими (размытыми) границами — постепенным нарастанием на них концентрации каверн;
- г) для случайно-неравномерного распределением того же числа каверн;
- д) для случайного распределения, но с умеренно повышенной неравномерностью;
- е) для случайного распределения, но с существенно повышенной неравномерностью.

На всех кадрах волновой отклик представлен двумя волновыми пакетами продольных (PP) и обменных (PS) волн.

Для «сплошного» эллипса фиксируются однофазные отражения от его верхней и нижней границы и для PP и для PS волн. Между ними пустота, что согласуется с отсутствием неоднородностей.

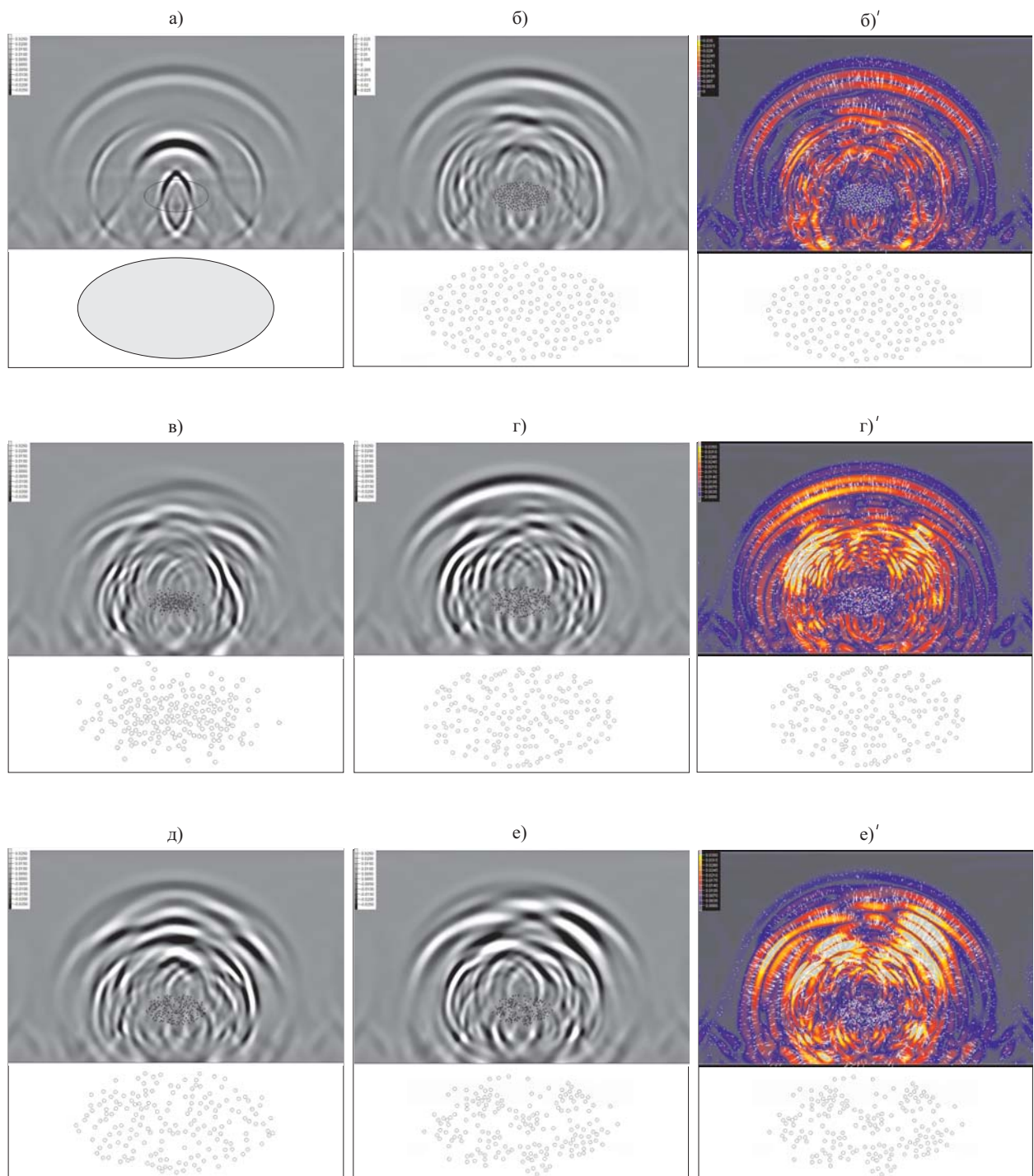
Устойчивый фронт первой фазы продольных волн сохраняется при равномерном (б) и случайно-неравномерном (г) распределении каверн. Но при этом фиксируются короткие последующие фазы, заполняющие интервал между кровлей и подошвой эллипса. На всех последующих кадрах (д,е) пакет волн РР дробится на короткие интерференционные фрагменты. При «размытых», нерезких границах эллипса (в) и первые фазы РР волн существенно ослаблены при сохранении интенсивности обменных PS волн. При повышении неравномерности в распределении каверн в пределах макрозоны (д, е) происходит нарастание интенсивности и низкочастотности волн РР.

Обменные волны PS на всех кадрах с кавернами (от «б» до «е») характеризуются интерференцией фрагментов концентрических фронтов с меньшей скоростью распространения и длиной волны по сравнению с волнами РР. Цветное модульно-векторное изображение (б', г', е') дает еще более полную, хотя и необычную характеристику волн по сравнению с привычным отображением вертикальной компоненты скорости в серой палитре.

### **Изменение характера волнового отклика с ростом неравномерности распределения каверн**

Для оценки влияния этого фактора использовалась серия моделей с условиями существенно приближенными к реальным (меньший размер каверн  $d = 30$  см, большее их число  $N = 1000$ , объем пустотности — 5%), а также с большим числом вариантов неравномерности (семь). На рис. 6.12 представлены волновые картины этой серии. В дополнение к изображению расположения каверн в пределах эллиптической зоны для каждого варианта представлена гистограмма распределения их плотности (см. раздел 6.6).

На рис. 6.12 видно, что основные элементы волнового поля и тенденции его изменения с ростом неравномерности распределения каверн оста-



а - сплошной эллипс  
 б - равномерное распределение каверн  
 в - диффузные нерезкие края зоны  
 г - случайно-неравномерное распределение  
 д - слабонеравномерное  
 е - существенно неравномерное  
 б', г', е' - модульно-векторное представление полей на кадрах б, г, е

Рис. 6.11. Основные элементы волнового поля отклика рассеянной энергии при изменении внутренней структуры зоны диффузной кавернозности.

ются прежними. Из их визуального анализа можно отметить следующее: по сравнению с равномерным распределением неоднородностей «а» с ростом неравномерности происходит:

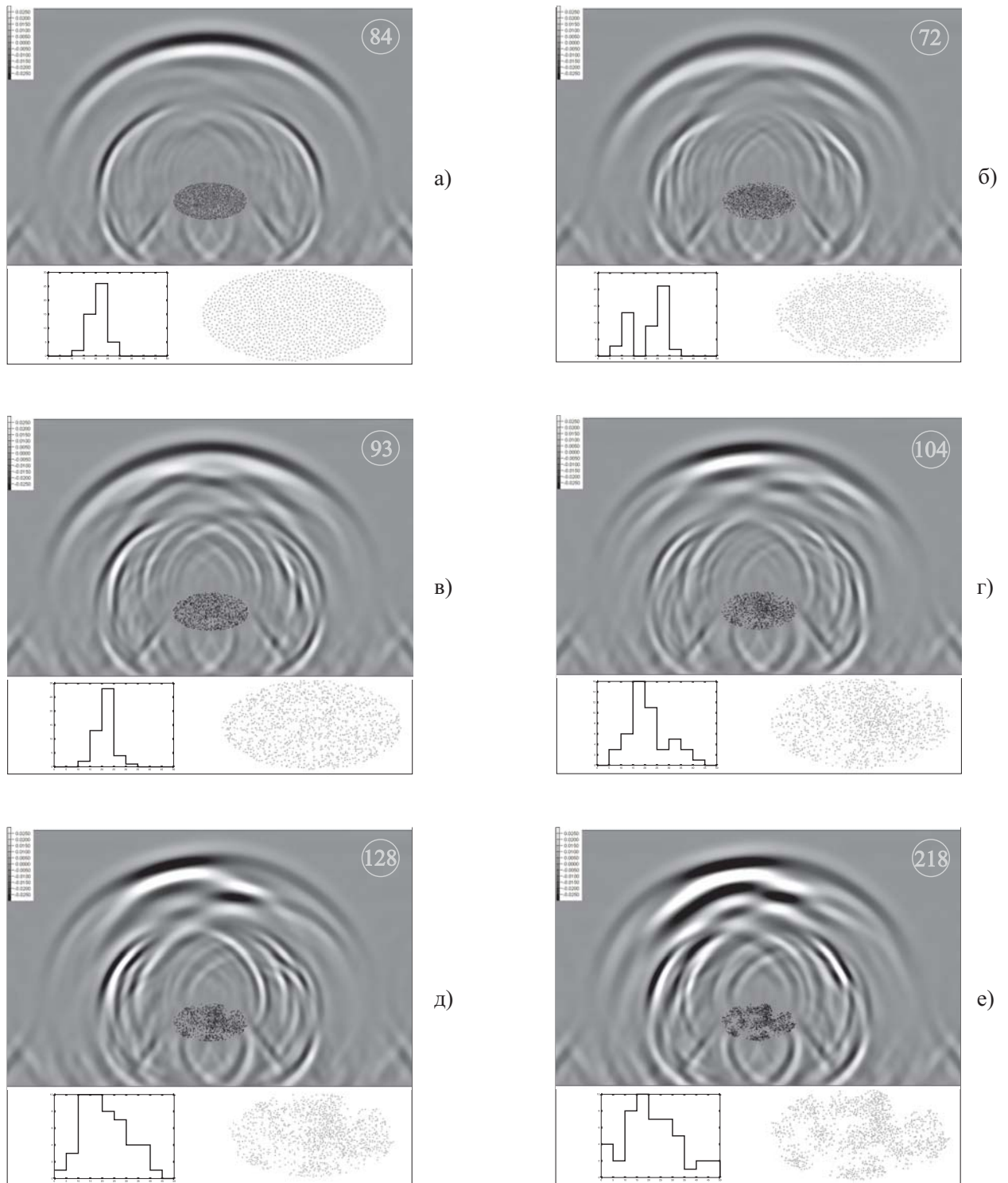
- все большее раздробление волновых фронтов РР и PS волн на отдельные фрагменты;
- общее нарастание энергии отклика (цифры в правом и верхнем углу кадров). Обоснование способа оценки энергии отклика дано в разделе 6.5.

Эти особенности волнового отклика от рассеивающей кавернозной зоны были выявлены в [63]. Для их объяснения было высказано предположение о связи этих эффектов с неравномерной концентрацией неоднородностей, формирующей кластеры — зоны их скоплений. Тогда рассматривался только один уровень неравномерности. Теперь, когда на ряде моделей с переменным уровнем неравномерности концентрации каверн подтверждается однонаправленная связь с ним отмеченных выше особенностей волнового отклика, можно говорить о доказанности их кластерной природы.

### **Влияние на волновой отклик характеристик поля трещин**

Влияние таких характеристик поля трещин, как направление, концентрация, регулярность или хаотичность, на волновой отклик в сопоставлении с зоной развития каверн того же числа и размера иллюстрируется на рис. 6.13.

Трещиноватая зона представлена в виде эллипса, число каверн  $N = 177$  (при двойной концентрации  $N = 354$ ), размер трещин ( $d$ ) такой же, как и диаметр каверн на рис. 6.11, — составляет 100 см; неравномерность концентрации умеренная. Из визуального анализа рис. 6.13 могут быть сделаны следующие выводы.



а - равномерное с резкими границами  
 б - равномерное с нерезкими (диффузными) краями  
 в - случайно неравномерное

г - слабо неравномерное распределение  
 д - неравномерное  
 е - существенно неравномерное  
 128 - энергия в условных единицах

Рис. 6.12. Изменение волнового поля отклика рассеянной энергии с ростом неравномерности распределения каверн в макроне.

1. Трещины в сравнении с кавернами при одинаковом их числе и размере (сопоставление «а» и «д», а также «д» и «е») дают в целом существенно более слабый волновой отклик, в основном за счет значительного ослабления продольных волн (PP).
2. Зона трещиноватости в сравнении с зоной кавернозности (при тех же  $d$  и  $N$ ) формирует волновой отклик с доминированием существенно большей интенсивностью обменных волн (PS) по сравнению с продольными (PP).
3. Однонаправленное поле трещин формирует несимметричный (в отличие от каверн) волновой отклик, а изменение ориентации трещин влияет на направление максимума энергии.
4. Повышение концентрации однонаправленных трещин в два раза примерно также увеличивает энергию волнового отклика.

### **Влияние неравномерности концентрации трещин**

Влияние неравномерности концентрации трещин на изменение волновой характера волнового отклика приводится на рис. 6.14 для модели с двумя субвертикальными направлениям трещин ( $\pm 30^\circ$  от вертикали); размером  $d = 30$  см и в количестве  $N=1500(750/750)$ . Качественную характеристику неравномерности иллюстрируют изображения эллипсов трещиноватости, а также гистограммы. Из рассмотрения картин волнового отклика можно отметить, что при общем сохранении структуры волнового поля и относительном доминировании обменных волн с ростом неравномерности происходит: рост энергии волнового отклика; многофазности и интерференционности как продольных (PP), так и обменных (PS) волн.



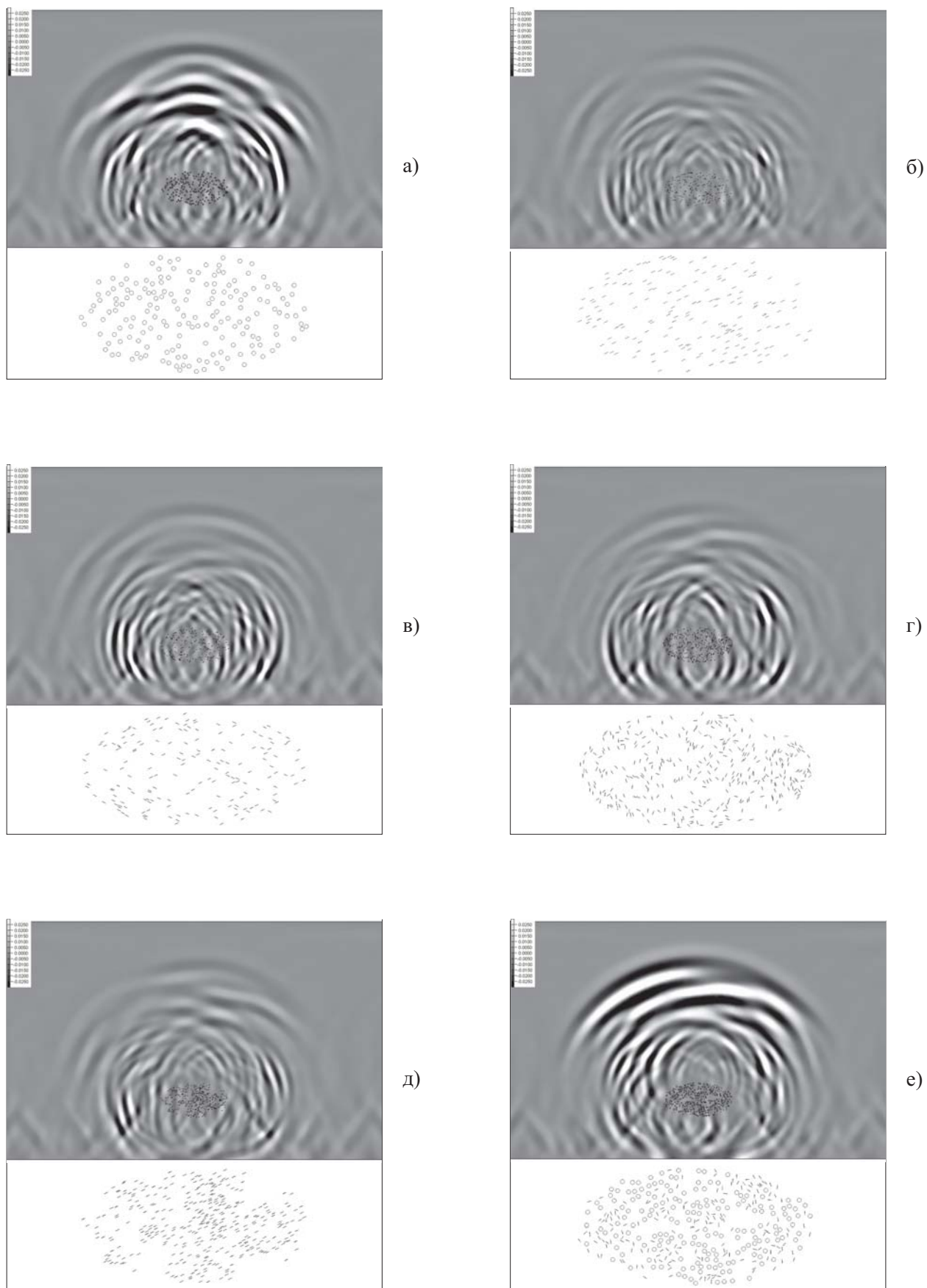


Рис. 6.13. Сравнение волновых картин для разных типов трещиноватости (направлений, концентрации) в сопоставлении с чисто каверновой (а) и кавернозно-трещиноватой (е) макроструктурами.

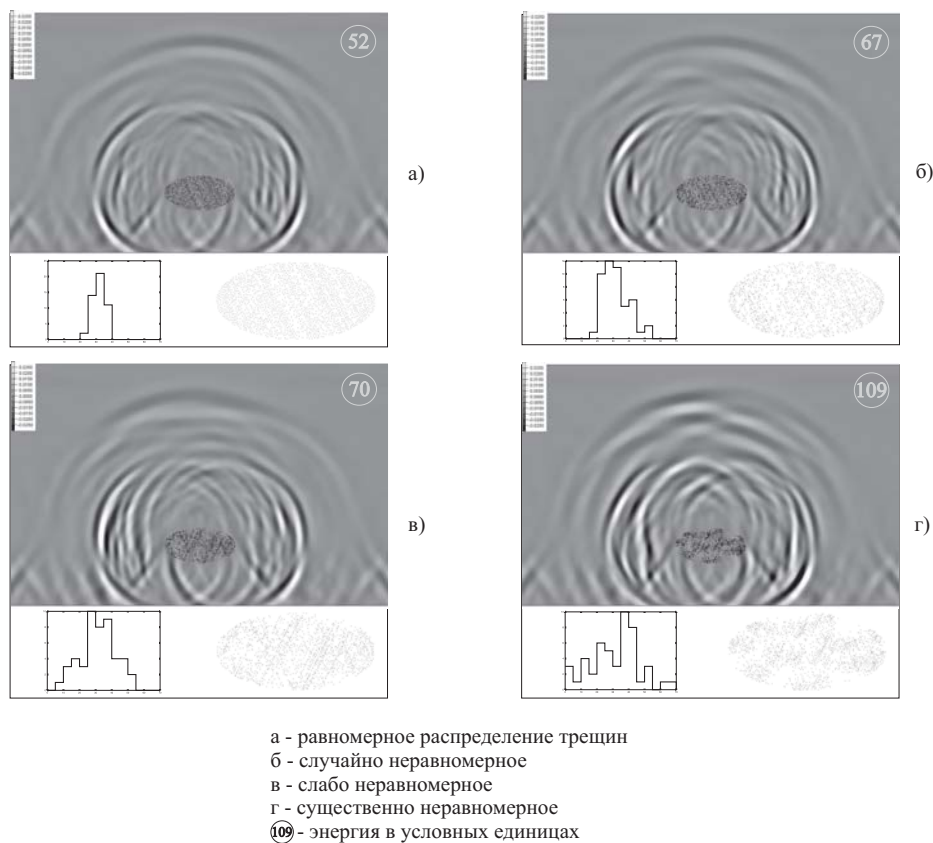


Рис. 6.14. Влияние неравномерности концентрации трещин на характер волнового отклика от коллекторской трещиноватой зоны.

### Особенности волнового отклика от коллекторской зоны смешанного каверно-трещинного состава микронеоднородностей

На рис. 6.16 рассматриваются волновые картины для смешанных («б», «г»), чисто каверновых («а») и чисто трещинных («в») макрозон при слабой неравномерности концентрации неоднородностей. Можно отметить для первых («б», «г»):

- существенное усиление энергии продольных РР волн и примерное сохранение энергии обменных волн по сравнению с чисто трещинной зоной («в»);
- примерное равенство интенсивности и продольных, и обменных волн;
- некоторое (на 20%-30%) ослабление общей энергии по сравнению с чисто кавернозной зоной («а»);

- незначительное различие волновых картин для приведенных двух вариантов («б» и «г») направления трещин (случайного и субвертикального).

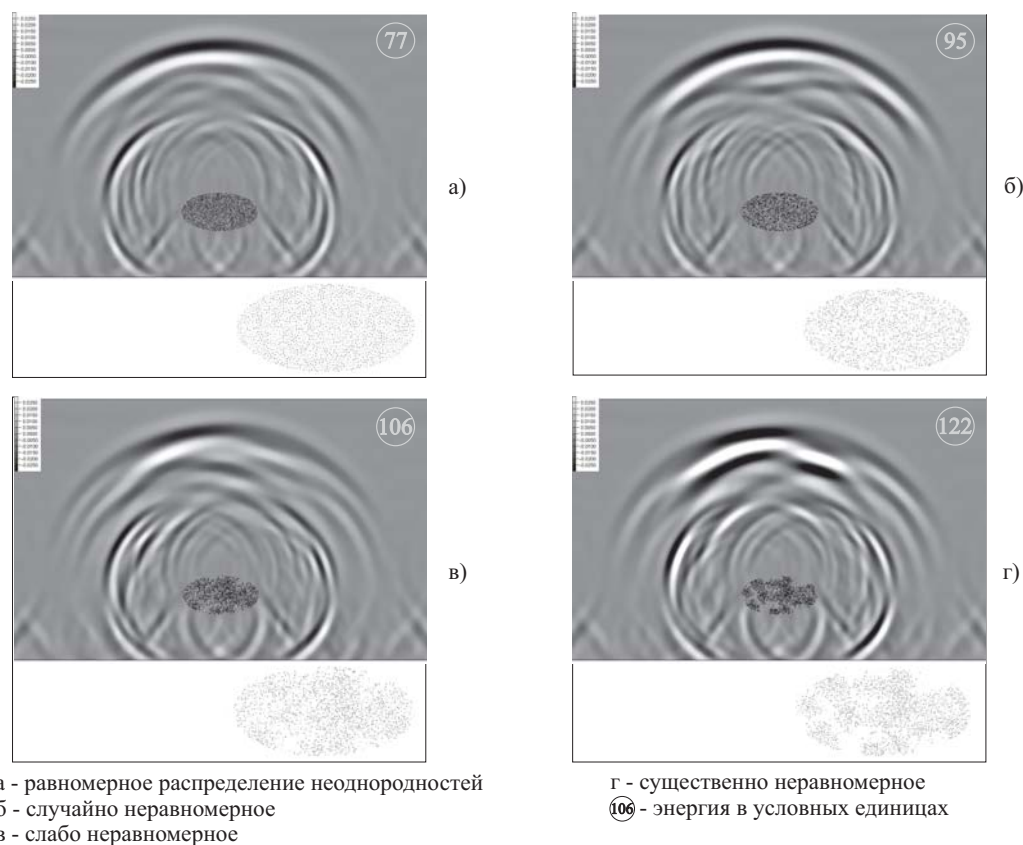


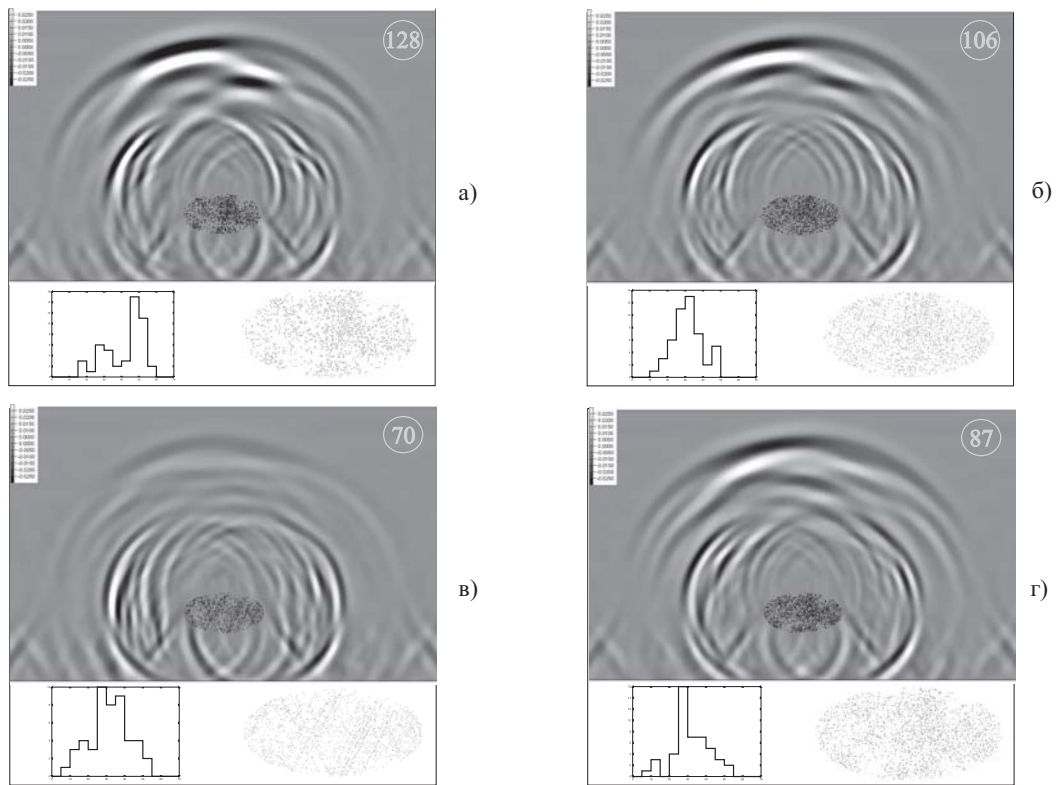
Рис. 6.15. Изменение волнового поля отклика рассеянной энергии с ростом неравномерности распределения неоднородностей в кавернозно-трещиноватой коллекторской зоне.

### Оценка связи энергии волнового отклика с уровнем неравномерности концентрации неоднородностей коллекторской зоны

На рис. 6.17 приведены результаты численного моделирования, характеризующие количественную связь между энергией волнового отклика ( $W$ ), обусловленного рассеиванием от кавернозной и/или трещиноватой зоны, и степенью неравномерности распределения микрон неоднородностей в макроне, измеряемой энтропией ( $H$ ).

Из приведенных графиков следует:

- При изменении распределения неоднородностей от «равномерного» до



а - каверны; б - случайная направленность трещин в сочетании с кавернами; в - трещины; г - двойная субвертикальная направленность трещин в сочетании с кавернами; 106- энергия в условных единицах

Рис. 6.16. Сравнение волновых картин «смешанных» кавернозно-трещиноватых зон с чисто каверновыми и трещиноватыми.

существенно неравномерного (с явно выделенными кластерами) общая энергия отклика и от каверн и от трещин примерно удваивается.

- Уровень отраженной энергии от трещиноватой зоны примерно в два раза ниже, чем от кавернозной (при тех же размерах неоднородностей и их числе).
- График  $W(H)$  трещинно-кавернозного наполнения макрзоны почти совпадает с графиком  $W(H)$  для каверн.

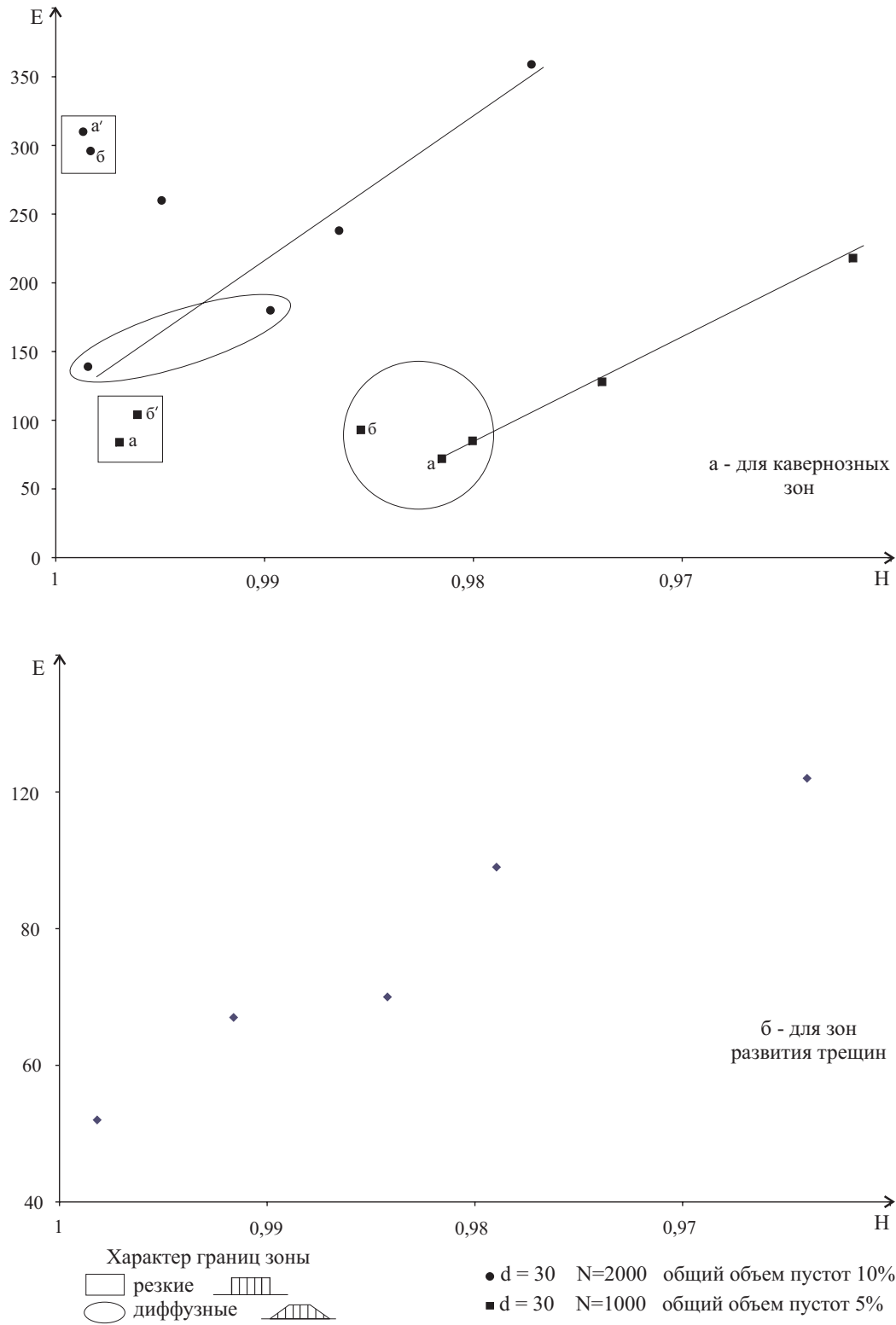


Рис. 6.17. Количественные зависимости рассеянной отраженной энергии  $W$  от степени неравномерности распределения неоднородностей в коллекторской зоне  $H$ .

## Глава 7

# Распространение упругих волн в перфорированных средах

Жилищные и промышленные сооружения состоят из стен, балок и перекрытий и содержат регулярную структуру пустых полостей — внутренних помещений, следовательно, являются по своей структуре перфорированными средами. При конструировании зданий прибегают, как правило, только к статическим оценкам их стойкости. Однако большое количество причин, вызывающих разрушение сооружений, являются именно динамическими и носят волновой характер. Это обуславливает пристальный интерес, возникший в настоящее время, к решению динамических задач в неоднородных, пористых телах.

Здания являются, чаще всего, прямоугольными параллелепипедами, также как и их внутренние полости. Поэтому такого рода объекты наилучшим образом подходят для применения к ним численных методов, основанных на регулярных кубических (квадратных) сетках. Ячейки сетки не требуют деформирования, и поэтому ее построение крайне просто. Неодносвязность сетки не является препятствием в данном случае. Недеформированная сетка позволяет проводить расчеты в каждом узле с максимальным шагом интегрирования, что заметно повышает точность результата. Особо упоминания заслуживают реализованные схемы для граничных узлов в сетке. При наличии даже нескольких полостей в теле упругие волны мно-

гократно отражаются от границы каждой из полостей, а результирующая картина формируется интерференцией всех отражений. Поэтому в таких узлах была использована сеточно-характеристическая схема, позволяющая корректно учитывать граничные условия.

Расчеты в данной главе были проведены не только в двумерной, но также и в трехмерной постановке. Их анализ выявил интересную особенность распространения волн в решетчатых конструкциях. Широко известно, что в однородной изотропной среде фронты волн от точечного источника имеют сферическую форму. В перфорированной конструкции с большим количеством полостей, форма фронтов возмущения существенно меняется.

### 7.1. Двумерная постановка задачи

Результаты двумерного моделирования процесса распространения динамической нагрузки для перфорированной конструкции в сравнении с монолитной представлены на рис. 7.1.

Для конструкции с внутренними полостями численный эксперимент предсказывает для волнового фронта форму близкую к конусу. Попробуем установить, что является тому причиной. Если размеры полостей увеличивать, то в пределе конструкция будет состоять из стержней бесконечно малой ширины, расположенных вертикально или горизонтально. В стержне волна может распространяться только в одном направлении, совпадающем с ориентацией стержня. Поэтому, чтобы из начала координат, являющегося к тому же точкой пересечения стержней, возмущение распространилось в точку  $(x, y)$ , ему необходимо проделать путь  $|x| + |y|$ . Выражение

$$|x| + |y| = ct \quad (c — скорость звука в стержне)$$

задает форму волнового фронта в момент времени  $t$ . Это уравнение определяет прямоугольный ромб. При источнике возмущения, расположенном на границе тела, видна только половина этого ромба — равнобедренный

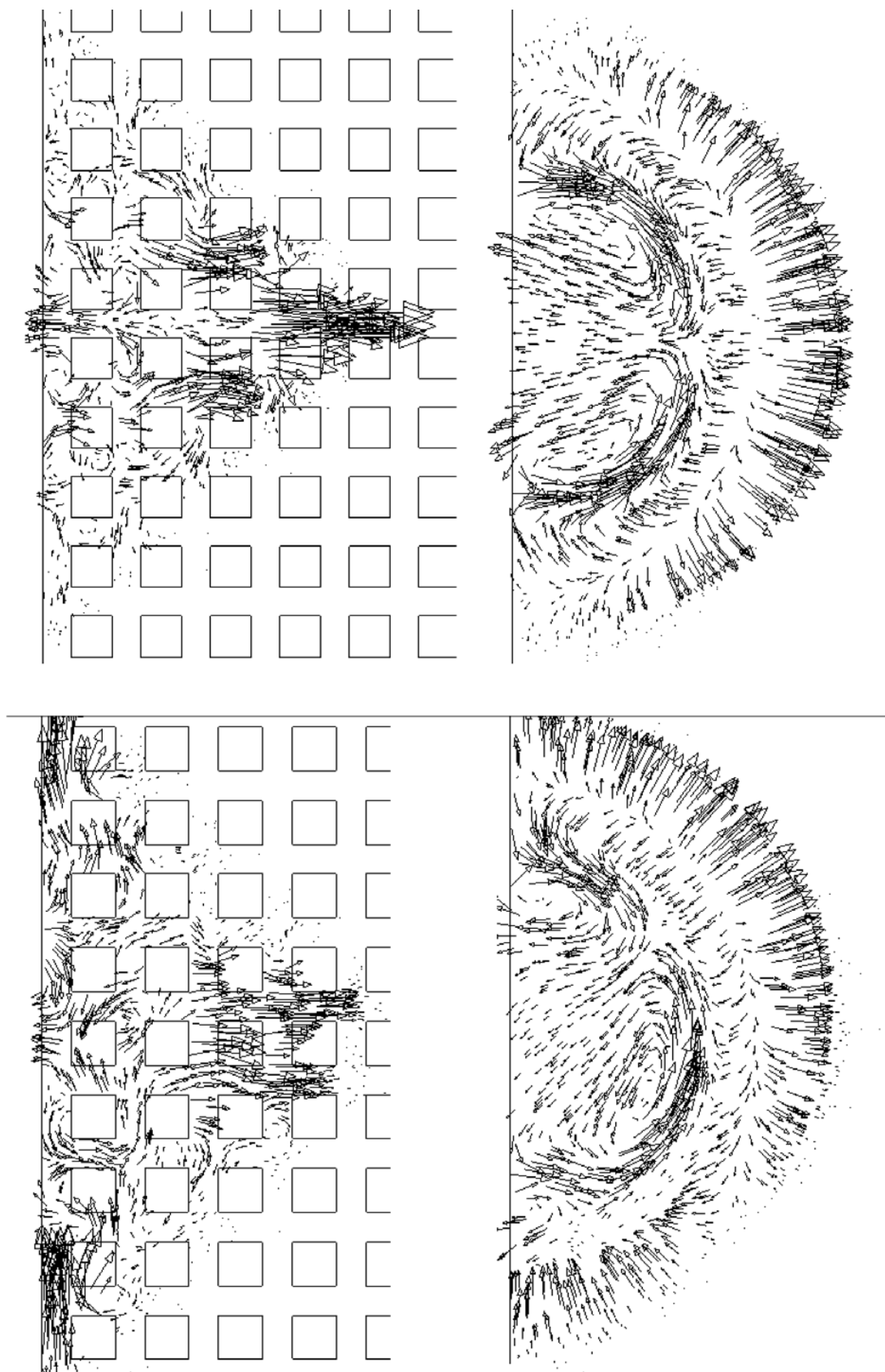


Рис. 7.1. Поле скоростей в перфорированной и однородной средах. Сверху нагрузка приложена в горизонтальном направлении, снизу — в диагональном. Область приложения нагрузки одна и та же.



прямоугольный треугольник.

Также на рис. 7.1 заметно образование вихревых структур, причем как в монолитной, так и в перфорированной конструкциях.

## 7.2. Трехмерная постановка задачи

В этом разделе собраны результаты расчетов воздействия на трехмерные конструкции, которые представляли собой сплошной или перфорированный куб с физическими размерами  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  и следующими упругими параметрами:

$$\lambda = \mu = 1, \quad \rho = 1.$$

Внешнее воздействие моделировалось единичным начальным давлением в круговой области с центром в заданной точке  $\vec{r}_0$  и радиусом 0.07.

В расчетах, прежде всего, был интересен фронт распространения возмущения. Поэтому на рисунках 7.2 – 7.6 представлены изоповерхности модуля скорости в разные моменты времени. Изоповерхности раскрашены в цвета радуги от красного (максимальная величина скорости) до фиолетового. Для большей наглядности куб отсекался плоскостью, и на рисунках присутствует только одна его половина. В теле использовалась достаточно мелкая сетка (см. таблицу 7.1), однако, перед передачей в программу для визуализации из-за ее ограничений сетка огрублялась до  $26 \times 26 \times 26$ , поэтому поверхности на рисунках имеют хорошо различимые ступеньки.

На рис. 7.2 представлен сплошной куб, в котором возмущение было строго в центре. Как и следовало ожидать, сферически симметричные начальные условия приводят к образованию сферических волн. Начиная с момента времени  $t/t_{\max} = 0.30$  различимы уже две волны (два пика модуля скорости): вначале идет волна сжатия со скоростью частиц среды направленной от центра, затем — волна растяжения: частицы движутся обратно к центру. В момент времени  $t/t_{\max} = 0.45$  начинается отражение от сво-

бодных границ куба, скорости у его поверхностей возрастают вдвое. При  $t/t_{\max} = 0.60$  хорошо различимы отраженные волны от всех пяти видимых граней куба, которые интерферируют с падающими волнами.

На рис. 7.3 представлены результаты расчетов бокового удара по монолитному телу. Хотя фронты волн, распространяющихся внутрь тела, остаются сферическими, природа этих волн различна. В предшествующем расчете из-за наличия сферической симметрии в начальные моменты времени задача была, по сути, одномерной. Здесь мы имеем дело уже с осевой симметрией, при которой независимыми являются две пространственные переменные. При этом возможно формирование двух типов волн: продольных и поперечных. Из того, что первая волна на рис. 7.3 заметно опережает вторую, можно сделать вывод о том, что вначале идет продольная волна, а следом — поперечная.

На рис. 7.4 и 7.5 показан один и тот же процесс распространения возмущения с центром ближе к одному из углов куба в теле с регулярной структурой внутренних полостей  $8 \times 8 \times 8$ . Отличия между рисунками в выбранных на них разрезах и ракурсах обзора. Рисунки демонстрируют, как упругая волна огибает пустоты в теле. Максимальная величина выводимой изоповерхности модуля скорости зафиксирована в меньшем значении, чем для других рисунков, поэтому заднего фронта волны не видно.

На рис. 7.6 снова поставлена задача бокового удара, как и на рис. 7.3, однако теперь тело является перфорированным. Представленные изображения наглядно демонстрируют, как постепенно, в результате многочисленных отражений от стенок полостей, форма фронта волны меняется от сферической к клинообразной.

Объяснение формы волнового фронта такое же, как и в двумерном случае. Если полости пронизывают тело насквозь, и в предельном случае оно переходит в стержневую конструкцию, то форма фронта стремится к

поверхности

$$|x| + |y| + |z| = ct,$$

которая является кубом, развернутым своими диагоналями в направлении стержней. Если полости разделены стенками бесконечно тонкой ширины, то путь между произвольной парой точек состоит из двух отрезков, каждый из которых лежит в плоскости одной из стенок. Поверхность путей равной длины в этом случае проходит между сферой однородной среды и кубом решетчатой конструкции.

Для каждого варианта расчета в таблице 7.1 сообщаются подробности постановки, включающие структуру полостей  $S$ ; тип использованной разностной схемы; положение центра шара  $\vec{r}_0$ , в котором задано начальное давление; ширины «стены»  $i_w$  и одной полости  $i_c$ , измеренные в количестве узлов; общее количество узлов в задаче  $I$ , число выполненных шагов интегрирования  $N$ , и затраченное время  $t$  на типичном персональном компьютере с процессором AMD Athlon XP 2600+ и 512 Мб памяти. Расчеты велись в предположении малых деформаций, поэтому координаты узлов не хранились, а вычислялись из сеточных параметров:  $(ih, jh, kh)$ . На всех внешних и внутренних поверхностях тел задавалось условие свободной границы:  $\vec{f} = 0$  (см. подраздел 1.8.1). Этими данными, с одной стороны, достаточно, чтобы воспроизвести расчеты, если возникнет такая потребность. С другой стороны, по ним можно судить о производительности и эффективности созданной программы.

Таблица 7.1. Детали выполненных расчетов

$S$	$\vec{r}_0$	Схема	$i_w$	$i_c$	$I$	$N$	$t$ , мин
нет полостей	(0.5, 0.5, 0.5) (0.5, 0.5, 1.0)	Лакса-Вендроффа	201	–	8,120,601	200	71
$8 \times 8 \times 8$	(0.9, 0.8, 0.7)	Лакса-Вендроффа	9	15	6,392,601	200	62
$8 \times 8 \times 8$	(0.5, 0.5, 1.0)	4-го порядка с огранич.	5	7	854,685	100	22

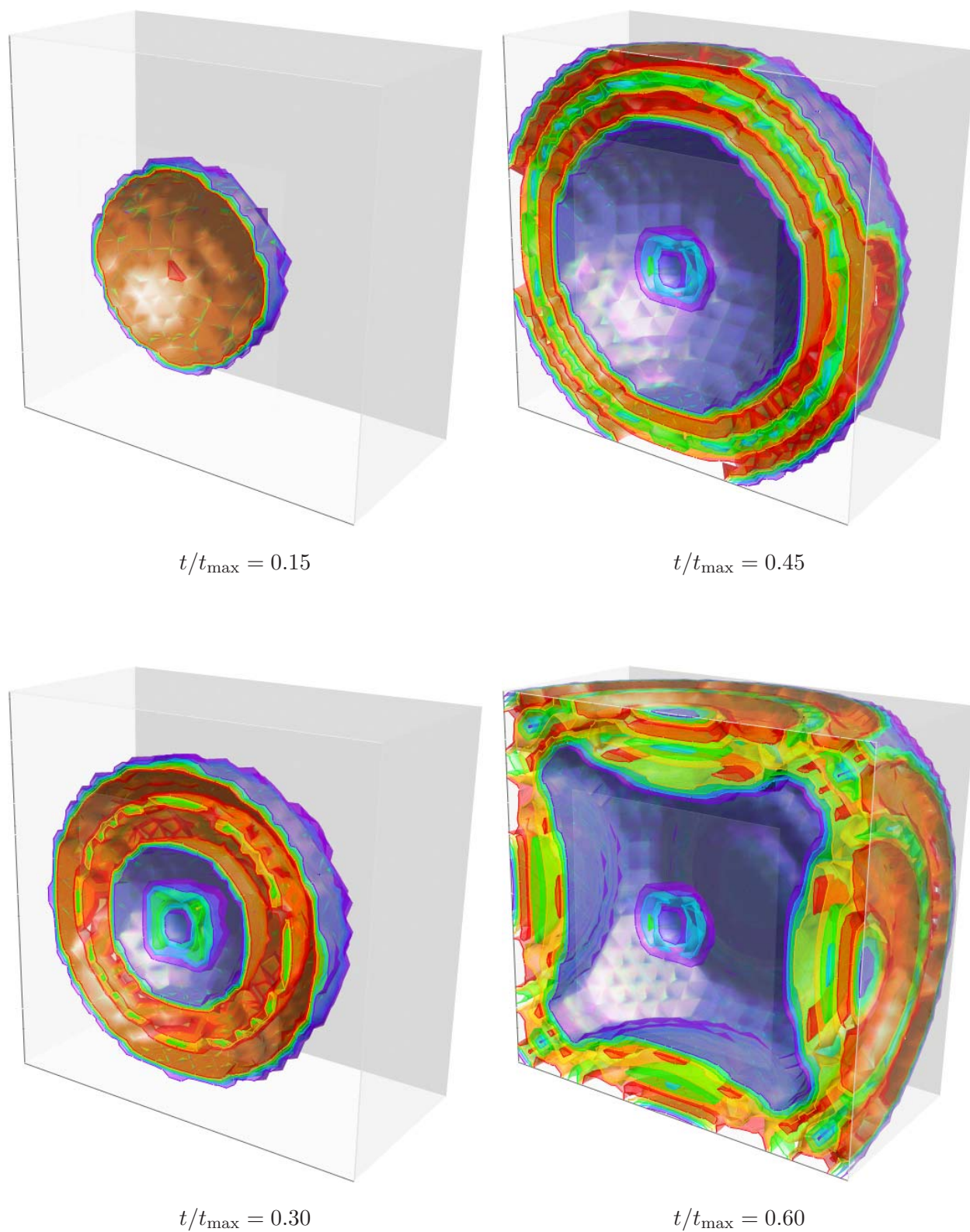


Рис. 7.2. Распространение упругих сферических волн в однородной среде от источника, расположенного в центре. Центральное сечение куба, параллельное его грани.

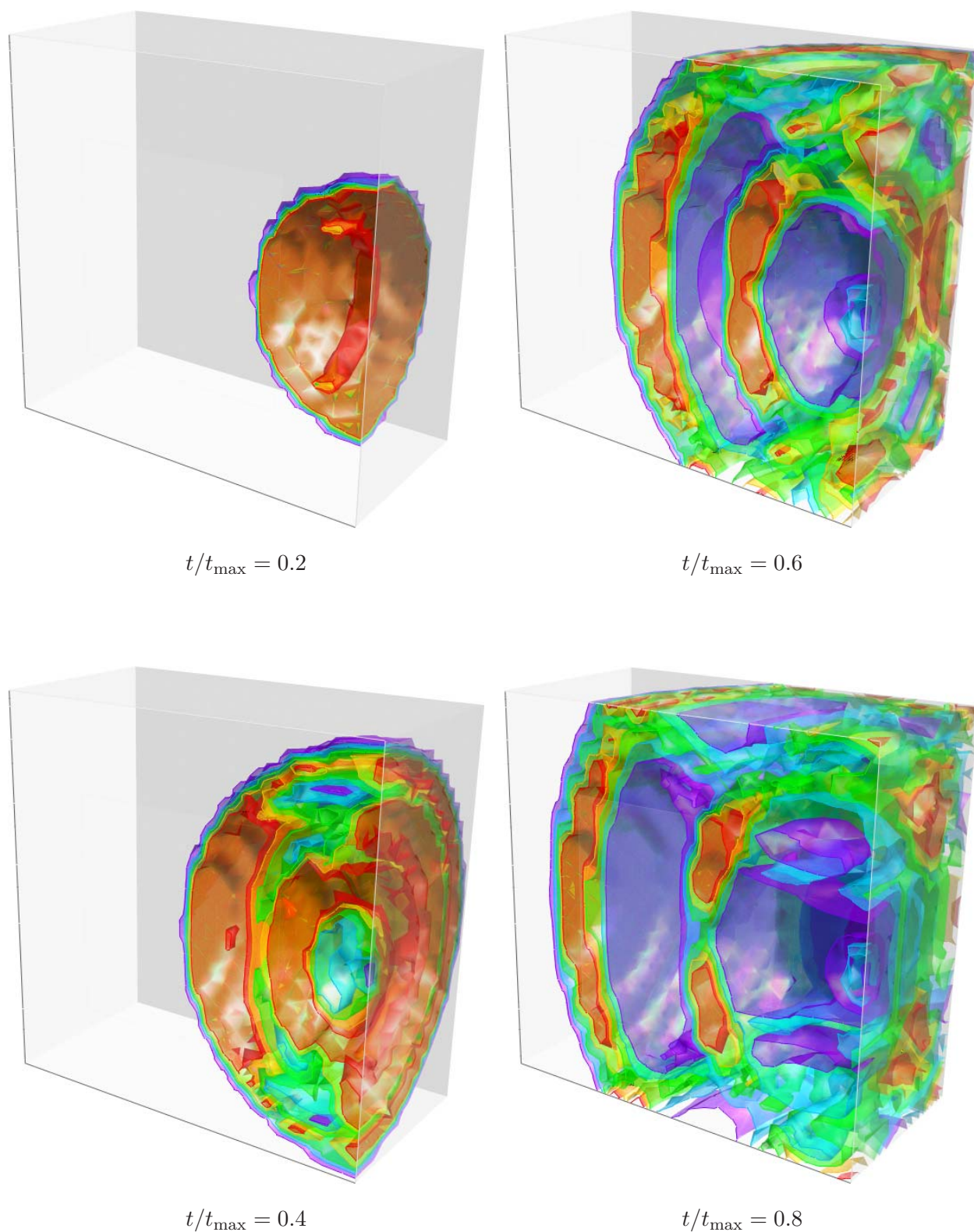


Рис. 7.3. Распространение упругих волн в однородной среде от источника, расположенного в центре грани куба. Центральное сечение куба, параллельное его грани.

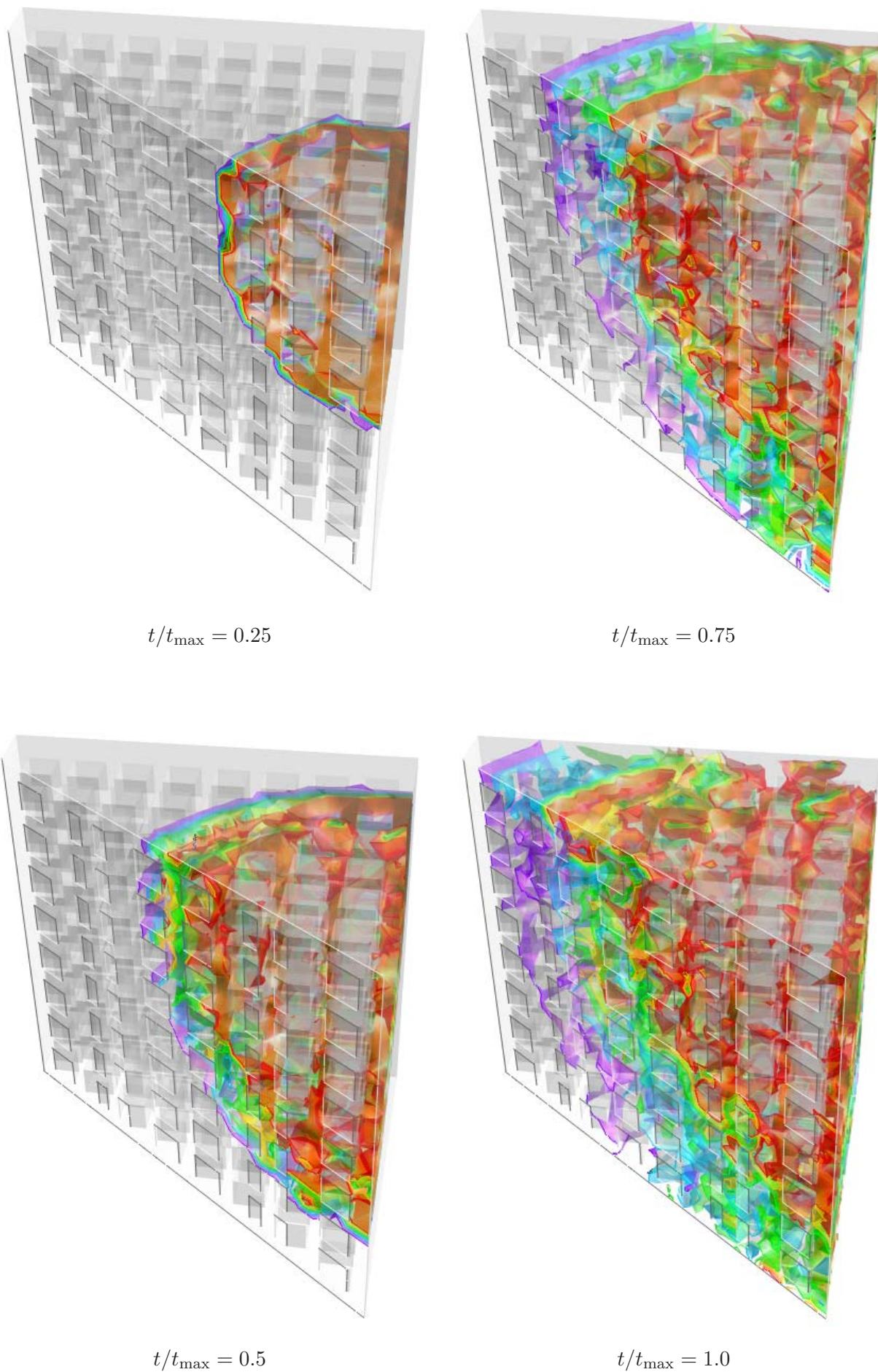


Рис. 7.4. Распространение упругих волн в перфорированной конструкции  $8 \times 8 \times 8$  от источника, расположенного ближе к углу куба. Диагональное сечение куба.

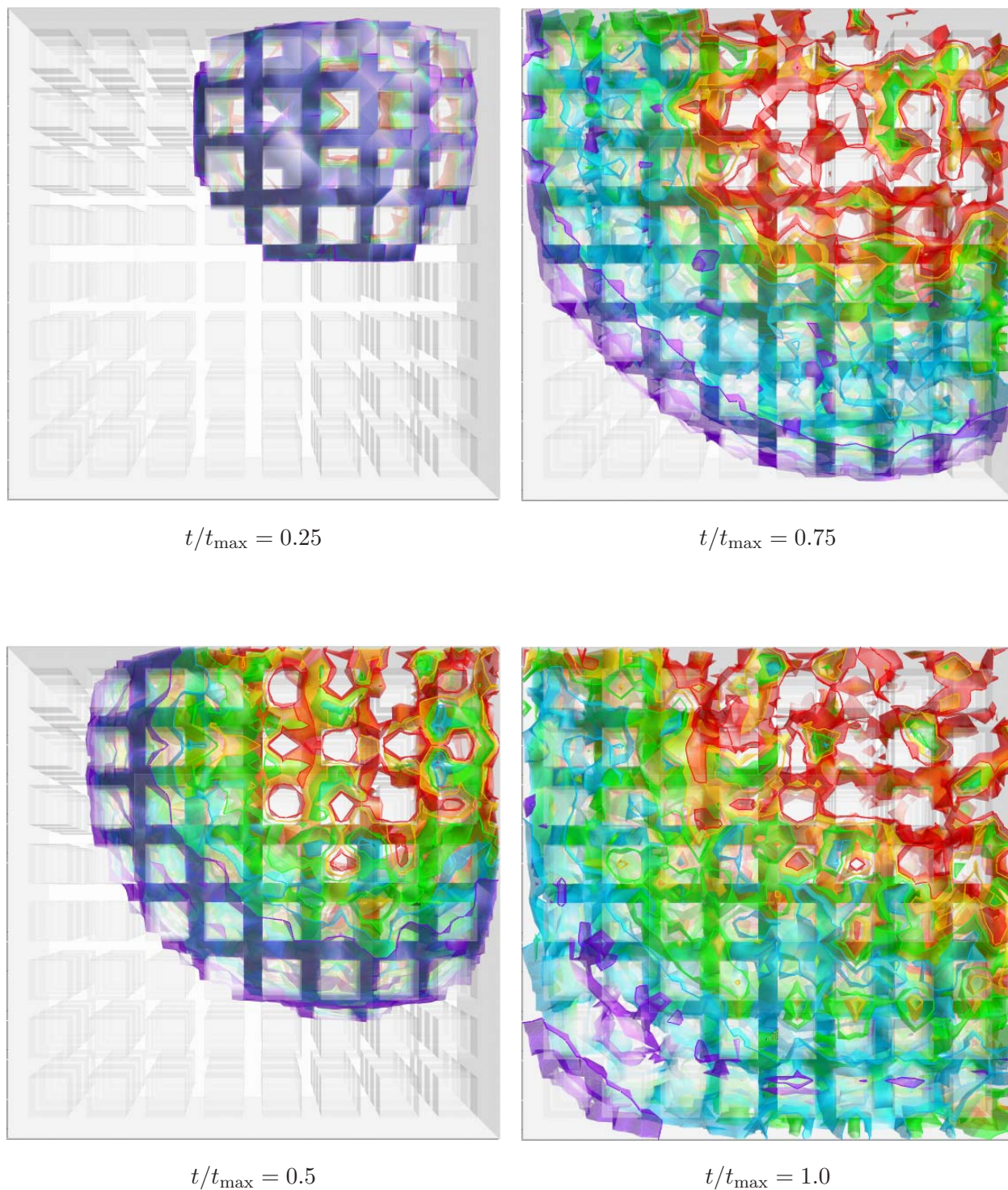


Рис. 7.5. Распространение упругих волн в перфорированной конструкции  $8 \times 8 \times 8$  от источника, расположенного ближе к углу куба. Центральное сечение куба, параллельное его грани.

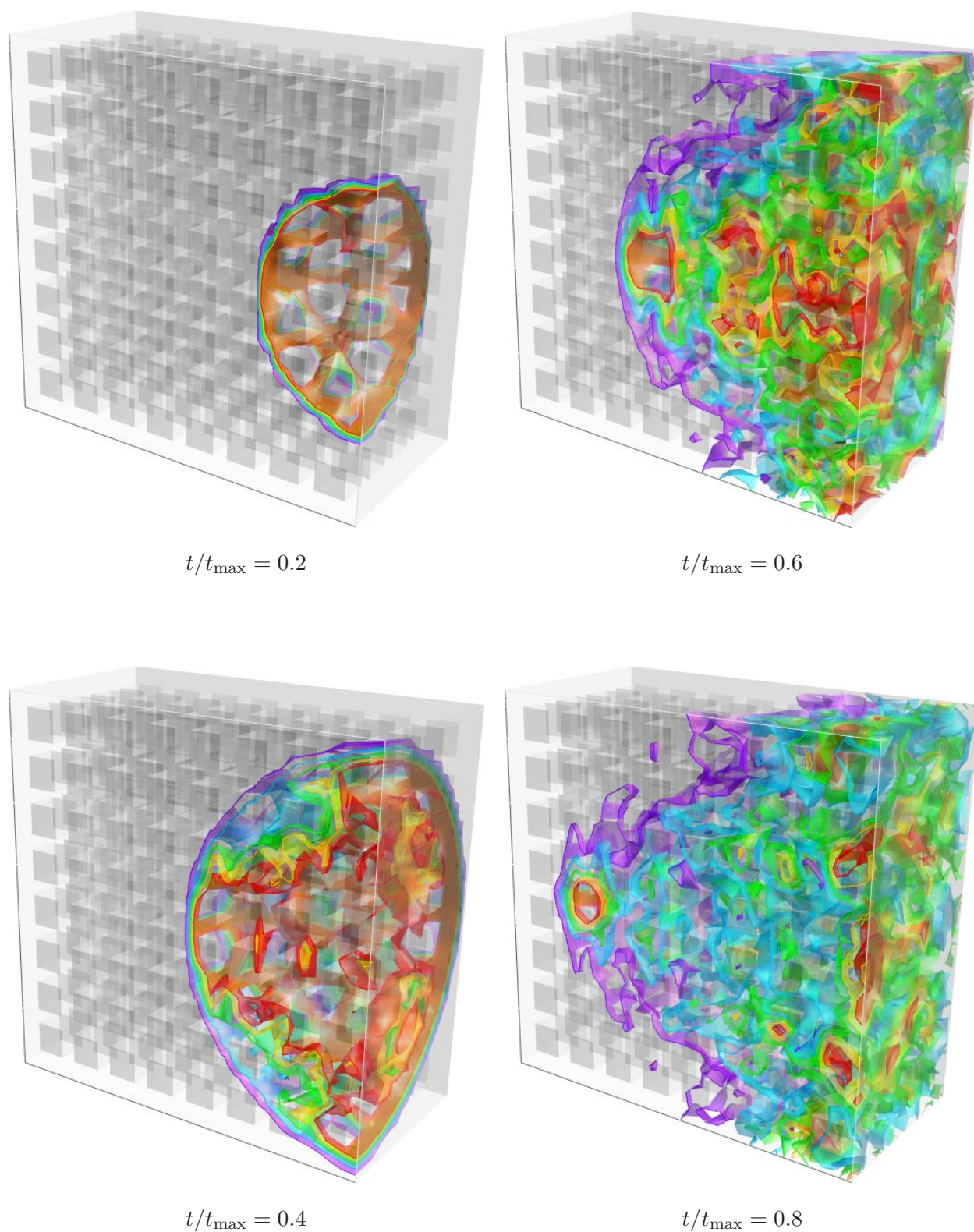


Рис. 7.6. Распространение упругих волн в перфорированной конструкции  $8 \times 8 \times 8$  от источника, расположенного в центре грани куба. Центральное сечение куба, параллельное его грани.



## Глава 8

# Высокоскоростной удар по многослойной преграде

Изучение процесса взаимодействия ударника с преградой уже долгое время является одной из центральных задач в численном моделировании из-за многообразия возникающих при этом явлений: формирование упругих и пластических волн, образование разрушений, сопровождающихся изменением механических свойств среды, частичной или полной фрагментации преграды. Заказчиком подобных исследований обычно выступает оборонная отрасль, которая заинтересована в совершенствовании средств поражения (пули, снаряды) или, наоборот, оптимизация конструкции защитных сооружений (броня машин и летательных аппаратов, каски и бронежилеты и т. д.) с целью минимизации зон разрушения.

В данной главе рассматривается задача динамического деформирования многослойного стекла, происходящего вследствие высокоскоростного удара металлического тела вращения. Для описания поведения материала преграды использовались реологические модели линейно-упругой (закон Гука [2]) и упругопластической сред (модель Прандтля – Рейса с условиями пластичности Мизеса и Мизеса – Шлейхерта [3, 28, 65, 66]). Для учета разрушения использовалась известная модель Майнчена – Сака [67], однако в рамках предлагаемого подхода можно использовать и континуальные модели (см., например, [28, 68]).

Численное решение рассматриваемых задач велось с использованием сеточно-характеристического метода [18], разработанный для исследования данного класса задач в [19], гибридная [20, 58] и гибридизированная [24] сеточно-характеристические разностные схемы, хорошо зарекомендовавшие себя при решении задач с ярко выраженным волновым характером. Они учитывают распространение разрывов вдоль характеристических поверхностей, позволяют корректно строить численные алгоритмы на границах области интегрирования и поверхностях раздела сред, что реализовано в представленной работе.

Примеры численного решения различных задач с помощью этих методов можно найти в [21–23, 25–27, 30, 69–72]. Так, в [25–27] рассматривались волновые процессы, инициированные интенсивными энергетическими нагрузками, в [30, 71] исследовались волновые процессы в биосредах, в [21, 23] проводилось численное решение задач об особенностях распространения волн в слоистых мишенях. В этих работах численно были получены в одномерном случае эффекты запираания и кумуляции волн в двухпериодических композитах, для двух- и четырехслойных преград в двумерном случае получены картины взаимодействия волн с контактными границами и границами области интегрирования при рассмотрении линейно-упругих задач.

Однако хотелось бы кратко отметить и недавно возникшую тенденцию моделирования процессов соударения и других сложных физических явлений для киноиндустрии. В погоне за большим реализмом фильмов были исчерпаны стандартные средства постановки трюков и эффектов (взрывов, выстрелов, аварий): отдельные замыслы режиссера оказываются слишком дорогими в реализации, часть является опасными для участвующих каскадеров, а противоречащие физике эффекты невозможны в принципе. Поэтому сейчас все чаще прибегают к сценам, полностью или частично созданным на компьютере. Движение объектов в них задаются оператором, поэтому зачастую выглядит нереалистично и однообразно. По-

этому возникает потребность в программных решениях, которые выполняли бы моделирование процессов соударения. Требования к точности счета здесь значительно ниже, однако результат не должен противоречить здравому смыслу зрителя. В работах [8,9] методом конечных элементов ведется моделирование разрушения трехмерных хрупких (стеклянных или керамических) конструкций недеформируемым ударником с развитием многочисленных трещин и образованием отдельных фрагментов. Среди работ аналогичной направленности стоит отметить [41], где с использованием совместного метода, включающего как частицы, так и равномерную сетку, моделируются процессы распространения горячих газов, образующихся в результате взрыва. В [73] на основе конечно-разностного подхода производится расчет воздействия взрывной волны на разрушаемые объекты.

## 8.1. Постановка задачи

Использовались следующие исходные посылки.

1. *Скорость удара, форма ударника, геометрия преграды.* Задача решалась в двух вариантах. *Осесимметричный* вариант расчета позволял эффективно рассчитать трехмерную задачу, однако для этого ударник мог двигаться строго по нормали к поверхности преграды. В этом варианте предполагалось, что ударник представляет собой сферическое тело радиуса  $R$  и массы  $M$ . Второй или *плоский* вариант позволял рассчитывать косые удары, однако, в нем все тела — это бесконечные цилиндры с направляющими вдоль третьей оси. Для сопоставления результатов с первым вариантом радиус ударника сохранялся. Задавалась начальная скорость подлета к преграде  $V_0$ . Преграда полагалась круговой цилиндрической пластиной (или бесконечным бруском), состоящей из  $n$  слоев силикатного стекла, разделенных  $n - 1$  полимерными прослойками.

2. *Реология материалов преграды.* Каждый отдельный слой в преграде рассматривался как однородный и изотропный, в основе описания которого лежало линейное уравнение связи напряжений и деформаций в виде закона Гука для изотропных тел. Полимерные слои описывались реологическими соотношениями для *вязко-упругого* материала. Для передачи поведения неразрушенного стекла использовались только соотношения линейно-упругого тела Гука, разрушенного — реология *упруго-идеальнопластической* среды Прандтля – Рейса с условием пластического течения Мизеса – Шлейхерта. Внутри преграды отмечались зоны вероятного разрушения в соответствии с двумя критериями прочности, которые соответствовали ограничениям на энергию формоизменения (сдвиговый механизм разрушения) и ограничение на максимальное растягивающее напряжение.
3. *Реология ударника.* Относительно деформационных свойств ударника задача также решалась в двух вариантах. Допускалась, что либо ударник — абсолютно твердое тело, либо — такое же деформируемое тело как и преграда. Модель абсолютно твердого тела хорошо подходит для инденторов из таких материалов как сталь, формоизменением которых во время столкновения можно пренебречь. Инденторы из более мягких металлов, как свинец, должны быть рассчитаны как деформируемые идеальнопластические тела. Все характеристики материалов ударника и преграды сведены в таблицу 8.1.

Таблица 8.1. Параметры материалов многослойной преграды и ударника:  $k_0$ ,  $a$  — параметры модели Мизеса – Шлейхерта (8.4), определяющие момент наступления пластического течения для металлов или хрупкости в стекле,  $\sigma_{bp}$  — временное сопротивление разрыву,  $\tau_0$  — время релаксации

	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E \cdot 10^{-9}$ , Па	$\nu$	$c_p$ , м/с	$k_0 \cdot 10^{-7}$ , Па	$a$	$\sigma_{bp} \cdot 10^{-7}$ , Па	$\tau_0$ , с
стекло	2500	68,7	0,22	5600	100	0,05	10	—
пластик	1200	2,19	0,39	1900	—	—	2	0,01
свинец	11342	16,2	0,446	2250	0,5	0	—	—

4. *Контактные границы между слоями преграды.* На контактных границах предполагалось полное слипание, если только максимальное растягивающее напряжение не превышало предела прочности на растяжение  $\sigma_0 = 10^7$  Па. При превышении предела прочности на растяжение в рассматриваемой точке предполагалось отслоение, которое соответствует нулевому нормальному и касательному напряжениям. Однако допускалось, что впоследствии разделившиеся слои опять могли склеиться, если они вновь сближались. Максимальное сдвиговое напряжение между слоями не превосходило доли  $k = 0.1$  от нормального напряжения, где  $k$  — коэффициент трения. Для выполнения этого условия допускалось проскальзывание слоев.
5. *Контакт ударник — преграда.* Полагалось, что контакт между абсолютно твердым индентором и преградой удовлетворяет условию свободного скольжения. Нормальная по отношению к площадке соприкосновения скорость движения приравнивалась скорости движения ударника в проекции на то же направление. Вторым условием служило равенство нулю касательных к поверхности контакта напряжений. Для определения скорости движения недеформируемого ударника численным образом интегрировалось его уравнение движения под действием сил сопротивления, возникающих в деформированной преграде. Вычисление состояния точек деформируемого ударника велось теми же средствами, что и для преграды.
6. *Начальные условия и условия на неконтактных границах.* В начальный момент времени напряжения в преграде и ударнике отсутствуют, преграда покоится, все точки ударника имеют одинаковую скорость  $\vec{V}_0$ . На боковой поверхности преграды, радиус которой значительно больше ее толщины, принималось условие излучения (или сноса:  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial r} = 0$ ), соответствующее преграде бесконечного радиуса. Тыльная

и лицевая стороны преграды считались свободными, на них отсутствовали нормальные и касательные напряжения всюду, кроме точек лицевой стороны, в которых осуществлялось взаимодействие ударника с преградой.

## 8.2. Изменение скорости и положения шарика со временем

Напряжения, возникающие в преграде непосредственно под ударником, препятствуют продвижению шарика и изменяют его скорость согласно закону Ньютона. Возникает следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\vec{V}/dt &= \vec{F}/M, \\ d\vec{R}/dt &= \vec{V}, \end{aligned}$$

где  $\vec{R}$  и  $\vec{V}$  — координаты и скорость движения шарика,  $M$  — его масса,  $\vec{F}$  — сила, действующая на поверхности соприкосновения индентора и преграды.

Сила, действующая на единицу контактной поверхности между шариком и преградой, определяется по формуле

$$\vec{p} = - \left[ (\sin \varphi)^2 \sigma_{11} - 2 (\sin \varphi \cos \varphi) \sigma_{12} + (\cos \varphi)^2 \sigma_{22} \right] \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix},$$

где  $\varphi$  — угол, который составляет прямая, проходящая через данную точку и центр шарика, с осью симметрии. Полная сила  $\vec{F}$  получается интегрированием  $\vec{p}$  по поверхности соприкосновения.

В осесимметричном случае отлична от нуля только вторая компонента силы, действующая вдоль оси. Считая, что  $\vec{p}$ , соответствующая углу  $\varphi$ , действует на бесконечно тонком кольце, вырезанном из сферы, ширины  $Rd\varphi$  и радиуса  $R \sin \varphi$ , имеющем площадь  $2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi$ , получаем

$$F = -2\pi R^2 \int_0^{\varphi_0} [(\sin^3 \varphi \cos \varphi) \sigma_{11} - 2 (\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \sigma_{12} + (\sin \varphi \cos^3 \varphi) \sigma_{22}] d\varphi,$$

где  $\varphi_0$  — максимальный угол соприкосновения ударника и преграды. При численном интегрировании для удобства делается переход к декартовым координатам:

$$F = -\frac{2\pi}{R^2} \int_0^{r_0} r \left[ r^2 \sigma_{11} - 2r(R - H - z) \sigma_{12} + (R - H - z)^2 \sigma_{22} \right] dr,$$

где  $H$  — глубина погружения шарика в преграду относительно начального положения ее верхней границы.

В двумерном случае имеем

$$\vec{F} = -R \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \left[ (\sin \varphi)^2 \sigma_{11} - 2(\sin \varphi \cos \varphi) \sigma_{12} + (\cos \varphi)^2 \sigma_{22} \right] \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} d\varphi,$$

где  $\varphi^-$  и  $\varphi^+$  — углы, соответствующие наиболее левой и правой точкам соприкосновения ударника и преграды.

Отметим, что в предыдущих формулах предполагалось, что шарик в любой момент времени контактирует с преградой только внутри односвязной области на поверхности преграды. Однако в программной реализации этого предположения нет, что соответствует приведенным выше формулам с заменой одного интеграла на сумму нескольких по различным контактными отрезкам.

### 8.3. Подвижная расчетная сетка

При решении задачи использовалась подвижная регулярная сетка, состоящая из выпуклых четырехугольников. Для расчета новых значений в каждом узле выполнялся переход в систему координат  $(\xi_1, \xi_2)$ , связанную с текущими сеточными направлениями в данной точке (см. раздел 1.2).

Считалось, что узлы сетки между последовательными слоями по времени движутся с постоянными скоростями  $\vec{c}(\xi_1, \xi_2)$  относительно неподвижной мировой системы координат. В частном случае, сетка могла быть лагранжевой, тогда скорости движения ее узлов совпадали с рассчитанной скоростью тела в данном узле:  $\vec{c} = \vec{v}$ . Положение узлов сетки в каждый момент

времени определялось интегрированием:

$$\vec{r}(t, \xi_1, \xi_2) = \vec{r}(0, \xi_1, \xi_2) + \int_0^t \vec{c}(\tau, \xi_1, \xi_2) d\tau.$$

В расчетах применялась перестройка расчетной сетки по методу, базирующемуся на подходе Иваненко – Чарахчьяна, предложенном в работе [35]. Замена исходной деформированной сетки, соответствующей времени  $t$ , на перестроенную проводилась одновременно с интегрированием системы дифференциальных уравнений до времени  $t + \tau$ . Узлы сетки приобретают соответствующую скорость в направлении оптимального положения, чтобы за время  $\tau$  занять его. Это позволяет снизить аппроксимационные ошибки, возникающие при переинтерполяции искомых функций на новую расчетную сетку и при численном интегрировании от  $t$  до  $t + \tau$  при использовании лагранжевой сетки.

Известно, что подход Иваненко – Чарахчьяна работает достаточно быстро в случае наличия хорошего начального приближения. В данной работе начальным приближением являлась лагранжева сетка с предыдущего шага по времени. Однако из анализа затрачиваемого на расчет времени выяснилось, что время, расходуемое на перестройку сетки, существенно доминирует над временем совершения нескольких шагов разностной схемы, происходящих между последовательными адаптациями сетки. Это может быть объяснено как минимум двумя причинами.

Во-первых, использованный сеточно-характеристический метод требует немного вычислительных ресурсов. Кроме того, адаптация сетки проводилась достаточно часто, чтобы шаг по времени не уменьшался существенно (например, в 10 раз), а оптимизированное положение узла сетки попадало бы в одну из ячеек сетки до оптимизации, смежных с данным узлом. Последнее обстоятельство необходимо для устойчивости счета.

Во-вторых, при проникновении ударника внутрь преграды происходило растягивание внешней поверхности тела и, чтобы обеспечить равномерность расчетных узлов в теле, происходило их перераспределение вдоль



поверхности. При этом возникшие искажения в приграничных ячейках должны были быть распространены на всю сетку вплоть до противоположной границы, что требует числа итераций, пропорционального числу ячеек между ограничивающими поверхностями. Ко второй причине стоит отнести и тот факт, что даже при отказе от поддержания равномерной плотности узлов на границе малая часть сетки непосредственно в окрестности взаимодействия бывает сильно искажена. А искажение при оптимизации снимается за счет движения всех ячеек, хотя большая часть из них, на первый взгляд, не требует корректировки.

Отличие от стандартного подхода заключалось в том, что оптимизации подвергается сначала только некоторое небольшое подмножество узлов исходной сетки, составляющее значительно более грубое разбиение области интегрирования, или так называемый *скелет сетки*. Таким способом производится существенное снижение размерности задачи оптимизации. Узлы оптимизированной грубой сетки фиксируются при последующей перестройке основного множества узлов и одновременно дают хорошее начальное приближение для своих «соседей». В этом приближении, в отличие от первоначального данного, уже требуется лишь локальное уточнение геометрии ячеек, и основной процесс оптимизации на полной сетке проходит значительно быстрее и гарантированно не приходит в ложный локальный минимум. Описанный процесс не обязательно должен быть ограничен однократным выделением подмножества, а может быть превращен в *иерархический* метод с целым рядом последовательно вложенных в друг друга множеств узлов, что и было реализовано в данной работе.

Забегаая вперед, представим на рис. 8.1 фрагмент расчетной сетки в окрестности ударника при несимметричном нагружении с начальной скоростью шарика 1500 м/с без адаптации сетки к текущей границе тела. Как уже отмечалось, существенно деформировались лишь ячейки, непосредственно соприкасающиеся с верхней границей, в то время как уже на

небольшом расстоянии от нее сетка сохраняет равномерность. Шаг по времени уменьшается более чем в 1000 раз по сравнению с первоначальным шагом в момент касания ударника, счет далее практически невозможен. Рис. 8.2 содержит оптимизированную сетку для той же задачи, достигнутое время в несколько раз больше представленного на рис. 8.1, а едва заметные изломы в линиях сетки соответствуют узлам ее скелета. Вертикальное сгущение сетки на обоих рисунках происходит внутри прослойки.

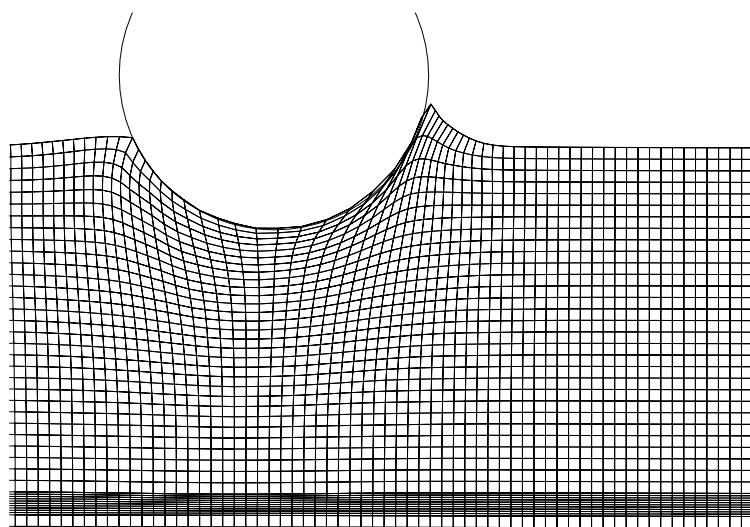


Рис. 8.1. Отказ от перестройки сетки приводит к вырождению ее ячеек в месте касания тел.

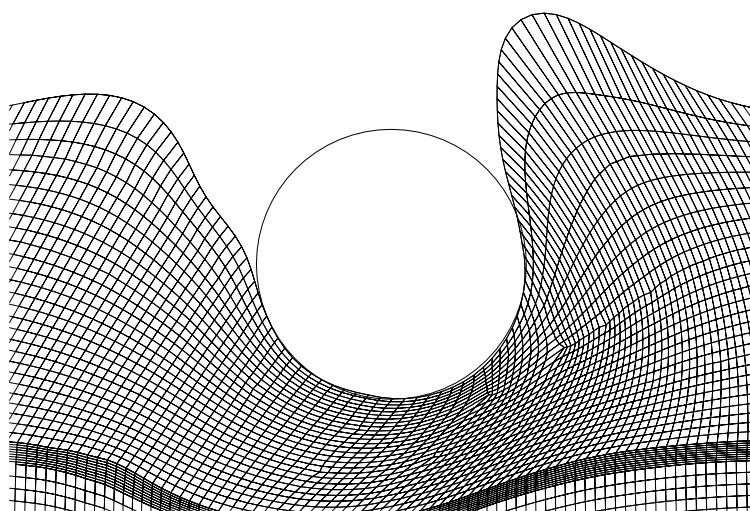


Рис. 8.2. Оптимизация сетки позволяет продолжать моделирование процесса внедрения ударника.

### 8.3.1. Перестройка сетки как задача оптимизации

Введем следующие обозначения:  $N$  — множество всех узлов сетки,  $N' \subset N$  — множество тех узлов сетки, положение которых может быть изменено в процессе перестройки. К последним обычно не относят узлы, располагающиеся на внешних и внутренних границах тела.

$$X = \{(x_1^n, x_2^n) | n \in N\} \supset X' = \{(x_1^n, x_2^n) | n \in N'\}$$

— множества координат всех узлов сетки и координат движимых узлов, соответственно.

Будем рассматривать *глобальную* перестройку сетки, которую можно сформулировать как задачу оптимизации функционала  $I^h$  вида

$$I^h : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad X' = \operatorname{argmin} I^h. \quad (8.1)$$

В противовес *локальным* методам перестройки, они требуют привлечения всего множества координат узлов для перестройки сетки в любом отдельно взятом месте тела, что далеко не всегда удобно с точки зрения, например, распределенного вычисления отдельных участков тела на разных процессорах. Вторым неудобством глобальной перестройки стоит считать трудность подбора порогов, при достижении которых численный метод минимизации должен прекращать свою работу: в сетке с большим числом общих узлов и одной единственной вывернутой ячейкой значение функционала может быть сколь угодно близко к значению на идеальной сетке, однако вывернутая ячейка будет, по-прежнему, определять малый шаг интегрирования.

#### Выбор оптимизируемого функционала

Особый интерес представляют задачи (8.1), получающиеся в результате дискретизации интеграла

$$I = \int f d\vec{x} = \int f |\Delta| d\vec{\xi} \rightarrow \min, \quad f = f \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \right), \quad \Delta = \det \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \right).$$

где  $(\xi_1, \xi_2)$  — система координат, связанная с сеткой, в которой целочисленным парам индексов соответствуют узлы расчетной сетки.

Целью оптимизации сетки чаще всего является повышение возможного шага интегрирования на этой сетке. В разделе 1.5 приведены формулы, связывающие максимальный шаг в узле сетки с локальной конфигурацией сетки, выраженной через величины

$$l_1 = |\Delta|^{-1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}, \quad l_2 = |\Delta|^{-1} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}.$$

Сложность дифференцирования выражений  $l_1 + l_2$  и  $\max\{l_1, l_2\}$  представляет трудность для использования их в минимизируемом функционале. Наиболее простой похожей функцией представляется  $f = l_1^2 + l_2^2$ , следовательно,

$$I = \int |\Delta|^{-1} \left[ \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right)^2 \right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Аналогичное выражение строго выводится в статье [35] при построении функционала, обеспечивающего на получающейся сетке наилучшую билинейную аппроксимацию произвольной функции с ограниченной второй производной.

### Дискретизация функционала

Для получения дискретной версии функционала  $I^h$  — алгебраической функции координат узлов — необходимо выбрать

- набор точек и квадратурную формулу для приближенной замены интеграла линейной комбинацией значений подынтегрального выражения, вычисленных в точках набора;
- разностные формулы для аппроксимации производных  $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$  через координаты близлежащих узлов.

Произвольный выбор может привести к тому, что значение дискретного функционала для некоторой вырожденной сетки может оказаться не

больше, чем для желаемой формы сетки, и процесс минимизации функционала будет лишь ухудшать начальное приближение сетки. Например, если аппроксимировать производные в узлах центральными разностями вдоль соответствующих направлений, то величина дискретного функционала будет одинаковой как для равномерной квадратной сетки, так и для сетки, в которой каждая четная линия  $\xi_i = 2m$  совпадает со следующей нечетной  $\xi_i = 2m + 1$ . В ином случае, когда подынтегральное выражение вычисляется лишь в центрах ячеек с приближенной заменой производных суммой значений четырех близлежащих узлов с коэффициентами  $\pm \frac{1}{2}$ , в «оптимальной» сетке ячейки стремятся вырождаться в треугольники.

Поэтому способ дискретизации [35] представляется наилучшим. В каждой четырехугольной ячейке рассматриваются четыре (пересекающихся) треугольника с теми же вершинами (в плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$  треугольники будут прямоугольными). Функция  $\vec{x}(\vec{\xi})$  внутри каждого треугольника считалась линейной, а ее производные  $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$  и, следовательно, все подынтегральное выражение являлись постоянными (формулы линейной интерполяции в треугольнике и вычисления производных приведены в главе 4). Интеграл от постоянной величины по треугольнику равен произведению площади треугольника на эту величину. Так как суммарная площадь четырех треугольников равна удвоенной площади ячейки, то и сумма интегралов, каждый из которых опирается на один из четырех типов треугольников из разных ячеек, будет аппроксимировать удвоенную величину минимизируемого функционала. Заслуживает внимания факт того, что величина  $\Delta$  ввиду линейности  $\vec{x}(\vec{\xi})$  в треугольнике равна удвоенной площади этого треугольника. А наличие  $\Delta$  в знаменателе подынтегрального выражения гарантирует, что ни один из треугольников не может вырождаться, приобретая нулевую площадь, поскольку это приведет к бесконечно большому значению минимизируемого функционала. Таким образом, приведенные выше примеры вырождения сетки здесь невозможны.

Замена всего интеграла суммой интегралов по отдельным треугольникам справедлива лишь, когда все ячейки являются выпуклыми четырехугольниками. При обнаружении невыпуклой ячейки значение функционала удваивалось, что делало такую сетку неподходящей.

#### 8.4. Учет разрушения материалов

Реальные материалы неспособны выдерживать произвольно большие касательные напряжения, что приводит к их разрушению. В рассматриваемом численном подходе предусмотрена возможность изменения реологических свойств после реализации сдвигового разрушения. Предполагается, что в этом случае поведение описывается соотношениями Прандтля – Рейса при условии пластичности Мизеса:

$$\mathbf{s} : \mathbf{s} \leq 2k^2.$$

Здесь  $\mathbf{s} = \mathbf{T} + p\mathbf{I}$  — девиатора тензора напряжений  $\mathbf{T}$ ,  $p = -\frac{1}{3}\mathbf{T} : \mathbf{I}$  — давление,  $k(p)$  — предел текучести (прочности на сдвиг). При этом уменьшается модуль сдвига и среда неспособна сопротивляться растяжению. Остановимся подробнее на моделировании описанных явлений.

Неупругое поведение среды в расчетной схеме можно учесть как путем аппроксимации нелинейных реологических соотношений, так и путем пробной проверки и подходящей корректировки напряжений на каждом шаге по времени после их расчета по линейной упругой модели [43]. В программной реализации данной работы был использован второй вариант учета пластичности в сочетании с возможностью изменения свойств материала ячейки в момент, когда впервые происходит модификация напряжений.

Поверхность  $\mathbf{s} : \mathbf{s} = 2k^2$  определяет в пространстве напряжений пределы текучести. Используемый способ корректировки напряжений (*закон текучести*, см. [66, 67]) перемещает точку, соответствующую напряженно-

му состоянию, назад к поверхности вдоль нормали к ней:

$$\mathbf{T} = \sqrt{\frac{2k^2}{\mathbf{s}^0 : \mathbf{s}^0}} (\mathbf{T}^0 + p^0 \mathbf{I}) - p^0 \mathbf{I},$$

где индекс ноль относится к величинам до корректировки напряжений.

Зависимость параметра  $k$  от давления (обобщенное условие пластичности Мизеса – Шлейхерта) в данной работе имеет вид

$$k = k_0 + ap, \quad a \geq 0.$$

Изменение модуля сдвига происходило следующим образом. Если параметры Ляме, характеризующие упругие свойства материала, до разрушения обозначить как  $\lambda^0$  и  $\mu^0$ , то после разрушения модуль сдвига новообразованного материала масштабировался в  $\alpha \approx 0.1$  раз:  $\mu = \alpha \mu^0$ . Модуль всестороннего сжатия материала сохранялся после разрушения, что позволяет вычислить  $\lambda$ .

В расчетах полагается, что раздробленный материал не может сопротивляться растяжению. Это приводит к следующему правилу коррекции тензора напряжения в нем: никакое главное напряжение в раздробленном материале не может быть растягивающим (положительным).

Поясним применение этого правила на примере цилиндрической системы координат в задачах с осевой симметрией. Напряжение вдоль третьей оси  $\theta$  может быть рассмотрено независимо от напряжений, действующих в плоскости первых двух осей. Таким образом,  $t_{33} = \min\{t_{33}^0, 0\}$ . В плоскости  $(r, z)$  напряженное состояние будут определяться числом положительных собственных значений тензора  $\mathbf{T}$ . Так, если их нет, то и модификацию проводить нет необходимости. Если существует одно положительное собственное значение, то напряжение вдоль направления, соответствующего этому собственному значению, должно быть обнулено, в то время как напряжение в ортогональном направлении сохранено. Если оба собственных значения положительны, то полагаем  $t_{11} = t_{12} = t_{22} = 0$ .

Откольные разрушения, т. е. разрушения, образующиеся, когда одно из трех главных напряжений в некотором элементе материала превышает сопротивление материала растяжению, учитывались в рамках модели Майнчена – Сака [67]. При этом образуется трещина, перпендикулярная направлению этого напряжения.

Расчет динамического разрушения среды с помощью подвижных и лагранжевых расчетных сеток производится следующим образом. Методика моделирования разрушений Майнчена – Сака первоначально была разработана применительно к лагранжевым сеткам, и ее использование при расчете на подвижных сетках не является очевидным. В данной работе применялась схема расчета, которая позволяет вести чередование счета с лагранжевой и подвижной сетками. Причем последняя применяется главным образом для реализации равномерного распределения расчетных узлов, и, следовательно, число шагов по времени, рассчитываемых с помощью лагранжевой сетки, существенно доминирует.

Естественным подходом согласования обнаруженных разрушений в узлах сетки с их нелагранжевым движением является перенос информации о разрушении на новую сетку, что реализовывалось при помощи алгоритма поиска ближайшего соседа, суть которого состоит в следующем. Положим, что в некоторый момент времени  $t_n$  при расчете лагранжевым методом шаг по времени  $\tau$  уменьшился настолько, что появилась необходимость перестройки расчетной сетки. Этот процесс на одном временном шаге  $[t_n, t_n + \tau]$  реализуется при помощи аппарата подвижных сеток, описанного ранее, т. е. сначала строится новая расчетная сетка, а затем рассчитываются искомые величины на следующем слое по времени  $t_n + \tau$ . Как уже отмечалось, в этом случае нет необходимости переинтерполировать расчетные величины на новую сетку, как это делается в случае использования только лагранжева подхода. Разрушенными считаются те точки среды (узлы сетки), которые находятся наиболее близко к разрушенным



точкам (узлам) лагранжевой расчетной сетки на предыдущем временном слое  $t_n$ . Далее расчет продолжается, в соответствии с уравнениями механики сплошной среды, записанными в форме Лагранжа, т. е. при  $c_k \equiv v_k$ , до тех пор, пока шаг  $\tau$  вновь не уменьшится значительно.

Метод переноса позволяет использовать подвижные сетки для расчета разрушений деформируемых тел. Погрешности, возникающие при переносе разрушения из одного узла в другой, ближний узел, разумеется, имеют место, как имеют место и погрешности при переинтерполяции расчетных величин на новую сетку при использовании только лагранжева подхода. Приведенный алгоритм не включает процедуру переинтерполяции, кроме того, предлагаемый здесь подход совместного использования подвижных и лагранжевых сеток в рамках общих уравнений, записанных в подвижных координатах, представляется более универсальным и алгоритмически удобным при решении рассматриваемых задач. При использовании только подвижных сеток для расчета процессов динамического деформирования можно применять подход, основанный на маркировании тех точек среды, в которых произошло разрушение (т.е. рассчитывать траектории движения разрушенных точек среды и сравнивать их координаты с координатами узлов подвижной расчетной сетки, что также означает обращение к алгоритму поиска ближайшего соседа).

Помимо переноса свойства разрушения к ближайшему узлу новой сетки в работе был реализован и другой подход. В модели Майнчена – Сака полагается, что разрушение может возникнуть только в дискретном множестве точек, которые совпадают с положениями расчетных узлов. Однако разумно предположить, что и между ближними расчетными узлами, в которых оказался выполненным критерий разрушения, также присутствует разрушенный материал. Поэтому при необходимости отобразить разрушения в среде на новую сетку имеет смысл рассматривать некоторую совокупность ближайших узлов и более точно воссоздавать картину разрушений

между ними.

#### 8.4.1. Результаты расчетов

В данном разделе представлены результаты работы программы, полученные для композитных пластин толщиной 50 мм при различных конфигурациях слоев.

Радиус моделируемой области в преграде выбирался так, чтобы все существенные эффекты находились внутри нее, и колебался в зависимости от прочих параметров в диапазоне от 6 до 10 см. Для обеспечения максимально возможного шага по времени сетка была более разреженной в стеклянных слоях, где плотность узлов выбиралась примерно 4 штуки на квадратный миллиметр, и сгущалась в склеивающих слоях, поскольку скорость движения волн в последних ниже и можно подобрать плотности сеток так, чтобы в обоих материалах счет велся с равным числом Куранта. В вариантах расчета с отсутствием симметрии и максимальным числом слоев общее количество узлов превышало 80000.

Общее время взаимодействия ударника с преградой:  $T \approx 5 \cdot 10^{-5}$  с, а время распространения фронта возмущения сквозь преграду  $n \frac{h_1}{c_1} + (n - 1) \frac{h_2}{c_2} \approx 10^{-5}$  с. То есть за время взаимодействия фронт возмущения может пройти ширину преграды несколько раз. В задачах подобного рода использование гибридной схемы расчета представляется оптимальным. С одной стороны схема первого порядка, входящая в нее, позволяют передать точно продвижения больших градиентов на фронтах волн и их первых отражений, с другой — схема более высокого порядка обеспечивает достаточную точность плавной эволюции распределения переменных на длительном протяжении времени.

На последующих иллюстрациях наиболее крупно изображены мгновенные векторные поля и изолинии модуля скорости. Другие рисунки показывают в конечный момент времени области с разрушенным материалом

(дробление) и формирование трещин, а также содержат расчетную сетку вблизи ударника. Был использован следующий способ представления разрушений: изолинии указывают границы раздробленного материала, отдельные отрезки соответствуют направлениям микротрещин, находящихся в центре отрезка и пересекающих плоскость рисунка. Радиальные микротрещины не показаны. Важным результатом расчетов явилось обнаружение фрагментирования преграды в районе тыльной стороны с выстраиванием микротрещин в протяженные поверхности и формированием конических макротрещин. Этот результат повторяет экспериментальные данные об отколе конусообразного фрагмента с тыльной поверхности преграды.

Рис. 8.3 демонстрирует нормальный удар недеформируемого стального ударника по 5-ти слойной преграде: 3 стеклянных слоя шириной 15 мм каждый и 2 склеивающих слоя по 2.5 мм. Вариант расчета с деформируемым свинцовым ударником представлен на рис. 8.4. Рис. 8.5 изображает результаты косоугольного удара деформируемого ударника.

Удар по монолитной стеклянной преграде 50 мм ширины со скоростью  $V_0 = 2500$  м/с изображен на рис. 8.6. Такой скорости вполне достаточно для ее сквозного пробивания, действительно, шарик проходит всю толщину пластины, и весь материал под ним помечен как разрушенный, однако использование метода расчета на базе регулярных сеток не допускает деление преграды на несколько частей.

Интересной особенностью распространения возмущений, возникающих при соударениях твердых тел, является возникновение изгибных волн или так называемых «вихревых структур» [74]. Эти волны наличествуют и в упругопластических, и в упруговязких телах, но наиболее явно проявляются в идеальноупругих неразрушимых телах, рис. 8.7. Интенсивные тороидальные вихри, зарождаясь у угловых точек по периметру круговой области контакта в пластине, в дальнейшем распространяются вглубь и в стороны — к боковой поверхности круглой преграды. В ходе последующей

эволюции процесса порождаются вторичные изгибные волны, закрученные в противоположном направлении и распространяющиеся в том же направлении. Первичные волны есть отражение процесса внедрения ударника, вторичные — его выталкивания.

Количество слоев в теле не ограничивается пятью. На фиг. 8.8 приведено начало процесса проникания шарика в преграду с 21 слоем силикатного стекла, каждый толщиной по 1 мм, и с 20 связующими слоями по 0.5 мм. Учитывалась осевая симметрия задачи, нелинейная реологическая модель и возникновение разрушений. Изображены изолинии модуля скорости в диапазоне от 0 до 50 м/с,  $t = 1.1 \cdot 10^{-5}$  с,  $V = -261$  м/с. Отчетливо виден *конусообразный* фронт возмущения, значительно обгоняющий распространение области концентрации энергии удара.

#### 8.4.2. Увеличение рассчитываемого периода соударения за счет фрагментации

Моделирование взаимодействия индентора, обладающего очень высокой скоростью, порядка 2000 м/с, с многослойной преградой в течение всего времени соударения было в значительной степени затруднено. Объяснением тому является применение во всех расчетах данной главы регулярных четырехугольных сеток. Хотя они и позволяют добиться высокой точностью моделирования волновых динамических процессов, но все же недостаточно приспособлены для учета таких эффектов, как существенное изменение формы взаимодействующих тел, а тем более изменение их связности.

Если не предпринимать никаких действий, то счет фактически останавливался с образованием следующей характерной картины. Ударник, постепенно внедряясь в преграду, делает ближайший к нему слой все более и более тонким в каком-то месте. В физической реальности за этим должно последовать полное разрушение слоя в данном месте и формирование

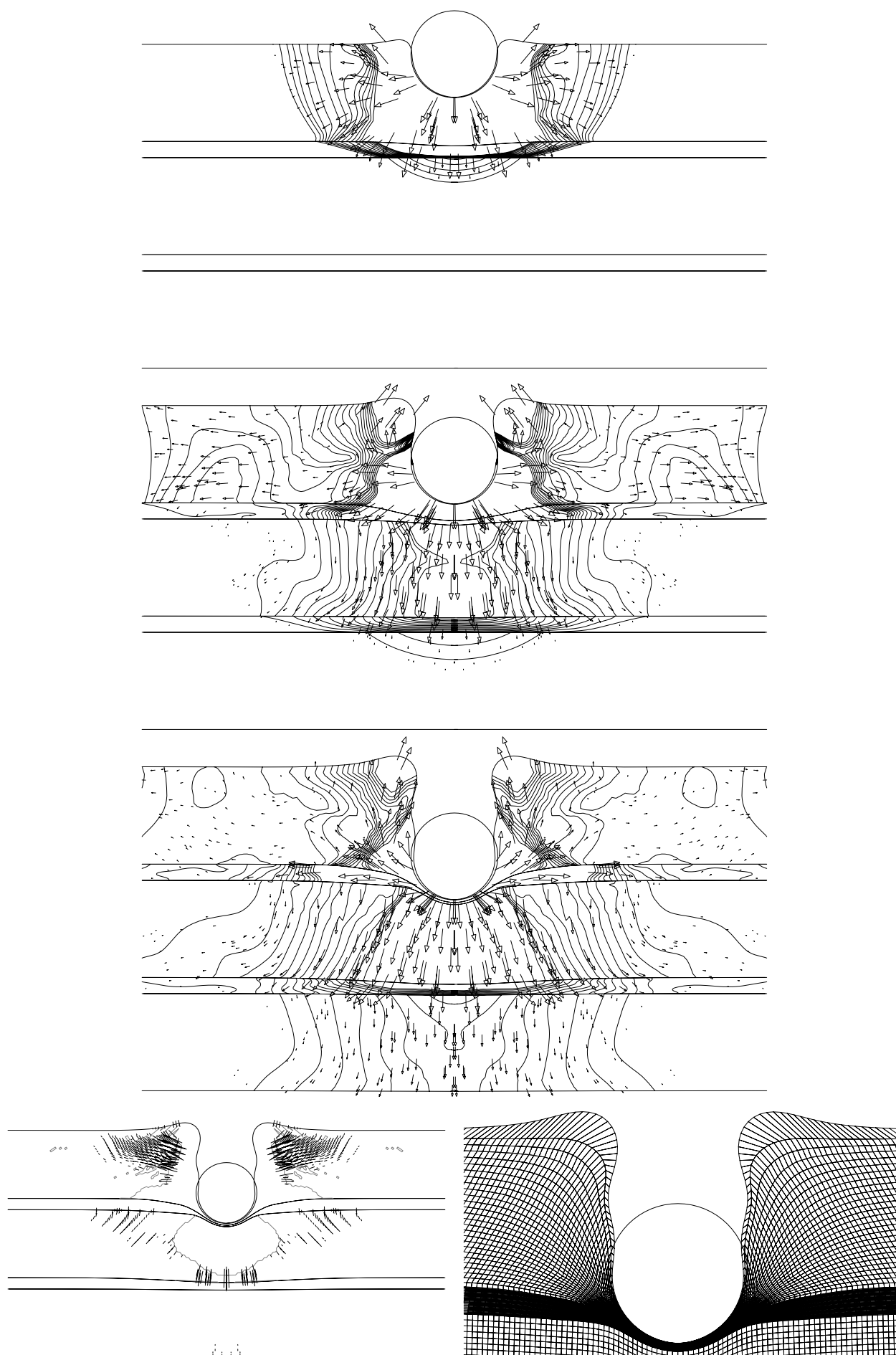


Рис. 8.3. Нормальный удар, недеформируемый ударник.  $M = 10$  г,  $V_0 = 2000$  м/с.  $t \cdot 10^5 = 0,45; 0,9; 1,3$  с.

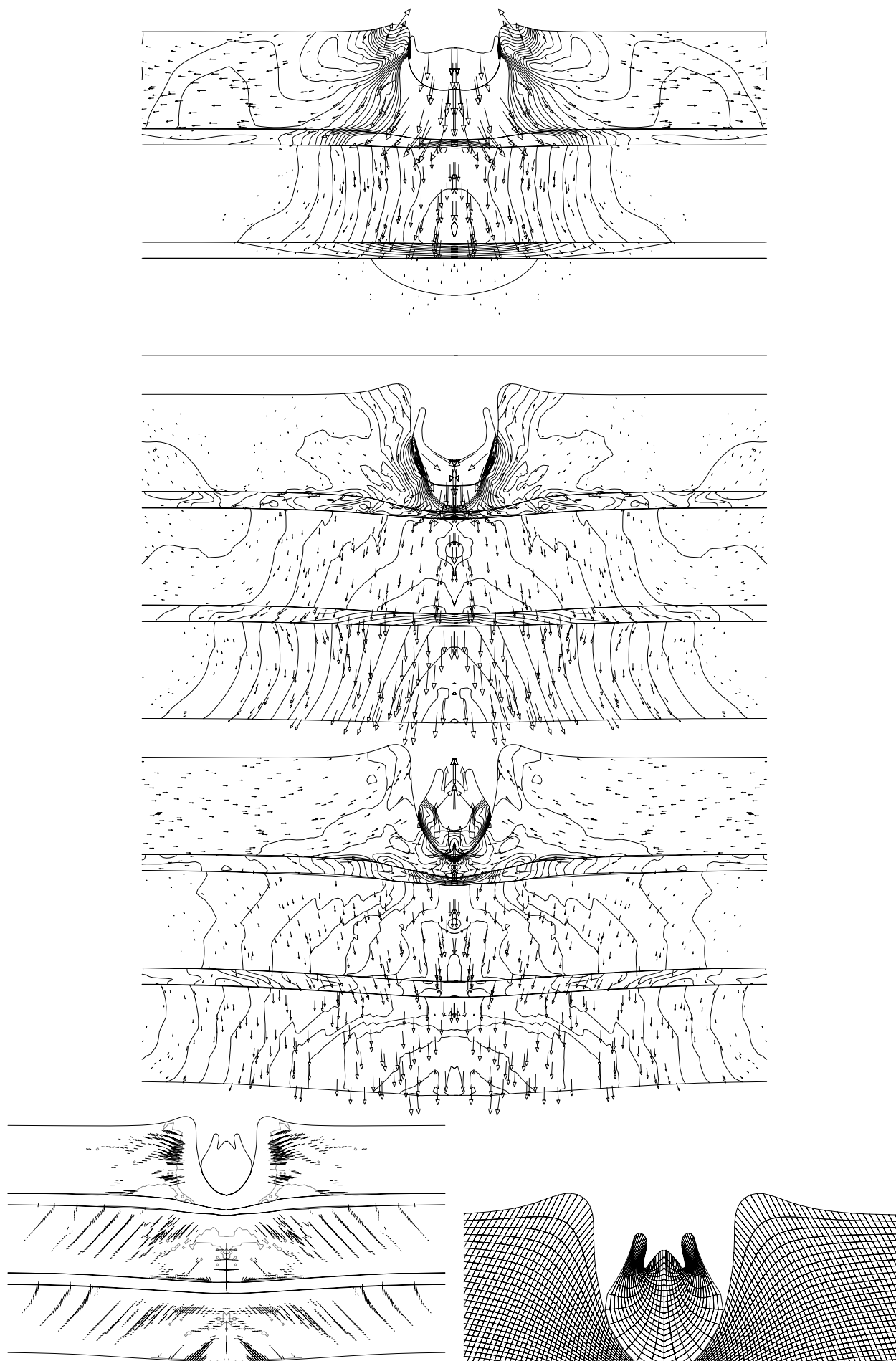


Рис. 8.4. Нормальный удар, деформируемый ударник.  $M = 10$  г,  $V_0 = 1500$  м/с.  $t \cdot 10^5 = 1; 2; 3$  с.

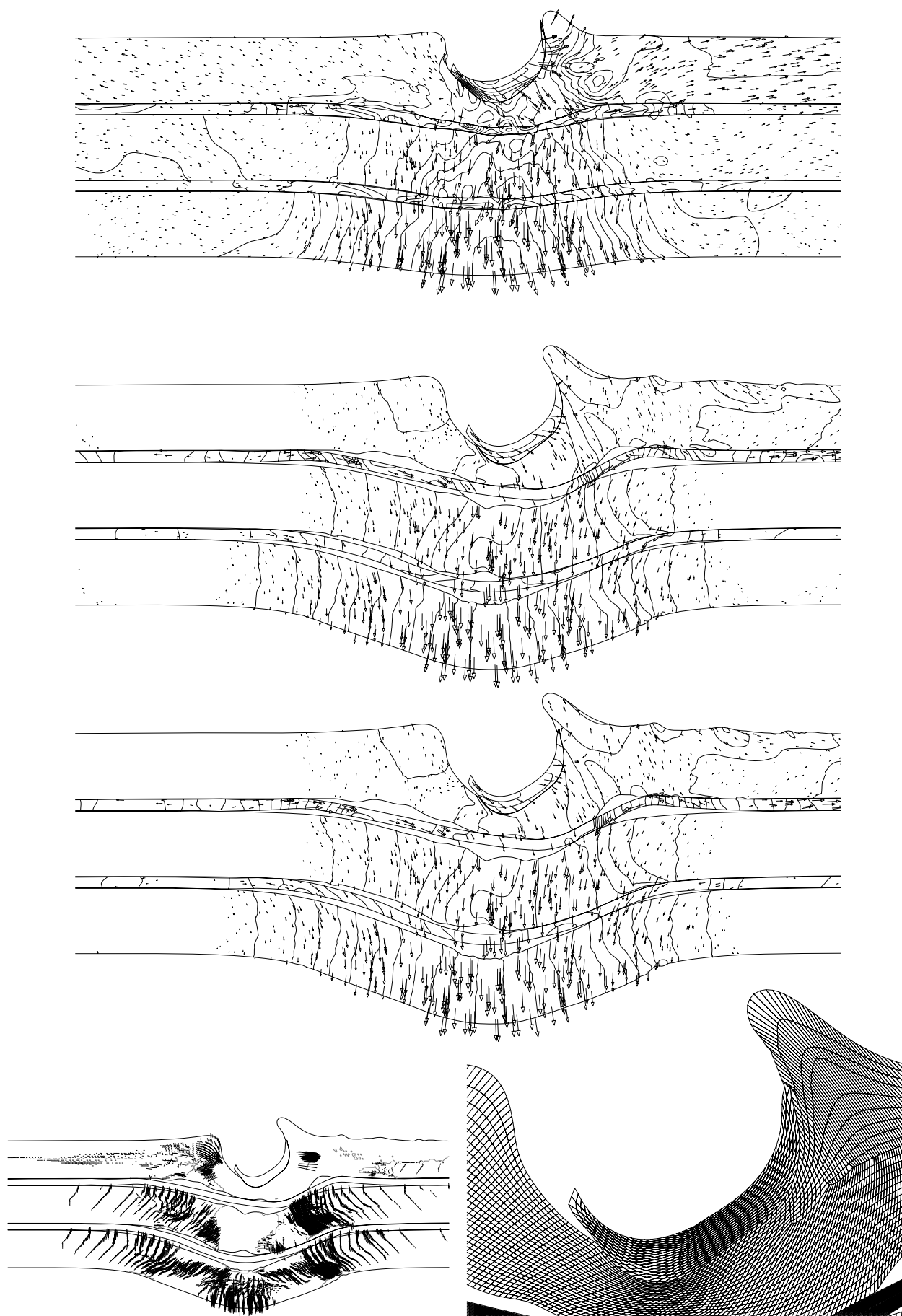


Рис. 8.5. Косой удар,  $\alpha = 30^\circ$ , деформируемый ударник.  $M = 10$  г,  $V_0 = 1500$  м/с.  $t \cdot 10^5 = 2,5; 5; 5,33$  с.

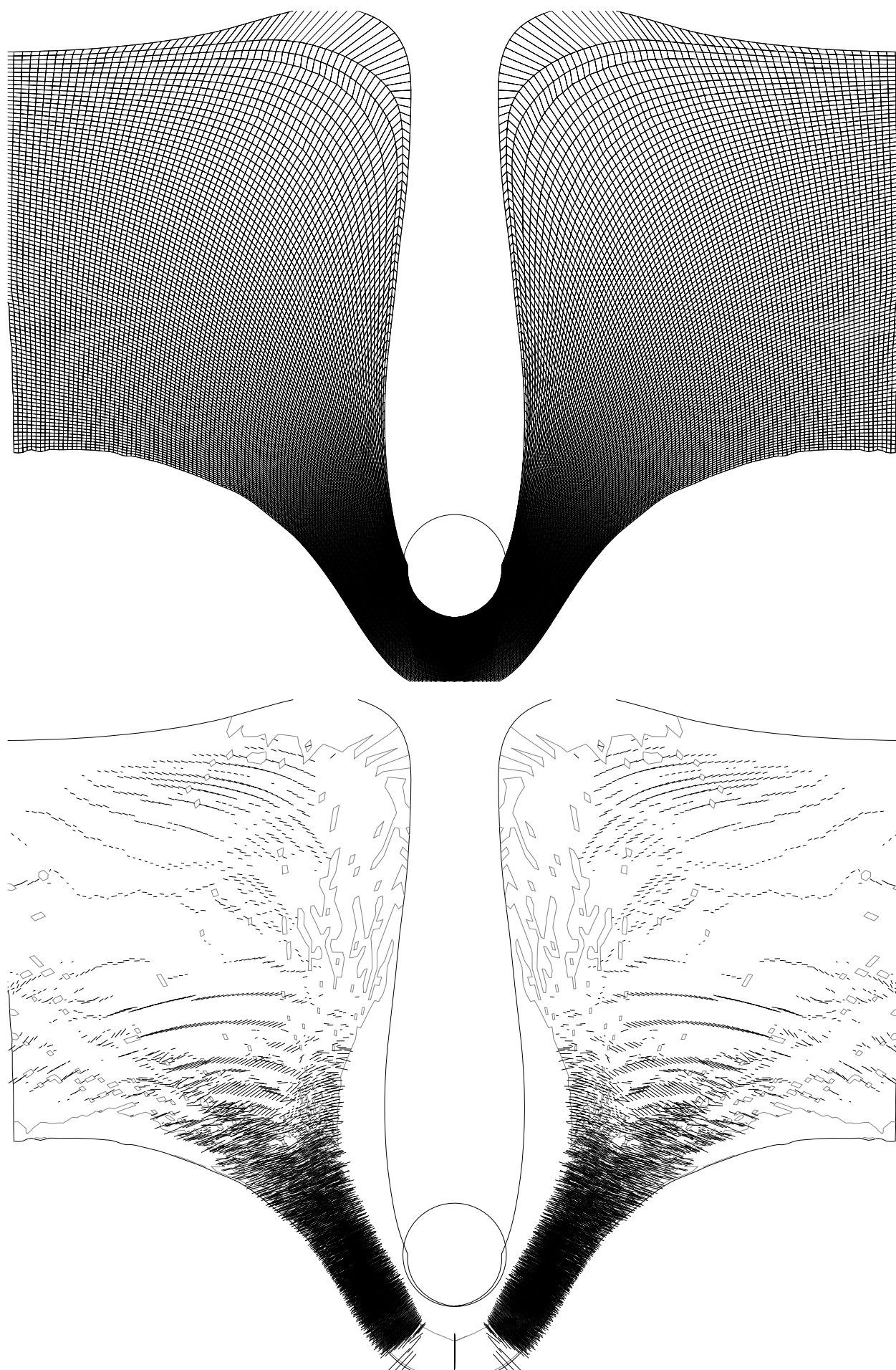


Рис. 8.6. Расчетная сетка и разрушения материала при пробивающем нормальном ударе по монолитной преграде. Недеформируемый ударник.  $M = 10$  г,  $V_0 = 2500$  м/с.  $t \cdot 10^5 = 7,5$  с.



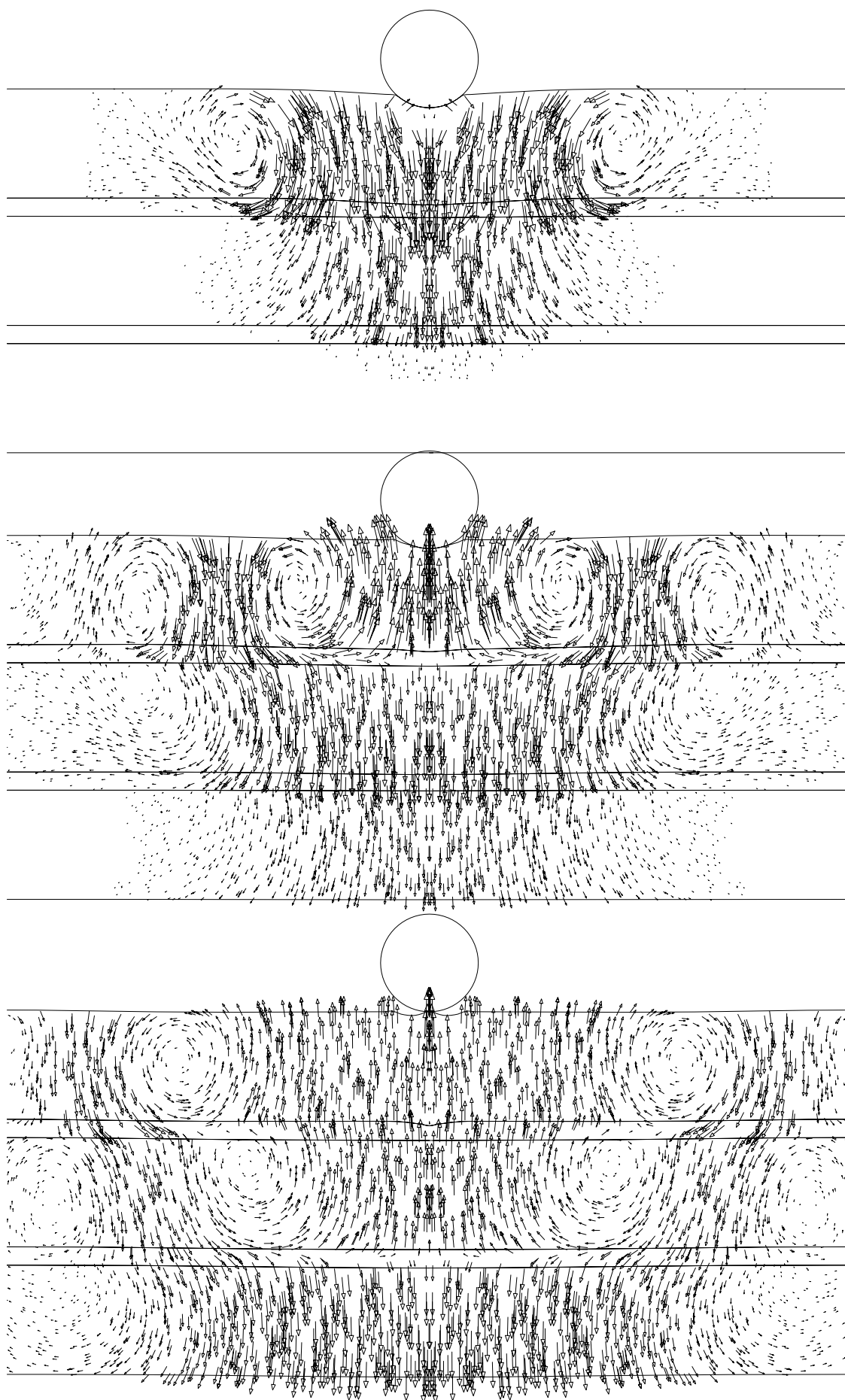


Рис. 8.7. Хорошо различимые изгибные волны (вихревые структуры) в полях скоростей в абсолютно упругом теле без учета разрушений и с полным слипанием слоев. Недеформируемый ударник.  $M = 10$  г,  $V_0 = 500$  м/с.  $t \cdot 10^5 = 0,9; 1,5; 2,25$  с.

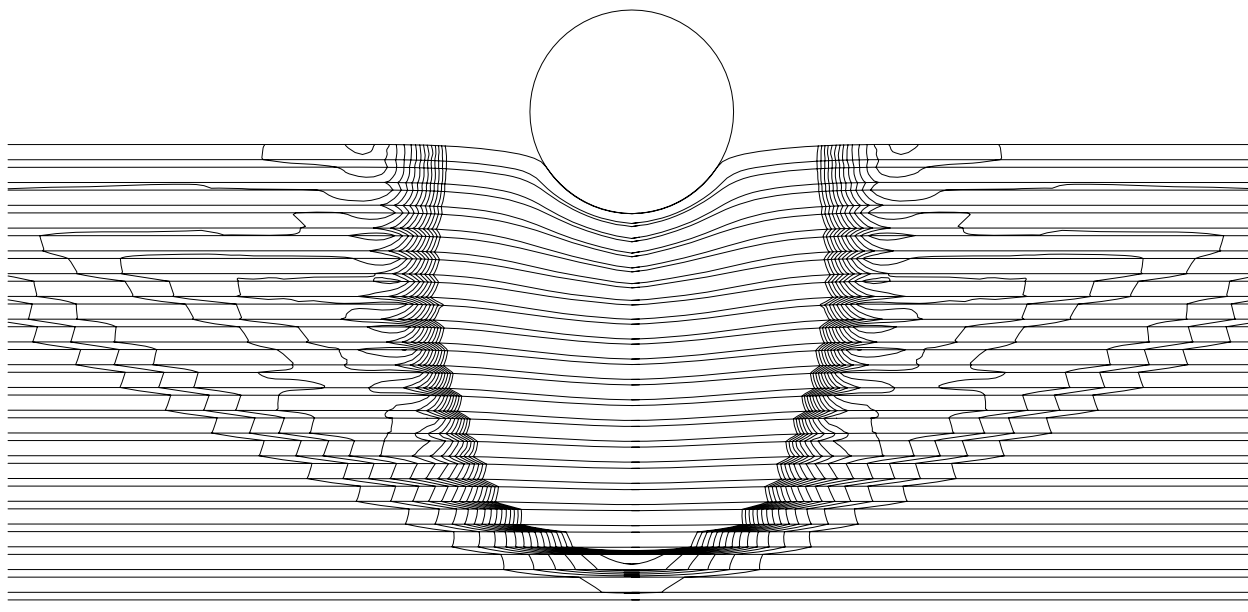


Рис. 8.8. Изолинии модуля скорости в диапазоне  $0 \div 50$  м/с на начальном этапе распространения возмущения в преграде с большим числом слоев. Нелинейная реологическая модель с учетом разрушений.  $t = 1.1 \cdot 10^{-5}$  с,  $V = -261$  м/с.

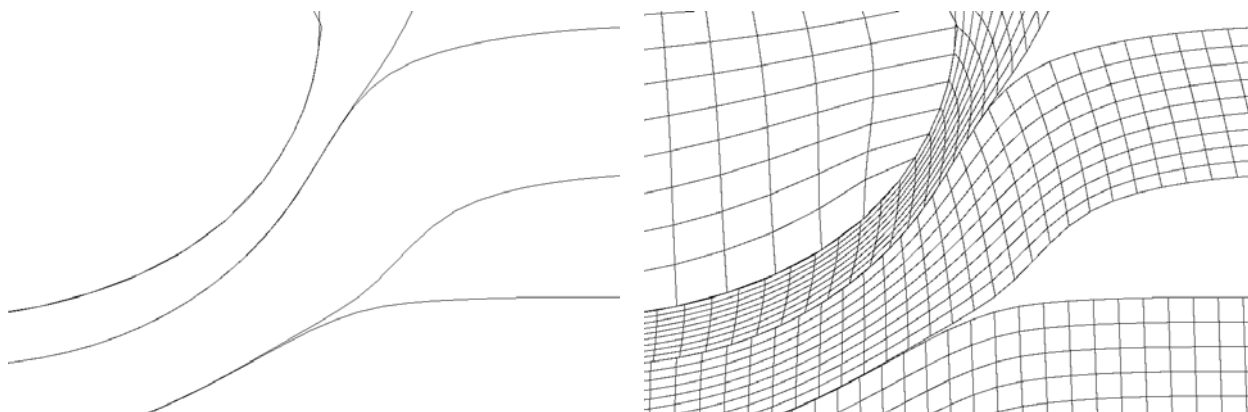


Рис. 8.9. Сгущение узлов сетки, приводившее, в конечном счете, к остановке программы.

отдельных фрагментов из данного слоя, которые выталкиваются из-под ударника в стороны или движутся с ним совместно, отрываясь от слоя. Однако в численном эксперименте слой, представленный деформированной прямоугольной сеткой узлов, не мог со временем потерять связность. Уменьшение толщины слоя шло практически неограниченно (рис. 8.9), что, впрочем, иногда соответствует действительности. Однако шаг интегрирования по времени почти линейным образом связан с минимальным размером ячейки сетки. Таким образом, шаг интегрирования при утончении слоя быстро стремится к нулю.

### Модификация численного метода

Для расчета тел, подвергающихся фрагментации в течение моделируемого периода времени, в наибольшей степени подходят методы, основанные на неструктурированных сетках, один из которых был предложен в предшествующих главах диссертации. Однако по причине того, что уже была создана программа с реализацией численного метода на регулярных подвижных сетках, было решено не отказываться от нее полностью, а постараться внести необходимые модификации, чтобы ослабить проблему фрагментации.

Фрагментация твердого тела является сложным процессом. Первое, необходимо моделирование начального образования микротрещины, второе, расчет ее роста до достижения противоположных границ тела или других макротрещин, и, третье, расчет полного разделения тела вдоль найденных таким способом линий. Однако численное моделирование первых двух этапов, т.е. образования и роста макротрещин, требует введения узлов сетки на противоположных границах трещин, т.е. образования ранее отсутствующих узлов в данном районе расчета. Это с неизбежностью приводит к утере регулярности сетки. Поэтому в текущей программной реализации было принято решение, опустив первые два шага, сразу переходить к третьему, а именно: организовывать из слоя две или три несвязные части. Образование двух частей происходит, если ударник просто разрывает слой, трех — если также вырывает из него некоторый кусок (рис. 8.10).

Однако требование поддержания регулярности сетки налагает ряд ограничений на реализацию разрыва слоев.

1. Слой (сетка) может порваться лишь таким образом, что вновь образующиеся границы располагаются вдоль прежних вертикальных линий сетки, ее «колонок». Это приводит к существенному ограничению на ориентацию новых границ.

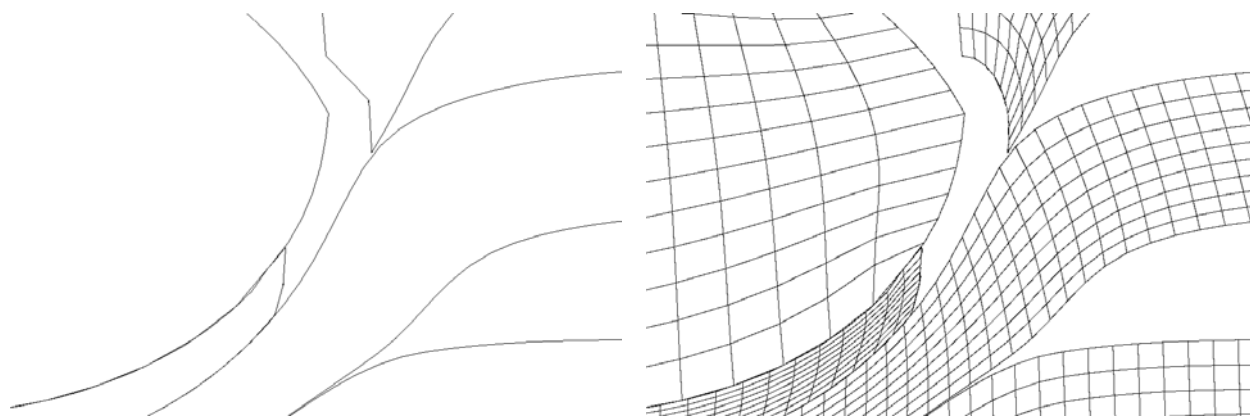


Рис. 8.10. Устранение участков сетки «колонок» в местах ее чрезмерного утончения.

2. Регулярная сетка особенно чувствительна к поведению угловых узлов, являющихся для такой сетки особыми точками. Прежде угловые узлы были удалены от мест, где прикладывались основные воздействия. Чтобы компенсировать происходящее вырождение ячеек (из-за продолжающегося сжатия) оставшейся части слоя вблизи места его разрыва приходится дополнительно выбрасывать все новые и новые ряды точек с течением времени.
3. Последовательное выбрасывание нескольких «колонок» с узлами приводит к образованию ложных полостей между взаимодействующими телами, границы которых на некоторое время становятся свободными. Причем образование пустого пространства происходит именно в областях с наибольшими напряжениями, что не может не сказаться отрицательно на точности получаемого в итоге результата и возможной неустойчивости, которая вообще препятствует получению результата. Сильно сжатые тела начинают быстро расширяться, чтобы заполнить пустоты.

Помимо критерия на минимальную ширину слоя в программе ставился другой критерий на растягивающие напряжения в радиальном направлении (параллельном поверхности преграды), который реализуется, если во всей «колонке» узлов критическое растягивающее напряжение было превышено (рис. 8.11).

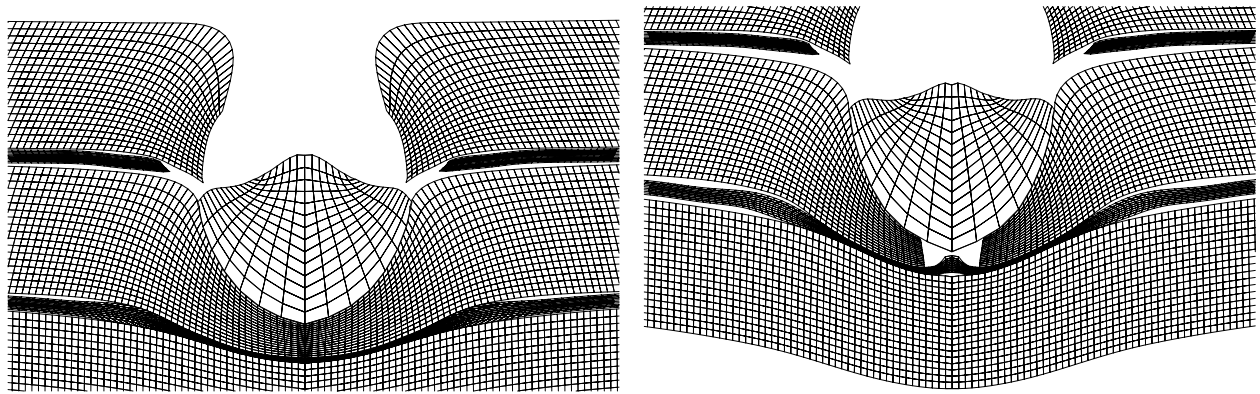


Рис. 8.11. Последовательные этапы внедрения ударника с частичной фрагментацией преграды.

### Расчеты сквозного пробивания при различной форме ударника

В качестве теста реализации сформулированного выше метода фрагментации сетки была выбрана следующая задача. Стеклопреграда из трех слоев по 3 мм каждый, разнесенных на расстояние 2.5 мм, подвергается воздействию от попадающего в нее металлического ударника массой 10 г и скоростью полета 2000 м/с. Стекло принималось непрерывно разрушаемым дилатационным материалом. Рис. 8.12, 8.13 представляют «разрыхление» стекла в диапазоне значений от сильно разрушенного материала 0.97 (и менее - черный цвет) до неразрушенного 1.00 (серый цвет). На рисунках приведены состояния тел в процессе контакта в моменты времени:  $\{0; 0.25; 0.5; 0.75; 1.0; 1.25; 1.5; 1.75; 2\} \cdot 10^{-5}$  с.

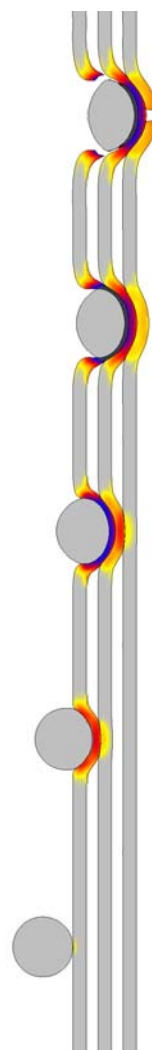
Можно сделать вывод, что метод с приведенными изменениями действительно позволяет продлить время счета по сравнению с исходным своим вариантом, причем настолько, что можно сформулировать обоснованное утверждение относительно стойкости преграды к данной форме и скорости ударника. Из шести проведенных численных испытаний (рис. 8.12, 8.13) в четырех случаях ударник прошел преграду насквозь, и лишь в двух счет был преждевременно остановлен. Причем в этих двух случаях наблюдалась ранняя нецентральная фрагментация у некоторых слоев, приводящая к тому, что центральные куски слоев продолжают движение вместе с ударником и входят во взаимодействие с нижними слоями.



Цилиндрический ударник с круговой формой сечения и направляющими преграде. Отношение диаметра к высоте 3:1. За рассматриваемое время полное пробивание еще не завершается, но все слои под ударником уже разрушены. Скорость ударника при  $t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с равна 877 м/с.

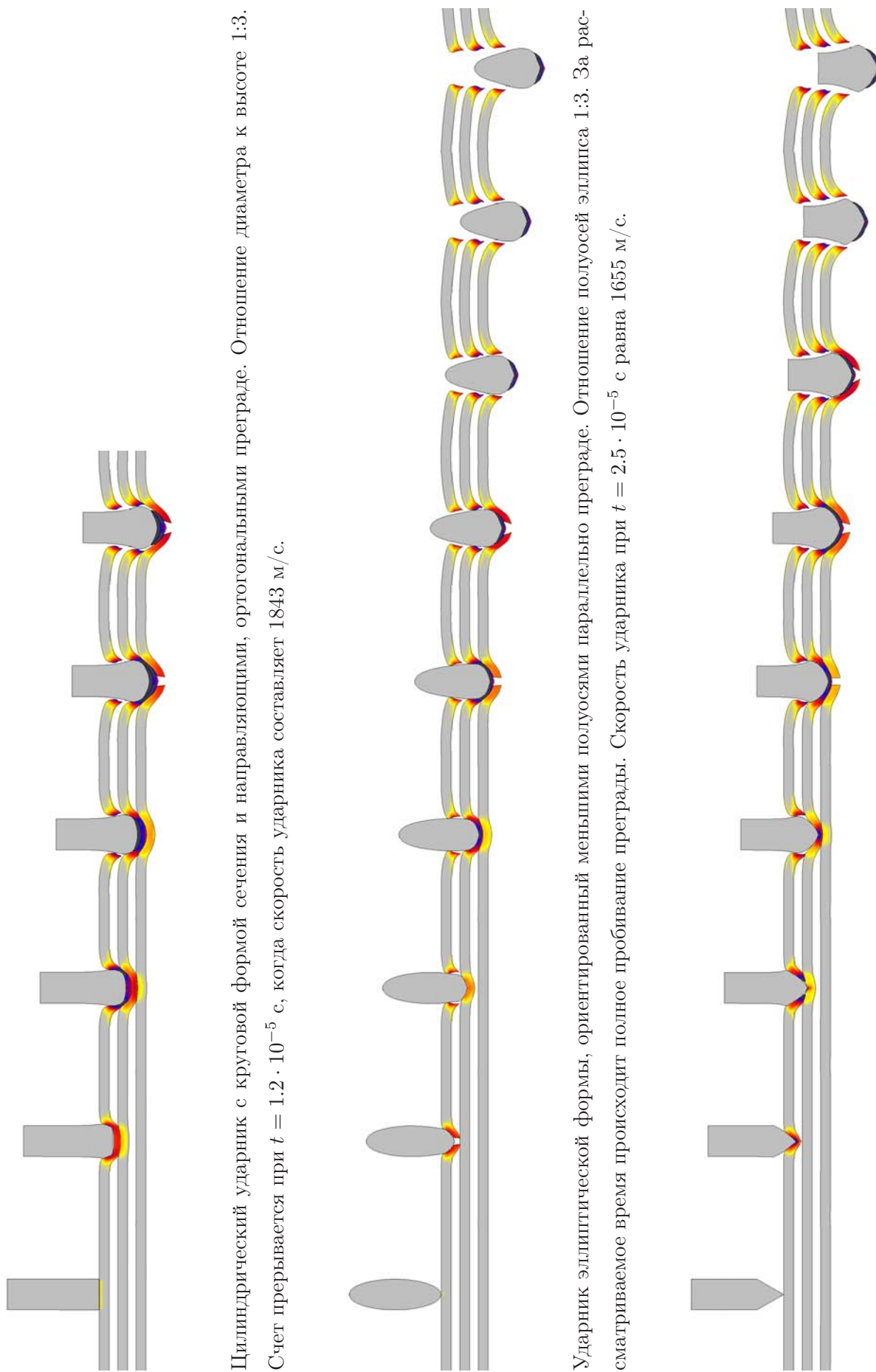


Ударник эллиптической формы, ориентированный большими полуосями параллельно преграде. Отношение полуосей эллипса 3:1. За рассматриваемое время полное пробивание еще не завершается, но все слои под ударником уже разрушены. Скорость ударника при  $t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с равна 765 м/с.



Ударник шарообразной формы. Счет прерывается при  $t = 0.9 \cdot 10^{-5}$  с, когда скорость ударника составляет 1584 м/с.

Рис. 8.12. Пробивание разнесенной преграды.



Цилиндрический ударник с круговой формой сечения и направляющими, ортогональными преграде. Отношение диаметра к высоте 1:3. Счет прерывается при  $t = 1.2 \cdot 10^{-5}$  с, когда скорость ударника составляет 1843 м/с.

Ударник эллиптической формы, ориентированный меньшими полуосями параллельно преграде. Отношение полуосей эллипса 1:3. За рассматриваемое время происходит полное пробивание преграды. Скорость ударника при  $t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с равна 1655 м/с.

Цилиндрический ударник, заостренный на стороне, обращенной к преграде (масса ударника несколько ниже 10 г). Отношение диаметра к высоте цилиндра 1:3. За рассматриваемое время происходит полное пробивание преграды. Скорость ударника при  $t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с равна 1648 м/с.

Рис. 8.13. Пробивание разнесенной преграды.

# Заключение

## Основные результаты и выводы диссертации

Аналитическим образом произведено спектральное исследование матриц коэффициентов системы уравнений теории упругости, выписанной в произвольной прямолинейной системе координат. В компактной форме получены выражения для всех собственных значений этих матриц  $\Lambda$  (1.22), их левых собственных векторов  $\Omega$  (1.23) и векторов взаимного к ним базиса  $\Omega^{-1}$  (1.24). В предшествующих работах такие выражения были известны только для декартовой системы координат [55, 75], а в прочих случаях определялись численно [19, 22, 72].

В работе предлагается использовать явное представление сеточно-характеристических схем, основываясь на произведенном спектральном исследовании, поскольку в записи таких схем входят громоздкие выражения относительно  $\Lambda$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega^{-1}$ . В полученной упрощенной записи не требуется решения системы линейных уравнений, обращения и даже перемножения матриц. Полученные выражения приведены к виду, инвариантному относительно размерности пространства (справедливы в 2D и 3D), тогда как запись  $\Lambda$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega^{-1}$  отлична для двумерного и трехмерного пространств [75]. В результате чего вместе с упрощением программы достижима более высокая скорость ее работы, а также исключаются численные ошибки, связанные с решением возможно обусловленных систем линейных уравнений.

Для граничных узлов помимо явной записи было предложено использовать двухэтапный метод, причем первый этап не зависит от граничных



условий, а второй — от порядка аппроксимации. Разделение на этапы чрезвычайно удобно в программной реализации, поскольку позволяет отдельно отлаживать компактные модули, отвечающие только за перенос значений вдоль характеристик с тем или иным порядком точности либо только за корректировку для конкретного граничного условия. Метод требует решения лишь системы из  $m$ -линейных уравнений, где  $m$ -число выходящих из области характеристик, тогда как классический подход [19, 22] требует решения полной системы из  $n$ -уравнений, где  $n$ -число переменных в задаче.

Приведены явные выражения для учета всех основных типов граничных условий: заданная внешняя сила, заданная скорость движения границы и т. д. А также для двух видов контактных условий на границе раздела двух сред: полное сцепление и свободное скольжение.

Предложен алгоритм построения с заданной степенью мелкости нерегулярной треугольной сетки, являющейся подчиненной ограничениям триангуляцией Делоне (constrained Delaunay), в произвольной невыпуклой области с возможно многочисленными внутренними полостями. Гарантируется выполнение ограничений сверху и снизу на размеры всех ячеек, а также на высоты треугольников, что важно для поддержания шага интегрирования явных схем. При использовании данной сетки в качестве лагранжевой определен максимальный шаг, при котором сетка еще не вырождается. Для сеток приближающихся к вырождению повторный запуск алгоритма приводит к ее быстрой локальной перестройке.

Для решения задач, в которых несколько тел то вступают во взаимодействие (удар), то прекращают контакт (отскок), предложена структура данных, которую легко модифицировать от шага к шагу и которая позволяет выяснить для всех граничных узлов всех тел их статус (наличие либо отсутствие контакта) за линейное время относительно общего количества граничных узлов. Допускаются контакты различных частей одного тела между собой.

Предложен метод построения непрерывной кусочно-полиномиальной функции произвольного порядка по заданным значениям в опорных точках, выбранных согласованно с заданной триангуляцией плоскости. Приведены конкретные формулы для интерполяции 1,2,3,4 порядков. Рассмотрен способ ограничения вариации восстановленного поля, который можно сочетать с любой степенью полинома. Предложен способ построения монотонной непрерывной кусочно-квадратичной функции со строгими экстремумами только в заданных опорных точках.

В работе приводится сравнение аналитического решения модельной задачи о распространении волн в упругой среде с численными решениями, полученными конечно-разностными схемами при использовании регулярной решетки либо бесструктурной сетки. Численные подходы сопоставляются с точки зрения точности решения по различным критериям и скорости счета.

Приводятся результаты решения ряда задач, представляющих практическую ценность, полученные на программе, реализующей описанные выше подходы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. — М. : Наука, 1970.
2. *Новацкий В. К.* Теория упругости. — М. : Мир, 1975.
3. *Новацкий В. К.* Волновые задачи теории пластичности. — М. : Мир, 1978.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. — М. : Наука, 1981.
5. *Кондауров В. И., Фортков В. Е.* Основы термомеханики конденсированной среды. — М. : МФТИ, 2002.
6. *LeVeque R. J., Calhoun D.* Cartesian grid methods for fluid flow in complex geometries // L. J. Fauci, S. Gueron, eds., Computational Modeling in Biological Fluid Dynamics. — Springer-Verlag, 2001. — Vol. 124 of *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. — Pp. 117–143.
7. *Бураго Н. Т., Кукуджанов В. Н.* Решение упругопластических задач методом конечных элементов. пакет прикладных программ «Астра» // Препринт ИПМ АН СССР. — 1988. — № 280.
8. *O'Brien J. F., Hodgins J. K.* Graphical modeling and animation of brittle fracture // Proceedings of ACM SIGGRAPH. — 1999. — Pp. 137 – 146.
9. *O'Brien J. F., Hodgins J. K.* Animating fracture // Communications of the ACM. — 2000. — Vol. 43, no. 7. — Pp. 69 – 75.

10. *Рябенский В. С.* Введение в вычислительную математику. — М.: Физматлит, 2000.
11. *Wang Z. J.* Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids // *Journal of Computational Physics*. — 2002. — Vol. 178. — Pp. 210 – 251.
12. *Penrose D.*, ed. *Sourcebook of Parallel Computing*. — Elsevier Science (USA), 2003.
13. *Харлоу Ф. Х.* Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // *Вычисл. методы в гидродинамике*. — М.: Мир, 1967. — С. 316 – 342.
14. *Блажевич Ю. В., Иванов В. Д., Петров И. Б., Петвиашвили И. В.* Моделирование высокоскоростного соударения методом гладких частиц // *Матем. моделирование*. — 1999. — Т. 11, № 1. — С. 88 – 100.
15. *Parshikov A. N., Medin S. A.* Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms // *Journal of Computational Physics*. — 2002. — no. 180. — Pp. 358 – 382.
16. *Блажевич Ю. В., Петров И. Б., Сабельник А. Е.* Моделирование динамических процессов разрушения пористых конструкций в проблеме безопасности жилищных сооружений. — 2002. <http://cs.mipt.ru/docs/whitepapers/petrov10052002.pdf>.
17. *Бабенко К. И.*, ред. *Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики*. — М.: Наука, 1979.
18. *Магомедов К. М., Холодов А. С.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристический соотношений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1969. — Т. 9, № 2. — С. 373 – 386.

19. *Петров И. Б., Холодов А. С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1984. — Т. 24, № 5. — С. 722 – 739.
20. *Петров И. Б., Холодов А. С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1984. — Т. 24, № 8. — С. 1172 – 1188.
21. *Петров И. Б.* Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины // *Изв. АН СССР. Механ. твердого тела.* — 1986. — № 4. — С. 118 – 124.
22. *Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
23. *Петров И. Б., Тормасов А. Г., Холодов А. С.* О численном изучении нестационарных процессов в деформируемых средах многослойной структуры // *Изв. АН СССР. Механ. твердого тела.* — 1989. — № 4. — С. 89 – 95.
24. *Петров И. Б., Тормасов А. Г., Холодов А. С.* Об использовании гибридных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1990. — Т. 30, № 8. — С. 1237 – 1244.
25. *Коротин П. Н., Петров И. Б., Холодов А. С.* Численное решение некоторых задач о воздействии тепловых нагрузок на металлы // *Изв. АН СССР. Механ. твердого тела.* — 1989. — № 5. — С. 63 – 69.
26. *Коротин П. Н., Остриж А. В., Петров И. Б.* Численное исследование волновых процессов при объемном энергопоглощении в мишенях конечной толщины // *Докл. АН СССР.* — 1989. — Т. 308, № 5. — С. 1065 – 1070.

27. *Коротин П. Н., Петров И. Б., Холодов А. С.* Численное моделирование поведения упругих и упругопластических тел под воздействием мощных энергетических потоков // Матем. моделирование. — 1989. — Т. 1, № 7. — С. 1 – 12.
28. *Иванов В. Д., Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С.* Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Матем. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 11. — С. 10 – 29.
29. *Петров И. Б., Тормасов А. Г.* О численном исследовании трехмерных задач обтекания волнами сжатия препятствия или полости в упругопластическом пространстве // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 314, № 4. — С. 817 – 820.
30. *Жуков Д. С., Петров И. Б., Тормасов А. Г.* Численное и экспериментальное изучение разрушения твердых тел в жидкости // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. — 1991. — № 3. — С. 183 – 190.
31. *Петров И. Б., Тормасов А. Г.* Численное исследование косоугольного соударения жесткого шарика с двухслойной упругопластической плитой // Матем. моделирование. — 1992. — Т. 4, № 3. — С. 20 – 27.
32. *Иванов В. Д., Петров И. Б.* Моделирование деформаций и разрушений в мишенях под действием лазерного излучения // Труды института общей физики. — 1992. — Т. 36. — С. 247 – 266.
33. *Иванов В. Д., Петров И. Б., Тормасов А. Г., Холодов А. С., Пашутин Р. А.* Сеточно-характеристический метод расчета динамического деформирования на нерегулярных сетках // Матем. моделирование. — 1999. — Т. 11, № 7. — С. 118 – 127.
34. *Kholodov Y. A* Monotone High-Order Accuracy Scheme for Hyperbolic CFD Problems // APS Meeting Abstracts. — 2000. — Pp. B4+.

35. *Иваненко С. А., Чарахчьян А. А.* Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1988. — Т. 28, № 4. — С. 503 – 514.
36. *Петров И. Б., Челноков Ф. Б.* Численное исследование волновых процессов и процессов разрушения в многослойных преградах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2003. — Т. 43, № 10. — С. 1562 – 1579.
37. *Меньшиков Г. П., Одинцов В. А., Чудов Л. А.* Внедрение цилиндрического ударника в конечную плиту // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. — 1976. — № 1. — С. 125 – 130.
38. *Гулидов А. Н., Фомин В. М., Шабалин И. И.* Алгоритмы перестройки разностной сетки при численном решении задач соударения с образованием трещин // Числ. методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы VII Всес. конф. — Новосибирск, 1982. — С. 182 – 192.
39. *Нох В. Ф.* СЭЛ - совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычисл. методы в гидродинамике. — М.: Мир, 1967. — С. 128 – 184.
40. *Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г.* Численный метод расчета напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы // Изв. АН СССР, Механ. твердого тела. — 1977. — № 1. — С. 146 – 157.
41. *Feldman B. E., O'Brien J. F., Arikan O.* Animating suspended particle explosions // Proceedings of ACM SIGGRAPH. — 2003. — Pp. 708 – 715.
42. *de Berg M., van Kreveld M., Overmars M., Schwarzkopf O.* Computation Geometry. Algorithms and Applications. Second, Revised Edition. — Germany : Springer, 2000.

43. *Кукудэжанов В. Н.* Метод расщепления упругопластических уравнений // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2004. — № 1. — С. 98 – 108.
44. *Lax P. D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations // Comm. Pure and Appl. Math. — 1954. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 159 – 193.
45. *Lax P. D., Wendroff B.* System of conservation laws // Comm. Pure and Appl. Math. — 1960. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 217 – 237.
46. *Courant R., Isaacson E., Rees M.* On the solutions of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Comm. Pure and Appl. Math. — 1952. — Vol. 5, no. 5. — Pp. 243 – 254.
47. *Агапов П. И., Челноков Ф. Б.* Сравнительный анализ разностных схем для численного решения двумерных задач механики деформируемого твердого тела // Моделирование и обработка информации: Сб. ст. / Моск. физ.-тех. ин-т. — М., 2003. — С. 19 – 27.
48. *Петров И. Б., Челноков Ф. Б.* Численная проверка прочности железобетонной наружной оболочки под действием динамической нагрузки // Моделирование и обработка информации: Сб. ст. / Моск. физ.-тех. ин-т. — М., 2003. — С. 4 – 13.
49. *Агапов П. И., Обухов А. С., Петров И. Б., Челноков Ф. Б.* Численное решение динамических задач биомеханики сеточно-характеристическим методом // Компьютерные модели и прогресс медицины: Сб. ст. / РАН. — М.: Наука, 2001. — С. 275 – 300.
50. *Попов И. В., Поляков С. В.* Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей // Матем. моделирование. — 2002. — Т. 14, № 6. — С. 25 – 35.



51. *Shewchuk J. R.* Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Geometric Predicates // *Discrete & Computational Geometry*. — 1997. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 305–363.
52. *Кормен Т., Лейзерсон, Ривест Р.* Алгоритмы. Построение и анализ. — М. : МЦНМО, 2000.
53. *Shewchuk J. R.* Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation // *Computational Geometry: Theory and Applications*. — 2002. — Vol. 22(1-3), no. 5. — Pp. 21 – 74. <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/papers/2dj.ps>.
54. *Агапов П. И., Петров И. Б., Челноков Ф. Б.* Численное исследование задач механики деформируемого твердого тела в неоднородных областях интегрирования // *Обработка информации и моделирование: Сб. ст. / Моск. физ.-тех. ин-т*. — М., 2002. — С. 148 – 157.
55. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М. : Физматлит, 2001.
56. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. Издание второе, переработанное. — М. : МФТИ, 1997.
57. *Warming R. F., Beam R. M.* Upwind second-order difference schemes and applications in unsteady aerodynamic flow // *AIAA 2nd CFD Conf.* — Hartford, Connecticut, 1974. — P. 17.
58. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. — М. : МФТИ, 1994.
59. *Русанов В. В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // *Докл. АН СССР*. — 1968. — Т. 180, № 6. — С. 1303 – 1305.

60. *Файзуллин И. С., Куценко Н. В.* О возможности применения рассеянных волн для изучения трещиноватости геосреды по данным численного моделирования // *Геофизика*. — 2004. — № 5. — С. 5 – 9.
61. *Makinde W., Favretto-Cristini N., de Bazelaire E.* Numerical modelling of interface scattering of seismic wavefield from a random rough interface in an acoustic medium: comparison between 2D and 3D cases // *Geophysical Prospecting*. — 2005. — Vol. 53. — Pp. 373 – 397.
62. *Saenger E. H., Kruger O. S., Shapiro S. A.* Effective elastic properties of randomly fractured soils: 3D numerical experiments // *Geophysical Prospecting*. — 2004. — Vol. 52. — Pp. 183 – 195.
63. *Левянт В. Б., Антоненко М. Н., Антонова И. Ю.* Исследование методами численного моделирования сейсмического поля, обусловленного рассеиванием на зонах диффузной кавернозности и трещиноватости // *Геофизика*. — 2004. — № 2. — С. 8 – 20.
64. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория вероятностей. Математическая статистика. — М.: Гардарика, 1998.
65. *Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н.* Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластических сред с конечными деформациями // *Сб. по числ. методам в механ. твердого деформируемого тела*. — М.: ВЦ АН СССР, 1978. — С. 84 – 122.
66. *Уилкинс М. Л.* Расчет упруго-пластических течений // *Вычисл. методы в гидродинамике*. — М.: Мир, 1967. — С. 212 – 263.
67. *Майчен Дж., Сак С.* Метод расчета «Тензор» // *Вычисл. методы в гидродинамике*. — М.: Мир, 1967. — С. 185 – 211.
68. *Кондауров В. И.* Континуальное разрушение нелинейно-упругих тел // *Матем. моделирование*. — 1988. — Т. 52, № 2. — С. 302 – 310.

69. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М. : Физматлит, 1994.
70. Белоцерковский О. М. Вычислительная механика. Современные проблемы и результаты. — М. : Наука, 1991.
71. Агапов П. И., Обухов А. С., Петров И. Б., Челноков Ф. Б. Компьютерное моделирование биомеханических процессов сеточно-характеристическим методом // Управление и обработка информации: модели процессов: Сб. ст. / Моск. физ.-тех. ин-т. — М., 2001. — С. 95 – 114.
72. Петров И. Б., Тормасов А. Г. О численном решении пространственных задач соударения // Матем. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 2. — С. 58 – 72.
73. Yngve G. D., O'Brien J. F., Hodgins J. K. Animating explosions // Proceedings of ACM SIGGRAPH. — 2000. — Pp. 29 – 36.
74. Андрущенко В. А., Головешкин В. А., Холин Н. Н. Вихревые движения твердых сред в динамических задачах теории упругости // Инж.-физ. журнал. — 1999. — Т. 72, № 4. — С. 803 – 810.
75. Антоненко М. Н. Численное моделирование распространения упругих волн в неоднородной среде: Диссертация кандидата физ.-мат. наук. — М. : ИАП, 2004.