РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А.И.ГЕРЦЕНА

На правах рукописи

Делюкова Яна Валерьевна

МЕТОД СЛЕДА ДЛЯ ПОИСКА ДИСКРЕТНЫХ МЕТАГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

01.01.01 – математический анализ
01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Валентин Федорович Зайцев

Санкт-Петербург
1999

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Работа посвящена исследованию дискретных метагрупп преобразований на дифференцируемых многообразиях. Появление в математике понятия многообразия (впервые сформулированного Риманом), являющегося абстракцией весьма различных конкретных множеств, было вызвано потребностями геометрии, математического анализа и механики. Наиболее важное значение приобрели дифференцируемые многообразия, поскольку именно они позволяют определить дифференцируемые функции на многообразиях и другие понятия математического анализа. Кроме того, определение дифференцируемого многообразия делает возможным применение методов математического анализа вне зависимости от того, какие координаты положены в основу вычислений. Это обстоятельство и обусловливает широкое использование дифференцируемых многообразий в приложениях и в смежных областях, где многообразия изучаются не сами по себе, а в соединении с некоторыми другими объектами.

Ярким примером к сказанному может служить теория непрерывных групп, одним из стимулов к изучению которых для Софуса Ли явилось их применение для исследования дифференциальных уравнений. При этом особенно существенной и важной оказалась трактовка дифференциального уравнения как многообразия в продолженном пространстве, что позволяет использовать инфинитезимальный критерий инвариантности многообразий, базирующийся на разработанном С.Ли методе сопоставления каждой непрерывной группе преобразований некоторого линейного дифференциального оператора. По предложению С.Ли говорят, что уравнение E допускает группу (или оператор), если E есть инвариантное многообразие надлежащим образом продолженной группы. Одним из впечатляющих достижений С.Ли явилось открытие, что все известные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на самом деле являются частными случаями общей процедуры интегрирования, основанной на инвариантности многообразия относительно некоторой группы симметрий. Непрерывные группы, представляющие собой соединение в одном объекте групповой и топологической структур, взаимно связанных требованием непрерывности групповой операции, впоследствии стали называть группами Ли.

Математическое направление, предметом которого является совместное рассмотрение многообразий, заданных дифференциальными уравнениями, и их симметрий, являющееся, таким образом, “пограничным” между математическим анализом и дифференциальными уравнениями, получило название группового анализа.

Групповой анализ не ставит целью решение классических задач теории дифференциальных уравнений (доказательство существования и единственности решений, изучение асимптотик и поведения решений в окрестности особых точек и т.д.), а дает методы описания симметрий многообразий и задающих их уравнений (в широком смысле, не только дифференциальных). Это, в свою очередь, позволяет находить и классифицировать способы понижения порядка и методы отыскания общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и инвариантных решений уравнений математической физики, и что особенно важно, доказывать максимальность (неулучшаемость в рамках сделанных предположений) полученного результата.

Начало широкого применения идей Ли в теории уравнений с частными производными связано с именем академика Л.В.Овсянникова. Такое расширение области применения потребовало разработки новых понятий и алгоритмов, стимулировало большое число исследований, связанных как с конкретными уравнениями механики и физики, так и с углублением самой теории. В частности, было введено понятие уравнения с произвольным элементом, которое позволяет подвергнуть групповому анализу целый класс уравнений (семейство многообразий), зависящих от произвольных параметров или функций. Одной из целей, которой при этом можно добиться, служит достижение максимально широкой непрерывной группы (имеются серьезные причины предпочитать уравнения с наиболее высокой степенью симметрии). В работе [37] Л.В.Овсянников впервые предложил идею группового анализа определяющих уравнений (уравнений, определяющих группу).

Систематическое исследование дискретных симметрий и их эффективное использование в теории ОДУ началось в работах В.Ф.Зайцева (первая публикация появилась в 1976 году). Знание дискретной метагруппы преобразований (ДМП) значительно расширяет границы использования симметрийного принципа в теории ОДУ и, тем самым, дает возможность найти точные решения уравнений, которые не удается решить классическими методами. Результаты этих исследований – большое число неизвестных ранее интегрируемых уравнений, часто встречающихся в приложениях – опубликованы в нескольких справочниках [21,23,24,53], по числу рассмотренных уравнений значительно превосходящих известную книгу [29]. В частности, описано 99 уравнений класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера, интегрируемых в замкнутой форме, в том числе 3 двухпараметрических подкласса и 13 однопараметрических.

Несмотря на весьма содержательные результаты, полученные благодаря дискретно-групповому подходу, до последнего времени оставалась нерешенной одна из важнейших задач – доказательство максимальности найденной ДМП (где максимальность означает, что эта ДМП не содержится ни в какой более широкой допускаемой ДМП, т.е. ставится задача отыскания структурного максимума). Причина этого заключается в проблеме полного решения переопределенных определяющих систем нелинейных уравнений (сравнимых друг с другом по сложности), возникающих при поиске ДМП (в противоположность легко решаемым линейным системам, возникающим при отыскании непрерывных групп). В связи с этим остается актуальным поиск альтернативных методов, позволяющих находить ДМП, допускаемую заданным классом ОДУ и отображения различных классов.

В настоящей работе рассматриваются дифференцируемые многообразия, заданные в так называемой неявной форме с помощью дифференциальных уравнений. Работа посвящена дальнейшему развитию практически значимого метода поиска дискретных метагрупп преобразований (ДМП) обыкновенных дифференциальных уравнений, который с одной стороны опирается на классический алгоритм С.Ли поиска непрерывных груп инвариантности заданного многообразия, а с другой стороны служит для отыскания нетрадиционных с теоретико-групповой точки зрения дискретных симметрий. Общая схема метода следа (содержащая неформализованные процедуры) была впервые предложена в работах [12, 20, 21].

Цели и задачи исследования. Целью настоящей работы является построение метода поиска дискретных метагрупп преобразований (точечной и заданной преобразованиями Беклунда) некоторого класса ОДУ, задающего семейство многообразий, и отображений этого класса в другой при условии: указанные многообразия инвариантны относительно непрерывной группы преобразований.

Благодаря наличию допускаемой алгебры Ли точечных операторов метод следа позволяет понизить размерность нелинейного определяющего уравнения для поиска дискретных преобразований. Более того, при поиске точечных преобразований определяющее уравнение “расщепляется” до переопределенных определяющих систем ОДУ с двумя неизвестными. При этом для класса уравнений второго порядка определяющая система содержит как минимум четыре ОДУ, а с увеличением порядка исследуемых уравнений число уравнений, входящих в определяющую систему, резко возрастает (для уравнений третьего порядка их не меньше десяти), в силу чего она всегда принципиально решается.

Таким образом, метод следа дает возможность:

1. При поиске точечной ДМП свести нелинейную систему уравнений с частными производными к переопределенной системе ОДУ.

2. При поиске ДМП, заданной в классе преобразований Беклунда, понизить на единицу размерность определяющего уравнения, существенно упростив его анализ.

3. Доказывать максимальность точечной ДМП и максимальность ДМП, заданной в классе преобразований Беклунда, найденной методом RF-пар (т.е. решить задачу поиска структурного максимума).

В работе решены следующие задачи:

1. Доказаны теоремы, служащие теоретическим обоснованием метода следа.

2. Доказана максимальность ДМП (как точечной, так и заданной преобразованиями Беклунда, найденной с помощью универсальных RF-пар), допускаемых классом обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера, который является модельным для дискретно-группового анализа и для ряда областей нелинейной механики.

3. Показана возможность применения оператора точечной группы для решения других задач группового анализа, в частности, для отыскания экспоненциальных нелокальных операторов, поиск которых также приводит к нелинейному определяющему уравнению.

Основные определения. Напомним ключевые понятия и утверждения группового анализа. Исходным является понятие однопараметрической непрерывной локальной группы Ли локальных преобразований некоторого банахова пространства (коротко называемой однопараметрической или непрерывной группой, обозначается G^1). Приводимые определения теории непрерывных групп соответствуют принятым в монографии

[38], в которой автор отдает предпочтение векторной (бескоординатной) форме записи величин, необходимой в случае бесконечномерных банаховых пространств. Однако в случае, когда объектом исследования становится дифференциальное уравнение, как правило, делается предположение о конечномерности пространства, преобразования которого являются элементами группы. Учитывая это, мы, в основном, формулируем определения и теоремы в интересующем нас случае преобразований на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ (применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям).

***Определение* 1.** Преобразованием множества M называется взаимно однозначное отображение M на M.

Рассмотрим совокупность $\tau(M)$ всех преобразований множества M, образующих группу, в которой роль групповой операции играет композиция преобразований. Множество точек, которые получаются из данной точки $x \in M$ под действием всевозможных элементов $g \in \tau(M)$, называется орбитой точки x:

$$O_x = \left\{ g_i(x) \,\middle|\, g_i \in \tau(M) \right\}.$$

Пусть Z – банахово пространство, V – некоторое открытое множество в Z, Δ – некоторый симметричный относительно нуля интервал в $\mathbb{R}$.

***Определение* 2.** Локальным преобразованием пространства Z называют преобразование открытого множества $V \subset Z$, т.е. отображение $v\colon\ V \to Z$, для которого $v(V)$ открыто в Z и отображение $v\colon\ V \to v(V)$ является взаимно однозначным.

***Определение* 3.** Отображение $h\colon\ V \times \Delta \to Z$ называется однопараметрическим семейством локальных преобразований пространства Z, если для каждого $a \in \Delta$ частное отображение $h_a\colon V \to Z$ является преобразованием открытого множества V.

***Определение* 4.** Локальной однопараметрической группой Ли локальных преобразований пространства Z называется такое однопараметрическое семейство локальных преобразований $h\colon V \times \Delta \to Z$, которое обладает следующими свойствами:

1. $h(z,0) = z$ для любого $z \in V$.
2. $h(h(z,a),b) = h(z,a+b)$ для любых $a,\ b,\ a+b \in \Delta,\ \ z \in V$.
3. Если $a \in \Delta$ и $h(z,a) = z$ для всех $z \in V$, то $a = 0$.
4. $h \in C_\infty(V \times \Delta)$, то есть отображение h бесконечно дифференцируемо.

Вообще, некоторая локальная группа Ли G с групповой операцией $\circ$ (в определении 4 – это Δ с операцией $+$) будет реализована как локальная группа Ли локальных преобразований пространства Z, если каждому элементу a группы G поставлено в соответствие отображение h_a: $V \to Z$, что при этом соблюдены условия 1) – 4) с заменой Δ на G и групповой операции $+$ на $\circ$.

Далее полагаем $Z = \mathbb{R}^2(x,y)$, тогда преобразование h можно представить покомпонентно :

$$\tilde{x} = g(x,y,a), \quad \tilde{y} = f(x,y,a) \tag{1}$$

Преобразование вида (1) называется точечным (в отличие, например, от контактного, когда функции $g,\ f$ зависят также от производной y'), а группа G^1 – группой точечных преобразований.

***Определение* 5.** Для каждого фиксированного $z \in V$ частное отображение $h_z\colon \Delta \to Z$ задает некоторую кривую $h_z(\Delta)$ в пространстве Z, проходящую через точку z. Кривая $h_z(\Delta)$ называется орбитой точки z.

Вектор с компонентами $\xi = \left.\dfrac{\partial g(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}$, $\quad \eta = \left.\dfrac{\partial f(x,y,a)}{\partial a}\right|_{a=0}$ является касательным к орбите $h_z(\Delta)$ в точке $z = (x, y)$.

***Определение* 6.** Линейный дифференциальный оператор

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \equiv \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y, \tag{2}$$

действующий на дифференцируемое отображение $F:\ Z \to \mathbb{R}$ ($F \in C_\infty$) по правилу

$$XF = \xi(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \xi(x,y)F_x + \eta(x,y)F_y,$$

называется инфинитезимальным оператором (точечной) группы G^1 (в дальнейшем – оператор группы или оператор).

Согласно классическим теоремам Ли существует взаимно однозначное соответствие между однопараметрическими группами и операторами (2) $\left(\xi,\ \eta \in C_\infty(V)\right)$, если оператор считать определенным с точностью до ненулевого числового множителя. Именно этот факт является решающим во всех приложениях теории групп Ли. Благодаря ему оказывается возможным сводить сложные нелинейные задачи к более простым линейным (в некоторых источниках инфинитезимальный оператор называется оператором универсальной линеаризации). При этом локально действие групп преобразований заменяется действием линейных дифференциальных операторов – инфинитезимальных операторов.

***Определение* 7.** Отображение $J\ :\ Z \to \mathbb{R}$ называется инвариантом группы G^1, порожденной отображением h, если для любых $(z,a) \in V \times \Delta$

$$J(h(z,a)) = J(z).$$

Отображение $J(z)$ также называют инвариантом оператора X группы G^1.

***Теорема* 1.** Отображение $J(z)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда выполняется равенство $XJ = 0$.

Для дальнейшего нам понадобится понятие продолженного оператора. С этой целью при рассмотрении однопараметрической группы G^1 в пространстве $Z = X \times Y$, где $X = \mathbb{R}(x)$, $Y = \mathbb{R}(y)$, заданной с помощью отображения h с компонентами (1), вводят дополнительную переменную $y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$ и задают её преобразование

$$\tilde{y}' = f_1(x, y, y', a). \tag{3}$$

При этом должно соблюдаться условие: формула (3) и преобразование производной $\dfrac{dy}{dx}$ при замене переменных (1) должны быть согласованы с равенствами $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Этим условием преобразование (3) однозначно определяется для каждой группы G^1 и в результате получается однопараметрическая группа $\underset{(1)}{G^1}$ в пространстве $Z_1 = \mathbb{R}^3(x, y, y')$. Группа $\underset{(1)}{G^1}$ называется первым продолжением группы G^1, пространство Z_1 – первым продолжением пространства Z, а формулы (1), (3) определяют первое продолжение h_1 отображения h.

Продолжение более высокого порядка осуществляются путем определения действия группы G^1 на переменные $y', y'', \ldots$. Оператор продолженной n-раз группы имеет вид

$$\underset{(n)}{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y + \zeta_1(x, y, y')\partial_{y'} + \ldots + \zeta_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\partial_{y^{(n)}},$$

компоненты ζ_s $(s = 1,2, \ldots n)$ находятся с помощью известных формул [25, 26, 38, 39] по компонентам ξ, η:

$$\zeta_i = D^i(\eta - y'\xi) + y^{(i+1)}\xi,$$

где D^i – i-я степень оператора полного дифференцирования.

Определение **8.** Инварианты продолженной однопараметрической группы $\underset{(n)}{G^1}$ называются дифференциальными инвариантами (порядка n) группы G^1 или оператора X.

Дифференциальные инварианты однопараметрической группы порядка не выше n являются решениями дифференциального уравнения

$$\underset{(n)}{X}[J(x, y, y', \ldots, y^{(n)})] = 0\,.$$

Вычисление дифференциальных инвариантов старших порядков удобно проводить в соответствии со следующей теоремой.

Теорема **2.** Пусть для заданного оператора (2) известны инвариант $J(x, y)$ и дифференциальный инвариант первого порядка $J_1(x, y, y')$. Тогда производная

$$J_2(x, y, y', y'') = \frac{dJ_1}{dJ} = \frac{DJ_1}{DJ}\,,$$

где D – оператор полного дифференцирования, представляет собой инвариант второго порядка.

Путем дальнейших дифференцирований можно получить дифференциальные инварианты более высоких порядков, тогда J, J_1, $J_2 = \dfrac{dJ_1}{dJ}$, $J_3 = \dfrac{d^2 J_1}{dJ^2}$, … , $J_n = \dfrac{d^{n-1} J_1}{dJ^{n-1}}$ множество функционально независимых инвариантов (базис инвариантов) для n-го продолжения оператора X. Отметим, что всякий оператор вида (2) однопараметрической группы G^1 в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ имеет ровно один независимый инвариант, оператор $\underset{(n)}{X}$ имеет $(n + 1)$ функционально независимых дифференциальных инвариантов.

Определение **9.** Пусть $X = \mathbb{R}(x)$, $Y = \mathbb{R}(y)$, $Z = X \times Y$. Уравнение вида

$$\varepsilon(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

образованное с помощью некоторого отображения $\varepsilon\colon Z_n \to \mathbb{R}$ (Z_n – n-ое продолжение пространства Z), называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка и обозначается E.

Предполагается, что отображение $\varepsilon \in C_\infty(Z_n)$ и удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции по отношению к старшей производной $y^{(n)}$, то есть уравнение (4) может быть приведено к виду

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

***Определение* 10.** n-мерное дифференцируемое многообразие – это множество N вместе со счетным набором подмножеств $U_\alpha \subset N$ и взаимно однозначных функций $\chi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$, где V_α – открытые связные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, называемых локальными координатами, которые обладают следующими свойствами:

1. $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = N$;

2. Для пересечения любой пары $U_\alpha \cap U_\beta$ композиция отображений

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}\colon\ \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

является гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией.

3. Если $x \in U_\alpha$, $\tilde{x} \in U_\beta$ – различные точки множества N, то существует открытое подмножество W в V_α, содержащее точку $\chi_\alpha(x)$, и открытое подмножество $\tilde{W}$ в V_β, содержащее точку $\chi_\beta(\tilde{x})$, такие, что

$$\chi_\alpha^{-1}(W) \cap \chi_\beta^{-1}(\tilde{W}) = \varnothing.$$

Таким образом, многообразия – топологические пространства, локально изоморфные евклидову пространству.

Далее многообразием мы называем дифференцируемое связное многообразие.

Известно следующее утверждение.

***Теорема* 3** [39]**.** Пусть N – гладкое n-мерное многообразие и $\varepsilon:\ N \to \Re^m$, $m \le n$ гладкое отображение. Если ε имеет максимальный ранг на подмножестве $M = \{z : \varepsilon(z) = 0\}$, то M – регулярное (n – m)-мерное подмногообразие многообразия N.

Определение 9 и теорема 3 позволяют говорить, что формула (4) задает многообразие E в продолженном пространстве Z_n.

***Определение* 11.**

A. Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение E заданное формулой (4), допускает преобразование h пространства Z, если многообразие E инвариантно относительно продолженного преобразования h_n, то есть $\varepsilon(h_n(z_n)) = 0$ для любого $z_n \in E$.

B. Если уравнение (4) допускает любое преобразование из некоторой группы G^1, то говорят, что (4) допускает группу G^1 (инвариантно относительно G^1). Если группа G^1 характеризуется оператором X, то говорят, что уравнение (4) допускает оператор X. При этом G^1 или X называют соответственно группой или оператором, допускаемыми уравнением (4).

Существует следующий критерий для вычисления допускаемой группы.

***Теорема* 4.** Многообразие**,** заданное уравнением (4), инвариантно относительно группы G^1 с инфинитезимальным оператором X тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\underset{(n)}{X}\,\varepsilon(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\Big|_E = 0. \tag{5}$$

Приведенная теорема сводит задачу отыскания всех однопараметрических групп, допускаемых данным дифференциальным уравнением, к решению уравнения (5) (в котором неизвестными являются координаты

$\xi,\ \eta$ допускаемого оператора), называемого определяющим уравнением (обозначается DE). Здесь действует четкий и хорошо апробированный алгоритм (**алгоритм Ли**)

$$E \to DE\,,$$

подробное изложение которого можно найти, например, в работах [38,39].

Определяющее уравнение обладает рядом свойств, благодаря которым оно становится самостоятельным объектом исследования. Одно из важнейших свойств определяющего уравнения заключается в том, что оно линейно и однородно относительно $\xi,\ \eta$, а поэтому его можно решить явно в замкнутом виде.

В частности, определяющее уравнение (5) для поиска непрерывной группы, допускаемой уравнением $y''=F(x,y,y')$, записывается в виде

$$\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})y'^2-\xi_{yy}y'^3+(\eta_y-2\xi_x-3\xi_y y')F-$$
$$-\xi F_x-\eta F_y-\left[\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y y'^2\right]F_{y'}=0$$

Дифференциальные уравнения первого порядка составляют исключение: для них использование определяющего уравнения для отыскания допускаемой группы неэффективно. Поэтому в дальнейшем (на протяжении всей работы) рассматриваются дифференциальные уравнения порядка выше первого.

***Теорема* 5.** Множество всех операторов, допускаемых данным дифференциальным уравнением, образует алгебру Ли.

Таким образом, определяющее уравнение (5) порождает алгебру Ли операторов, базис которой получается в результате решения (5). Имея это в виду, часто говорят о допускаемой алгебре вместо допускаемых групп. Путем полного решения определяющего уравнения находят максимально широкую алгебру Ли, допускаемую исследуемым уравнением (4), то есть **основную алгебру Ли** уравнения (4), которая для уравнений порядка выше первого конечномерна. Вообще, для практического решения задач группового анализа часто приходиться иметь дело не с самими группами преобразований, а с их алгебрами Ли операторов.

Справедливы следующие утверждения.

***Теорема* 6.** Дифференциальное уравнение n-го порядка (4) допускает однопараметрическую группу G^1, инфинитезимальный оператор X которой не обращается в нуль на многообразии E, заданной этим уравнением, если и только если уравнение (4) может быть равносильным образом переписано в виде уравнения $(n-1)$-го порядка

$$\Psi(J, J_1, \ldots, J_n) = 0,$$

где $J,\ J_1, \ldots, J_n$ – базис инвариантов оператора X.

***Теорема* 7.** Всякая однопараметрическая группа G^1 некоторой невырожденной заменой переменной приводится к группе переносов $X = \partial_x$.

***Определение* 12.** Рассматривается вспомогательное пространство $T = \mathbb{R}^l$ векторов $t \in T$, называемое пространством параметров и отображение $\varepsilon : Z_n \times T \to \mathbb{R}$. Для каждого отображения $\theta : Z \to T$, действующего по формуле $t = \theta(z)$, определяется сложное отображение

$$\varepsilon(\theta) : Z_n \to \mathbb{R},$$

действующее по формуле $\varepsilon(\theta)(z_n) = \varepsilon\big(z_n, \theta(z)\big)$. Эта конструкция позволяет определить класс $\mathsf{D}(\theta)$ дифференциальных уравнений, представители которого имеют вид

$$\varepsilon\big(z_n, \theta(z)\big) = 0. \tag{6}$$

Если θ не зависит от z, то класс уравнений (6) будем обозначать $\mathsf{D}(\overline{\theta})$.

Можно сказать, что все уравнения класса $\mathsf{D}(\overline{\theta})$ имеют один и тот же вид, отличаясь друг от друга только значением произвольного элемента $\overline{\theta}$.

Определение **13.** Группа преобразований топологического пространства M называется дискретной, если у любого элемента каждой её орбиты найдется окрестность, не содержащая никакого другого элемента этой орбиты.

В теории дискретно-групповых методов рассматриваются преобразования, замкнутые на классе уравнений (в отличие от непрерывных групп, которые переводят уравнение “в себя”, оставляя многообразие “неподвижным”). При этом оказывается, что свойства преобразований во многом определяются выбранным классом, а зачастую – элементом, на который преобразование действует. Это приводит к необходимости введения нового термина – “метагруппа” [16, 17]. Естественными требованиями к множеству преобразований являются:

a) наличие тождественного преобразования;

b) обратимость любого преобразования множества.

С учетом этого и формулируются определения дискретно-группового анализа, о которых пойдет речь в параграфе 1.

Глава 1. ТОЧЕЧНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МЕТАГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В настоящей главе предложен способ поиска точечной метагруппы (по существу – широкое обобщение метода следа) некоторого класса уравнений, каждое из которых определяет дифференцируемое многообразие, инвариантное относительно непрерывной группы. При этом предполагается, что соответствующая допускаемая уравнениями алгебра Ли точечных операторов имеет размерность $r \geq 1$, недостаточно широкую для их интегрирования. Доказанные утверждения иллюстрируются на примере класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ) для решения проблемы доказательства максимальности допускаемой ДМП.

§ 1. Основные определения дискретно-группового анализа, конкретизация постановки задачи

Используемая ниже терминология и система определений в основном соответствует принятой в работах [16, 17, 20, 21].

Рассматривается класс ОДУ

$$\mathsf{D} = \{\mathsf{D}(\bar{a})\}. \tag{1.1.1}$$

Фиксация одной или нескольких компонент вектора параметров $\bar{a}$ приводит к различным подклассам (или специализациям) исходного класса D.

***Определение* 1.1**. Множество допустимых значений вектора параметров $\bar{a}$ называется пространством параметров $\mathsf{R}(\mathsf{D})$ класса D.

***Определение* 1.2**. Преобразованием будем называть обратимую формальную подстановку вида

$$q: \quad \begin{cases} x = g(t, u, \dot{u} \ldots, \int u dt, \int \varphi(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots) dt, \ldots), \\ y = f(t, u, \dot{u} \ldots, \int u dt, \int \varphi(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots) dt, \ldots), \\ y' = \dfrac{Df}{Dg}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

где $D = \partial_t + \dot{u}\partial_u + \ddot{u}\partial_{\dot{u}} + \ldots$ – оператор полного дифференцирования.

Правомерность такого определения и его применения следует из того, что формальные решения уравнения находятся в аналитически замкнутой форме, допускающей прямую проверку подстановкой в уравнение, и тогда могут быть оговорены все необходимые условия (“решение предъявляется”).

***Определение* 1.3.** Множество M, на котором задана частичная бинарная операция, содержащее совпадающие левую и правую единицы, и для каждого элемента – совпадающие левый и правый обратные элементы, называется метагруппой.

***Определение* 1.4.** Пусть заданы два класса уравнений $\mathsf{D}_1 = \{\mathsf{D}_1(\bar{a})\}$ и $\mathsf{D}_2 = \{\mathsf{D}_2(\bar{b})\}$. Преобразование q, переводящее любой элемент класса D_1 в элемент класса D_2, порождает отображение T_q класса D_1 в класс D_2

$$T_q: \quad \mathsf{D}_1 \to \mathsf{D}_2. \tag{1.1.3}$$

В дальнейшем всюду преобразование и порожденное им отображение будут обозначаться одной буквой q.

Так как каждый элемент класса D однозначно определяется соответствующим вектором параметров, отображение (1.1.3) естественно индуцирует алгебраическое представление α, действующее в пространстве параметров

$$\alpha: \quad \bar{a} \to \bar{b}.$$

Говорят, что преобразования q_i замкнуто на классе D, если оно порождает отображение некоторого подкласса D_i класса D в класс D:

$$q_i: \quad \mathsf{D}_i \to \mathsf{D}. \tag{1.1.4}$$

***Определение* 1.5**. Множество G преобразований q_i, замкнутых на классе D, на котором задана частичная бинарная операция (композиция двух преобразований считается определенной на классе D, если определена композиция порожденных ими отображений), называется дискретной метагруппой преобразований (ДМП), допускаемой классом D, если

а) тождественное преобразование E содержится в G;

б) вместе с каждым преобразованием q_i из G множеству G принадлежит преобразование q_i^{-1} такое, что

$$q_i^{-1} q_i = q_i q_i^{-1} = E;$$

в) для любого $\bar{a} \in \mathsf{R}(\mathsf{D})$ множество $\{\alpha_i(\bar{a})\}$ не содержит предельных элементов.

***Замечание* 1**. Преобразования, содержащиеся в G, могут зависеть от компонент вектора параметров исходного или преобразованного уравнения, что влечет за собой возможную неассоциативность частичной бинарной операции.

Возникающие при исследовании различных классов дифференциальных уравнений конкретные множества преобразований могут иметь различное алгебраическое строение. В частности, множество G может иметь строение классической группы, в этом случае говорят о дискретной группе преобразований (ДГП).

По определению ДМП состоит из преобразований эквивалентности, другими словами, эти преобразования, действуя на уравнение, изменяют только вектор параметров, сохраняя структуру дифференциального уравнения. Можно также рассматривать преобразования эквивалентности, принадлежащие некоторой однопараметрической группе G^1, в этом случае говорят о непрерывной группе эквивалентностей. В дальнейшем будем считать, что все непрерывные группы эквивалентностей найдены (при их отыскании используется алгоритм Ли) и исключены из рассмотрения.

***Определение* 1.6**. Параметр называется существенным, если уравнение не допускает по нему непрерывной группы преобразований эквивалентности.

Важнейшей задачей дискретно-группового анализа является поиск наиболее широкой (максимальной) в заданном классе преобразований метагруппы, допускаемой изучаемым классом D.

***Определение* 1.7**. Множество всевозможных преобразований вида

$$\begin{cases} x = g(t,u), \\ y = f(t,u), \end{cases} \tag{1.1.5}$$

где $g_t f_u - g_u f_t \neq 0$, называется классом P_0 точечных преобразований.

Легко видеть, что преобразование, обратное преобразованию (1.1.5), и композиция двух точечных преобразований снова принадлежит классу P_0.

Основным методом поиска ДМП, порождаемой точечными преобразованиями, является прямой метод [20,21], алгоритм которого заключается в следующем. В общее уравнение рассматриваемого класса D уравнений n-го порядка $(n>1)$

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \bar{a})$$

выполняют подстановку (1.1.5). В результате получается выражение, зависящее от новых переменных t, u, производных $\dot{u}, \ddot{u}, \ldots, \overset{(n)}{u}$, функций f, g и их частных производных до порядка n включительно. Условие замкнутости действия преобразования (1.1.5) на данном классе соответствует тому, что преобразованное уравнение

$$\overset{(n)}{u} = F(t, u, \dot{u}, \ldots, \overset{(n-1)}{u}, \bar{b}) \qquad (1.1.6)$$

может отличаться от исходного лишь вектором параметров. Подстановка (1.1.6) в получившееся выражение приводит к определяющему уравнению относительно функций f, g содержащему "свободные" переменные $\dot{u}, \ddot{u}, \ldots, \overset{(n-1)}{u}$ от которых f и g не зависят. Поэтому определяющее уравнение после приведения его к виду

$$\sum_{k,\ldots,s} A_{k\ldots s}(t, u, g, f, g_t, f_t, g_u, f_u, \ldots)\dot{u}^k \ldots (\overset{(n-1)}{u})^s = 0 \qquad (1.1.7)$$

можно "расщепить" до переопределенной определяющей системы.

Заметим, что определяющая система (определяющее уравнение) всегда имеет решение – тождественное преобразование E. Найти все решения определяющей системы (или получить максимальную дискретную метагруппу), как правило, не удается вследствие нелинейности уравнений с частными производными, составляющих определяющую систему.

Так например, для класса уравнений второго порядка с вектором параметров $\bar{a} = (\bar{a}_1, s)$

$$y'' = F(x, y, \bar{a}_1)y'^s$$

определяющее уравнение принимает вид

$$(g_t f_u - f_t g_u)F(t, u, \bar{b}_1)\dot{u}^\sigma + (g_u f_{uu} - f_u g_{uu})\dot{u}^3 + (g_t f_{uu} - f_t g_{uu} +$$
$$+ 2g_u f_{tu} - 2f_u g_{tu})\dot{u}^2 + (g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2g_t f_{tu} - 2f_t g_{tu})\dot{u} + g_t f_{tt} -$$
$$- f_t g_{tt} = (f_t + f_u\dot{u})^s (g_t + g_u\dot{u})^{3-s} F(g, f, \bar{a}_1)\,. \qquad (1.1.8)$$

При значениях s, σ, принадлежащих множеству целых чисел, в общем случае (при $f_t f_u g_t g_u \neq 0$) определяющая система, полученная "расщеплением" уравнения (1.1.8), состоит из четырех нелинейных уравнений, сравнимых по сложности, содержащих все шесть вторых частных производных f_{tt}, f_{tu}, f_{uu}, g_{tt}, g_{tu}, g_{uu}, т.е. невозможно даже выразить по отдельности старшие производные относительно младших.

Прямой метод может использоваться также для поиска отображений, порождаемых точечными преобразованиями (1.1.5) и связывающих разные классы уравнений D и D_1, тогда условие замкнутости заменяется условием принадлежности преобразованного уравнений классу D_1.

Одним из возможных альтернативных подходов отыскания ДМП является метод следа, применимый лишь в тех случаях, когда соответствующее многообразие инвариантно относительно непрерывной группы. Первоначально метод был предложен для снижения трудоемкости вычислений для таких специализаций изучаемого класса D, которые обладают дополнительной непрерывной симметрией. На первом этапе с помощью алгоритма С.Ли находят допускаемую основную алгебру Ли операторов для всех специализаций изучаемого класса ОДУ D. Далее выделяют подкласс D_k (это может быть одно уравнение), обладающий дополнительной, в сравнении со всем классом, непрерывной симметрией X_k. Если для выбранного подкласса на основе теоремы о подобии непрерывных групп (теорема 7) удается подобрать преобразование

$$\mathsf{h}_k: \qquad \begin{cases} x = g_k(t,u), \\ y = f_k(t,u), \end{cases} \tag{1.1.9}$$

переводящее оператор X_k в некоторый оператор Y так, что преобразованное уравнение принадлежит классу D, то говорят, что построен след образующей некоторой ДМП на подклассе D_k. Для восстановления следа h_k до самой образующей h производят параметризацию преобразования (1.1.9), заменяя конкретные значения некоторых параметров, содержащихся в (1.1.9), на неопределенные α, β, … так, чтобы

$$\mathfrak{h}\big|_{\mathfrak{D}_k} = \mathfrak{h}_k .$$

Неизвестные α, β, … находятся из алгебраической системы, являющейся следствием условия замкнутости действия $\mathfrak{h}$ на классе $\mathfrak{D}$.

***Пример* 1** [20]. Процедура групповой классификации (алгоритм Ли) класса $\mathfrak{D}$ обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера $y'' = Ax^n y^m y'^l$ показывает, что уравнение

$$y'' = Ax^{-\frac{20}{7}} y^2 \qquad (1.1.10)$$

кроме оператора растяжения, допускаемого каждым уравнением класса $\mathfrak{D}$, обладает дополнительной непрерывной симметрией с оператором

$$X = \frac{343}{12} Ax^{\frac{8}{7}} \partial_x + \left(\frac{49}{3} Ax^{\frac{1}{7}} y - x \right) \partial_y .$$

Нетрудно найти преобразование

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{49}{12} At \right)^{-7}, \\ y = x^{\frac{4}{7}} u - \dfrac{6}{49A} x^{\frac{6}{7}}, \end{cases}$$

которое приводит оператор X к оператору группы переносов $Y = \partial_t$, а исходное уравнение (1.1.10) – к уравнению $\ddot{u} = Au^2$, то есть построен след образующей ДМП. Подстановка параметризованного преобразования

$$\begin{cases} x = t^r , \\ y = ut^k + at^s \end{cases}$$

в произвольное уравнение подкласса $(n, 2, 0)$ и наложение условия замкнутости на классе $\mathfrak{D}$ приводит к алгебраической системе

$$\begin{cases} s + n = -2, \\ k(k-1) = 2aA, \\ s(s-1) = aA, \\ 2kr = r - 1, \end{cases}$$

решение которой соответствует образующей

$$\mathrm{u}: (n,2,0) \to (\nu,2,0), \quad x = t^r, \quad y = t^k u + a t^s,$$

где $\quad r = (8n^2 + 40n + 49)^{-1/2}, \quad \nu = \frac{1}{2}\left[(2n+5)r - 5\right], \quad k = \frac{1}{2}(r-1),$

$$s = -(n+2)r, \quad a = \frac{(n+2)(n+3)}{A}.$$

Приведенный пример демонстрирует основное преимущество метода следа: он позволил заменить решение нелинейной определяющей системы двухэтапным процессом – решением линейной системы, к которой приводит алгоритм Ли, и далее алгебраической в пространстве параметров.

§ 2. Поиск точечной ДМП при наличии допускаемой алгебры Ли операторов

Основная идея метода следа – упрощение определяющей системы – может быть перенесена на случай, когда непрерывная симметрия всего одна. В этом случае, как будет видно из дальнейшего изложения, может быть понижена размерность определяющей системы.

Известно, что при точечной замене переменных

$$\begin{cases} t = g(x,y), \\ u = f(x,y), \end{cases}$$

переводящей некоторое ОДУ

$$y^{(n)} = F(x,y,y',...,y^{(n-1)}) \qquad (1.2.1)$$

в уравнение

$$\overset{(n)}{u} = G(t,u,\dot{u},..., \overset{(n-1)}{u}), \qquad (1.2.2)$$

инфинитезимальный оператор $X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$, допускаемый уравнением (1.2.1), преобразуется в оператор $Y = \tilde{\xi}(t,u)\partial_t + \tilde{\eta}(t,u)\partial_u$, допускаемый уравнением (1.2.2), то есть свойство инвариантности многообразия относительно непрерывной однопараметрической группы не зависит от выбора переменных. Координаты $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ определяются равенствами

$$\tilde{\xi} = X(g), \quad \tilde{\eta} = X(f). \qquad (1.2.3)$$

Рассмотрим класс

$$\mathsf{D} = \{\mathsf{D}(\bar{a})\} \qquad (1.2.4)$$

ОДУ, каждое из которых задает многообразие, инвариантное относительно непрерывной группы так, что соответствующая допускаемая алгебра Ли операторов имеет размерность $r = 1$ и базис $X_{\bar{a}}$.

***Лемма* 1.1.** Определяющее уравнение для поиска точечной дискретной метагруппы преобразований

$$\mathsf{G}: \{q\colon\ \mathsf{D}(\bar{a}) \to \mathsf{D}(\bar{b})\},$$

допускаемой классом (1.2.4), может быть записано в инвариантах базисного оператора $X_{\bar{b}}$.

Доказательство проведем для класса ОДУ второго порядка, так как для уравнений порядка выше второго доказательство совершенно аналогично при гораздо более громоздкой записи. Наличие одномерной основной алгебры позволяет конкретизировать вид преобразований, составляющих ДМП, допускаемую классом D (1.2.4). А именно, всякое точечное преобразование, переводящее уравнение

$$y'' = F(x, y, y', \bar{a}) \tag{1.2.5}$$

класса D в уравнение

$$\ddot{u} = F(t, u, \dot{u}, \bar{b}) \tag{1.2.6}$$

того же класса, должно переводить оператор $X_{\bar{a}} = \xi_{\bar{a}}\partial_x + \eta_{\bar{a}}\partial_y$ в оператор $pX_{\bar{b}} = p(\xi_{\bar{b}}\partial_t + \eta_{\bar{b}}\partial_u)$ алгебры Ли, допускаемой уравнением (1.2.6), где $p \neq 0$ – некоторая постоянная. Из теоремы 7 и формул (1.2.3) вытекает, что элементы ДМП следует искать среди преобразований вида

$$\begin{cases} x = g(t, \Phi(J), \Psi(J)) = g_1(t, u), \\ y = f(t, \Phi(J), \Psi(J)) = f_1(t, u), \end{cases} \tag{1.2.7}$$

которые получаются в результате решения методом характеристик следующей системы уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \xi_{\bar{b}} \dfrac{\partial x}{\partial t} + \eta_{\bar{b}} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{p}\xi_{\bar{a}}, \\ \xi_{\bar{b}} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \eta_{\bar{b}} \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{1}{p}\eta_{\bar{a}}, \end{cases}$$

$J = J(t,u)$ – инвариант оператора $X_{\bar{b}}$, $\Phi(J)$, $\Psi(J)$ – произвольные функции. Выполним в уравнении (1.2.5) подстановку (1.2.7):

$$\ddot{u} = \frac{1}{(g_t f_u - f_t g_u)} \left\{ (g_t + g_u \dot{u})^3 F\left(g, f, \frac{f_t + f_u \dot{u}}{g_t + g_u \dot{u}}, \bar{a}\right) - (g_u f_{uu} - f_u g_{uu}) \dot{u}^3 - \right.$$

$$- (g_t f_{uu} - f_t g_{uu} + 2 g_u f_{tu} - 2 f_u g_{tu}) \dot{u}^2 - (g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2 g_t f_{tu} -$$

$$\left. - 2 f_t g_{tu}) \dot{u} - g_t f_{tt} + f_t g_{tt} \right\}, \qquad (1.2.8)$$

где f_t, g_t, f_u, g_u,... – частные производные сложных функций

$$g_t = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \Phi} \frac{\partial J}{\partial t} \Phi' + \frac{\partial g}{\partial \Psi} \frac{\partial J}{\partial t} \Psi',$$

$$g_{tt} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \Phi} \frac{\partial J}{\partial t} \Phi' + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \Psi} \frac{\partial J}{\partial t} \Psi' + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial \Phi \partial \Psi} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)^2 \Phi' \Psi' +$$

$$+ \frac{\partial^2 g}{\partial \Phi^2} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)^2 \Phi'^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial \Psi^2} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)^2 \Psi'^2 + \frac{\partial g}{\partial \Phi} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \Phi' + \frac{\partial g}{\partial \Psi} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \Psi' +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial \Phi} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)^2 \Phi'' + \frac{\partial g}{\partial \Psi} \left(\frac{\partial J}{\partial t} \right)^2 \Psi'',$$

....

Уравнение (1.2.8) с произвольными функциями Φ, Ψ (которые, очевидно, содержатся в (1.2.8) вместе с производными до второго порядка включительно) по построению допускает оператор $X_{\bar{b}}$, а значит, согласно теореме 6 может быть равносильными образом записано через дифференциальные инварианты (нулевого J, первого J_1 и второго $\frac{dJ_1}{dJ}$ порядков):

$$\frac{dJ_1}{dJ} = V(J, J_1, \Phi, \Psi, \Phi', \Psi', \Phi'', \Psi'', \bar{a}). \qquad (1.2.9)$$

Точно также уравнение (1.2.6) может быть представлено в переменных $J,\, J_1$:

$$\frac{dJ_1}{dJ} = W(J, J_1, \overline{b}). \qquad (1.2.10)$$

Определяющее уравнение получают подстановкой в (1.2.8) правой части уравнения (1.2.6), что, очевидно, равносильно подстановке в (1.2.9) правой части уравнения (1.2.10):

$$W(J, J_1, \overline{b}) = V(J, J_1, \Phi, \Psi, \Phi', \Psi', \Phi'', \Psi'', \overline{a}). \qquad (1.2.11)$$

Дифференциальное выражение (1.2.11) представляет собой определяющее уравнение (с неизвестными $\Phi,\ \Psi$) для поиска ДМП, записанное в инвариантах оператора $X_{\overline{b}}$.

Все приведенные рассуждения распространяются на уравнения произвольного порядка $n > 2$, тогда определяющее уравнение может быть записано в виде:

$$W(J, J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}, \overline{b}) =$$
$$= V(J, J_1, \ldots, J_{n-1}, \Phi, \Psi, \Phi', \Psi', \Phi'', \Psi'', \ldots, \Phi^{(n)}, \Psi^{(n)}, \overline{a}). \qquad (1.2.12)$$

где $J,\, J_1,\, J_2 = \dfrac{dJ_1}{dJ}, \ldots, J_{(n-1)} = \dfrac{d^{(n-2)} J_1}{dJ^{(n-2)}}$ – базис инвариантов $(n-1)$-го продолжения оператора $X_{\overline{b}}$. Лемма доказана.

***Замечание* 1.** Обратимое преобразование (1.2.7) можно искать в виде

$$\begin{cases} t = \widetilde{g}(x, \Phi(\widetilde{J}), \Psi(\widetilde{J})), \\ u = \widetilde{f}(x, \Phi(\widetilde{J}), \Psi(\widetilde{J})), \end{cases}$$

как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \xi_{\overline{a}} \dfrac{\partial t}{\partial x} + \eta_{\overline{a}} \dfrac{\partial t}{\partial y} = p\xi_{\overline{b}}\,, \\ \xi_{\overline{a}} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \eta_{\overline{a}} \dfrac{\partial u}{\partial y} = p\eta_{\overline{b}}\,, \end{cases}$$

тогда определяющее уравнение запишется в инвариантах оператора $X_{\overline{a}}$.

***Замечание* 2.** Утверждение леммы остается справедливым, если основная алгебра Ли, допускаемая уравнениями класса D, имеет размерность $r > 1$.

Действительно, пусть уравнения класса D допускают основную алгебру Ли размерности $r > 1$ с базисными операторами

$$X_{\bar{a}}^{1}, X_{\bar{a}}^{2}, \ldots, X_{\bar{a}}^{r}. \tag{1.2.13}$$

Под действием любого элемента q точечной ДМП G каждый базисный оператор перейдет в оператор алгебры Ли преобразованного уравнения. Поэтому достаточно зафиксировать некоторый $X_{\bar{a}}^{i}$, $1 \le i \le r$ и для него предположить

$$X_{\bar{a}}^{i} \to Y = \sum_{k=1}^{r} p_k X_{\bar{b}}^{k},$$

с неопределенными коэффициентами p_k. Производя построения, описанные при доказательстве леммы, получим определяющее уравнение с неизвестными Φ, Ψ, записанное в инвариантах оператора Y или (согласно замечанию 1) в инвариантах оператора $X_{\bar{a}}^{i}$. В силу произвольности $X_{\bar{a}}^{i}$ заключаем, что определяющее уравнение может быть записано в инвариантах любого из операторов (1.2.13).

***Теорема* 1.1.** Размерность определяющего уравнения для поиска точечной дискретной метагруппы преобразований, допускаемой классом обыкновенных дифференциальных уравнений D, основная алгебра Ли операторов которых r-мерна $(r > 0)$, может быть понижена на единицу.

Из доказательства леммы видно, что при записи определяющего уравнения в инвариантах допускаемого оператора число независимых переменных уменьшается на единицу. Тем самым теорема доказана.

***Следствие* 1.** Поиск точечной дискретной метагруппы преобразований, допускаемой классом обыкновенных дифференциальных уравнений

D, каждое из которых задает многообразие, инвариантное относительно одной или нескольких непрерывных однопараметрических групп преобразований, сводится к решению переопределенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Доказательство. Поскольку в определяющее уравнение (1.2.12) войдут переменные $J_1, J_2, \ldots, J_{(n-1)}$ $(n \geq 2)$, от которых искомые функции Φ, Ψ не зависят, уравнение (1.2.12) будет “расщепляться” на несколько уравнений, становясь переопределенной системой ОДУ.

***Замечание* 3.** Утверждения леммы, теоремы и следствия легко переносятся на случай точечных отображений q_i, связывающих различные классы уравнений, алгебра Ли которых имеет размерность $r > 0$

$$q_i : \mathsf{D} \to \mathsf{D}_1 .$$

При этом определяющее уравнение может быть записано как в инвариантах оператора, допускаемого классом D, так и в инвариантах оператора, допускаемого классом D_1.

§ 3. Доказательство максимальности точечной дискретной метагруппы класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера

***Лемма* 1.2** [28]. Множество всех уравнений вида

$$y'' = F_3(x,y)y'^3 + F_2(x,y)y'^2 + F_1(x,y)y' + F(x,y)$$

инвариантно относительно точечной замены переменных (1.1.5).

Доказательство проводится прямой подстановкой.

Рассмотрим в качестве примера класс D обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера

$$y'' = Ax^n y^m y'^l \tag{1.3.1}$$

с трехмерным вектором существенных параметров $\bar{a} = (n,m,l)$. Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что $n \neq 0$; $m \neq 0$; $n+m+3 \neq 0$ при $l = 0$ или при $l = 3$; $|l-n-2|+|m+l-1| \neq 0$, так как в этих пяти случаях допускаемая алгебра имеет размерность $r \geq 2$, и исходное уравнение легко интегрируется в квадратурах. В общем случае любое уравнение класса (1.3.1) допускает одномерную основную алгебру Ли с базисом $X = ax\partial_x + by\partial_y$, где $a = m+l-1$, $b = l-n-2$ [12, 20].

Пусть точечное преобразование

$$\begin{cases} t = g(x,y), \\ u = f(x,y), \end{cases} \tag{1.3.2}$$

переводит уравнение (1.3.1) в уравнение того же класса

$$\ddot{u} = Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}, \tag{1.3.3}$$

которое допускает алгебру Ли с базисом $X' = (\mu+\lambda-1)t\partial_t + (\lambda-\nu-$ $-2)u\partial_u$. Естественно, что на значения ν, μ, λ накладываются те же ограничения как соответственно на n, m, l. Любое точечное преобразование сохраняет точечную структуру оператора, поэтому преобразование (1.3.2) переводит оператор X в оператор pX', $p \neq 0$ – некоторая постоянная. Учитывая формулу преобразования координат оператора при замене переменных (1.2.3) и замечание 1 параграфа 2 первой главы находим, что элементы преобразования (1.3.2) должны удовлетворять следующей системе уравнений с частными производными первого порядка:

$$\begin{cases} ax\dfrac{\partial t}{\partial x}+by\dfrac{\partial t}{\partial y}=\alpha t, \\ ax\dfrac{\partial u}{\partial x}+by\dfrac{\partial u}{\partial y}=\beta u, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

решения которой при $ab\neq 0$ имеют вид

$$t=x^{\frac{\alpha}{a}}\Phi(z), \quad u=x^{\frac{\beta}{a}}\Psi(z), \tag{1.3.5}$$

где $\alpha=p(\mu+\lambda-1)$, $\beta=p(\lambda-\nu-2)$, $z=x^{-\frac{b}{a}}y$ – инвариант оператора X. Заметим, что якобиан преобразования (1.3.5)

$$J=f_x g_y-g_x f_y=-\frac{1}{a}x^{\frac{\alpha+\beta-a-b}{a}}(\alpha\Phi\Psi'-\beta\Phi'\Psi) \tag{1.3.6}$$

обращается в нуль, если и только если $\Phi^{\beta}=\widetilde{C}\Psi^{\alpha}$ ($\widetilde{C}$ – произвольная константа). Подстановка преобразования (1.3.5) в определяющее уравнение (1.1.8) (с заменой t на x, u на y) приводит к следующему уравнению относительно функций Φ,Ψ, записанному, как гарантирует лемма 1.1, в инвариантах z, w (где $w=x^{\frac{a-b}{a}}y'$ – дифференциальный инвариант оператора X):

$$\frac{A}{a}(\alpha\Phi\Psi'-\beta\Phi'\Psi)z^m w^l+(\Phi'\Psi''-\Phi''\Psi')w^3+\frac{1}{a}\big[\alpha\Phi\Psi''-\beta\Phi''\Psi-$$

$$-3bz(\Phi'\Psi''-\Phi''\Psi')+2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi'\big]w^2+\frac{1}{a^2}\big[\beta(\beta-2\alpha-a+2b)\Phi'\Psi-$$

$$-\alpha(\alpha-2\beta-a+2b)\Phi\Psi'+4b(\alpha-\beta)z\Phi'\Psi'+2bz(\beta\Phi''\Psi-\alpha\Phi\Psi'')+$$

$$+3b^2z^2(\Phi'\Psi''-\Phi''\Psi')\big]w+\frac{1}{a^3}\big[\alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi-b\beta(b+\beta-2\alpha)z\Phi'\Psi+$$

$$+b\alpha(b+\alpha-2\beta)z\Phi\Psi'+2b^2(\beta-\alpha)z^2\Phi'\Psi'+b^2z^2(\alpha\Phi\Psi''-\beta\Phi''\Psi)+$$

$$+\,b^3z^3(\Phi''\Psi'-\Phi'\Psi'')\Big]=$$

$$=\frac{1}{a^3}B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}(\beta\Psi-bz\Psi'+aw\Psi')^{\lambda}(\alpha\Phi-bz\Phi'+aw\Phi')^{3-\lambda}. \qquad (1.3.7)$$

Поскольку в уравнение (1.3.7) входит величена w, от которой искомые функции Φ и Ψ не зависят, то (1.3.7) будет “расщепляться” на несколько уравнений, полученных приравниванием нулю коэффициентов при различных степенях w, становясь переопределенной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Случай, когда хотя бы одна из частных производных f_x, f_y, g_x, g_y тождественно равна нулю, исследован в [20, 21]. При этом показано, что на всем классе уравнений замкнуто только преобразование годографа

$$\mathsf{r}:(n,m,l)\to(m,n,3-l),\quad y=t,\quad x=u, \qquad (1.3.8)$$

которое задает циклическую группу второго порядка C_2, и найдены образующие s и u, действующие на подклассах

$$\mathsf{s}:(n,m,0)\to(-n-m-3,m,0),\quad x=t^{-1},\quad y=t^{-1}u, \qquad (1.3.9)$$

$$\mathsf{u}:(n,2,0)\to(\nu,2,0),\quad x=t^{r},\quad y=t^{k}u+at^{s}, \qquad (1.3.10)$$

где $\quad r=(8n^2+40n+49)^{-1/2},\quad \nu=\frac{1}{2}\big[(2n+5)r-5\big],\quad k=\frac{1}{2}(r-1),$

$$s=-(n+2)r,\quad a=\frac{(n+2)(n+3)}{A}.$$

Там же доказано, что группа, порожденная образующей (1.3.8) максимальна тогда, когда l и (или) λ не являются целыми числами, поэтому будем считать, что $l,\lambda\in\mathrm{Z}$ и $\Phi'\Psi'\neq 0$ (т.е. $f_yg_y\neq 0$). Условие $\Phi'\Psi'\neq 0$ исключает из множества решений определяющего уравнения тождественное решение.

Покажем, что при $l, \lambda \notin \{0,1,2,3\}$ решений уравнения (1.3.7) нет, так как приравнивание коэффициента при старшей (если $l > 3$) или при младшей (если $l < 0$) степени w нулю влечет равенство нулю якобиана J (1.3.6) преобразования (1.3.5). Действительно, для значений $l > 3$, $\lambda < 0$ домножим обе части уравнения (1.3.7) на выражение $(\beta\Psi - bz\Psi' + aw\Psi')^{-\lambda}$ и приравняем нулю коэффициент при $w^{(l-\lambda)}$:

$$\frac{A}{a^{\lambda+1}}(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi)\Psi'^{-\lambda}z^m = 0,$$

отсюда с необходимостью вытекает равенство нулю якобиана J. Для $l >$ > 3, $\lambda > 3$ домножим обе части уравнения (1.3.7) на $(\alpha\Phi - bz\Phi' + aw\Phi')^{\lambda}$ и приравняем нулю коэффициент при $w^{(l+\lambda)}$:

$$Aa^{\lambda-1}(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi)\Phi'^{\lambda}z^m = 0,$$

отсюда следует $J = 0$. К аналогичному выводу приходим, рассматривая значения $l < 0, \lambda < 0$; $l < 0, \lambda > 3$. При $l > 3$, $\lambda \in \{0,1,2,3\}$; $l \in \{0,1,2,3\}$, $\lambda > 3$; $l \in \{0,1,2,3\}, \lambda < 0$; $l < 0$, $\lambda \in \{0,1,2,3\}$ определяющее уравнение (1.3.7) не имеет решений согласно лемме 1.2.

Таким образом, l, λ могут принимать значения лишь из множества $\{0,1,2,3\}$ и в силу преобразования годографа (1.3.8) достаточно рассмотреть следующие значения l и λ:

A. $l = \lambda = 0$; **B**. $l = 0$, $\lambda = 1$; **C**. $l = \lambda = 1$.

A. При $l = \lambda = 0$ (классическое уравнение Эмдена-Фаулера) определяющая система, полученная “расщеплением” по степеням w уравнения (1.3.7), состоит из уравнений:

$$
\begin{cases}
\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'' = B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi'^{3}, \\
\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi - 3bz(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') + 2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi' = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad = 3B(\alpha\Phi - bz\Phi')\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi'^{2}, \\
\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' + 4b(\alpha-\beta)z\Phi'\Psi' + \\
\qquad + 2bz(\beta\Phi''\Psi - \alpha\Phi\Psi'') + 3b^2z^2(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad = 3B(\alpha\Phi - bz\Phi')^2\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi', \\
\alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi - b\beta(b+\beta-2\alpha)z\Phi'\Psi + \alpha b(b+\alpha-2\beta)z\Phi\Psi' + \\
+ 2b^2(\beta-\alpha)z^2\Phi'\Psi' + b^2z^2(\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi) + b^3z^3(\Phi''\Psi' - \Phi'\Psi'') + \\
\qquad\qquad + a^2A\ z^m(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi) = B(\alpha\Phi - bz\Phi')^3\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}.
\end{cases}
$$

Выразим $(\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'')$ из первого уравнения, $(\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi)$ – из второго уравнения системы и подставим во все последующие. После приведения подобных членов, умножим третье уравнение на bz и сложим с последним. Определяющая система примет вид:

$$
\begin{cases}
\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi' = B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi'^{3}, \\
\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi = 2(\alpha-\beta)\Phi'\Psi' + 3\alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu}\Phi'^{2}, \\
\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' = 3\alpha^2B\Phi^{\nu+2}\Psi^{\mu}\Phi', \\
\alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi + \left[Aa^2z^m + b(a-b)z\right](\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi) = \alpha^3B\Phi^{\nu+3}\Psi^{\mu}.
\end{cases}
\tag{1.3.11}
$$

Если $\alpha = 0$, тогда четвертое уравнение системы (1.3.11) оказывается невыполнимым при сделанных предположениях ($a \neq 0$, т.е. $m \neq 1$), поэтому полагаем $\alpha \neq 0$. Третье уравнение системы (1.3.11) представляет собой уравнение Бернулли относительно функции Ψ и при $\alpha - 2\beta - a + 2b \neq 0$ его решение –

$$\Psi=\begin{cases}\left(C\Phi^{\gamma}-K\Phi^{\nu+2}\right)^{\frac{1}{1-\mu}}, & K=\dfrac{\alpha^2 B}{\beta(\alpha-\beta)}, \quad \alpha\neq\beta, \quad \alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0;\\ (C-K\ln\Phi)^{\frac{1}{1-\mu}}, & K=\dfrac{3(1-\mu)\alpha B}{2b-a+\alpha}, \quad \alpha\neq 0, \quad \beta=0;\\ \Phi(C-K\ln\Phi)^{\frac{1}{1-\mu}}, & K=\dfrac{3(1-\mu)\alpha B}{2b-a-\alpha}, \quad \alpha=\beta\neq 0,\end{cases} \tag{1.3.12}$$

где $C\neq 0$ – произвольная постоянная, $\gamma=\dfrac{(1-\mu)\beta(\beta-2\alpha-a+2b)}{\alpha(\alpha-2\beta-a+2b)}$.

Оставшиеся уравнения определяющей системы являются по существу условиями совместности, которые проверяются.

Подстановка найденного $\Psi(\Phi)$ в первое уравнение системы (1.3.11) дает для Φ алгебраическое (т.е. не дифференциальное) уравнение с постоянными коэффициентами. При $\alpha\neq\beta$ первое уравнение после упрощения запишется в виде:

$$\frac{\gamma C}{1-\mu}\left(\frac{\gamma\mu}{1-\mu}+\gamma-1\right)\Phi^{2(\gamma-1)}=$$

$$=\left(\frac{K}{1-\mu}\left[2\gamma\mu(\nu+2)+\gamma(\gamma-1)+(\nu+1)(\nu+2)\right]+B\right)\Phi^{\gamma+\nu}.$$

Функция $\Phi\neq\mathrm{const}$ $(\Phi'\neq 0)$ должна удовлетворять этому уравнению при любых значениях своего аргумента, поэтому решения уравнения существуют, если и только если все его коэффициенты тождественно равны нулю. Отсюда находим $\gamma_{1,2}=0;1$ и $\mu=0$, последнее равенство противоречит сделанному предположению относительно значений параметров.

При $\alpha\neq 0$ (т.е. $\mu\neq 1$), $\beta=0$ (т.е. $\nu=-2$) первое уравнение системы (1.3.11) после упрощения запишется в виде:

$$\frac{3B\alpha(1-\mu)}{2b-a+\alpha}\left(1-\frac{3\alpha}{2b-a+\alpha}\right)\ln\Phi - C\left(1-\frac{3\alpha}{2b-a+\alpha}\right)+\frac{9B\alpha\mu}{(2b-a+\alpha)^2}=0.$$

При $\alpha=\beta\neq 0$ (т.е. $\mu+\nu=-1$) первое уравнение системы (1.3.11) запишется в виде:

$$K\left(\frac{K}{1-\mu}+B\right)\ln\Phi - C\left(\frac{K}{1-\mu}+B\right)+\frac{K^2\mu}{(1-\mu)^2}=0.$$

В обоих случаях, "расщепляя" эти уравнения по степеням $\ln\Phi$, находим $\mu=0$.

Если $\alpha-2\beta-a+2b=0$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$:

$$\Psi=\left[\frac{3\alpha^2 B}{\beta(\beta-2\alpha-a+2b)}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}\Phi^{\frac{\nu+2}{1-\mu}},$$

такая зависимость Ψ от Φ приводит к равенству нулю якобиана преобразования (1.3.5). При $\alpha-2\beta-a+2b=0$, $\alpha\neq 0$, $\beta=0$ третье уравнение системы оказывается невыполнимым.

Следовательно, при $l=\lambda=0$ (а в силу применения преобразования годографа к исходному и (или) к преобразованному уравнению и при $l=\lambda=3$; $l=0,\lambda=3$; $l=3,\lambda=0$) система уравнений (1.3.11) решений не имеет при сделанных предположениях.

В. При $l=0$, $\lambda=1$ определяющая система состоит из уравнений:

$$\begin{cases} \Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'' = B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi'^{2}\Psi', \\ \alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi - 3bz(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') + 2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi' = \\ \qquad\qquad = B\Big[(\beta\Psi - bz\Psi')\Phi'^{2} + 2(\alpha\Phi - bz\Phi')\Phi'\Psi'\Big]\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}, \\ \beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' + 4b(\alpha-\beta)z\Phi'\Psi' + \\ \qquad\qquad + 2bz(\beta\Phi''\Psi - \alpha\Phi\Psi'') + 3b^{2}z^{2}(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') = \\ \qquad\qquad = B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Big[(\alpha\Phi - bz\Phi')^{2}\Psi' + 2(\beta\Psi - bz\Psi')(\alpha\Phi - bz\Phi')\Phi'\Big], \\ \alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi - b\beta(b+\beta-2\alpha)z\Phi'\Psi + \alpha b(b+\alpha-2\beta)z\Phi\Psi' + \\ \qquad + 2b^{2}(\beta-\alpha)z^{2}\Phi'\Psi' + b^{2}z^{2}(\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi) + b^{3}z^{3}(\Phi''\Psi' - \Phi'\Psi'') + \\ \qquad + Aa^{2}(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi)z^{m} = B(\beta\Psi - bz\Psi')(\alpha\Phi - bz\Phi')^{2}\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}. \end{cases}$$

После преобразований, аналогичных сделанным в случае **A**, определяющая система примет вид:

$$\begin{cases} \Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi' = B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi'^{2}\Psi', \\ \alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi = 2(\alpha-\beta)\Phi'\Psi' + B(2\alpha\Phi\Psi' + \beta\Phi'\Psi)\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi', \\ \beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' = \\ \qquad\qquad\qquad = \alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu}(\alpha\Phi\Psi' + 2\beta\Phi'\Psi), \\ \alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi + \Big[Aa^{2}z^{m} + b(a-b)z\Big](\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi) = \alpha^{2}\beta B\Phi^{\nu+2}\Psi^{\mu+1}. \end{cases}$$

(1.3.13)

Подстановка $\tau = \Phi(z),\ \psi = \Psi(z)$ в первое и третье уравнения системы (1.3.13) приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно $\psi(\tau)$:

$$\psi'' = B\tau^{\nu}\psi^{\mu}\psi', \tag{1.3.14}$$

$$\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\psi - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\tau\psi' = \alpha B\tau^{\nu+1}\psi^{\mu}(\alpha\tau\psi' + 2\beta\psi).$$

(1.3.15)

Выразим из уравнения (1.3.15) ψ'

$$\psi' = \frac{[\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b) - 2\alpha\beta B\tau^{\nu+1}\psi^{\mu}]\psi}{\alpha[(\alpha - 2\beta - a + 2b)\tau + \alpha B\tau^{\nu+2}\psi^{\mu}]},$$

вычислим ψ'', заметим, что $\alpha \neq 0$ (в противном случае $\mu = 0$) и $[(\alpha - 2\beta - a + 2b)\tau + \alpha B\tau^{\nu+2}\psi^{\mu}] \neq 0$ (в противном случае якобиан преобразования (1.3.5) $J = 0$), после этого подставим найденные выражения в (1.3.14). В результате (после сокращения на $\tau\psi$) получается алгебраическое уравнение с постоянными коэффициентами относительно переменной $\rho = \tau^{\nu+1}\psi^{\mu} \neq \text{const}$ вида:

$$C_0 + C_1\rho + C_2\rho^2 + C_3\rho^3 + C_4\rho^4 = 0.$$

Функция ρ должна удовлетворять этому уравнению при любых значениях своего аргумента, поэтому решение этого уравнения существует, если и только если все коэффициенты $C_i = 0$. Равенство

$$C_4 = 2\alpha^5\beta^4 B = 0$$

возможно лишь в случае $\beta = 0$, тогда последнее уравнение системы (1.3.13) оказывается невыполнимым при $a \neq 0$.

Таким образом, при $l = 0, \lambda = 1$ (а значит, при $l = 0, \lambda = 2$; $l = 1, \lambda = 0$; $l = 1, \lambda = 3$; $l = 2, \lambda = 0$; $l = 2, \lambda = 3$; $l = 3, \lambda = 1$; $l = 3, \lambda = 2$) определяющая система решений не имеет.

С. При $l = \lambda = 1$ определяющая система состоит из уравнений:

$$\begin{cases}
\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'' = B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi'^2\Psi', \\
\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi - 3bz(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') + 2(\beta - \alpha)\Phi'\Psi' = \\
\qquad = B\left[(\beta\Psi - bz\Psi')\Phi'^2 + 2(\alpha\Phi - bz\Phi')\Phi'\Psi'\right]\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}, \\
Aa(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi)z^m + \beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' + \\
+ 4b(\alpha - \beta)z\Phi'\Psi' + 2bz(\beta\Phi''\Psi - \alpha\Phi\Psi'') + 3b^2z^2(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') = \\
\qquad = B\left[(\alpha\Phi - bz\Phi')^2\Psi' + 2(\beta\Psi - bz\Psi')(\alpha\Phi - bz\Phi')\Phi'\right]\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}, \\
\alpha\beta(\beta - \alpha)\Phi\Psi - b\beta(b + \beta - 2\alpha)z\Phi'\Psi + \alpha b(b + \alpha - 2\beta)z\Phi\Psi' + \\
\quad + 2b^2(\beta - \alpha)z^2\Phi'\Psi' + b^2z^2(\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi) + b^3z^3(\Phi''\Psi' - \Phi'\Psi'') = \\
\qquad = B(\beta\Psi - bz\Psi')(\alpha\Phi - bz\Phi')^2\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}.
\end{cases}$$

После преобразований, аналогичных сделанным в случае **А**, определяющая система приводится к виду:

$$\begin{cases} \Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi' = B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi'^{2}\Psi', \\ \alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi = 2(\alpha-\beta)\Phi'\Psi' + B(2\alpha\Phi\Psi' + \beta\Phi'\Psi)\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi', \\ Aa(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi)z^{m} + \beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi - \\ \qquad - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' = \alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu}(\alpha\Phi\Psi' + 2\beta\Phi'\Psi), \\ \alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi + bz(a - b + aAz^{m})(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi) = \alpha^{2}\beta B\Phi^{\nu+2}\Psi^{\mu+1}. \end{cases} \tag{1.3.16}$$

Из последних двух уравнений системы (1.3.16) выразим Φ', Ψ', а затем вычислим Φ'', Ψ'':

$$\Phi' = -\frac{\alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b + \alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu} - aAz^{m})\Phi}{3b(az - bz + aAz^{m+1})},$$

$$\Psi' = -\frac{\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b - 2\alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu} - aAz^{m})\Psi}{3b(az - bz + aAz^{m+1})},$$

$$\Phi'' = -\frac{\alpha}{3b(az - bz + aAz^{m+1})^{2}}\Big[(\alpha - 2\beta - a + 2b + \alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu} - aAz^{m})(az - \\ - bz + aAz^{m+1})\Phi' + ((\nu+1)\alpha B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi' + \alpha\mu B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu-1}\Psi' - \\ - amAz^{m-1})(az - bz + aAz^{m+1})\Phi - (\alpha - 2\beta - a + 2b + \alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu} - \\ - aAz^{m})(a - b + a(m+1)Az^{m})\Phi\Big],$$

$$\Psi'' = -\frac{\beta}{3b(az - bz + aAz^{m+1})^{2}}\Big[(\beta - 2\alpha - a + 2b - 2\alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu} - aAz^{m})(az - \\ - bz + aAz^{m+1})\Psi' + (-2(\nu+1)\alpha B\Phi^{\nu}\Psi^{\mu}\Phi' - 2\alpha\mu B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu-1}\Psi' - \\ - amAz^{m-1})(az - bz + aAz^{m+1})\Psi - (\beta - 2\alpha - a + 2b - 2\alpha B\Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu} - \\ - aAz^{m})(a - b + a(m+1)Az^{m})\Psi\Big].$$

Подставив найденные выражения в первые два уравнения системы (1.3.16), получаем два алгебраических уравнения относительно одной переменной

$T(z) = \Phi^{\nu+1}\Psi^{\mu} \neq$ const, которые после ряда тождественных преобразований можно привести к виду:

$$\Big\{2\alpha^3 B^3 T^3 + 3\alpha^2 B^2(2\alpha - \beta - a + 2b - aAz^m)T^2 - 3\alpha B\big[(\beta - \alpha\ )(\alpha + \beta - a +$$

$$+ 2b - aAz^m) - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b - aAz^m) - 3\alpha(\nu + 1)(\beta + a - 2b + aAz^m)\big]T +$$

$$+ 9abmAz^m(a - b + aAz^m) - (\alpha - 2\beta - a + 2b - aAz^m)(\alpha + \beta - a + 2b -$$

$$- aAz^m)(\beta - 2\alpha - a + 2b - aAz^m)\Big\}(\alpha - \beta + \alpha\beta T) = 0,$$

$$\Big\{\alpha^2 B^2 T^2 - \alpha B(\alpha + 2\beta + 3\alpha\nu)T + \alpha^2 - (a - 2b + aAz^m)^2 + \beta(a - 2b -$$

$$- 2\alpha + 3\beta + aAz^m) - 3b\big[a - b + aA(m+1)z^m\big]\Big\}(\alpha - \beta + \alpha\beta T) = 0.$$

Общий множитель обоих уравнений не может быть равен нулю, так как в этом случае обращается в нуль якобиан J преобразования (1.3.5). Приравнивая к нулю выражение в фигурных скобках последнего уравнения, находим:

$$T_{1,2} = \frac{1}{2\alpha B}(\alpha + 2\beta + 3\alpha\nu \pm U^{1/2}),$$

где $U = (\alpha + 2\beta + 3\alpha\nu)^2 - 4\alpha^2 + 4(a - 2b + aAz^m)^2 - 4\beta(a - 2b - 2\alpha + 3\beta +$

$+ aAz^m) + 12b\big[a - b + aA(m+1)z^m\big].$

Подставляя найденные выражения для T в уравнение третей степени, убеждаемся в том, что система уравнений (1.3.16) несовместна при значениях $l = \lambda = 1$ (а значит, при $l = 1, \lambda = 2$; $l = 2, \lambda = 1$; $l = \lambda = 2$).

Для завершения доказательства предположим, что $a = 0$ или $b = 0$, тогда решения системы уравнений (1.3.4) имеют следующий вид:

$$t = y^{\frac{\alpha}{b}}\Phi(x), \quad u = y^{\frac{\beta}{b}}\Psi(x) \quad - \quad \text{при } a = 0,$$

$$t = x^{\frac{\alpha}{a}}\Phi(y), \quad u = x^{\frac{\beta}{a}}\Psi(y) \quad - \quad \text{при} \;\; b = 0.$$

Значения $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ следует исключить из рассмотрения, так как при этом одна из производных $g_x, \; g_y, \; f_x, \; f_y$ обращается в нуль. Таким образом, имеем $ab = 0, \; \alpha\beta \neq 0$. Рассматривая более общую ситуацию: a и b – любые, $\alpha\beta \neq 0$, и записывая определяющее уравнение в инвариантах оператора $X' = (\mu + \lambda - 1)t\partial_t + (\lambda - \nu - 2)u\partial_u$, получаем (с точностью до обозначений) уравнение (1.3.7), которое по доказанному не имеет решений при сделанных предположениях.

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

***Теорема* 1.2.** Дискретная метагруппа преобразований, допускаемая классом D обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (1.3.1), заданная образующими (1.3.8), (1.3.9), (1.3.10), максимальна в классе точечных преобразований.

Глава 2. ДИСКРЕТНЫЕ МЕТАГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ЗАДАННЫЕ В КЛАССЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА

Во второй главе рассматриваются ДМП, заданные в классе преобразований Беклунда (преобразования Беклунда считаются определенными лишь на многообразиях), играющие существенную роль в теории дискретно-групповых методов, так как с их помощью могут быть проинтегрированы уравнения, не допускающие достаточного числа точечных операторов. Особую значимость такие ДМП приобретают для уравнений второго порядка, для которых до сих пор не найдено алгоритмического способа вычисления неточечных непрерывных симметрий.

В настоящей главе доказана теорема о представлении определяющего уравнения для поиска дискретной метагруппы, элементы которой сохраняют точечную структуру оператора, допускаемого уравнениями исследуемого класса, в инвариантах этого оператора. В параграфе 2 первой главы отмечалось, что предложенный способ понижения размерности определяющего уравнения применим и при поиске точечных отображений различных классов ОДУ, что позволяет избежать решения нелинейных систем уравнений с частными производными. Этим фактом мы воспользуемся при доказательстве максимальности ДМП обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера, найденной методом RF-пар.

В параграфе 5 показана возможность использования точечного оператора для нахождения экспоненциальных нелокальных операторов, задача поиска которых по сложности приближается к задаче поиска дискретных метагрупп ввиду нелинейности определяющего уравнения.

§ 1. Предварительные сведения

Обобщение понятия точечных преобразований приводит к преобразованиям Беклунда.

***Определение* 2.1.** Множество преобразований вида

$$\begin{cases} x = g(t, u, \dot{u}, \ldots, \overset{(k)}{u}), \\ y = f(t, u, \dot{u}, \ldots, \overset{(k)}{u}), \\ y' = \dfrac{Df}{Dg}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.1.1}$$

называют классом P_k преобразований Беклунда.

Мы рассматриваем преобразования Беклунда лишь на многообразиях, поэтому при их записи следует учитывать все зависимости между производными, вытекающие из уравнений, задающих эти многообразия.

***Теорема* 8** [20]. Пусть преобразование Беклунда (2.1.1), не являющееся касательным, принадлежит множеству P_k и переводит некоторое дифференциальное уравнение в уравнение того же порядка n. Тогда обратное преобразование также является преобразованием Беклунда и принадлежит множеству P_{n-k}.

Основными способами поиска преобразований Беклунда до настоящего времени являются прямой метод и метод RF-пар. Алгоритм прямого метода поиска преобразований Беклунда, составляющих ДМП заданного класса уравнений порядка n, аналогичен алгоритму прямого метода нахождения точечных преобразований. Для получения определяющего уравнения необходимо подставить в исходное уравнение преобразование (2.1.1) с выбранным значением k $(k < n)$, заменяя производные порядка $\geq n$ через преобразованное уравнение и его дифференциальные следствия. Определяющее уравнение "расщепляется" до системы по "свободным" переменным $\overset{(s)}{u}$, $k < s < n$.

***Замечание* 1**. Прямой метод применим для уравнений порядка $n \geq 3$, так как в силу теоремы 8 вместо преобразований, принадлежащих множеству P_{n-1} (в этом случае определяющая система не расщепляется в ввиду отсутствия “свободных” переменных) следует искать ему обратное, принадлежащее множеству P_1 (здесь расщепление будет по всем производным порядка $s,\ 2 \le s \le n-1$).

Для уравнений второго порядка прямое и обратное преобразования принадлежат множеству P_1, что делает невозможным “расщепление” определяющего уравнения. Поэтому наиболее эффективным методом поиска преобразований Беклунда для уравнений второго порядка является метод RF-пар.

Для того чтобы пояснить суть метода RF-пар дадим необходимые определения, приведенные, например, в [20, 21].

Операции, приводящие к повышению порядка уравнения, называются R-операциями.

Операции, приводящие к понижению порядка уравнения, называются F-операциями.

***Определение* 2.2.** RF-парой называется операция последовательного повышения и понижения порядка уравнения.

Как R-операция может рассматриваться, например, почленное дифференцирование уравнения, которое:

а) разрешимо относительно искомой функции, тип RY;

б) разрешимо относительно независимой переменной, тип RX;

в) разрешимо относительно несущественного параметра, тип RA.

Как F-операции могут рассматриваться следующие преобразования:

а) если уравнение автономно, к понижению порядка приводит подстановка $y = s,\ y' = v(s),\ y'' = vv', \ldots,$ тип FX;

б) если уравнение не содержит явно искомую функцию и производные до порядка $m-1$, то к понижению порядка приводит подстановка $x = s,\ y^{(m)} = v(s),\quad y^{(m+1)} = v',\quad y^{(m+2)} = v'', \ldots,$ тип FY^m;

в) если уравнение является однородным, то к понижению порядка приводит подстановка $x = s,\ y = e^{\int v ds} = E,\ y' = vE,\ y'' = (v' + v^2)E, \ldots,$ тип FO;

г) если уравнение является обобщенно-однородным, тогда преобразование $x = e^s,\ y = ve^{ks}$ приводит к автономному виду, тип FU.

Условия применения F-преобразований ограничивают возможность использования RF-пар. В некоторой степени универсальными оказываются лишь RF-пары (X, X), (Y, Y), к наиболее часто применяемым относятся также RF-пары (A, O), (A, U).

Рассмотрим некоторый класс уравнений второго порядка

$$y'' = F(x, y, y', \bar{a}). \tag{2.1.2}$$

RF-пара (X, X) применима, если уравнение (2.1.2) может быть представлено в виде

$$F_1(y, y', y'', \bar{a}) = Ax,$$

результат её действия эквивалентен применению преобразования:

$$(X, X):\ x = \frac{1}{A} F_1(s, v, vv', \bar{a}), \quad y = s, \ \ y' = v. \tag{2.1.3}$$

RF-пара (Y, Y) применима, если уравнение (2.1.1) представимо в виде

$$F_2(x, y', y'', \bar{a}) = Ay,$$

результат её действия эквивалентен применению преобразования:

$$(Y, Y):\ x = s,\ y = \frac{1}{A} F_2(s, h, h', \bar{a}),\ \ y' = h. \tag{2.1.4}$$

RF-пары, как правило, выводят уравнение из исходного класса Д. Поэтому для построения образующих ДМП необходимо найти точечные преобразования, возвращающие полученное в результате применения RF-пары уравнение класса $Д_1$ обратно в класс $Д$. Таким образом, метод RF-пар заключается во введении в цепочку преобразований “стандартной” зависимости от производной с последующим поиском точечных отображений класса $Д_1$ в класс $Д$.

§ 2. Преобразования Беклунда, сохраняющие точечную структуру оператора

Известно, что преобразование Беклунда класса P_k

$$\begin{cases} t = g(x, y, y', ..., y^{(k)}), \\ u = f(x, y, y', ..., y^{(k)}), \end{cases}$$

замкнутое на классе уравнений n-го порядка, переводит оператор

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \tag{2.2.1}$$

допускаемый некоторым уравнением этого класса, в оператор

$$Y = \tilde{\xi}\partial_t + \tilde{\eta}\partial_u$$

с координатами

$$\tilde{\xi} = \underset{(k)}{X}(g), \quad \tilde{\eta} = \underset{(k)}{X}(f), \tag{2.2.2}$$

где $\underset{(k)}{X}$ – k-ое продолжение оператора X. Оператор Y, вообще говоря, является оператором Ли-Беклунда (то есть координаты $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ зависят не только от переменных t, u но и от производных $\dot{u}, \ddot{u}, ...$).

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением только таких преобразований класса P_k, которые сохраняют точечную структуру заданного оператора вида (2.2.1). Такое сужение множества преобразований объясняется тем, что алгебра Ли-Беклунда ОДУ любого порядка бесконечномерна, а кроме того, проблема отыскания полной алгебры Ли-Беклунда к настоящему времени решена только для линейных уравнений [42, 43].

Рассмотрим класс

$$\mathsf{D} = \{\mathsf{D}(\bar{a})\} \tag{2.2.3}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых задает многообразие, инвариантное относительно непрерывной группы так, что допускаемая основная алгебра Ли операторов имеет размерность $r = 1$ и базис $X_{\bar{a}}$.

Доказательство нижеследующей теоремы, проводимое с помощью схемы рассуждений, аналогичной доказательству утверждений параграфа 2 первой главы, имеет некоторые особенности.

***Теорема* 2.1.** Определяющее уравнение для поиска допускаемой классом (2.2.3) дискретной метагруппы преобразований

$$\mathsf{G}\colon \{q\colon \mathsf{D}(\bar{a}) \to \mathsf{D}(\bar{b})\},$$

порожденной преобразованиями Беклунда, сохраняющими точечную структуру операторов основной алгебры Ли, допускаемой уравнениями рассматриваемого класса, может быть записано в инвариантах оператора $X_{\bar{b}}$, при этом размерность определяющего уравнения уменьшается на единицу.

Доказательство проведем для класса D ОДУ второго порядка, так как для уравнений порядка выше второго доказательство совершенно аналогично при гораздо более громоздкой записи. Свойство инвариантности уравнения относительно однопараметрической группы не зависит от выбора переменных, поэтому преобразование Беклунда класса P_1, переводящее уравнение класса D

$$y'' = F(x, y, y', \bar{a}) \tag{2.2.4}$$

в уравнение того же класса

$$\ddot{u} = F(t, u, \dot{u}, \bar{b}) \tag{2.2.5}$$

должно переводить оператор $X_{\bar{a}}$, допускаемый уравнением (2.2.4), в оператор алгебры Ли уравнения (2.2.5), то есть в оператор $pX_{\bar{b}} = p(\xi_{\bar{b}}\partial_t + {}$ $+ \eta_{\bar{b}}\partial_u)$, $p \neq 0$ – некоторая постоянная. Следовательно, элементы ДМП следует искать среди решений следующей системы уравнений, полученной с помощью формул (2.2.2):

$$\begin{cases} \xi_{\bar{b}} \dfrac{\partial x}{\partial t} + \eta_{\bar{b}} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \zeta_{\bar{b}} \dfrac{\partial x}{\partial \dot{u}} = \dfrac{1}{p} \xi_{\bar{a}}, \\ \xi_{\bar{b}} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \eta_{\bar{b}} \dfrac{\partial y}{\partial u} + \zeta_{\bar{b}} \dfrac{\partial y}{\partial \dot{u}} = \dfrac{1}{p} \eta_{\bar{a}}, \end{cases}$$

где $\zeta_{\bar{b}} = (\eta_{\bar{b}})_t + \left[(\eta_{\bar{b}})_u - (\xi_{\bar{b}})_t\right]\dot{u} - (\xi_{\bar{b}})_u \dot{u}^2$. Отсюда находим

$$\begin{cases} x = g(t, \Phi(J, J_1), \Psi(J, J_1)) = g_1(t, u, \dot{u}), \\ y = f(t, \Phi(J, J_1), \Psi(J, J_1)) = f_1(t, u, \dot{u}), \end{cases} \tag{2.2.6}$$

где $J = J(t,u)$, $J_1 = J_1(t,u,\dot{u})$ – дифференциальные инварианты нулевого и первого порядков оператора $X_{\bar{b}}$, Φ, Ψ – произвольные функции . Выполним в уравнении (2.2.4) подстановку (2.2.6):

$$\frac{d\ddot{u}}{dt} = \left[f_{\dot{u}}(g_t + g_u\dot{u}) - g_{\dot{u}}(f_t + f_u\dot{u})\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ F\left(g, f, \frac{f_t + f_u\dot{u} + f_{\dot{u}}\ddot{u}}{g_t + g_u\dot{u} + g_{\dot{u}}\ddot{u}}, \bar{a} \right)(g_t + g_u\dot{u} + g_{\dot{u}}\ddot{u})^3 - \right.$$

$$- (g_t + g_u\dot{u} + g_{\dot{u}}\ddot{u})\left[f_{tt} + 2f_{tu}\dot{u} + f_{uu}\dot{u}^2 + (f_u + 2f_{t\dot{u}})\ddot{u} + 2f_{u\dot{u}}\dot{u}\ddot{u} + f_{\dot{u}\dot{u}}\ddot{u}^2 \right] +$$

$$\left. + (f_t + f_u\dot{u} + f_{\dot{u}}\ddot{u})\left[g_{tt} + 2g_{tu}\dot{u} + g_{uu}\dot{u}^2 + (g_u + 2g_{t\dot{u}})\ddot{u} + 2g_{u\dot{u}}\dot{u}\ddot{u} + g_{\dot{u}\dot{u}}\ddot{u}^2 \right] \right\}, \tag{2.2.7}$$

где f_t, g_t, f_u, g_u, … – частные производные сложных функций.

По построению уравнение (2.2.7) с произвольными функциями Φ, Ψ (которые, очевидно, войдут в (2.2.7) вместе со своими частными производными до второго порядка включительно) допускает оператор $X_{\bar{b}}$, поэтому оно может быть равносильным образом записано в инвариантах оператора $X_{\bar{b}}$:

$$\frac{d^2 J_1}{dJ^2} = V\left(J, J_1, \frac{dJ_1}{dJ}, \Phi, \Psi, \frac{\partial \Phi}{\partial J}, \frac{\partial \Phi}{\partial J_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial J}, \frac{\partial \Psi}{\partial J_1}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2}, \dots, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J \partial J_1}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial J \partial J_1} \bar{a} \right). \tag{2.2.8}$$

Аналогично уравнение (2.2.5) может быть равносильным образом записано:

$$\frac{dJ_1}{dJ} = W(J, J_1, \overline{b}) \qquad (2.2.9)$$

Определяющее уравнение получают подстановкой в уравнение (2.2.7) правой части уравнения (2.2.5), что, очевидно, равносильно подстановке в уравнение (2.2.8) правой части уравнения (2.2.9):

$$W_J(J, J_1, \overline{b}) + W(J, J_1, \overline{b}) W_{J_1}(J, J_1, \overline{b}) =$$

$$= V\left(J, J_1, W(J, J_1, \overline{b}), \Phi, \Psi, \frac{\partial \Phi}{\partial J}, \frac{\partial \Phi}{\partial J_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial J}, \frac{\partial \Psi}{\partial J_1}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J \partial J_1}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial J \partial J_1} \overline{a} \right). \qquad (2.2.10)$$

Таким образом, показано, что определяющее уравнение записывается в инвариантах допускаемого оператора (неизвестными здесь являются функции Φ, Ψ), при этом его размерность автоматически уменьшается на единицу.

Все приведенные рассуждения можно распространить на уравнение порядка $n > 2$ и преобразования Беклунда класса P_k, $k > 1$.Теорема доказана.

Таким образом, для уравнений порядка $n > 2$, определяющая система, полученная “расщеплением” построенного с помощью теоремы 2.1 определяющего уравнения, упрощается, так как содержит неизвестные функции Φ, Ψ меньшего числа переменных, а число уравнений входящих в систему не меняется. Для уравнений второго порядка определяющая система по-прежнему “не расщепляется”.

Замечание **1.** Утверждение теоремы остается справедливым для класса D ОДУ, допускающих алгебру Ли размерности $r > 1$.

Пример **1.** Пусть преобразование Беклунда класса P_1

$$\begin{cases} x = g(t, u, \dot{u}), \\ y = f(t, u, \dot{u}) \end{cases} \qquad (2.2.11)$$

действует на классе D ОУЭФ

$$y'' = Ax^n y^m y'^l. \qquad (2.2.12)$$

Выполним подстановку преобразования (2.2.11) в уравнение (2.2.12), заменяя везде $\ddot{u}$ через правую часть преобразованного уравнения $\ddot{u} = Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}$:

$$(g_t + g_u\dot{u} + Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}g_{\dot{u}})\frac{d}{dt}(f_t + f_u\dot{u} + Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}f_{\dot{u}}) - (f_t + f_u\dot{u} +$$

$$+ Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}f_{\dot{u}})\frac{d}{dt}(g_t + g_u\dot{u} + Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}g_{\dot{u}}) =$$

$$= Ag^n f^m (f_t + f_u\dot{u} + Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}f_{\dot{u}})^l (g_t + g_u\dot{u} + Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}g_{\dot{u}})^{3-l}. \qquad (2.2.13)$$

Преобразования (2.1.11), сохраняющие точечную структуру операторов алгебры Ли уравнения (2.2.12), базисным оператором которой является $X = ax\partial_x + by\partial_y$, $a = m + l - 1$, $b = l - n - 2$ (подкласс уравнений с двухмерной алгеброй исключен из рассмотрения), удовлетворяют системе уравнений, полученной с помощью формул (2.2.2)

$$\begin{cases} \alpha t\dfrac{\partial x}{\partial t} + \beta u\dfrac{\partial x}{\partial u} + (\beta - \alpha)\dot{u}\dfrac{\partial x}{\partial \dot{u}} = at, \\ \alpha t\dfrac{\partial y}{\partial t} + \beta u\dfrac{\partial y}{\partial u} + (\beta - \alpha)\dot{u}\dfrac{\partial y}{\partial \dot{u}} = bu, \end{cases}$$

где $X' = \alpha t\partial_t + \beta u\partial_u$, $\alpha = p(\mu + \lambda - 1)$, $\beta = p(\lambda - \nu - 2)$, $p \neq 0$ – произвольная постоянная. Решая эту систему при $\alpha \neq 0$, конкретизируем вид преобразования (2.2.11)

$$x = t^{\frac{a}{\alpha}}\Phi(z, w), \quad y = t^{\frac{b}{\alpha}}\Psi(z, w), \qquad (2.2.14)$$

где $z = t^{-\frac{\beta}{\alpha}}u$, $w = t^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}\dot{u}$ – дифференциальные инварианты нулевого и первого порядков оператора X', Φ, Ψ – произвольные функции.

Подстановка (2.2.14) в уравнение (2.2.13) приводит к определяющему уравнению, записанному в инвариантах z, w, которое может быть представлено в следующем виде:

$$\Big\{\Big[(b-\beta)\Psi_z+(\alpha w-\beta z)\Psi_{zz}+\mu\alpha B z^{\mu-1}w^{\lambda}\Psi_w+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Psi_{zw}\Big]\times$$

$$\times\Big[a\Phi+(\alpha w-\beta z)\Phi_z+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Phi_w\Big]-\Big[(a-\beta)\Phi_z+$$

$$+(\alpha w-\beta z)\Phi_{zz}+\mu\alpha B z^{\mu-1}w^{\lambda}\Phi_w+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Phi_{zw}\Big]\times$$

$$\times\Big[b\Psi+(\alpha w-\beta z)\Psi_z+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Psi_w\Big]\Big\}(\alpha w-\beta z)+$$

$$+\Big\{\Big[b\Psi_w+\alpha\Psi_z+(\alpha w-\beta z)\Psi_{zw}+(\lambda\alpha B z^{\mu}w^{\lambda-1}+\alpha-\beta)\Psi_w+$$

$$+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Psi_{ww}\Big]\Big[a\Phi+(\alpha w-\beta z)\Phi_z+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+$$

$$+(\alpha-\beta)w)\Phi_w\Big]-\Big[a\Phi_w+\alpha\Phi_z+(\alpha w-\beta z)\Phi_{zw}+(\lambda\alpha B z^{\mu}w^{\lambda-1}+$$

$$+\alpha-\beta)\Phi_w+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Phi_{ww}\Big]\Big[b\Psi+(\alpha w-\beta z)\Psi_z+$$

$$+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Psi_w\Big]\Big\}\Big(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w\Big)+$$

$$+(b-a)\Big[b\Psi+(\alpha w-\beta z)\Psi_z+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Psi_w\Big]\times$$

$$\times\Big[a\Phi+(\alpha w-\beta z)\Phi_z+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Phi_w\Big]=$$

$$=A\Phi^{n}\Psi^{m}\Big[b\Psi+(\alpha w-\beta z)\Psi_z+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Psi_w\Big]^{l}\times$$

$$\times\Big[a\Phi+(\alpha w-\beta z)\Phi_z+(\alpha B z^{\mu}w^{\lambda}+(\alpha-\beta)w)\Phi_w\Big]^{3-l}. \qquad (2.2.15)$$

Для дальнейшего анализа определяющего уравнения (2.2.15) необходимо задать зависимость функций Φ, Ψ от переменной w.

В заключении параграфа найдем условия сохранения точечной структуры оператора, допускаемого уравнениями исследуемого класса, при действии образующих дискретной метагруппы, найденной методом *RF*-пар.

Результат действия универсальных RF-пар на ОДУ произвольного порядка n $(n > 1)$ эквивалентен применению следующих преобразований

$$(X, X):\ \begin{cases} s = y, \\ v = y', \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \text{и} \qquad (Y, Y):\ \begin{cases} h = x, \\ v = y', \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Далее согласно алгоритму метода RF-пар ищутся точечные преобразования

$$\begin{cases} s = g_1(t,u), \\ v = f_1(t,u), \end{cases} \qquad \begin{cases} h = \widetilde{g}_1(t,u), \\ v = \widetilde{f}_1(t,u). \end{cases}$$

Таким образом, образующие ДМП, найденной с помощью RF-пар (X, X) и (Y, Y) задаются соответственно преобразованиями вида

$$\begin{cases} t = g(y, y'), \\ u = f(y, y'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.2.16}$$

$$\begin{cases} t = \widetilde{g}(x, y'), \\ u = \widetilde{f}(x, y'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.2.17}$$

(преобразования обращены для удобства дальнейших подстановок).

***Предложение* 2.1.** Преобразование (2.2.16), действуя на инфинитезимальный оператор

$$X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y, \tag{2.2.18}$$

сохраняет его точечную структуру тогда и только тогда, когда координаты оператора имеют вид

$$\xi = \varphi(y) + cx, \quad \eta = \psi(y), \tag{2.2.19}$$

где c – постоянная.

Доказательство. Предположим, что преобразование (2.2.16) сохраняет точечную структуру оператора (2.2.18):

$$X \to Y = \widetilde{\xi}(t,u)\partial_t + \widetilde{\eta}(t,u)\partial_u.$$

Тогда согласно формулам (2.2.2) g и f удовлетворяют системе уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \xi\dfrac{\partial t}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial t}{\partial y}+\left[\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y y'^2\right]\dfrac{\partial t}{\partial y'}=\tilde{\xi}(t,u), \\ \xi\dfrac{\partial u}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left[\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y y'^2\right]\dfrac{\partial u}{\partial y'}=\tilde{\eta}(t,u), \end{cases}$$

которую после подстановки g и f можно рассматривать как систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных η, $\zeta_1=\big[\eta_x+(\eta_y-$ $-\xi_x)y'-\xi_y y'^2\big]$. Известно, что решение системы алгебраических уравнений выражается через её коэффициенты. Коэффициенты рассматриваемой системы не зависят от переменной x, поэтому η и ζ_1 не зависят от x, кроме того, η заведомо не зависит от y', то есть $\eta=\psi(y)$, $\zeta_1=\big[(\psi'-$ $-\xi_x)y'-\xi_y y'^2\big]=\Omega(y,y')$. Последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда Ω есть многочлен второй степени относительно y'. Следовательно имеем равенство

$$(\psi'-\xi_x)y'-\xi_y y'^2=\tau_0+\tau_1 y'+\tau_2 y'^2, \tag{2.2.20}$$

где τ_2, τ_1, τ_0– некоторые функции переменной y. “Расщепляя” (2.2.20) по степеням переменной y', приходим к линейной системе уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \xi_y=\tau_2, \\ \psi'-\xi_x=\tau_1, \\ \tau_0=0. \end{cases} \tag{2.2.21}$$

Интегрированием по y первого уравнения системы (2.2.21) получаем $\xi=$ $=-\int\tau_2 dy+\nu(x)=\varphi(y)+\nu(x)$. Подставив найденное ξ во второе уравнение системы (2.2.21), находим $\nu=cx$, c – постоянная величина. Таким образом,

$$\xi=\varphi(y)+cx,\quad \eta=\psi(y).$$

Доказательство достаточности проводится непосредственной проверкой.

***Предложение* 2.2.** Преобразование (2.2.17), действуя на инфинитезимальный оператор (2.2.18), сохраняет его точечную структуру тогда и только тогда, когда координаты оператора имеют вид

$$\xi = \varphi(x), \quad \eta = \psi(x) + cy, \qquad (2.2.22)$$

где c – постоянная.

Доказательство почти дословно повторяет рассуждения, проводимые выше.

***Следствие* 1.** Преобразования вида (2.2.16) и (2.2.17), действуя на инфинитезимальный оператор (2.2.18), одновременно сохраняют его точечную структуру тогда и только тогда, когда (2.2.18) есть оператор неоднородного растяжения

$$X = ax\partial_x + by\partial_y,$$

где a и b – постоянные.

***Замечание* 2.** В работе [13] отмечалось, что знание дискретной метагруппы преобразований исследуемого класса уравнений позволяет находить операторы Ли-Беклунда, допускаемые некоторыми элементами этого класса по известным допускаемым точечным операторам других элементов. Доказанные предложения прогнозируют возможность такого построения операторов Ли-Беклунда применением образующих, найденных с помощью универсальных RF-пар. А именно, если хотя бы одна координата точечного оператора (2.2.18) отлична от вида, определяемого формулой (2.2.19) [(2.2.22)], оператор (2.2.18) под действием преобразования (2.2.16) [(2.2.17)] перейдет в оператор Ли-Беклунда.

***Пример* 2** [13]. Уравнение

$$y'' = \frac{3}{2}x \qquad (2.2.23)$$

связано с уравнением

$$\ddot{u} = 3u^{-\frac{1}{2}} \tag{2.2.24}$$

преобразованием

$$t = y,\ u = y'^{\,2},\ \dot{u} = 3x. \tag{2.2.25}$$

Операторы

$$X_1 = x\partial_x + 3y\partial_y,\ \ X_2 = x\partial_y,\ \ X_3 = 2x^2\partial_x + (2xy + x^4)\partial_y$$

составляют базис трехмерной подалгебры основной алгебры Ли (точечных) операторов, допускаемой уравнением (2.2.23). В соответствии с доказанными предложениями только один из выписанных операторов сохраняет точечную структуру при действии преобразования (2.2.25):

$$X_1 \to Y_1 = 3t\partial_t + 4u\partial_u, \quad X_2 \to Y_2 = \dot{u}\partial_t + 6u^{1/2}\partial_u,$$

$$X_3 \to Y_3 = (54t + \dot{u}^3)\dot{u}\partial_t + 4(81t + 6\dot{u} - 27u^{1/2})u^{1/2}\dot{u}\partial_u.$$

Отметим, что операторы Y_2, Y_3, допускаемые уравнением (2.2.24), не могут быть обнаружены с помощью алгоритма Ли.

§ 3. Применение метода следа для доказательства максимальности дискретной метагруппы преобразований класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера, найденной методом *RF*-пар

Выше отмечалось, что для уравнений второго порядка, в частности, для обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера, основным методом поиска преобразований Беклунда является метод *RF*-пар.

Применение *RF*-пары (X, X) к классу D обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (2.2.12) приводит к промежуточному классу D_1 уравнений вида:

$$v'' = (l-1)v^{-1}v'^{2} + ms^{-1}v' + nA^{\frac{1}{n}}s^{\frac{m}{n}}v^{\frac{l-1}{n}-1}v'^{\frac{n-1}{n}}. \qquad (2.3.1)$$

Обычная процедура групповой классификации (алгоритм Ли) показывает, что в общем случае $(m \neq 0;\ m \neq \dfrac{5-3l}{2l-3}$ при $n = 1$ или при $n = -1/2$; $|l - n - 2| + |n + m + 1| \neq 0)$ уравнения класса D_1 допускают основную алгебру Ли размерности $r = 1$ с базисом

$$Y = \alpha s\partial_s + \beta v\partial_v, \qquad (2.3.2)$$

где $\alpha = l - n - 2$, $\beta = -n - m - 1$.

Для построения преобразований Беклунда, замкнутых на классе D, необходимо найти отображения уравнений (2.3.1) класса D_1 в уравнения

$$\ddot{u} = Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}$$

класса D, порожденные точечными преобразованиями

$$\begin{cases} s = g(t,u), \\ v = f(t,u). \end{cases} \qquad (2.3.3)$$

Наличие непрерывных симметрий классов D и D_1 делает возможным использовать метод следа, позволяющий отыскать все преобразования

(2.3.3), то есть все преобразования Беклунда, которые могут быть найдены с помощью RF-пары (X, X).

В общем случае при преобразовании (2.3.3) оператор (2.3.2) должен перейти в оператор

$$X = at\partial_t + bu\partial_u \tag{2.3.4}$$

одномерной алгебры Ли, допускаемой уравнениями класса D, где $a = p(\mu + \lambda - 1)$, $b = p(\lambda - \nu - 2)$, $p \neq 0$ – некоторая постоянная. Учитывая формулу (1.2.3) преобразования координат оператора при точечной замене переменных, находим в предположении $ab \neq 0$:

$$s = t^{\frac{\alpha}{a}}\Phi(z), \quad v = t^{\frac{\beta}{a}}\Psi(z), \tag{2.3.5}$$

где $z = t^{-\frac{b}{a}}u$ – инвариант оператора (2.3.4).

Заметим, что якобиан преобразования (2.3.5)

$$J = f_t g_u - g_t f_u = -\frac{1}{a}t^{\frac{\alpha+\beta-a-b}{a}}(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi) \tag{2.3.6}$$

обращается в нуль, если и только если $\Phi^{\beta} = C\Psi^{\alpha}$, C – произвольная постоянная.

В полном соответствии с замечанием 3 параграфа 2 первой главы, определяющее уравнение для поиска точечных отображений записывается в инвариантах z, w ($w = t^{\frac{a-b}{a}}\dot{u}$ – дифференциальный инвариант оператора (2.3.4)):

$$\frac{B}{a}(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi)z^{\mu}w^{\lambda} + (\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi')w^3 + \frac{1}{a}\Big[\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi -$$

$$- 3bz(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') + 2(\beta - \alpha)\Phi'\Psi'\Big]w^2 + \frac{1}{a^2}\Big[\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi -$$

$$- \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' + 4b(\alpha - \beta)z\Phi'\Psi' + 2bz(\beta\Phi''\Psi - \alpha\Phi\Psi'') +$$

$$+ 3b^2z^2(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi')\Big]w + \frac{1}{a^3}\Big[\alpha\beta(\beta - \alpha)\Phi\Psi - b\beta(b + \beta - 2\alpha)z\Phi'\Psi +$$

$$+b\alpha(b+\alpha-2\beta)z\Phi\Psi'+2b^2(\beta-\alpha)z^2\Phi'\Psi'+b^2z^2(\alpha\Phi\Psi''-\beta\Phi''\Psi)+$$

$$+b^3z^3(\Phi''\Psi'-\Phi'\Psi'')\Big]=$$

$$=\frac{l-1}{a^3}(\alpha\Phi-bz\Phi'+a\Phi'w)(\beta\Psi-bz\Psi'+a\Psi'w)^2\Psi^{-1}+$$

$$+\frac{m}{a^3}(\alpha\Phi-bz\Phi'+a\Phi'w)^2(\beta\Psi-bz\Psi'+a\Psi'w)\Phi^{-1}+$$

$$+\frac{n}{a^3}A^{\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{m}{n}}\Psi^{\frac{l-1}{n}-1}(\beta\Psi-bz\Psi'+a\Psi'w)^{\frac{n-1}{n}}(\alpha\Phi-bz\Phi'+a\Phi'w)^{3-\frac{n-1}{n}}. \qquad (2.3.7)$$

Будем считать, что $\Phi'\Psi'\neq 0$ (то есть $f_u g_u\neq 0$), так как в противном случае ($f_u=0$ или $g_u=0$) как доказано в [20, 21], единственной образующей ДМП ОУЭФ, найденной методом RF-пар, является следующее преобразование

$$\mathrm{g}:(n,m,l)\to\left(\frac{1}{1-l},-\frac{n}{n+1},\frac{2m+1}{m}\right), \qquad (2.3.8)$$

$$x=u^{\frac{1}{n+1}},\quad y=\dot{u}^{-\frac{1}{m}},\quad y'=t^{\frac{1}{1-l}}$$

$$\left(t=y'^{1-l},\quad u=x^{n+1},\quad \dot{u}=y^{-m}\right)$$

(остальные решения определяющего уравнения дают композицию g и найденных ранее точечных образующих). Там же доказано, что ДМП, порожденная образующей (2.3.8), является максимальной тогда, когда l и (или) λ не являются целыми числами, поэтому считаем $l,\lambda\in Z$.

“Расщепляя” определяющее уравнение по степеням переменной w, и проводя рассуждения аналогичные тем, что были сделаны в параграфе 3 главы 1, убеждаемся в том, что при $\lambda\notin\{0,1,2,3\}$ и $\frac{n-1}{n}\notin\{0,2,3\}$ уравнение (2.3.7) при сделанных предположениях решений не имеет. Достаточно рассмотреть значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, так как $\lambda = 3, \lambda = 2$ получаются из них применением преобразования годографа (1.3.8), которое допускается классом D.

А. При $\lambda = 0$, $\dfrac{n-1}{n} = 0$ определяющая система, полученная "расщеплением" по степеням переменной w уравнения (2.3.7), состоит из четырех ОДУ:

$$\begin{cases}
\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'' = (l-1)\Psi^{-1}\Phi'\Psi'^2 + m\Phi^{-1}\Phi'^2\Psi' + A\Phi^m\Psi^{l-2}\Phi'^3, \\
\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi - 3bz(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') + 2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi' = \\
= (l-1)\Big[2(\beta\Psi - bz\Psi')\Phi'\Psi' + (\alpha\Phi - bz\Phi')\Psi'^2\Big]\Psi^{-1} + m\Big[2(\alpha\Phi - bz\Phi')\Phi'\Psi' + \\
\qquad + (\beta\Psi - bz\Psi')\Phi'^2\Big]\Phi^{-1} + 3A\Phi^m\Psi^{l-2}\Phi'^2(\alpha\Phi - bz\Phi'), \\
\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi - \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' + 4b(\alpha-\beta)z\Phi'\Psi' + \\
+ 2bz(\beta\Phi''\Psi - \alpha\Phi\Psi'') + 3b^2z^2(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') = (l-1)\Big[(\beta\Psi - bz\Psi')^2\Phi' + \\
+ 2(\alpha\Phi - bz\Phi')(\beta\Psi - bz\Psi')\Psi'\Big]\Psi^{-1} + m\Big[(\alpha\Phi - bz\Phi')^2\Psi' + 2(\alpha\Phi - \\
\qquad - bz\Phi')(\beta\Psi - bz\Psi')\Phi'\Big]\Phi^{-1} + 3A\Phi^m\Psi^{l-2}\Phi'(\alpha\Phi - bz\Phi')^2, \\
\alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi - b\beta(b + \beta - 2\alpha)z\Phi'\Psi + \alpha b(b + \alpha - 2\beta)z\Phi\Psi' + \\
+ 2b^2(\beta-\alpha)z^2\Phi'\Psi' + b^2z^2(\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi) + b^3z^3(\Phi''\Psi' - \Phi'\Psi'') + \\
+ a^2Bz^\mu(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi) = (l-1)(\alpha\Phi - bz\Phi')(\beta\Psi - bz\Psi')^2\Psi^{-1} + \\
\qquad + m(\alpha\Phi - bz\Phi')^2(\beta\Psi - bz\Psi')\Phi^{-1} + A(\alpha\Phi - bz\Phi')^3\Phi^m\Psi^{l-2}.
\end{cases}$$

(2.3.9)

Выразим $(\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'')$ из первого уравнения, $(\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi)$ – из второго уравнения системы (2.3.9) и подставим во все последующие. После этого умножим третье уравнение на bz и сложим с последним. Определяющая система примет вид:

$$
\begin{cases}
\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'' = (l-1)\Psi^{-1}\Phi'\Psi'^2 + m\Phi^{-1}\Phi'^2\Psi' + A\Phi^m\Psi^{l-2}\Phi'^3, \\
\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi = 3\alpha A\Phi^{m+1}\Psi^{l-2}\Phi'^2 + (l-1)\alpha\Phi\Psi^{-1}\Psi'^2 + \\
\qquad + m\beta\Phi^{-1}\Psi\Phi'^2 + 2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi', \\
\beta(\alpha\beta + 2\alpha - \beta - a + 2b)\Psi\Phi' - \alpha(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b)\Phi\Psi' = \\
\qquad = 3\alpha^2 A\Phi^{m+2}\Psi^{l-2}\Phi', \\
\alpha\beta(\alpha-\beta)\Phi\Psi + (\alpha\Phi\Psi' - \beta\Psi\Phi')\left[a^2 Bz^{\mu} + b(a-b)z\right] = \alpha^3 A\Phi^{m+3}\Psi^{l-2}.
\end{cases}
\tag{2.3.10}
$$

Подстановка $\tau = \Phi(z)$, $\psi = \Psi(z)$ в первое и третье уравнения системы (2.3.10) приводит к двум ОДУ относительно функции $\psi(\tau)$:

$$
\psi'' = (l-1)\psi^{-1}\psi'^2 + m\tau^{-1}\psi' + A\tau^m\psi^{l-2}, \tag{2.3.11}
$$

$$
\beta(\alpha\beta + 2\alpha - \beta - a + 2b)\psi - \alpha(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b)\tau\psi' = 3\alpha^2 A\tau^{m+2}\psi^{l-2}.
$$

Выразим из последнего уравнения ψ' и вычислим ψ'':

$$
\psi' = \frac{\beta(\alpha\beta + 2\alpha - \beta - a + 2b)\psi - 3\alpha^2 A\tau^{m+2}\psi^{l-2}}{\alpha(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b)\tau},
$$

$$
\psi'' = \frac{1}{\alpha(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b)}\Big[-\beta(\alpha\beta + 2\alpha - \beta - a + 2b)\tau^{-2}\psi + \beta(\alpha\beta + 2\alpha -
$$

$$
- \beta - a + 2b)\tau^{-1}\psi' - 3\alpha^2(m+1)A\tau^m\psi^{l-2} - 3\alpha^2(l-2)A\tau^{m+1}\psi^{l-3}\psi'\Big].
$$

Выражение, стоящее в знаменателе, легко видеть, отлично от нуля. Действительно, при $\alpha = 0$ последнее уравнение системы (2.3.10) невыполнимо при $a \neq 0$. При $\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b = 0$ третье уравнение системы (2.3.10) влечет за собой равенство нулю якобиана J (2.3.6). Подставим найденные выражения в (2.3.11), в результате, после сокращения на $\tau^{-2}\psi$, получим алгебраическое уравнение с постоянными коэффициентами относительно переменной $\rho = \tau^{m+2}\psi^{l-3} = \Phi^{-\beta}\Psi^{\alpha} \neq \text{const}$ вида:

$$
C_0 + C_1\rho + C_2\rho^2 = 0.
$$

Приравнивание нулю коэффициентов C_i приводит к равенству

$$C_2 = \frac{-9\alpha^4 A^2}{\alpha^2(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b)^2} = 0,$$

которое невозможно при $\alpha \neq 0$. Таким образом, доказана несовместность системы (2.3.10).

Случаи $\lambda = 0,\ \dfrac{n-1}{n} = 2$ и $\lambda = 0,\ \dfrac{n-1}{n} = 3$ полностью аналогичны рассмотренному. Так при $\lambda = 0,\ \dfrac{n-1}{n} = 2$ определяющая система, состоящая из четырех ОДУ, содержит уравнения:

$$\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'' = \left[(l-1)\Psi^{-1} - A^{-1}\Phi^{-m}\Psi^{-l}\right]\Phi'\Psi'^2 + m\Phi^{-1}\Phi'^2\Psi',$$

$$\beta(\alpha\beta + \beta - 2\alpha - a + 2b)\Psi\Phi' - \alpha(\alpha\beta + \alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' =$$
$$= -A^{-1}\Phi^{-m}\Psi^{-l}\left[\beta^2\Psi^2\Phi' + 2\alpha\beta\Phi\Psi\Psi'\right].$$

Положим $\alpha \neq 0$, в противном случае последнее уравнение влечет за собой равенство нулю якобиана J (2.3.6). Повторяя схему предыдущих вычислений, получим алгебраическое уравнение с постоянными коэффициентами относительно переменной $\rho = \tau^{-m}\psi^{1-l} = \Phi^{\beta}\Psi^{-\alpha} \neq \text{const}$ вида:

$$C_0 + C_1\rho + C_2\rho^2 + C_3\rho^3 + C_4\rho^4 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты C_i, находим, что равенству

$$C_4 = 2A^{-4}\beta^5\alpha = 0$$

невозможно удовлетворить при $\alpha \neq 0,\ \beta = -m \neq 0$.

При $\lambda = 0,\ \dfrac{n-1}{n} = 3$ определяющая система содержит уравнения:

$$\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'' = (l-1)\Psi^{-1}\Phi'\Psi'^2 + m\Phi^{-1}\Phi'^2\Psi' - \frac{1}{2}A^{-2}\Phi^{-2m}\Psi^{1-2l}\Psi'^3, \tag{2.3.12}$$

$$\beta\left(\alpha\beta+\frac{1}{2}\beta-\alpha-a+2b\right)\Psi\Phi'-\alpha\left(\alpha\beta+\frac{1}{2}\alpha-\beta-a+2b\right)\Phi\Psi'=$$

$$=-\frac{3}{2}\beta^2A^{-2}\Phi^{-2m}\Psi^{3-2l}\Psi', \qquad (2.3.13)$$

$$\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi+(\alpha\Phi\Psi'-\beta\Psi\Phi')\left[a^2Bz^{\mu}+b(a-b)z\right]=-\frac{1}{2}\beta^3A^{-2}\Phi^{-2m}\Psi^{4-2l}.$$

$$(2.3.14)$$

Из первых двух уравнений получаем алгебраическое уравнение с постоянными коэффициентами относительно переменной $\rho=\tau^{-2m-1}\psi^{3-2l}=$ $=\Phi^{2\beta}\Psi^{-2\alpha}\neq\mathrm{const}$ вида:

$$C_0+C_1\rho+C_2\rho^2=0.$$

Приравнивание нулю коэффициента C_2 приводит к равенству

$$\frac{9}{4}m\beta^5\left(\alpha\beta+\beta/2-\alpha-a+2b\right)A^{-4}=0,$$

которое возможно либо при $\left(\alpha\beta+\beta/2-\alpha-a+2b\right)=0$, тогда уравнение (2.3.13) влечет за собой равенство нулю якобиана J (2.3.6), либо при $\beta=0$, тогда уравнение (2.3.14) не имеет решений при $a\neq0$.

B. При $\lambda=1,\ \dfrac{n-1}{n}=0$ уравнения определяющей системы после преобразований, аналогичных сделанным в **A**, равносильны следующим:

$$\begin{cases}\Phi'\Psi''-\Psi'\Phi''=(l-1)\Psi^{-1}\Phi'\Psi'^2+m\Phi^{-1}\Phi'^2\Psi'+A\Phi^m\Psi^{l-2}\Phi'^3,\\ \alpha\Phi\Psi''-\beta\Phi''\Psi=3\alpha A\Phi^{m+1}\Psi^{l-2}\Phi'^2+(l-1)\alpha\Phi\Psi^{-1}\Psi'^2+\\ \qquad\qquad +m\beta\Phi^{-1}\Psi\Phi'^2+2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi',\\ aB(\alpha\Phi\Psi'-\beta\Psi\Phi')z^{\mu}+\beta(\alpha\beta+2\alpha-\beta-a+2b)\Psi\Phi'-\\ \qquad -\alpha(\alpha\beta+2\beta-\alpha-a+2b)\Phi\Psi'=3\alpha^2A\Phi^{m+2}\Psi^{l-2}\Phi',\\ \alpha\beta(\alpha-\beta)\Phi\Psi+b(\alpha\Phi\Psi'-\beta\Psi\Phi')(a-b+aBz^{\mu})z=\alpha^3A\Phi^{m+3}\Psi^{l-2}.\end{cases} \qquad (2.3.15)$$

Из последних двух уравнений системы (2.3.15) выразим Φ',Ψ':

$$\Phi' = \frac{-[\alpha(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b) - a\alpha B z^{\mu}]\Phi}{3b[(a-b)z + aBz^{\mu+1}]},$$

$$\Psi' = \frac{-[\beta(\alpha\beta + 2\alpha - \beta - a + 2b) - a\beta B z^{\mu} - 3\alpha^2 A\Phi^{m+2}\Psi^{l-3}]\Psi}{3b[(a-b)z + aBz^{\mu+1}]},$$

а затем вычислим Φ'', Ψ''. Подставив найденные выражения в первые два уравнения системы (2.3.15), прибавим и вычтем в левой части первого уравнения выражение $\alpha\beta(\beta-\alpha)(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b - aBz^{\mu})^3$, в левой части второго – $3\alpha\beta(\beta-\alpha)(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b - aBz^{\mu})^2$. Сгруппировав слагаемые, получим два алгебраических уравнения относительно одной переменной $T(z) = \Phi^{m+2}\Psi^{l-3} = \Phi^{-\beta}\Psi^{\alpha} \neq \text{const}$, которые после сокращения на отличный от нуля общий множитель $\alpha[\beta(\beta-\alpha) + \alpha^2 AT]$ могут быть приведены к виду:

$$9\alpha^2 AT - \frac{9ab\mu Bz^{\mu}(a - b + aBz^{\mu})}{\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b - aBz^{\mu}} + (\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b - aBz^{\mu})^2 +$$

$$+ 3\alpha(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b - aBz^{\mu}) - 3\alpha\beta(\alpha\beta + 2\alpha - \beta - a + 2b - aBz^{\mu}) -$$

$$- 3\beta(2\alpha\beta + \alpha + \beta - 2a + 4b - 2aBz^{\mu}) = 0,$$

$$9\alpha^2 AT + 9b(a - b + (\mu+1)aBz^{\mu}) + 3(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b - aBz^{\mu})^2 -$$

$$- 6(\beta-\alpha)(\alpha\beta + 2\beta - \alpha - a + 2b - aBz^{\mu}) - 3\beta(\alpha+1)(2\alpha\beta + \alpha + \beta - 2a +$$

$$+ 4b) + 12a\alpha\beta Bz^{\mu} = 0.$$

В несовместности этих линейных уравнений убеждаемся, например, приравнивая свободные члены и сравнивая коэффициенты при старшей степени z.

Повторяя вычисления для $\lambda = 1$, $\frac{n-1}{n} = 2$ и для $\lambda = 1$, $\frac{n-1}{n} = 3$, приходим к аналогичному заключению. Выпишем лишь получившиеся при решении определяющих систем несовместные алгебраические уравнения.

Если $\lambda = 1,\ \dfrac{n-1}{n} = 2$, имеем следующие два уравнения относительно одной переменной $T(z) = \Phi^{-m}\Psi^{1-l} = \Phi^{\beta}\Psi^{-\alpha} \neq$ const:

$$\frac{2}{3}\beta^{3}A^{-3}T^{3} + \frac{2}{3}\beta^{2}A^{-1}(2\beta A^{-1} - \alpha\beta A^{-1} - 2aA^{-1} + 4bA^{-1} - 2aA^{-1}Bz^{\mu} - \alpha)T^{2} +$$
$$+\beta A^{-1}\Big[(\alpha\beta + \alpha - 2\beta - a + 2b - aBz^{\mu})(2\alpha\beta - \alpha) + 2\beta(\alpha\beta + \beta - 2\alpha - a + 2b -$$
$$- aBz^{\mu})\Big]T + 3ab\mu Bz^{\mu}(a - b + aBz^{\mu}) - \frac{1}{3}(\alpha\beta + \alpha - 2\beta - a + 2b - aBz^{\mu})(\alpha\beta +$$
$$+\beta - 2\alpha - a + 2b - aBz^{\mu})(5\alpha\beta + \beta - 5\alpha - a + 2b - aBz^{\mu}) = 0, \qquad (2.3.16)$$

$$\beta^{2}A^{-2}T^{2} - \beta A^{-1}(2\alpha - 2\beta + \alpha\beta)T - (\alpha\beta + \beta - 2\alpha - a + 2b - aBz^{\mu})(\alpha\beta -$$
$$-\beta - a + 2b - aBz^{\mu}) + \alpha\beta(2\alpha\beta - \alpha - \beta - 2a + 4b - 2aBz^{\mu}) - 3\Big(a - b +$$
$$+ a(\mu + 1)Bz^{\mu}\Big) - \alpha - 3\beta^{2} = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$T_{1,2} = \frac{2\alpha - 2\beta + \alpha\beta \pm U^{1/2}}{2\beta A^{-1}},$$

где $U = (2\alpha - 2\beta + \alpha\beta)^{2} + 4\Big[(\alpha\beta + \beta - 2\alpha - a + 2b - aBz^{\mu})(\alpha\beta - \beta - a +$

$$+ 2b - aBz^{\mu}) - \alpha\beta(2\alpha\beta - \alpha - \beta - 2a + 4b - 2aBz^{\mu}) + 3\Big(a - b +$$
$$+ a(\mu + 1)Bz^{\mu}\Big) + \alpha + 3\beta^{2}\Big].$$

Подставляя найденные значения $T_{1,2}$ в уравнение (2.3.16), убеждаемся в несовместности этих уравнений.

Если $\lambda = 1,\ \dfrac{n-1}{n} = 3$ имеем два несовместных линейных уравнения относительно $T = \Phi^{-2m-1}\Psi^{3-2l} = \Phi^{2\beta}\Psi^{-2\alpha} \neq$ const:

$$\frac{9}{4}\beta^2 A^{-2}\left(2\beta+1\right)T+\frac{18ab\mu Bz^{\mu}(a-b+aBz^{\mu})}{2\alpha\beta+\beta-2\alpha-2a+4b-2aBz^{\mu}}-$$

$$-\frac{1}{4}(2\alpha\beta+\beta-2\alpha-2a+4b-2aBz^{\mu})^2+\frac{3}{2}\alpha\beta(2\alpha\beta+\alpha-2\beta-$$

$$-2a+4b-2aBz^{\mu})+\frac{3}{4}\beta^2(2\alpha\beta+\beta-2\alpha-2a+4b-2aBz^{\mu})-\frac{3}{4}\alpha(4\alpha\beta-$$

$$-\beta-\alpha-4a+8b-4aBz^{\mu})=0, \qquad (2.3.17)$$

$$\frac{9}{4}\beta^2 A^{-2}(2\beta+1)T-\frac{3}{4}(2\alpha\beta+\beta-2\alpha-2a+4b-2aBz^{\mu})^2+$$

$$+\frac{3}{4}\alpha(4\alpha\beta-\beta-\alpha-4a+8b-4aBz^{\mu})(2\beta-1)+\frac{3}{2}(\beta-\alpha)(2\alpha\beta+$$

$$+\beta-2\alpha-2a+4b-2aBz^{\mu})-9b\left[a-b+a(\mu+1)Bz^{\mu}\right]=0. \qquad (2.3.18)$$

Выше предполагалось, что $ab\neq 0$. Пусть $a=0$, $b\neq 0$ (случай $a\neq 0$, $b=0$ получается действием преобразования годографа (1.3.8) на преобразованное уравнение класса D), тогда преобразование (2.3.5) записывается как

$$s=u^{\frac{\alpha}{b}}\Phi(t), \quad v=u^{\frac{\beta}{b}}\Psi(t) \qquad (2.3.19)$$

Значения $\alpha=0$, $\beta=0$ следует исключить из рассмотрения, так как при этом одна из частных производных g_u, f_u обращается в нуль. Определяющее уравнение представимо в инвариантах t, $w=u^{-1}\dot{u}$ оператора $X=$ $=bu\partial_u$:

$$\frac{B}{b}(\beta\Psi\Phi'-\alpha\Phi\Psi')t^{\nu}w^{\lambda}+\frac{\alpha\beta}{b^3}(\beta-\alpha)\Phi\Psi w^3+\frac{1}{b^2}\left[\beta(\beta-b)\Psi\Phi'-\alpha(\alpha-\right.$$

$$\left.-b)\Phi\Psi'+2\alpha\beta(\Phi\Psi'-\Psi\Phi')\right]w^2+\frac{1}{b}\left[\alpha\Phi\Psi''-\beta\Psi\Phi''+2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi'\right]w+$$

$$+\Phi'\Psi''-\Psi'\Phi''=\frac{(l-1)}{b^3}(b\Phi'+\alpha\Phi w)(b\Psi'+\beta\Psi w)^2\Psi^{-1}+$$

$$+\frac{m}{b^3}(b\Phi'+\alpha\Phi w)^2(b\Psi'+\beta\Psi w)\Phi^{-1}+$$

$$+\frac{n}{b^3}A^{\frac{1}{n}}(b\Psi'+\beta\Psi w)^{\frac{n-1}{n}}(b\Phi'+\alpha\Phi w)^{3-\frac{n-1}{n}}\Phi^{\frac{m}{n}}\Psi^{\frac{l-1}{n}-1}. \qquad (2.3.20)$$

“Расщепляя” (2.3.20) по степеням переменной w, убеждаемся в том, что при $\lambda\in\{0,\,1,\,2\}$, $\frac{n-1}{n}\in\{0,\,2,\,3\}$ определяющая система содержит уравнение (полученное приравниванием нулю коэффициента при w^3) вида:

$$\alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi=(l-1)\alpha\beta^2\Phi\Psi+m\alpha^2\beta\Phi\Psi+CnA^{\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{m+2n+1}{n}}\Psi^{\frac{l-2}{n}}, \qquad (2.3.21)$$

где C – некоторая постоянная. Уравнение (2.3.21) после очевидных преобразований приводит к равенству $\Phi^{-\beta}\Psi^{\alpha}=\mathrm{const}$, из которого следует равенство нулю якобиана преобразования (2.3.19).

Если $\lambda=3$, $\frac{n-1}{n}=0$, тогда определяющая система

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha\beta(\beta-\alpha)\Phi\Psi+b^2B(\beta\Psi\Phi'-\alpha\Phi\Psi')t^{\nu}=(l-1)\alpha\beta^2\Phi\Psi+m\alpha^2\beta\Phi\Psi+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\alpha^3A\Phi^{m+3}\Psi^{l-2},\\
&\beta(\beta-2\alpha-b)\Phi'\Psi-\alpha(\alpha-2\beta-b)\Phi\Psi'=(l-1)(\beta^2\Psi^2\Phi'+2\alpha\beta\Phi\Psi\Psi')\Psi^{-1}+\\
&\qquad\qquad+m(\alpha^2\Phi^2\Psi'+\alpha\beta\Phi\Psi\Phi')\Phi^{-1}+3\alpha^2A\Phi^{m+2}\Psi^{l-2},\\
&\alpha\Phi\Psi''-\beta\Psi\Phi''+2(\beta-\alpha)\Phi'\Psi'=(l-1)\left(2\beta\Psi\Phi'\Psi'+\alpha\Phi\Psi'^2\right)\Psi^{-1}+\\
&\qquad\qquad+m\left(2\alpha\Phi\Phi'\Psi'+\beta\Psi\Phi'^2\right)\Phi^{-1}+3\alpha A\Phi^{m+1}\Psi^{l-2}\Phi'^2,\\
&\Phi'\Psi''-\Psi'\Phi''=(l-1)\Psi^{-1}\Phi'\Psi'^2+m\Phi^{-1}\Phi'^2\Psi'+A\Phi^m\Psi^{l-2}\Phi'^3
\end{aligned}\right.$$

совпадает с системой (2.3.9) (записанной в обратном порядке), если в (2.3.9) положить $b=0$, заменить z^{μ} на t^{ν}, а затем сделать переобозначение $a=b$, что не изменяет окончательного вывода о несовместности системы. Проверка показывает, что при $\lambda=3$, $\frac{n-1}{n}=2$ и при $\lambda=3$,

$\frac{n-1}{n}=3$ определяющая система совпадает с определяющими системами, полученными соответственно для $\lambda = 0,\ \frac{n-1}{n}=2$ и для $\lambda = 0,\ \frac{n-1}{n}=3$ (с аналогичными изменениями).

Перейдем к рассмотрению алгебр операторов размерности $r \ge 2$. Основная алгебра Ли, допускаемая уравнениями промежуточного класса D_1, расширяется до размерности $r \ge 2$, если $m = 0$ или $m = \frac{5-3l}{2l-3}$ при $n = 1$ и при $n = -\frac{1}{2}$, или $|l-n-2|+|n+m+1| = 0$. В силу свойств точечных преобразований, подкласс уравнений (2.3.1) с алгеброй операторов размерности $r \ge 2$ при преобразовании (2.3.3) может отобразиться только в подкласс уравнений

$$\ddot{u} = Bt^{\nu}u^{\mu}\dot{u}^{\lambda}, \tag{2.3.22}$$

также обладающий r-мерной алгеброй (то есть $\nu = 0$ или $\mu = 0$, или $|\lambda - - \nu - 2| + |\mu + \lambda - 1| = 0$, или $\mu + \nu + 3 = 0$ при $\lambda = 0$ и при $\lambda = 3$). Заметим, что при $m = 0$ и, как легко видеть, при $|l-n-2|+|n+m+1| = 0$ исходное уравнение $y'' = Ax^n y^m y'^{\,l}$ также допускает алгебру Ли размерности $r \ge 2$, а значит, преобразованиями Беклунда оказались бы связаны разрешимые уравнения класса D, такие случаи мы не рассматриваем. Поэтому в дальнейшем считаем $m = \frac{5-3l}{2l-3}$, $n \in \left\{-\frac{1}{2};1\right\}$ (допускаемая основная алгебра двухмерна) и, по-прежнему, $\Phi'\Psi' \ne 0$.

Пусть в (2.3.22) $\nu = 0$ ($\lambda \ne 2,3$), базис допускаемой этим уравнением алгебры Ли составляют операторы $X_1 = (\mu+\lambda-1)t\partial_t + (\lambda-2)u\partial_u$, $X_2 = \partial_t$. Из доказательства замечания 2 параграфа 2 главы 1 следует, что достаточно зафиксировать один базисный оператор уравнения (2.3.1), например $Y_1 = \alpha s\partial_s + \beta v\partial_v$, $\alpha = l - n - 2$, $\beta = -n - m - 1$ и для него предположить

$$Y_1 \to \widetilde{X}_1,$$

где $\widetilde{X} = p_1 X_1 + p_2 X_2 = (at + p_2)\partial_t + bu\partial_u$, $a = p_1(\mu + \lambda - 1)$, $b = p_1(\lambda - 2)$, p_1, p_2 – некоторые постоянные. Применяя формулы (1.2.3) преобразования координат оператора при замене переменных, находим, полагая $a \neq 0$

$$s = (at + p_2)^{\frac{\alpha}{a}}\Phi(z),\ v = (at + p_2)^{\frac{\beta}{a}}\Psi(z), \qquad (2.3.23)$$

где $z = (at + p_2)^{-\frac{b}{a}} u$. Функции Φ, Ψ должны удовлетворять определяющему уравнению, которое записывается в инвариантах z, $w = (at + p_2)^{\frac{a-b}{a}}\dot{u}$ оператора $\widetilde{X}$:

$$B(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Phi'\Psi)z^{\mu}w^{\lambda} + (\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi')w^3 + \big[\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi -$$
$$- 3bz(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi') + 2(\beta - \alpha)\Phi'\Psi'\big]w^2 + \big[\beta(\beta - 2\alpha - a + 2b)\Phi'\Psi -$$
$$- \alpha(\alpha - 2\beta - a + 2b)\Phi\Psi' + 4b(\alpha - \beta)z\Phi'\Psi' + 2bz(\beta\Phi''\Psi - \alpha\Phi\Psi'') +$$
$$+ 3b^2z^2(\Phi'\Psi'' - \Phi''\Psi')\big]w + \big[\alpha\beta(\beta - \alpha)\Phi\Psi - b\ \beta(b + \beta - 2\alpha)z\Psi\Phi' +$$
$$+ b\alpha(b + \alpha - 2\beta)z\Phi\Psi' + 2b^2(\beta - \alpha)z^2\Phi'\Psi' + b^2z^2(\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Phi''\Psi) +$$
$$+ b^3z^3(\Phi''\Psi' - \Phi'\Psi'')\big] =$$
$$= (l-1)(\alpha\Phi - bz\Phi' + \Phi'w)(\beta\Psi - bz\Psi' + \Psi'w)^2\Psi^{-1} +$$
$$+ m(\alpha\Phi - bz\Phi' + \Phi'w)^2(\beta\Psi - bz\Psi' + \Psi'w)\Phi^{-1} +$$
$$+ nA^{\frac{1}{n}}\Phi^{\frac{m}{n}}\Psi^{\frac{l-1}{n}-1}(\beta\Psi - bz\Psi' + \Psi'w)^{\frac{n-1}{n}}(\alpha\Phi - bz\Phi' + \Phi'w)^{3-\frac{n-1}{n}}.$$
$$(2.3.24)$$

Очевидно, что при рассматриваемых значениях n параметр λ может принимать значения из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

Если $\lambda = 0$, тогда определяющая система, полученная “расщеплением” по степеням w уравнения (2.3.24), при $n = 1$ совпадает с системой (2.3.9) со следующей поправкой (которая не влияет на вывод о несовместности системы): в (2.3.9) вместо произведения aB следует писать B. При $n = -\frac{1}{2}$ определяющая система содержит уравнения (2.3.12) и (2.3.13), следовательно, решений не имеет.

Пусть $\lambda = 1$, тогда при $n = 1$ определяющая система после упрощения совпадает с системой (2.3.15), а при $n = -\frac{1}{2}$ – содержит уравнения (2.3.17) и (2.3.18) (с аналогичной поправкой).

При $\nu = 0, \lambda = 2;3$ уравнение (2.3.23) допускает алгебру Ли размерности $r = 8$ согласно классическим теоремам Ли.

Пусть $p_1 = 0$ (то есть $a = 0$), тогда условие

$$Y_1 \to pX_2$$

определяет преобразование

$$s = e^{\frac{\alpha}{p}t}\Phi(u),\ \ v = e^{\frac{\beta}{p}t}\Psi(u).$$

Функции Φ, Ψ конкретизируются определяющим уравнением, которое представимо в инвариантах u, $\dot{u}$ оператора pX_2:

$$\frac{B}{p}(\alpha\Phi\Psi' - \beta\Psi\Phi')u^{\mu}\dot{u}^{\lambda} + (\Phi'\Psi'' - \Psi'\Phi'')\dot{u}^3 + \frac{1}{p}[\alpha\Phi\Psi'' - \beta\Psi\Phi'' +$$

$$+ 2(\beta - \alpha)\Phi'\Psi']\dot{u}^2 + \frac{1}{p^2}\left[\beta(\beta - 2\alpha)\Psi\Phi' - \alpha(\alpha - 2\beta)\Phi\Psi'\right]\dot{u} + \frac{\alpha\beta}{p^3}(\beta - \alpha)\Phi\Psi =$$

$$= \frac{(l-1)}{p^3}(\alpha\Phi + p\Phi'\dot{u})^2(\beta\Psi + p\Psi'\dot{u})\Psi^{-1} + \frac{m}{p^3}(\alpha\Phi + p\Phi'\dot{u})(\beta\Psi + p\Psi'\dot{u})^2\Phi^{-1} +$$

$$+ \frac{n}{p^3}A^{\frac{1}{n}}(\alpha\Phi + p\Phi'\dot{u})^{3-\frac{n-1}{n}}(\beta\Psi + p\Psi'\dot{u})^{\frac{n-1}{n}}\Phi^{\frac{m}{n}}\Psi^{\frac{l-n-1}{n}}. \qquad (2.3.25)$$

Очевидно, что $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$. Если $\lambda = 0$, тогда определяющая система при $n = 1$ возвращает нас к системе (2.3.9), в первых трех уравнениях которой необходимо положить $a = b = 0$, а в последнем – $a = p$, $b = 0$, и всюду заменить z на u. При $n = -\frac{1}{2}$ определяющая система содержит уравнения (2.3.12), (2.3.13) (с аналогичной поправкой). Произведенные изменения не влияют на вывод о несовместности определяющих систем.

Если $\lambda = 1$, тогда в определяющую систему входит уравнение вида (2.3.21).

Из сказанного, используя точечную ДМП, допускаемую уравнениями (2.3.22), заключаем, что для $\nu = 0$, а также для $\mu = 0$ (в силу r-преобразования), для $\nu + \mu + 3 = 0$ при $\lambda = 0$, $\lambda = 3$ (следует из случая $\nu = 0$, $\lambda = 0$ в силу s- и sr-преобразований), для $|\lambda + \nu - 2| + |\mu + \lambda - 1| = 0$ (в этом случае определяющее уравнение совпадает с уравнением (2.3.7) с заменой $a = p_1$, $b = p_2$) решение определяющего уравнения существует только в предположении $\Phi'\Psi' = 0$. Таким образом, несмотря на кажущиеся дополнительные возможности, вытекающие из увеличения размерности допускаемой алгебры по сравнению с общим случаем, определяющее уравнение имеет решением только то точечное преобразование, которое привело к образующей g (2.3.8).

В заключение отметим, что применение *RF*-пары (Y, Y) к классу D (2.2.12) ОУЭФ приводит к промежуточному классу D_2 уравнений вида

$$h'' = lh^{-1}h'^2 + ns^{-1}h' + mA^{\frac{1}{m}}s^{\frac{n}{m}}h^{\frac{l}{m}+1}h'^{\frac{m-1}{m}}.$$

Легко видеть, что классы D_2 и D_1 связаны между собой точечным преобразованием

$$s = s, \ h = \mathsf{v}^{-1}.$$

Следовательно, все выводы, которые мы сделали для класса D_1, распространяются и на класс D_2. Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

***Теорема* 2.2.** Дискретная метагруппа преобразований, допускаемая классом D обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (2.2.12), заданная образующей (2.3.8), максимальна в подклассе преобразований Беклунда, найденном при помощи RF-пар (X, X), (Y, Y).

§ 4. Описание алгоритма

Суммируя изложенное, перечислим основные этапы процесса построения ДМП заданного класса уравнений методом следа.

1. Нахождение непрерывных групп инвариантности многообразий, заданных уравнениями исследуемого класса (алгоритм Ли).

2. Построение следа образующих ДМП.

Если основная алгебра операторов имеет размерность $r > 0$, то применяя теорему о подобии однопараметрических групп (теорема 7), замечание 2 параграфа 2 первой главы и формулы преобразования координат оператора при замене переменных (формулы (1.2.3), (2.2.2)), конкретизировать вид преобразований, составляющих ДМП. При $r = 0$ метод не применим.

3. Понижение размерности определяющего уравнения.

На основании леммы 1.1, теорем 1.1 и 2.1 записать определяющее уравнение в инвариантах базисного оператора.

4. Анализ и решение определяющего уравнения.

5. Запись решений в исходных переменных.

Заметим, что при поиске точечной ДМП, допускаемой классом уравнений второго порядка, или отображений различных классов определяющая система, записанная в инвариантах, содержит как минимум четыре ОДУ, а с увеличением порядка исследуемых уравнений число уравнений, входящих в определяющую систему, резко возрастает (для уравнений третьего порядка их не меньше десяти), в силу чего она всегда принципиально решается.

Метод применим также для поиска отображений, связывающих различные классы.

§ 5. Пример использования оператора непрерывной группы для поиска экспоненциальных нелокальных операторов

В настоящем параграфе показана возможность применения априорной непрерывной точечной симметрии для нахождения экспоненциальных нелокальных операторов заданного вида, допускаемых уравнением Эмдена-Фаулера

$$y'' = Ax^n y^m. \tag{2.5.1}$$

***Определение* 2.3.** Экспоненциальным нелокальным оператором (ЭНО) называют оператор

$$X_N = e^{\int \zeta(x,y)dx}\left[\xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y\right], \tag{2.5.2}$$

где интегрирование выполняется и по неявно входящей переменной x, то есть $D\left[\int \zeta(x,y)dx\right] = \zeta(x,y)$, D – оператор полного дифференцирования.

Упоминание о нелокальных операторах вида (2.5.2) встречается в работах [27,39], где эти операторы возникают как результат примеров “неправильного” понижения порядка уравнения. Поясним, что процедуру понижения порядка уравнения, проводимую с помощью допускаемого оператора Y (на основании теоремы 6), считают неправильной, если оператор Y порождает подалгебру, не образующую идеал основной алгебры Ли точечных операторов, при этом некоторые базисные операторы переходят в ЭНО. Дальнейшая попытка сведения получившегося уравнения к автономному с помощью замены переменных, найденной приведением ЭНО к оператору переноса в соответствии с теоремой 7, приводит к неудаче: возникает необходимость решения системы интегродифференциальных уравнений. Тем не менее, в работах [15, 22] показано, что экспоненциальные нелокальные операторы можно результативно применять для исследования ОДУ путем сведения его к системе уравнений специального вида.

Существенное отличие операторов (2.5.2) от точечных состоит ещё и в том, что поиск экспоненциальных нелокальных операторов, допускаемых заданным уравнением, приводит к нелинейным определяющим системам (теряется основное преимущество поиска непрерывных симметрий над дискретными).

Для нахождения экспоненциальных нелокальных операторов, допускаемых уравнением (2.5.1), запишем второе продолжение оператора (2.5.2)

$$\underset{(2)}{X_N} = X_N + \zeta_1 \partial_{y'} + \zeta_2 \partial_{y''},$$

где ζ_1, ζ_2 вычисляются по обычным формулам продолжения:

$$\zeta_1 = D(e^{\int \zeta dx} \eta) - y' D(e^{\int \zeta dx} \xi), \quad \zeta_2 = D(\zeta_1) - y'' D(e^{\int \zeta dx} \xi).$$

Определяющее уравнение $\underset{(2)}{X_N} (y'' - Ax^n y^m) \Big|_{y''=Ax^n y^m} = 0$ представляется в виде

$$e^{\int \zeta dx} \Big\{ - nAx^{n-1} y^m \xi - mAx^n y^{m-1} \eta + \eta\zeta_x + \eta\zeta_y y' - \xi\zeta_x y' - \xi\zeta_y y'^2 + 2\eta_x \zeta +$$

$$+ 2\zeta\eta_y y' - 2\xi_x \zeta y' - 2\xi_y \zeta y'^2 + \eta\zeta^2 - \xi\zeta^2 y' + \eta_{xx} + 2\eta_{xy} y' + \eta_{yy} y'^2 - \xi_{xx} y' -$$

$$- 2\xi_{xy} y'^2 - \xi_{yy} y'^3 + (\eta_y - 2\xi\zeta - 2\xi_x - 3\xi_y y') Ax^n y^m \Big\} = 0. \qquad (2.5.3)$$

Учитывая наличие априорной симметрии уравнения (2.5.1), будем искать решения нелинейного уравнения (2.5.3) вида

$$\zeta = x^p \Psi(z), \quad \xi = x^s F(z), \quad \eta = x^r \Phi(z), \qquad (2.5.4)$$

где p, s, r – некоторые постоянные, $z = x^{-\frac{b}{a}} y$ – инвариант допускаемого уравнением (2.5.1) оператора $X = ax\partial_x + by\partial_y$, $a = m - 1$ (считаем $a \neq 0$), $b = -n - 2$. Подставив выражения (2.5.4) в определяющее уравнение (2.5.3), перейдем в (2.5.3) от переменных x, y, y' к переменным x, z, w ($w = x^{\frac{a-b}{a}} y'$ является дифференциальным инвариантом оператора X), получим следующее уравнение (отличный от нуля общий множитель $e^{\int \zeta dx}$ не записываем):

$$
\begin{aligned}
& -nAFz^m x^{s+\frac{b}{a}-3} - mA\Phi z^{m-1}x^{r-2} + \left(p\Phi\Psi - \frac{b}{a}\Phi\Psi' z\right)x^{r+p-1} + \Phi\Psi' w x^{r+p-1} - \\
& -\left(pF\Psi - \frac{b}{a}F\Psi' z\right)wx^{s+p+\frac{b}{a}-2} - F\Psi' w^2 x^{s+p+\frac{b}{a}-2} + 2\left(r\Phi\Psi - \frac{b}{a}\Psi\Phi' z\right)x^{r+p-1} + \\
& + 2\Psi\Phi' w x^{r+p-1} - 2\left(sF\Psi - \frac{b}{a}\Psi F' z\right)wx^{s+p+\frac{b}{a}-2} - 2\Psi F' w^2 x^{s+p+\frac{b}{a}-2} + \\
& + \Phi\Psi^2 x^{r+2p} - F\Psi^2 wx^{s+2p+\frac{b}{a}-1} + \left[r(r-1)\Phi - \frac{b}{a}r\Phi' z - \frac{b}{a}(r-1)\Phi' z + \right. \\
& \left. + \frac{b^2}{a^2}\Phi'' z^2 + \frac{b^2}{a^2}\Phi' z\right]x^{r-2} + 2\left(r\Phi' - \frac{b}{a}\Phi'' z - \frac{b}{a}\Phi'\right)wx^{r-2} - \left[s(s-1)F - \right. \\
& \left. - \frac{b}{a}sF' z - \frac{b}{a}(s-1)F' z + \frac{b^2}{a^2}F'' z^2 + \frac{b^2}{a^2}F' z\right]wx^{s+\frac{b}{a}-3} - 2\left(sF' - \frac{b}{a}F'' z - \right. \\
& \left. - \frac{b}{a}F'\right)w^2 x^{s+\frac{b}{a}-3} - F'' w^3 x^{s+\frac{b}{a}-3} + A\left[\Phi' x^{r-2} - 2F\Psi x^{s+p+\frac{b}{a}-2} - 2\left(sF - \right.\right. \\
& \left.\left. \qquad - \frac{b}{a}F' z\right)x^{s+\frac{b}{a}-3} - 3F' wx^{s+\frac{b}{a}-3}\right]z^m + \Phi'' w^2 x^{r-2} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.5.5}
$$

Положим $p = -1,\ s = r - \dfrac{b}{a} + 1,$ тогда уравнение (2.5.5) эквивалентно уравнению, в котором отсутствует переменная x. Получившееся уравнение “расщепляется” по степеням переменной w на четыре обыкновенных дифференциальных уравнения с тремя неизвестными функциями F, Φ, Ψ:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
F''=0,\\
-F\Psi'-2\Psi F'+\Phi''-2\left(sF'-\dfrac{b}{a}F''z-\dfrac{b}{a}F'\right)=0,\\
\Phi\Psi'+F\Psi+\dfrac{b}{a}F\Psi'z+2\Psi\Phi'-2sF\Psi+2\dfrac{b}{a}\Psi F'z-F\Psi^2+2r\Phi'-\\
-2\dfrac{b}{a}\Phi''z-2\dfrac{b}{a}\Phi'-(r-\dfrac{b}{a}+1)(r-\dfrac{b}{a})F+\dfrac{b}{a}sF'z+\dfrac{b}{a}(r-\dfrac{b}{a})F'z-\\
\qquad\qquad\qquad\qquad-\dfrac{b^2}{a^2}F''z-\dfrac{b^2}{a^2}F'z-3AF'z^m=0,\\
-nAFz^m-mA\Phi z^{m-1}-\Phi\Psi-\dfrac{b}{a}\Phi\Psi'z+2r\Phi\Psi-2\dfrac{b}{a}\Psi\Phi'z-\\
-2AF\Psi z^m+\Phi\Psi^2+r(r-1)\Phi-\dfrac{b}{a}r\Phi'z-\dfrac{b}{a}(r-1)\Phi'z+\dfrac{b^2}{a^2}\Phi''z^2+\\
\qquad+\dfrac{b^2}{a^2}\Phi'z+A\Phi'z^m-2(r-\dfrac{b}{a}+1)AFz^m+2\dfrac{b}{a}AF'z^{m+1}=0.
\end{array}
\right.
\tag{2.5.6}
$$

При $F\neq 0$ из первых двух уравнений находим $F=cz+d$,

$$
\Psi=F^{-2}\left[C-\left(r-2\frac{b}{a}+1\right)F'^2z^2-2\left(r-2\frac{b}{a}+1\right)F'dz+F\Phi'-\Phi F'\right].
$$

Умножим второе уравнение системы (2.5.6) на $\dfrac{b}{a}z$ и сложим с третьим, получившееся уравнение умножим на тот же множитель и сложим с четвертым, в результате, уравнения, служащие для обнаружения постоянных r, c, d, C и функции Φ, записываются в виде:

$$
\begin{gathered}
-\frac{b}{a}z\Phi''+2\Psi\Phi'+2\left(r-\frac{b}{a}\right)\Phi'+\Phi\Psi'+\left(2\frac{b}{a}-2r-1\right)F\Psi+\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}-1\right)F'z-\\
-F\Psi^2-\left(r-\frac{b}{a}+1\right)\left(r-\frac{b}{a}\right)F-3AF'z^m=0,
\end{gathered}
\tag{2.5.7}
$$

$$
\Phi\Psi^2+\left(\frac{b}{a}z+Az^m-\frac{b^2}{a^2}z\right)\Phi'+\left(r(r-1)-mAz^{m-1}\right)\Phi+(2r-1)\Phi\Psi-
$$

$$
-2AF\Psi z^m-2\left(r-\frac{b}{a}+1\right)AFz^m+\frac{b}{a}\left(2\frac{b}{a}-2r-1\right)F\Psi z+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b}{a}-1\right)F'z^2-
$$

$$-\frac{b}{a}F\Psi^2 z-\left(r-\frac{b}{a}+1\right)\left(r-\frac{b}{a}\right)\frac{b}{a}Fz-\frac{b}{a}AF'z^{m+1}-nAFz^m=0. \tag{2.5.8}$$

Таким образом, нахождение ЭНО с координатами (2.5.4) свелось к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5.7), (2.5.8).

Если $F=0$ из второго уравнения системы (2.5.6) находим $\Phi=cz+d$. Третье уравнение представляет собой линейное неоднородное уравнение относительно Ψ', решая которое, имеем $\Psi=\dfrac{C}{(cz+d)^2}+\dfrac{b}{a}-r,$ где постоянные $C,\ c$ считаем отличными от нуля, так как в противном случае нелокальный оператор вырождается в локальный точечный оператор. Подставив найденные $\Phi,\ \Psi$ в последнее уравнение системы (2.5.6), домножим его на $(cz+d)^3$:

$$-mA(cz+d)^4 z^{m-1}-C(cz+d)^2+\left(\frac{b}{a}-r\right)(cz+d)^4+2\frac{b}{a}\left(r-\frac{b}{a}\right)cz(cz+d)^3+$$

$$+2rC(cz+d)^2+2r\left(\frac{b}{a}-r\right)(cz+d)^4+C^2+\left(\frac{b}{a}-r\right)^2(cz+d)^4+$$

$$+2C(\frac{b}{a}-r)(cz+d)^2+r(r-1)(cz+d)^4+(cz+d)^3\left(-\frac{b}{a}rcz-\frac{b}{a}(r-1)cz+\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{a^2}cz+Acz^m\right)=0. \tag{2.5.9}$$

Если $m\notin\{-3;-2;-1;0\}$ определяющая система содержит уравнение $(1-m)Ac^4=0$ (полученное приравниванием нулю коэффициента при z^{m+3}), которое для $a\neq 0$ $(m\neq 1)$ приводит к тривиальному случаю $A=0$. Если $m\in\{-3;-2;-1\}$ уравнение $mAd^4=0$, полученное приравниванием нулю коэффициента при младшей степени z, приводит к равенству $d=0$. “Расщепляя” (2.5.3), учитывая условие $C\neq 0$, находим единственное возможное значение $m = -3$ и уравнения для обнаружения оставшихся неизвестных

$$\begin{cases} 2\left(r - \dfrac{b}{a}\right) = 0, \\ Cc^2\left(2\dfrac{b}{a} - 1\right) = 0, \\ 4Ac^4 + C^2 = 0, \end{cases} \qquad (2.5.10)$$

Решение системы (2.5.10) существует только при отрицательных значениях A, положим $A = -\alpha^2$, тогда $C = \pm 2\alpha c^2$, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, $r = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, уравнение $y'' = -\alpha^2 y^{-3}$ допускает ЭНО $X_N = e^{\pm 2\alpha \int y^{-2} dx} y\partial_y$.

Наконец, если $m = 0$, проверка показывает, что определяющая система приводит к равенству $C = 0$.

Заметим, что найдя ЭНО конкретного уравнения класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера, мы сможем указать ЭНО всех уравнений, связанных с рассмотренным преобразованиями, являющимися элементами ДМП. Так, применение преобразования годографа (1.3.8) и формулы интегрирования по частям приводит к оператору $X_N = e^{\pm 4\alpha \int x^{-3} y dx} e^{\pm 2\alpha x^{-2} y} x\partial_x$, допускаемому уравнением $y'' = \alpha^2 x^{-3} y'^3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе предложен метод поиска дискретных метагрупп преобразований, допускаемых ОДУ, задающими инвариантные дифференцируемые многообразия. При поиске точечных преобразований и преобразований Беклунда, которые находятся методом *RF*-пар, такой подход впервые позволил доказать максимальность найденных ДМП (т.е. решить задачу структурного максимума), редуцируя задачу к решению переопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая принципиально всегда решается.

Действенность алгоритма, лежащего в основе метода, проиллюстрирована на примере класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера. Знание допускаемых дискретных метагрупп позволило проинтегрировать в аналитической форме большое число уравнений этого класса [21,24], однако вопрос доказательства максимальности ДМП до последнего времени оставался открытым.

Метод может быть применен для исследования дискретных симметрий других объектов, задающих дифференцируемые многообразия, инвариантные относительно непрерывных групп, а также для поиска нелокальных экспоненциальных операторов на таких многообразиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения /Пер. с англ. Под ред. А.М. Эфроса. – Харьков: ОНТИ, 1939. – 719 с.
2. Гросман И., Магнус В. Группы и их графы /Пер. с англ. Под ред. В.Е. Тараканова. – М.: Мир, 1971. – 247 с.
3. Делюкова Я.В. К обоснованию метода следа //Дифференциальные уравнения и приложения: Тез. докл. Первой Международной научно-практической конференции .– СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996. – С. 62.
4. Делюкова Я.В. О понижении размерности определяющего уравнения // РГПУ им. А.И.Герцена. СПб., 1998.– 8 с.– Деп. в ВИНИТИ №3147-В 98 от 30.10.98.
5. Делюкова Я.В., Зайцев В.Ф. Об одном методе решения нелинейной определяющей системы //VII Четаевская конференция: Тез. докл. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 1997. – С. 144.
6. Делюкова Я.В., Зайцев В.Ф. О максимальности дискретных групп преобразований, допускаемых классом обыкновенных дифференциальных уравнений //Средства математического моделирования: Тез. докл. международной конференции . – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997. – С. 19.
7. Делюкова Я.В., Зайцев В.Ф. О максимальности дискретных групп преобразований //Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: Междувед. сб. науч. тр. – М.: МФТИ, 1997. – С. 64 – 72.
8. Делюкова Я.В., Зайцев В.Ф. О максимальности дискретных метагрупп преобразований обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера //РГПУ им. А.И.Герцена. СПб., 1998. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ № 3615-В 98 от 09.12.98.
9. Зайцев В.Ф. К вопросу о конечных группах преобразований нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка //Дифференциальные

уравнения: Сб. тр. математических кафедр désinstitutов РСФСР, вып. 7, Рязань, 1976. – С. 57 – 62.

10. Зайцев В.Ф. О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений //ДАН СССР.– 1988.– Т.299, №3.– С. 542 – 545.
11. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения.–1989.– Т.25, №3.– С. 379 – 387.
12. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ, 1989. – 80 с.
13. Зайцев В.Ф. Группы Ли-Беклунда, допускаемые нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями //Современный групповой анализ: Междувед. сб. науч. тр. – М.: МФТИ, 1993. – С. 33 – 42.
14. Зайцев В.Ф. Высшие симметрии нелинейных ОДУ //Современный групповой анализ и задачи математического моделирования: Труды XI Российского Коллоквиума. – Самара: Изд-во Самарский университет, 1993. – С. 67 – 73.
15. Зайцев В.Ф. Нелокальные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений //Моделирование процессов управления и обработки информации: Междувед. сб. науч. тр. – М.: МФТИ, 1994. – С. 190 – 199.
16. Зайцев В.Ф. Введение в современный групповой анализ. Группы преобразований на плоскости: Учебное пособие к спецкурсу. Ч.1. – СПб., 1996. – 40 с.
17. Зайцев В.Ф. Введение в современный групповой анализ. Уравнения первого порядка и допускаемые ими точечные группы: Учебное пособие к спецкурсу. Ч.2. – СПб., 1996. – 40 с.
18. Зайцев В.Ф., Перес Лопес А., Хакимова З.Н. и др. Современный групповой анализ: методы и приложения. – Л.: ЛИИАН, препринт №107, 1989. – 58 с.

19. Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В., Хакимова З.Н. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений. Точные решения уравнений. – Л.: ЛИИАН, препринт №105, 1989. – 61 с.
20. Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.
21. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464 с.
22. Зайцев В.Ф., Павлюков К.В. К теории экспоненциальных нелокальных симметрий дифференциальных уравнений //Сб. науч. тр. Т.8. – Орел: ОрелГТУ, 1996. – С. 38 – 43.
23. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Изд-во “Факториал”, 1997.–340 с.
24. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Изд-во “Факториал”, 1997.–512 с.
25. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
26. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. – М.: Знание, 1989. – 48 с.
27. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. – М.: Знание, 1991. – 48 с.
28. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // УМН.– 1992. – Т. 47, вып. 4 (286). – С. 83 – 144.
29. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям /Пер с нем. Под ред. Н.Х. Розова. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
30. Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп /Пер.с англ. Под ред. Ю.И. Мерзлякова. – М.: Наука, 1980. – 280 с.

31. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
32. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982.– 271с.
33. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
34. Нерешенные задачи группового анализа: методические указания. Ч.1 // VII Всесоюзный коллоквиум "Современный групповой анализ: методы и приложения." – Красноярск: Изд-во КГУ, 1989. – 16 с.
35. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности //ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, №3. – С. 492 – 495.
36. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. – Новосибирск: НГУ, 1966. – 131 с.
37. Овсянников Л.В. Групповое свойство определяющих уравнений //Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр., вып. 7. – Новосибирск, 1971. – С. 5 – 11.
38. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
39. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / Пер с англ. Под ред. А.Б. Шабата. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
40. Полищук Е. М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. – 214 с.
41. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. – 520 с.
42. Свирщевский С.Р. Симметрии Ли-Беклунда линейных ОДУ и инвариантные линейные пространства //Современный групповой анализ: Междувед. сб. науч. тр. – М.: МФТИ, 1993. – С. 75 – 83.
43. Свирщевский С.Р. Высшие симметрии линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линейные пространства, инвариантные относительно нелинейных операторов. – М.: Институт матем. модел. РАН, препринт №14, 1993. – 24 с.

44. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – 3 т.
45. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1953. – 468 с.
46. Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп. – Харьков – Киев: ОНТИ, 1937. – 176 с.
47. Рудин У. Функциональный анализ /Пер с англ. Под ред. Е.А. Горина. – М.: Мир, 1975. – 445 с.
48. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 432 с.
49. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. – М.: Наука, 1975. – Т.1.
50. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. – М.: Мир, 1975. – Т.2.
51. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований /Пер с англ. Под ред. М.М. Постникова – М.: ИЛ, 1947. – 360 с.
52. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Discrete group methods for integrating equation of non-linear mechanics. – Boca Raton, CRC Press, 1994. – 312 p.
53. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solution for Ordinary Differential Equations. – Boca Raton, CRC Press, 1995. – 721 p.