

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

---

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи  
УДК 517.57

Демидов Александр Сергеевич

# Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва  
2008

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления  
Механико-математического факультета  
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

### **Официальные оппоненты:**

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,  
профессор Плотников Павел Игоревич  
(Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН)

доктор физико-математических наук,  
профессор Афондинов Андрей Леонидович  
(Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН)

доктор физико-математических наук,  
профессор Радкевич Евгений Владимирович  
(Механико-математический факультет МГУ)

### **Ведущая организация**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Защита диссертации состоится 27 февраля 2009 г. в 16<sup>40</sup>  
на заседании диссертационного совета Д 501.001.85  
при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова  
по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы,  
МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Механико-математический факультет, аудитория 16-24

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке  
Механико-математического факультета  
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова  
(Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 23 января 2009 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ  
доктор физико-математических наук,  
профессор

И.Н. Сергеев

# 1. Общая характеристика работы

В диссертации разработан функционально-геометрический метод исследования широкого круга задач со свободной границей для гармонических функций двух переменных. Этот метод заключается во взаимосвязанном анализе функциональных и геометрических характеристик исходных задач со свободной границей и соответствующих им нелинейных задач Римана–Гильберта с нелинейными функциональными ограничениями. Этот метод позволил найти условия существования или несуществования, единственности или неединственности решений рассмотренных в диссертации задач и установить некоторые качественные свойства решений. В диссертации рассмотрены прямая и обратная задачи о равновесии плазмы в токамаке, задача о течениях с минимальным отношением экстремальных значений давления на свободной границе, задача об обтекании криволинейного препятствия, частично поглощающего энергию потока, задача Стокса–Лейбензона для Хиле-Шоу течения. Кроме того, разработанный в диссертации функционально-геометрический метод позволил по-новому подойти к вопросу о высокочастотных асимптотиках для гармонических функций и получить в сильной метрике экспоненциально точные вплоть до границы области асимптотики.

**Актуальность** представленной работы обусловлена как трудностью изучения задач со свободной границей, так и разнообразием важных приложений этого круга задач. К их числу относятся проблемы нелинейной динамики свободной поверхности идеальной жидкости<sup>1</sup>, включая проблему цунами<sup>2</sup>, потенциальные течения однофазных<sup>3</sup> и многофазных сред<sup>4</sup>, кавитационные и струйные течения<sup>5</sup>, задачи фильтрации<sup>6</sup>, экстремальные задачи со свободной границей<sup>7</sup> и ряд других задач<sup>8</sup>.

<sup>1</sup>А.И. Дьяченко, В.И. Захаров, Е.А. Кузнецов (1996) Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости. *Физика плазмы*, Т. 22, № 10, 916–929.

<sup>2</sup>S.Yu. Dobrokhotov, S.Ya. Sekerzh-Zenkovich, B. Tirozzi, B. Volkov (2006) Explicit asymptotics for tsunami waves in framework of the piston model. *Rus. J. Earth. Sci.*, **8**, ES4003, doi: 10.2205/2006 ES000215.

<sup>3</sup>См., например, §3 и §5 диссертации.

<sup>4</sup>См., в частности, следующие работы:

G. Caginalp (1989) Stefan and Hele-Shaw type problems as asymptotics limits of the phase field equations. *Physics Review A* **39**, No. 11, 5887–5896

П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов (1993) Задача Стефана, как предел системы фазового поля. *Дифф. уравнения*, Т. 29, № 3, 461–471

В.Г. Данилов, Г.А. Омелянов, Е.В. Радкевич (1995) Асимптотическое решение системы фазового поля и модефицированная задача Стефана. *Дифф. уравнения* Т. 31, № 3, С. 483–491

G. Caginalp, X. Chen (2000) Convergence of the phase field model to its sharp interface limits. *Eur. J. Appl. Math.* **12**, 20–42.

<sup>5</sup>См., например,

Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло (1964) *Струи, следы и каверны*. “Мир”, Москва

М.И. Гуревич (1979) Теория струй идеальной жидкости. *Отрывные и кавитационные течения*. 2-ое изд., “Наука”, Москва. См. также §4 диссертации.

<sup>6</sup>П.Я. Кочина /П.Я. Полубаринова-Кочина/ (1991). *Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации*. “Наука”, Москва. См. также §4 диссертации.

<sup>7</sup>См., например, §3 и §4 диссертации.

<sup>8</sup>См., в частности, обзор: Дж.Р. Окендон, С.Д. Ховисон (2002) Кочина и Хиле-Шоу в современной

Одной из таких задач является задача, которая была нами поставлена и решена в связи с вопросом, поднятым Е.П. Велиховым в 1972 году о возможности распада на отдельные компоненты связности плазменного разряда. Простейшая задача, соответствующая этому вопросу, такова.

Заданы число  $M > 0$  и симметричная относительно осей  $x$  и  $y$  плоская спрямляемая кривая  $\Gamma$ , ограничивающая односвязную область  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ .

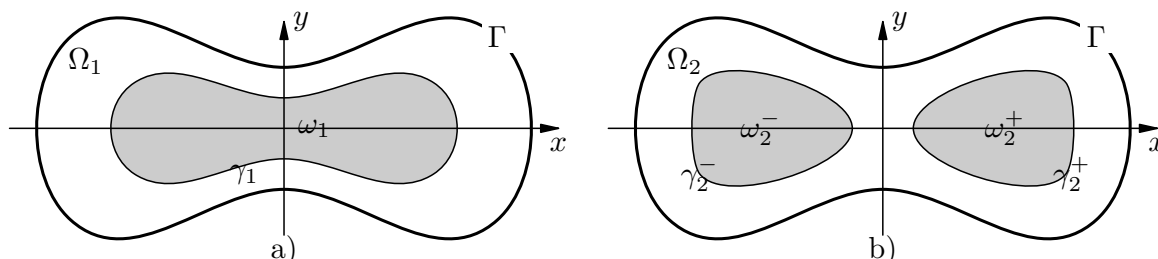


Рис. 1

Требуется выяснить существует ли расположенные в  $\mathcal{S}$  “плазменные” области  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , представляющие ортогональные сечения шнура плазменного разряда, состоящие, соответственно, из одной и двух односвязных компонент связности (см. рис. 1), спрямляемые границы которых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2 = \gamma_2^+ \cup \gamma_2^-$  симметричны относительно осей  $x$  и  $y$ , причем эти области  $\omega_1$  и  $\omega_2$  таковы, что выполнено следующее свойство.

В “вакуумных” областях  $\Omega_1 = \mathcal{S} \setminus (\omega_1 \cup \gamma_1)$  и в  $\Omega_2 = \mathcal{S} \setminus (\omega_2 \cup \gamma_2)$  существуют определенные в  $\Omega_k$ , где  $k = 1$  или  $k = 2$ , гармонические функции  $u = u_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие таким граничным условиям:

$$u|_{\Gamma} = M, \quad u|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = \frac{I}{|\gamma|}. \quad (1)$$

Здесь  $I > 0$  — заданная константа (равная 4 в случае наличия двух осей симметрии), а  $|\gamma|$  — заранее не заданная длина<sup>9</sup> искомого контура  $\gamma = \gamma_k$ .

Функционально-геометрический метод в отношении случая б) этой задачи характеризуется взаимосвязанным изучением таких двух объектов. Это

1) геометрия области  $\Omega = \Omega_2 \cap \mathbb{R}_{++}^2$  (см.<sup>10</sup> рис. 2<sub>b</sub> $\alpha$ ) с заданным углом  $N(s)$  между осью  $x$  и внешней нормалью  $\nu$  к  $\Gamma$  в точке  $P_s \in \Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$  и

2) соответствующая этой геометрии и условию (1) нелинейная задача Римана–Гильберта для аналитической функции  $A + iB$  комплексного переменного  $w = u + iv$ , определенной в прямоугольнике

$$Q = \{0 < u < M, 0 < v < 1\} \iff Q = w(\Omega) \quad (2)$$

и подчиненной таким нелинейным граничным условиям:

$$B(u, 0) = 0, \quad B(M, v) = \varphi(v), \quad B(u, 1) = \psi_*(u), \quad B_u(0, v) = 0. \quad (3)$$

математике, естественных науках и технике. *Прикл. Мат. и Механика*, Т. 66, вып. 3, 515–524.

<sup>9</sup>Нормальная производная  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma}$  определена почти всюду, ввиду сделанного предположения о спрямляемости  $\gamma$ .

<sup>10</sup>Здесь и ниже  $\mathbb{R}_{++}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x > 0, y > 0\}$ .

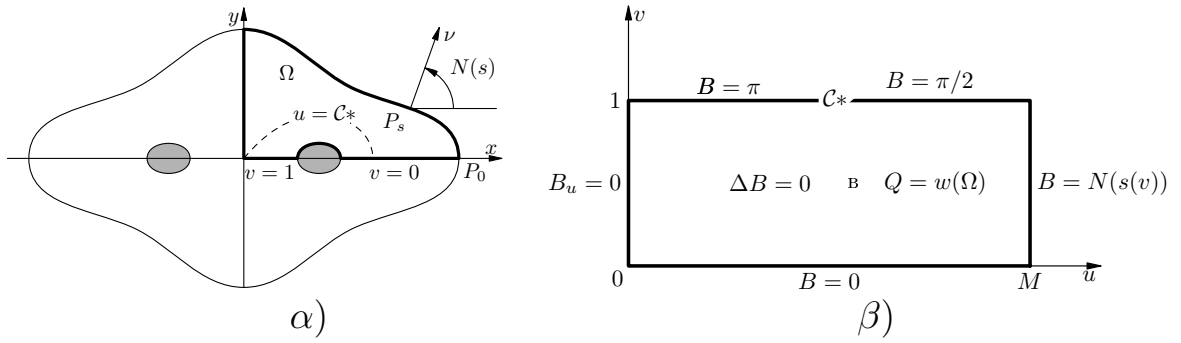


Рис. 2b. Сепаратриса  $\{(x, y) \in \Omega_2 \mid u(x, y) = C_*\}$  проходит через начало координат. Она разделяет топологически различные типы линий уровня функции  $u : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Через  $\Omega$  обозначена область  $\Omega_2 \cap \mathbb{R}_{++}^2$ .

$$\text{Здесь } \varphi(v) = N(s(v)), \quad s(v) = \int_0^v e^{A(M,\eta)} d\eta, \quad s(1) = |\Gamma|/4.$$

$$\psi_*(u) = \pi/2 \quad \text{при } C_* < u < M, \quad \psi_*(u) = \pi \quad \text{при } 0 < u < C_*,$$

а число  $C_*$  (заключенное между нулем и  $M$ ) характеризуется тем, что выполнено следующее нелинейное функциональное ограничение:

$$J(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^v \cos B(0, \eta) d\eta \begin{cases} = 0 & \text{при } v = 1 \\ > 0 & \text{при } v \in (0, 1). \end{cases} \quad (4)$$

Отметим здесь же, что рассмотрение поставленной задачи в случае а), т.е. задачи (иллюстрируемой на рис. 1а) о существовании кривой  $\gamma = \gamma_1$ , гомеоморфной окружности, связано с задачей Римана-Гильберта для функции  $A+iB$  в том же прямоугольнике  $Q$ , при тех же граничных условиях (3), но при ином функциональном ограничении, а именно:

$$C_* = 0, \quad \text{а} \quad J(v) > 0 \quad \text{при } 0 < v \leq 1. \quad (5)$$

В случае задачи Римана-Гильберта для аналитической функции  $A+iB$ , подчиненной необходимым условиям разрешимости (3) и (4) или же необходимым условиям (3) и (5) термин функционально-геометрический метод означает не только то, что указанные необходимые условия были получены на основе геометрических рассуждений, учитывающих геометрический смысл вещественной и мнимой частей функции  $A+iB$ , названной в диссертации функцией Гельмгольца-Кирхгофа. Термин “функционально-геометрический метод” в данном случае означает также следующее:

i) анализ условий (3) и (5), использующий эллиптическую теорию, теорию интеграла Лебега, а также вариант теории степени отображений Лере-Шаудера, учитывающий (что особенно важно) геометрические характеристики исходной задачи со свободной границей;

ii) анализ условий (3) и (4) с помощью принципа максимума для эллиптических уравнений.

Это позволило установить, что при  $0 \leq N(s) \leq \pi/2$  есть разрешимость исходной задачи со свободной границей  $\gamma = \gamma_1$ , гомеоморфной окружности, но не существует области  $\omega = \omega_2$  с границей  $\gamma = \gamma_2$  (как на рис. 2).

**Цели диссертации** таковы.

Во-первых, разработка функционально-геометрического метода исследования широкого круга задач со свободной границей для гармонических функций, изучение которых ранее вызывало затруднения.

Важный класс таких задач характеризует следующее

*Условие Гельмгольца*<sup>11</sup>. Пусть  $w = u + iv$  — комплексный потенциал скорости  $\vec{V} = \nabla u$  течения несжимаемой жидкости в некоторой искомой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Требуется, чтобы искомая область  $\Omega$  однолистно отображалась на фиксированную односвязную область  $Q$  функцией

$$w : \Omega \ni z = x + iy \mapsto w(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in Q.$$

Вслед за пионерской работой Гельмгольца<sup>11</sup> о форме вытекающей из щели плоской струи было решено<sup>12</sup> немало задач этого класса с помощью *метода годографа* в интерпретации, восходящей к Кирхгофу<sup>13</sup> и получившей развитие в работах М. Планка<sup>14</sup>, Релея<sup>15</sup>, Н.Е. Жуковского<sup>16</sup>, С.А. Чаплыгина<sup>17</sup>, Т. Леви-Чевита<sup>18</sup> и многих других. Кирхгоф обратил внимание на то, что если можно найти область  $\mathcal{K} = dz/dw \Big|_{w \in Q}$  (назовем ее областью Кирхгофа; она очевидным образом связана с областью годографа  $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} dw/dz \Big|_{z \in \Omega}$ ), то тогда искомая область  $\Omega = \{ z(w) = \int \frac{dz}{dw} dw, w \in Q \}$  может быть найдена путем построения отображения  $\varkappa : Q \rightarrow \mathcal{K}$  посредством однолистных отображений  $k$  и  $q$  в следующей диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \frac{dz}{dw} \in \mathcal{K} & \xrightarrow{k} & \mathbb{C}_+ \ni k(\varkappa(w)) \\ & \uparrow \varkappa & \\ w \in Q & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}_+ \ni q(w). \end{array}$$

<sup>11</sup> Н. Helmholtz (1868) Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. *Prussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin Monatsberichte der Königlick*, 215–228.

<sup>12</sup>См., в частности, примечание С.А. Чаплыгина на стр. 74 к переводу 1902 года в московском изд-ве ПАЛЛИА статьи Гельмгольца, учебник

Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе (1963) *Теоретическая гидромеханика*. 6-ое изд., “Физматгиз”, Москва,

а также монографии<sup>5</sup> М.И. Гуревича и Г. Биркгофа, Э. Сарантонелло.

<sup>13</sup>G. Kirchhoff (1869) Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *J. reine angew. Math. Grell*. Berlin **70**, 269–298 (см. также: *Механика. Лекции по математической физике*, АН СССР, Москва, 1962).

<sup>14</sup>M. Planck (1884) *Wiedemann Ann.*, V.XXI, ser. 2.

<sup>15</sup>Lord Rayleigh /J.W. Strutt/ (1876) On the resistance of fluids. *Phil. Mag.*, v .II, ser. 5.

<sup>16</sup>Н.Е. Жуковский (1890) Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в дух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной границе. *Матем. сборник*, Т. XV, вып. 1, 121–278 (см. также Собрание сочинений, Т. II, ГИТТЛ, М.-Л., 1949г.).

<sup>17</sup>С.А. Чаплыгин (1897) О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости, *Мат. сб.*, Т. XX.

<sup>18</sup>T. Levi-Civita (1907) Scie e leggi di resistenza. *Rend. Circolo Math. Palermo*, **23**, 1–37.

Согласно этой диаграмме,  $dz/dw = \varkappa(w)$ , где  $\varkappa(w) = k^{-1} \left( \frac{aq(w)+b}{cq(w)+d} \right)$ , а коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  дробно-линейного автоморфизма полуплоскости  $\mathbb{C}_+$  находятся (с точностью до пропорциональности) из соответствий, заданных отображениями  $k$  и  $q$ . В этом и заключается суть метода годографа.

Итак, в тех простейших случаях, т.е. когда область Кирхгофа  $\mathcal{K}$  может быть описана явно<sup>19</sup>, задачу построения искомого отображения  $\frac{dz}{dw}$  можно свести к построению однолистного отображения  $\varkappa : Q \rightarrow \mathcal{K}$ . Это то, чем занимались классики. Но в общем случае область  $\mathcal{K}$  не поддается явному описанию, поскольку она характеризуется (например, как в (3)–(4) или в (3), (5)) решением, вообще говоря, нелинейной задачи Римана–Гильберта с нелинейными ограничениями для функции Гельмгольца–Кирхгофа

$$A + iB : Q = w(\Omega) \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw}.$$

Эта функция полностью<sup>20</sup> решает исходную задачу нахождения искомой области течения и его скорости, ибо

$$\Omega = \left\{ z(w) = z_0 + \int_{w_0}^w e^{A(u,v)+iB(u,v)} dw, \quad w \in Q, \quad z_0 = z(w_0) \right\}, \quad (6)$$

$$\vec{V}(z) = e^{-A(u,v)+iB(u,v)} \Big|_{u+iv=w(z)}.$$

Именно такая общая ситуация, в том числе та, когда область  $Q = w(\Omega)$  не является фиксированной и/или односвязной, представляет особый интерес и значимость. Именно ей посвящена диссертация, в которой вместо метода годографа разработан функционально-геометрический метод для *непосредственного построения и анализа функции  $A + iB$* , т.е. решения задачи Римана–Гильберта, соответствующей исходной задаче со свободной границей.

Вторая цель диссертации – применение функционально-геометрического метода при решении широкого спектра задач со свободной границей для гармонических функций, инициированных прикладными запросами (физики, механики, ...). Этому посвящены

Глава 1. Прямая и обратная задачи о равновесии плазмы в токамаке

§1. Обратная задача о равновесии плазмы в токамаке

§2. Прямая задача о равновесии плазмы в токамаке

Глава 2. Эстремальные задачи со свободной границей

§3. Плоские стационарные течения с минимальным отношением экстремальных значений давления на свободной границе

<sup>19</sup>В таких случаях область  $\mathcal{K}$  обычно выявляется из общезначимых соображений, которые могут быть обоснованы апостериори или с помощью не всегда тривиальных математических рассуждений.

<sup>20</sup>При условии, что формула (6) определяет однолистное отображение. Это надо проверять отдельно.

§4. Стационарное обтекание по схеме Кирхгофа криволинейного препятствия, частично абсорбирующего энергию потока, и оценка максимально возможного КПД турбин в открытом потоке

Глава 3. Задача Стокса–Лейбензона (для Хиле–Шоу течения)

§5. Возмущение окружности

§6. Квазиконтурная модель. Аттрактирующее многообразие

Третья цель диссертации состоит в том, чтобы показать возможности применения разработанного функционально-геометрического метода к иного рода задачам. Этому посвящена

Глава 4. Высокочастотные асимптотики

§7. Векторные поля, определяющие экспоненциально точные высокочастотные асимптотики гармонических функций в плоской области

§8. Задача Олейник–Темама об усреднении

§9. Асимптотика в областях с сильно гофрированной границей

**Методы исследования** — это взаимосвязанный анализ геометрических характеристик исходной задачи со свободной границей и функциональных свойств соответствующей ей линейной или нелинейной задачи Римана–Гильберта с нелинейными функциональными соотношениями на ее решение, методы общей теории эллиптических дифференциальных уравнений, функциональный анализ, теория степени Лере–Шаудера и теория функций комплексного переменного. В ряде случаев проводимые исследования дополняются построением асимптотик и численным анализом.

### Научная новизна и основные результаты.

Все результаты диссертации впервые получены автором. При этом был применен разработанный в диссертации функционально-геометрический метод. Вкратце, результаты таковы.

(1) Получена двусторонняя поточечная оценка<sup>21</sup>

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{P \in \Gamma} e^{-kM} \leq \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{p=p(P) \in \gamma} \leq \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{P \in \Gamma} e^{kM}, \quad k = k(\Gamma) \quad (7)$$

для искомой гармонической функции  $u$ , определенной в двусвязной области  $\Omega(\gamma, \Gamma, M)$ , ограниченной искомой линией уровня  $\gamma = \{u(x, y) = 0\}$  и заданной кривой  $\Gamma = \{u(x, y) = M\}$  при условии, что  $\int_{\Gamma} \partial u / \partial \nu d\Gamma \stackrel{\text{ср. с}}{=} 1$ . Этот результат<sup>22</sup> имеет отношение к одной из центральных проблем управляемого термоядерного синтеза, а именно, к так называемой обратной за-

<sup>21</sup>Отметим, что  $\partial u / \partial \nu|_{\gamma} = \partial u / \partial \nu|_{\Gamma} e^{2\pi M} = (1/2\pi\rho)$  в случае, когда  $\Gamma$  и  $\gamma$  — концентрические окружности радиусов, равных, соответственно,  $R = 1$  и  $\rho = \exp(-2\pi M)$ .

<sup>22</sup>Первая, но более слабая оценка  $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{p \in \gamma}$  была ранее получена автором и его аспиранткой в работе А.С. Демидов, В.В. Петрова (1994) Обратная задача со свободной границей в теории равновесной плазмы. *Дифф. уравнения*, Т. 30, №6, 1034–1038.



даче<sup>23</sup> о равновесии плазмы, в которой ставится вопрос о возможности классификации различных типов распределения тока в плазме по данным магнитной диагностики, т.е. по значениям  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}$ .

Вспомогательной в решении проблемы классификации распределения тока в плазме является прямая задача. Один из ее вариантов — это обобщение задачи о гармонической функции  $u$  в области  $\Omega$ , у которой задана внешняя граница  $\Gamma$ , а внутренняя  $\gamma$ , являющаяся искомой, подчинена условиям (1). Обобщение заключается в том, что условие  $\partial u/\partial \nu|_{\gamma} = I/|\gamma|$  заменяется на условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{s \in \gamma} = \frac{q(s/|\gamma|)}{|\gamma|}, \quad (8)$$

т.е. условие того типа, которое фигурирует в оценке (7). Здесь  $s$  — натуральный параметр на искомом контуре  $\gamma$ , а  $q$  — заданная положительная функция на  $[0, 1]$ . Задание функции  $q$  частично определяет прямое, т.е. непосредственное задание распределения тока в плазме. В терминах функции  $q$  и геометрических характеристик заданной кривой  $\Gamma = \{u(x, y) = M\}$  для этой прямой задачи получены достаточные условия как для существования, так и для несуществования, как для единственности, так и для неединственности равновесных плазменных конфигураций  $\gamma = \gamma_k$  в заданном топологическом классе, соответствующем  $k$  компонентам связности плазмы. Для скинированного тока, что соответствует условию

$$\partial u/\partial \nu|_{\gamma} = I/|\gamma|, \quad (9)$$

и для специального семейства внешних контуров  $\Gamma$ , имеющих две оси симметрии, дано полное описание всех симметричных, а также несимметричных плазменных конфигураций, включая их бифуркацию и топологические перестройки. Кроме того, в случае  $q = \text{const}$  доказано существование выпуклой кривой  $\gamma = \gamma_1$  для произвольного выпуклого контура<sup>24</sup>  $\Gamma$ .

Вот два замечания о научной новизне результатов по прямой задаче.

**Замечание 1.** Условие (9) было сформулировано в работах автора в соответствии с анализом размерности. Если пренебречь этой физической аргументацией и заменить условие (9) на более “простое”

$$\partial u/\partial \nu|_{\gamma} = C, \quad C = \text{const}, \quad (10)$$

то возникнут трудности<sup>25</sup> даже при полярной симметрии: если  $\Gamma$  — окружность единичного радиуса, а  $\rho < 1$  — искомый радиус окружности  $\gamma$ , концен-

<sup>23</sup>Эта задача о реконструкции функции  $j : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  исходя из приведенных ниже соотношений (13)–(17). Об имеющихся на данный момент математических результатах по обратной задаче см. сноску<sup>47</sup>.

<sup>24</sup>Параллельно, этот результат, как решение задачи А.С. Демидова, был получен с помощью вариационных неравенств Йонгом Лю (диссертантом Авнера Фридмана) в работе

Y. Liu (1995) The equilibrium plasma subject to skin effect. *SIAM J. Math. Anal.*, **26**, No. 5(Sept.), 1157–1183.

<sup>25</sup>И.И. Данилюк (1972) Об интегральных функционалах с переменной областью интегрирования. *Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова*, Т. 118.

тричной с  $\Gamma$ , то при  $C > Me$  задача имеет два решения, определяемых из уравнения  $C\rho \ln(1/\rho) = M$ , но не имеет ни одного решения, если  $C < Me$ .

Впрочем, таких трудностей не возникает, если свободная граница  $\gamma$  (гомеоморфная окружности) является внешней по отношению к заданной границе  $\Gamma$ . В частности, при полярной симметрии однозначная разрешимость есть следствие того, что функция  $\rho \ln(1/\rho)$  строго монотонно убывает при  $\rho > 1$ . Соответствующая этому случаю физическая задача приводит<sup>26</sup> к условию (10). При этом имеется теорема об однозначной разрешимости<sup>27</sup>.

**Замечание 2.** Различным постановкам прямой задачи о равновесии (т.е. различным способам задания распределения тока) посвящено множество вычислительных работ физиков<sup>28</sup>. Первая математическая работа<sup>29</sup> [1] по этой тематике была начальной для того направления математического исследования этой задачи, которое развивалось диссертантом [1]-[7], [9], [13], [15]-[17]. Спустя год после публикации [1] возникло второе направление математического исследования прямой задачи о равновесии плазмы в токамаке. Оно было начато в статье Р. Темам<sup>30</sup>, последующей заметке А. Берестики и Х. Брезиса<sup>31</sup> и продолжено в исследованиях многих авторов<sup>32</sup>. Если говорить коротко, в этом направлении исследований задается функция  $f : \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \geq 0$ , равная нулю при  $u > 0$ , и анализируется вопрос существования решения  $u \in C^1(\mathcal{S})$  уравнения  $\Delta u = f(u)$ , подчиненное условию:  $u|_{\mathcal{S}} = M > 0$ ,  $\int_{\mathcal{S}} f(u(x, y)) dx dy = 1$ . Однако при этом возникает (отнюдь не простой) вопрос: чем является множество нулей этого решения? Частично этот вопрос был изучен в работах<sup>33</sup> Каффарелли, Киндерлерера,

<sup>26</sup>A. Beurling (1957) On free-boundary problems for the Laplace equation. *Semin. on Analytic Functions.*, N.Y. Inst. Adv. Study, V.I, 248–263.

<sup>27</sup>A. Acker (1989) On the qualitative theory of parametrized families of free boundaries. *J. Reine Angew. Math.*, V. 393, 134–169.

<sup>28</sup>См., в частности, библиографию в книгах

J.P. Freidberg (1987) *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum, New York.

J. Blum (1989) *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics* (With Applications to Tokamaks). Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore. John Wiley & Sons.

Ю.Н. Днестровский, Д.П. Костомаров (1993) *Математическое моделирование плазмы*. “Наука”, Москва.

<sup>29</sup>В квадратных скобках указаны работы из списка, приведенного в конце автореферата.

<sup>30</sup>R. Temam (1975) A non-linear eigenvalue problem: The shape at equilibrium of a confined plasma. *Arch. Ration. Mech.* **60**, №1, 51–73.

<sup>31</sup>H. Berestycki, H. Brezis (1976) Sur certains problèmes de frontière libre. *C.R. Acad. Sci. Paris* **283**, Série A, 1091–1094.

<sup>32</sup>Отметим лишь следующие работы:

R. Temam (1977) Remarks on a free boundary problem arising in plasma physics. *Commun. P.D.F.* **2**, №6, 563–585.

J.-P. Puel (1977) Sur un problème de valeur propre non linéaire et de frontière libre. *C.R. Acad. Sci. Paris* **284** Série A, 861–863.

H. Berestycki, H. Brezis (1980) On a free boundary problem arising in plasma physics. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **4**, 415–436.

A. Ambrosetti, G. Mancini (1980) A free boundary problem and a related semilinear equation *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, v. 4, 909–915.

M. Sermange (1980) Bifurcation of free boundary plasma equilibria. *Duke Math. J.* **47** 923–942.

<sup>33</sup>D. Kinderlehrer, L. Nirenberg (1977) Regularity in free boundary problems. *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa*,

Ниренберга и Спрука (см. также библиографию в книге<sup>34</sup> А. Фридмана).

Первое же направление исследований имеет непосредственное отношение к физике дела. Здесь речь заранее идет о (спрямляемой) нулевой линии уровня функции  $u$ , а вовсе не о каком-то множестве нулей этой функции. Кроме того, в качестве аргумента прямой задачи здесь предъявляется не та характеристика, которая является искомой в основной (т.е. обратной) задаче о равновесии, а функция  $q$  в условии (8), т.е. та величина, которая может быть в какой-то мере известна, в частности, благодаря оценке (7).

(2) В качестве одного из примеров задачи о плоском стационарном потенциальном течении несжимаемой жидкости (или, в другой интерпретации, о стационарном тепловом потоке) с минимальным отношением экстремальных значений модуля скорости на свободной границе, рассмотрена задача, возникшая в авиационном научно-техническом комплексе им. А.Н. Туполева. Задача связана с проблемой обледенения элементов корпуса летательных аппаратов. Речь идет о выборе формы полоски фольги, по которой пропускается электрический ток. Требуется минимизировать риск перегорания фольги за счет выбора формы полоски фольги, обе кромки которой  $\gamma_{\pm}$  вынуждены (в силу некоторых конструктивных особенностей) проходить через заданные точки. Математическая формулировка такова: выбрать такую криволинейную полоску  $\Omega$ , кромки которой  $\gamma_{\pm}$  проходят через заданные точки, чтобы было минимально значение функционала

$$\Phi(\gamma) = \max_{P \in \gamma} |\nabla u(P)| / \min_{P \in \gamma} |\nabla u(P)|, \quad \gamma = \gamma_- \cup \gamma_+, \quad u|_{\gamma_{\pm}} = \pm \mu, \quad (11)$$

где  $u$  — гармонична в  $\Omega$ , а  $\mu > 0$  — заданная константа. Доказаны теоремы о разрешимости, даны конструктивные формулы для кривых  $\gamma_{\pm}$  и их асимптотических приближений при  $\mu \rightarrow 0$ . Диссертанту неизвестны работы других авторов по экстремальной задаче для функционала (11).

(3) Получены теоремы о разрешимости, а также конструктивные формулы для решения стационарной задачи о максимизации отбора энергии у плоского потенциального бездивергентного потока, набегающего (по схеме Кирхгофа) на объект, частично поглощающий этот поток и, соответственно, его энергию. Такой объект, являясь препятствием для частично обтекающего его потока, моделирует<sup>35</sup> турбину в открытом потоке реки, океанского течения. Как максимизировать отбор энергии у потока?

---

Serie IV, 4 No. 1, 373–391.

D. Kinderlehrer, G. Spruck (1978) Regularity in free boundary problems. *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa*, Serie IV, 5 No. 1, 131–148.

L.A. Caffarelli, G. Spruck (1982) Convexity properties of solutions of some classical variational problems. *Commun. in P.D.E.* 7, 1337–1379.

<sup>34</sup>А. Фридман (1990) *Вариационные принципы и задачи со свободными границами*, “Наука”, Москва.

<sup>35</sup>A.N. Gorban’, A.N. Gorlov, V.M. Silantsev (2001) Limits of the Turbine Efficiency for Free Fluid Flow. *Journal of Energy Resources Technology* 123, no. 4, December, 311–317.

Если сопротивление, которое турбина оказывает потоку, слишком мало, то поток почти беспрепятственно просачивается. Если сопротивление слишком велико, то поток стремится обойти турбину-препятствие. Золотая середина достигается выбором оптимальных управляющих параметров, задающих вектор скорости вхождения потока в объект. В диссертации дано весьма существенное обобщение предложенной ранее модели<sup>36</sup>: получены теоремы о разрешимости и даны конструктивные алгоритмы при весьма общем распределении углов входа течения в это препятствие (а не пластины, ортогональной симметричному потоку с одним варьируемый углом входа<sup>36</sup>).

(4) Для задачи Стокса–Лейбензона, одна из интерпретаций которой есть динамика контура нефтеносного пласта (или динамики зажатого между пластинами пятна вязкой жидкости с нулевым поверхностным натяжением), получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для соответствующей этой задаче функции Гельмгольца–Кирхгофа. Анализ этого уравнения и его матричного приближения позволил впервые получить объяснение следующего “загадочного” явления: некоторые вполне регулярные контура, охватывающие жидкость, казалось бы, ничем не отличающиеся от подавляющего большинства других, вдруг при отводе этой жидкости из скважины, резко меняют свою форму с образованием так называемых “языков” (в терминологии П.Я. Кочкиной<sup>37</sup>), или иначе говоря<sup>38</sup>, “пальцев”.

В диссертации представлена теорема [14] автора о тех  $H^2$ -возмущениях окружности, которые в случае источника, т.е. подвода жидкости, деформируются бесконечно долго. Другие полученные к настоящему времени результаты<sup>39</sup> о бесконечно долгой эволюции в случае источника предполагают аналитичность или существенную гладкость начального контура.

(5) С помощью функционально-геометрического метода построена, согласно оценке (12), экспоненциально точная при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотика  $u_\varepsilon$  решения  $U_\varepsilon$  следующей краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta U_\varepsilon \Big|_\Omega = 0, \quad U_\varepsilon \Big|_{s \in \Gamma} = f(s/\varepsilon)$$

в плоской области  $\Omega$  с кусочно-аналитической границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Здесь

<sup>36</sup>A. Gorban', M. Braverman, V. Silantyev (2002) Modified Kirchhoff flow with a partially penetrable obstacle and its application to the efficiency of free flow turbines. *Mathematical and Computer Modelling* **35**, no. 13, June, 1371–1375.

<sup>37</sup>П.Я. Кочина, А.Р. Шкирич (1954) К вопросу о перемещении контура нефтеносности (эксперимент) *Известия АН СССР, отд. технич. наук*, №11, 105–107.

<sup>38</sup>P.G. Saffman, G.I. Taylor (1958) The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Royal Soc. A*, **245**, 312–329.

<sup>39</sup>A.M. Meirmanov, B. Zaltzman (2002) Global in time solution to the Hele-Shaw problem with a change of topology. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, **13**, 431–447.

B. Gustafsson, D. Prokhorov, and A. Vasil'ev (2004) Infinite lifetime for the starlike dynamics in Hele-Shaw cells *Proc. of American Math. Soc.*, v. 132, No.9, 2661–2669.

$f \in H^{\alpha-1/2}(\Gamma)$ ,  $\alpha \geq 0$ , а  $s$  — натуральным параметр на  $\Gamma$ . Доказана оценка

$$\|u_\varepsilon - U_\varepsilon\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq C_\alpha e^{-\tau/\varepsilon}, \quad \text{где } \tau > 0. \quad (12)$$

Есть три отличия от традиционных построений<sup>40</sup>: 1) не исключен случай, когда граничные значения  $U_\varepsilon$  принадлежат почти максимальному классу в шкале соболевских пространств, в которых есть единственность соответствующей гармонической функции  $U_\varepsilon$ ; 2) асимптотика экспоненциально близка к решению краевой задачи; 3) оценка погрешности дается в наиболее сильной норме, в которой ограничена сама функция  $U_\varepsilon$ .

Дано также обобщение такого построения асимптотики для решения двумерного квазилинейного эллиптического уравнения 2-го порядка.

(6) Рассмотрена поставленная<sup>41</sup> О.А. Олейник и Р. Темамом задача о построении при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерной вплоть до границы  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  асимптотики для решения краевой задачи

$$\Delta U_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad U_\varepsilon = F(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \quad \text{на } \Gamma,$$

где  $F(x, y)$  — периодическая по каждому переменному функция, знакопостоянная на полупериоде, равном единице. С помощью функционально-геометрического метода построена экспоненциально точная (в смысле, аналогичном оценке (12)) асимптотика для любой кусочно-аналитической границы  $\Gamma = \partial\Omega$  в случае двузначной функции  $F$ .

(7) Функционально-геометрическим методом построена экспоненциально точная при  $\varepsilon \rightarrow 0$  асимптотика решения краевой задачи для уравнения Лапласа в областях с сильно гофрированной границей с частотой волны гофра порядка  $1/\varepsilon$ . При этом оценка остаточного члена получена в наиболее сильной норме, в которой существует решение. Известные к настоящему времени иные методы<sup>42</sup> построения асимптотики дают для этой задачи оценку остаточного члена только порядка  $\varepsilon^{3/2}$  и то лишь в метрике  $H^1$ .

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация носит теоретический характер. Ее значимость заключается в разработке такого функционально-геометрического подхода, который позволяет получать

- теоремы существования и несуществования, единственности и неединственности в отношении широкого спектра двумерных задач со свободной границей для гармонических функций;

<sup>40</sup>См., например, Г.П. Панасенко (1979) Асимптотики высших порядков для решений задач о контакте периодических структур. *Матем. Сборник* Т. 110(152), № 4, 505–538.

<sup>41</sup>См., в частности,

О.А. Oleinik, R. Temam, G.A. Yosifian (1995) Some nonlinear homogenization problems *Applicable Analysis* Vol. 57, No. 1-2, 101–118.

<sup>42</sup>См., например,

N. Neuss, M. Neuss-Radu, A. Mikelić (2006) Effective laws for the Poisson equation on domains with curved oscillating boundaries *Applicable Analysis*, Vol. 85, No. 5, 479–502.

- явные конструкции и формулы, задающие решения этих задач;
- экспоненциально точные (относительно сильной нормы) асимптотики для гармонических функций, быстро осциллирующих весьма сложным образом на границе области определения.

Как уже было отмечено, обозначенный класс задач богат приложениями. Явные же конструкции и формулы, задающие решения этих задач, могут быть использованы при тестировании вычислительных алгоритмов более сложных, например, трехмерных задач и при выборе подходящего начального приближения в соответствующих итерационных алгоритмах.

#### **Апробация работы:**

- приглашенный докладчик на международных конференциях "Singular Perturbations and Boundary Layer Theory", Lyon (1976) /France/, "Inverse Problems, Control and Shape Optimization", Carthage (2002) /Tunisie/ и "two months" E. Magenes–Seminar "Free Boundary Problems", Pavia (1979) /Italy/;
- докладчик на многих международных конференциях, в том числе: "Differn.Eq. and Related Topics" dedicated to I.G. Petrovskii, Moscow (1978, 1983, 1986, 1998, 2001, 2004); "Complex Analysis and FBR", St.-Petersburg (1994); "PDE and Applications", Lyon (1999) /France/; "Parabolic and Elliptic Problems", Gaeta (2001) /Italy/; "Free Boundary Problems", Tours (2003) /France/; "Kolmogorov and Contemporary Mathematics", Moscow (2003); "Comput. Methods in Appl. Sciences", Jyvaskyla (2004) /Finland/; "Global and Geometric Aspects of Nonlinear PDF", Erevan (2004); "System Modeling and Optimization", Turin (2005) /Italy/; "Tikhonov and Contemporary Math.", Moscow (2006); "New Trends in Complex and Harmonic Analysis", Voss (2007) /Norway/; "Pontryagin 100-Anniversary Conference", Moscow (2008);
- докладчик на многочисленных научных семинарах в научных центрах России, Германии, Италии, Португалии, США, Франции, ..., в том числе:
  - в институте АН СССР им. И.В. Курчатова на семинаре (1973 г.)
  - п/р М.А. Леонтовича и Б.Б. Кадомцева;
  - в МГУ на семинаре им. И.Г. Петровского (1974 г.)
  - п/р В.И. Арнольда, М.И. Вишика, О.А. Олейник и Я.Г. Синая;
  - в Rutgers University, Depart. Math. на семинаре (1997 г.)
  - п/р И.М. Гельфанда;
  - в МИРАН им. В.А. Стеклова на семинаре (2002 г.)
  - п/р О.В. Бесова, С.М. Никольского и С.И. Похожаева;
  - в РИЦ "Курчатовский институт" на семинаре (2006 г.)
  - п/р В.Д. Шафранова.

#### **Поддержка работ автора по теме диссертации:**

1992 - 1995: Soros Foundation grant (NAW000, NAW300) — руководитель;  
 1998 - 2000: PAST grant Министерства Образования и Науки Франции;

1994 - по настоящее время: гранты РФФИ — исполнитель, руководитель;  
 2001 - 2003: French-Russian grant PICS/RFBR — координатор;  
 2002 - 2004: Grant of the Liapunov French–Russian Institute — исполнитель;  
 2005 - 2008: French-Russian grant PICS/RFBR — руководитель.

**Публикации.** Основных публикаций по теме диссертации — 21. Их список приведен в конце автореферата. 16 работ из этого списка опубликованы в изданиях, которые рекомендует ВАК; 6 из них в соавторстве. Вклад соавторов в совместные работы отражен в приведенном списке.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из Введения, четырех глав и списка литературы. Работа изложена на 132-х страницах, включая 14 рисунков и список литературы из 132 наименований.

## 2. Краткое содержание работы

**Функционально-геометрический метод** заключается во взаимосвязанном анализе функциональных и геометрических построений при исследовании рассматриваемых задач. Эта общая характеристика частично конкретизируется в комментариях, касающихся элементов доказательств некоторых из приводимых ниже теорем. Эти теоремы достаточно полно отражают основное содержание диссертации.

**В главе 1** (параграфы 1 и 2) рассмотрены задачи, относящиеся к одной из центральных проблем управляемого термоядерного синтеза: реконструкции по данным магнитных измерений распределения тока  $j$ , протекающего по горячей плазме, заключенной в камере токамака (Торoidalной Камере с Магнитными Катушками). Плазма отделена от металлического кожуха (оболочки) камеры вакуумной зоной, в которой плазма “подвешена” с помощью магнитного поля, создаваемого протекающим по плазме током  $j$  и управляющими токами, в том числе в трансформаторных катушках токамака.

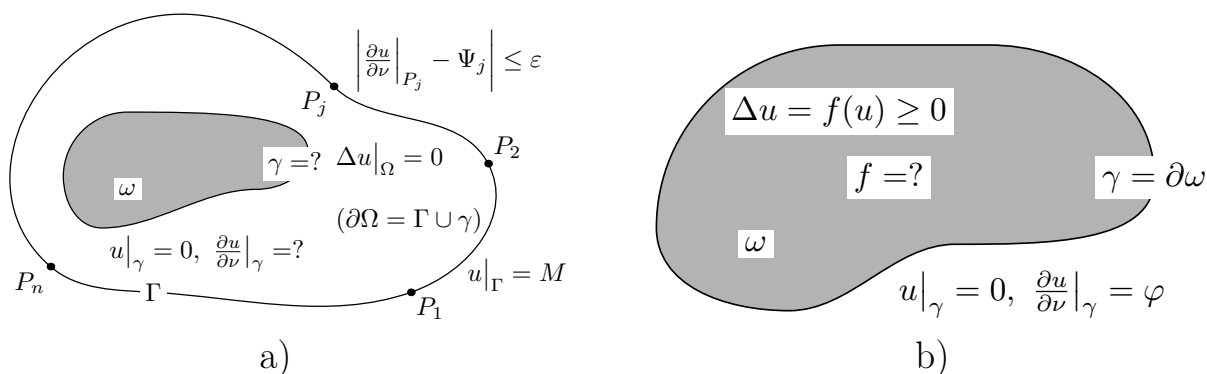


Рис. 3. Две подзадачи обратной задачи о равновесии плазмы.

**1<sup>0</sup>.** К математическому анализу этой проблемы относятся так называемые прямая и обратная задачи о равновесии. Базовая математическая

формулировка обратной задачи иллюстрируется на рис. 3, где изображено ортогональное к оси  $z$  сечение  $\mathcal{S} \in \mathbb{R}_{xy}^2$  камеры токамака, рассматриваемой в первом приближении в виде бесконечного цилиндра с образующей вдоль оси  $z$ . Граница области  $\mathcal{S}$  задана. Это кривая  $\Gamma$ , диффеоморфная окружности, представляющая сечение кожуха камеры токамака. В предположении, что искомая “плазменная” область  $\omega$  имеет одну компоненту связности, ее свободная граница  $\gamma = \partial\omega$  диффеоморфна окружности. Кольцеобразная “вакуумная” область  $\Omega$  отделяет “плазменную” область  $\omega$  от заданной кривой  $\Gamma$ . Известно, что  $z$ -компонента  $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  векторного потенциала магнитного поля является решением так называемого уравнения Грэда–Шафранова, которое в цилиндрическом приближении токамака принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = j(x, y) \quad \text{в } \mathcal{S}, \quad (13)$$

где правая часть имеет следующую структуру

$$j(x, y) = \begin{cases} f(u(x, y)) & \text{при } (x, y) \in \bar{\omega}, \\ 0 & \text{при } (x, y) \in \Omega = \mathcal{S} \setminus \bar{\omega}. \end{cases} \quad (14)$$

Равновесие плазмы эквивалентно тому, что граница  $\gamma$  области  $\omega$  есть линия уровня функции  $u$ , для определенности, нулевая:

$$u = 0 \quad \text{на искомом контуре } \gamma. \quad (15)$$

На внешней по отношению к  $\gamma$  кривой  $\Gamma$ , являющейся границей области  $\mathcal{S}$ , функцию  $u$  тоже можно считать известной. В случае отсутствия внешних управляющих токов металлический кожух токамака “вморожен” в силовые линии магнитного поля и тогда

$$u = M \quad \text{на } \Gamma, \quad (16)$$

где  $M > 0$  — это величина, равная интегралу  $\int_l |\nabla u| dl$  вдоль той линии  $l$ , соединяющей искомый контур  $\gamma$  с заданной кривой  $\Gamma$ , которую касается градиент функции  $u$ . Число  $M$  характеризует “отдаленность” плазмы от кожуха камеры. В реальном токамаке эта отдаленность может задаваться с помощью так называемого лимитора — стержня, направленного внутрь камеры, свободный конец которого, соприкасаясь при разряде с плазмой, лимитирует ее границу. Тем самым, число  $M$  может считаться заданным. В общем случае (т.е. при наличии управляющих токов) можно, используя вспомогательную процедуру, подобрать подходящий внешний контур, имитирующий кривую  $\Gamma$ , и считать, что условие (16) выполнено.

Согласно формуле (14), функция  $f$  определяет одну из важнейших характеристик плазменного разряда: распределение протекающего по плазме



тока. Знание этой величины необходимо не только для понимания физических процессов, протекающих при разряде, но и для эффективного управления самим разрядом, для подавления неустойчивостей плазмы.

Однако эта характеристика не может быть найдена ни теоретически (в силу отсутствия соответствующей теории), ни непосредственно в эксперименте (ибо температура в плазме сравнима с температурой Солнца). Известна лишь величина полного тока  $I$ , которая может быть принята за единицу измерения тока:

$$\int_{\mathcal{S}} j(x, y) dx dy = I. \quad (17)$$

Для реконструкции функции  $f$  недостаточно наличие лишь системы соотношений (13)–(17), если только множество функций, в котором ищется правая часть уравнения Грэда-Шафранова, не одномерно. Нужны дополнительные данные. Основным их источником являются данные магнитных измерений, позволяющие замерить градиент функции  $u$  в ряде точек  $P_j \in \Gamma$ , где расположены датчики на кожухе камеры токамака.

Таким образом, возникает задача<sup>43</sup> о реконструкции функции  $f$  и контура  $\gamma$  из системы соотношений (13)–(17) и аппроксимативного задания нормальной производной функции  $u$  в конечном числе точек  $P_j$  кривой  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x, y) = M > 0\}$ .

**2<sup>0</sup>.** Ниже обозначена функционально-геометрическая конструкция однолистного изометрического отображения аналитической кривой. С помощью такого отображения в диссертации установлена

**Теорема 1** Пусть  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Gamma; P_1, \dots, P_n; d_1, \dots, d_n; \eta)$  — множество таких положительных аналитических функций  $g$  на кривой  $\Gamma$  класса  $C^{1,\lambda}$ , гомотопной окружности, что выполнено<sup>44</sup> условие аппроксимации

$$\left| g \Big|_{P_j \in \Gamma} - d_j \right| \leq \eta, \quad \text{где } j = 1, \dots, n, \quad \text{а } 0 < \eta \ll 1, \quad (18)$$

и условие нормировки

$$\int_{\Gamma} g d\Gamma = 1 \stackrel{(17)}{=} \int_{\mathcal{S}} f(u(x, y)) dx dy \stackrel{(13)}{=} \int_{\mathcal{S}} \Delta u dx dy = \int_{\Gamma} \partial u / \partial \nu d\Gamma. \quad (19)$$

Тогда для любой функции  $g \in \mathcal{G}$  можно предъявить такие числа  $M_g > 0$  и  $M_g^* > 0$ , что

<sup>43</sup>См., в частности,

А.С. Демидов, Л.Е. Захаров (1974) Прямая и обратная задачи в теории равновесия плазмы. *Успехи матем. наук*, Т. 29, № 6, 203.

J. Blum, H. Buvat (1997) An inverse problem in plasma physics: the identification of the current density profile in a tokamak. *IMA volumes in mathematics and its applications* **92**, Springer-Verlag, 17-36.

<sup>44</sup>В работе А.Д. Валиев, А.С. Демидов (1997) О неотрицательных тригонометрических полиномах с фиксированным средним, проходящих через заданные точки. *Матем. заметки*, **62**, № 3, 468–471 приведены 3 алгебраических критерия того, что тригонометрический полином  $g \in \mathcal{G}$ , степени не выше  $n - 1$ , удовлетворяет условиям (18)–(19).

во-первых, при любом  $M \in (0, M_g^*]$  найдется аналитическая кривая  $\gamma = \gamma_g \subset \mathcal{S}$ , диффеоморфная окружности, для которой задача

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\gamma} = 0, \quad u|_{\Gamma} = M \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = g \quad (20)$$

имеет решение  $u = u_g$ ;

во-вторых, для<sup>45</sup>  $\mu = \min(1/2, M_g^* - M, M_g)$  справедлива оценка

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{P \in \Gamma} e^{-4M/\mu} \leq \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{p=p(P) \in \gamma} \leq \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{P \in \Gamma} e^{4M/\mu}, \quad (21)$$

где  $p(P)$  — та точка  $\gamma$ , в которую приходит выходящая из точки  $P \in \Gamma$  линия, касающаяся градиента функции  $u$ .

**Комментарий.** Основой построений, с помощью которых доказывается эта теорема является изометрическое однолистное отображение аналитической<sup>46</sup> кривой  $\Gamma$  на окружность  $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$ . Это отображение задается формулой

$$\zeta : V_{\Gamma} \ni z \mapsto \zeta(z) = 1 + \int_0^z \exp(A + iB) dz \in V_{\mathbb{T}}, \quad (22)$$

где  $V_{\Gamma}$  — некоторой окрестность кривой  $\Gamma$ ,  $V_{\mathbb{T}}$  — соответствующая ей окрестность окружности  $\mathbb{T}$ , а функция Гельмгольца–Кирхгофа  $A + iB : V_{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C}$  характеризуется следующими условиями

$$B|_{s \in \Gamma} = s - N(s), \quad A|_{s \in \Gamma} = 0 \quad \left( \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0 \right). \quad (23)$$

Здесь  $N(s)$  — угол между осью  $x$  и внешней нормалью к  $\Gamma$  в точке  $s$ . Равенство  $A|_{s \in \Gamma} = 0$  эквивалентно условию изометрии

$$|z'(\zeta)| \equiv 1 \quad \text{для } \zeta \in \mathbb{T}. \quad (24)$$

Поэтому, обозначая через  $\Re z$  вещественную часть комплексного числа  $z$ , получаем, что функция

$$U_g(\zeta) = M + \frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \Re \left( \frac{g_k}{k} \left( r^k - \frac{1}{r^k} \right) e^{ik\theta} \right), \quad r = |\zeta|, \quad \theta = \arg \zeta$$

определяет решение  $u_g(z) = U_g(\zeta(z))$  задачи (20) при тех  $M$ , для которых линии уровня  $\{\zeta \in V_S \mid U_g(\zeta) = m \in [0, M]\}$  гомеоморфны окружности.

**3<sup>0</sup>.** Теорема 1 сводит обратную задачу в области  $\mathcal{S}$ , схематично представленную на рис. За, к чуть упрощенной обратной задаче в фиксированной

<sup>45</sup>Формула для числа  $\mu$  получена дипломником диссертанта В.М. Силантьевым.

<sup>46</sup>Случай  $\Gamma \in C^{1,\alpha}$  сводится к рассмотренному с помощью теоремы Келлогга и конформного отображения области  $\Omega$  на достаточно близкую область с аналитической границей.

“плазменной” области  $\omega$ , представленной на рис. 3b, а именно<sup>47</sup> к реконструкции функции  $f : u \mapsto f(u)$  из априори заданного функционального класса по таким данным:  $u|_{\gamma} = 0$ ,  $\left| \partial u / \partial \nu |_{\gamma} - g \right| \leq \varepsilon$ .

Некоторая полезная информация в отношении обратной задачи может быть получена при анализе вспомогательной задачи, в которой ставится вопрос о разрешимости соотношений (13)–(17) относительно функции  $u$ , но лишь в области  $\Omega$ , при условии задания  $\frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\gamma}$ , т.е. той характеристики, связанной<sup>47</sup> с искомой функцией  $f$ , которая может быть приближено найдена, например, с помощью численного решения соответствующей задачи Коши с учетом гарантированной оценки (21).

Такого рода задача относится к числу так называемых прямых задач. Они называются так потому, что решение  $u$  дифференциального уравнения ищется при непосредственно, иначе говоря, прямым образом заданной величине, полностью или частично определяющей искомую функцию  $f$ .

В этом пункте представлены основные теоремы диссертации по ряду постановок прямой задачи.

Прежде всего, представим результаты, относящиеся к таким областям  $\Omega$ , которые имеют две оси симметрии и схематично изображены на рис. 0.1. Их внешняя заданная граница  $\Gamma$  полностью характеризуется функций

$$N : \left[0, \frac{|\Gamma|}{4}\right] \ni s \mapsto N(s) \in [N_-, N_+], \quad N_- \stackrel{\text{def}}{=} \inf N, \quad N_+ \stackrel{\text{def}}{=} \sup N, \quad (25)$$

задающей угол  $N(s)$  (см. рис. 2<sub>b</sub> $\alpha$ ) между осью  $x$  и внешней нормалью к  $\Gamma$  в точке  $s \in \Gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$ , отождествленной с соответствующим ей натуральным параметром, отсчитываемым от точки  $P_0 \in \Gamma \cap \{x > 0, y = 0\}$ .

При оговоренных свойствах симметрии области  $\Omega$ , внутренняя искомая граница  $\gamma$  также характеризуется своей четвертью  $\gamma_+ \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \cap \mathbb{R}_{++}^2$ . Поэтому

---

<sup>47</sup>В работах

А.С. Демидов (2000) Об обратной задаче для уравнения Грэда–Шафранова с аффинной правой частью. *Успехи Матем. Наук*, Т. 55, № 6, 131–132.

A.S. Demidov, M. Moussaoui (2004) An inverse problem originating from magnetohydrodynamics. *Inverse Problems*, v. 20, 137–154.

доказана

**Теорема А** ( $\varepsilon = 0$ ). Если односвязная область  $\omega$  не круг, то при  $\varepsilon = 0$  существует не более конечного числа аффинных функций  $f : u \mapsto f(u) = au + b$ , которые могут быть решениями обратной задачи (в отличие от континуального числа таких функций в случае, когда  $\omega$  есть круг).

Эта теорема обобщает результат работы

M. Vogelius (1994) An inverse problem for the equation  $\Delta u = -cu - d$ . *Ann. Inst. Fourier*, v. 44, No. 4, 1181–1209,

а предложенный автором метод доказательства теоремы А, позволил недавно: 1) усилить теорему А, показав для широкого класса областей единственность решения; 2) показать, что справедлива

**Теорема В** ( $\varepsilon > 0$ ). Если  $\varepsilon > 0$ , то даже в классе аффинных функций  $f$  для любого  $\alpha > 0$  найдется такое счетное множество распределений тока  $j_k(x, y) = a_k u_k(x, y) + b_k$ , которые в равномерной метрике попарно различаются более чем на  $\alpha$ . Эти распределения являются членами последовательности, сходящейся к току, сосредоточенному на  $\gamma$ .

Алгоритм поиска существенно различных  $f$  в классе полиномиальных функций предложен в работе А.С. Демидов, А.С. Кочуров и А.Ю. Попов (2009) К задаче о реконструкции нелинейностей в уравнениях математической физики. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, вып. 27.

задание производной  $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\gamma}$ , отвечающее постановке прямой задачи, достаточно осуществить лишь на  $\gamma_+$ . В диссертации это делается таким образом:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{p \in \gamma_+} = \frac{q(r(p))}{|\gamma_+|}, \quad r(p) = \frac{s(p)}{|\gamma_+|}. \quad (26)$$

Здесь  $q \in C^1[0, 1]$  — заданная функция, удовлетворяющая условиям:

$$q > 0, \quad \int_0^1 q(r) dr = 1, \quad (27)$$

а  $s(p) \in [0, |\gamma_+|]$  — это длина дуги  $\overset{\sim}{pp}_0$  контура  $\gamma$ , где  $p_0$  — это точка на  $\gamma$  с нулевой ординатой и максимальной абсциссой.

Всюду ниже  $q'(r) = \frac{dq(r)}{dr}$ , а  $r(v)$  — функция, обратная к  $v(r) = \int_0^r q(\xi) d\xi$ .

**Теорема 2** ( $\exists \gamma_1$ ) *Для любого числа  $M > 0$  существует внутри заданного контура  $\Gamma$  такая кривая  $\gamma = \gamma_1$ , диффеоморфная окружности и симметричная относительно осей  $x$  и  $y$ , что в кольцеобразной области  $\Omega = \Omega_1$  (см. рис. 1а), заключенной между  $\gamma = \gamma_1$  и кривой  $\Gamma$ , найдется гармоническая функция  $u$ , удовлетворяющая условиям*

$$u|_{\Gamma} = M \quad \text{и} \quad u|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{p \in \gamma} \stackrel{(26)-(27)}{=} \frac{q(r(p))}{|\gamma|/4}, \quad (28)$$

если

$$\frac{\partial C_+(0, v)}{\partial u} \leq \frac{q'(r)}{q^2(r)}\Big|_{r=r(v)} \leq \frac{\partial C_+(0, v)}{\partial u} \quad \forall v \in [0, 1], \quad (29)$$

где  $C_-$  и  $C_+$  — гармонические в  $Q = \{0 < u < M, 0 < v < 1\}$  функции, подчиненные соответственно таким граничным условиям:

$$C_-(0, v) = 0, \quad C_-(u, 0) = 0, \quad C_-(M, v) = N_-, \quad C_-(u, 1) = \frac{\pi}{2}, \quad (30)$$

$$C_+(0, v) = \frac{\pi}{2}, \quad C_+(u, 0) = 0, \quad C_+(M, v) = N_+, \quad C_+(u, 1) = \frac{\pi}{2}. \quad (31)$$

**Теорема 3** ( $\nexists \gamma_2$ ) *Пусть  $N_+ \stackrel{\text{см.}(25)}{=} \pi/2$  и пусть*

$$0 \leq \frac{q'(r)}{q^2(r)}\Big|_{r=r(v)} \leq \frac{\partial C_-(0, v)}{\partial u} \quad \forall v \in [0, 1]. \quad (32)$$

Тогда ни при каком  $M > 0$  внутри контура  $\Gamma$  не существует контура  $\gamma = \gamma_2$ , симметричного относительно системы координат  $(x, y)$  и гомеоморфного двум окружностям (т.е. такой, как на рис. 1б), для которого в области  $\Omega = \Omega_2$ , заключенной между  $\Gamma$  и  $\gamma$ , нашлась бы гармоническая в  $\Omega$  функция  $u$ , удовлетворяющая условиям (28).

**Теорема 4** ( $\exists\gamma_2$ ) Пусть  $\Gamma = \Gamma_a$  — такой полигональный контур длины  $|\Gamma| = 4$ , для которого функция (25) принимает ровно два значения<sup>48</sup>, а именно:

$$N(s) = \begin{cases} N_- \in (-\pi/2, \pi/2), & \text{если } 0 \leq s < a, \\ N_+ \in [\pi/2, \pi + N_-), & \text{если } a < s \leq 1 = |\Gamma|/4, \end{cases}$$

Пусть

$$\frac{\partial C_0}{\partial u}(0, v) \leq \frac{q'(r)}{q^2(r)} \Big|_{r=r(v)} \leq 0 \quad \forall v \in [0, 1], \quad (33)$$

где<sup>49</sup>  $C_0$  — гармоническая в  $Q = \{0 < u < M, 0 < v < 1\}$  функция, подчиненная таким граничным условиям:

$$C_0(0, v) = \pi, \quad C_0(u, 0) = \frac{\pi}{2}, \quad C_0(M, v) = \max(N_+, N_- + \frac{\pi}{4}), \quad C_0(u, 1) = \pi.$$

Пусть  $M > 0$ , если  $N_- \geq 0$ , а если  $N_- < 0$ . то пусть  $M \gg 1$ .

Тогда можно указать числа<sup>50</sup>  $\varepsilon_* \geq 0$  и  $\varepsilon^* \in (\varepsilon_*, \cos N_-)$ , что если

$$\varepsilon_* < a \cos N_- + (1 - a) \cos N_+ < \varepsilon^*, \quad (34)$$

то найдется, как минимум, один<sup>51</sup> контур  $\gamma = \gamma_2$ , диффеоморфный двум окружностям, который симметричен относительно системы координат  $(x, y)$  и для которого в области  $\Omega = \Omega_2$ , заключенной между  $\Gamma$  и  $\gamma$ , существует гармоническая в  $\Omega$  функция  $u$ , удовлетворяющая условиям (28).

**Теорема 5** ( $\nexists\gamma_1$ ) Пусть  $\Gamma = \Gamma_a$  — контур, такой же, как в теореме 4, но  $N_+ \in (\pi/2, \pi + N_-)$ , т.е. исключена возможность того, чтобы  $N_+ = \pi/2$ .

Тогда для  $\forall q \in C^1[0, 1] \exists M_0 > 0 \forall M < M_0 \exists \varepsilon_M > 0$ , что если

$$0 < a \cos N_- + (1 - a) \cos N_+ < \varepsilon_M, \quad (35)$$

то ни для какой кривой  $\gamma = \gamma_1$ , гомеоморфной окружности и симметричной относительно координатных осей  $x$  и  $y$ , в области  $\Omega = \Omega_1$ , заключенной между  $\Gamma$  и  $\gamma$ , не существует ни одной гармонической в  $\Omega$  функции, удовлетворяющей условиям (28).

Пересечение условий теорем 2 и 4 дает ответ на вопрос, поставленный Е.П. Велиховым. В частности, справедлива

<sup>48</sup>Например, как на рисунках 4–6, где  $a \in (1/2, 1]$ ,  $N_- = \pi/4$  и  $N_+ = 3\pi/4$ .

<sup>49</sup>Если  $N_+ = \pi/2$ , то  $q \neq \text{const}$ , ввиду неравенства (33).

<sup>50</sup> $\varepsilon_* = 0$ , например, при  $q = 1$  и  $N_- > \pi/2$ .

<sup>51</sup>Можно дать (см. рис. 5) достаточные условия существования двух различных контуров типа  $\gamma_2$ .

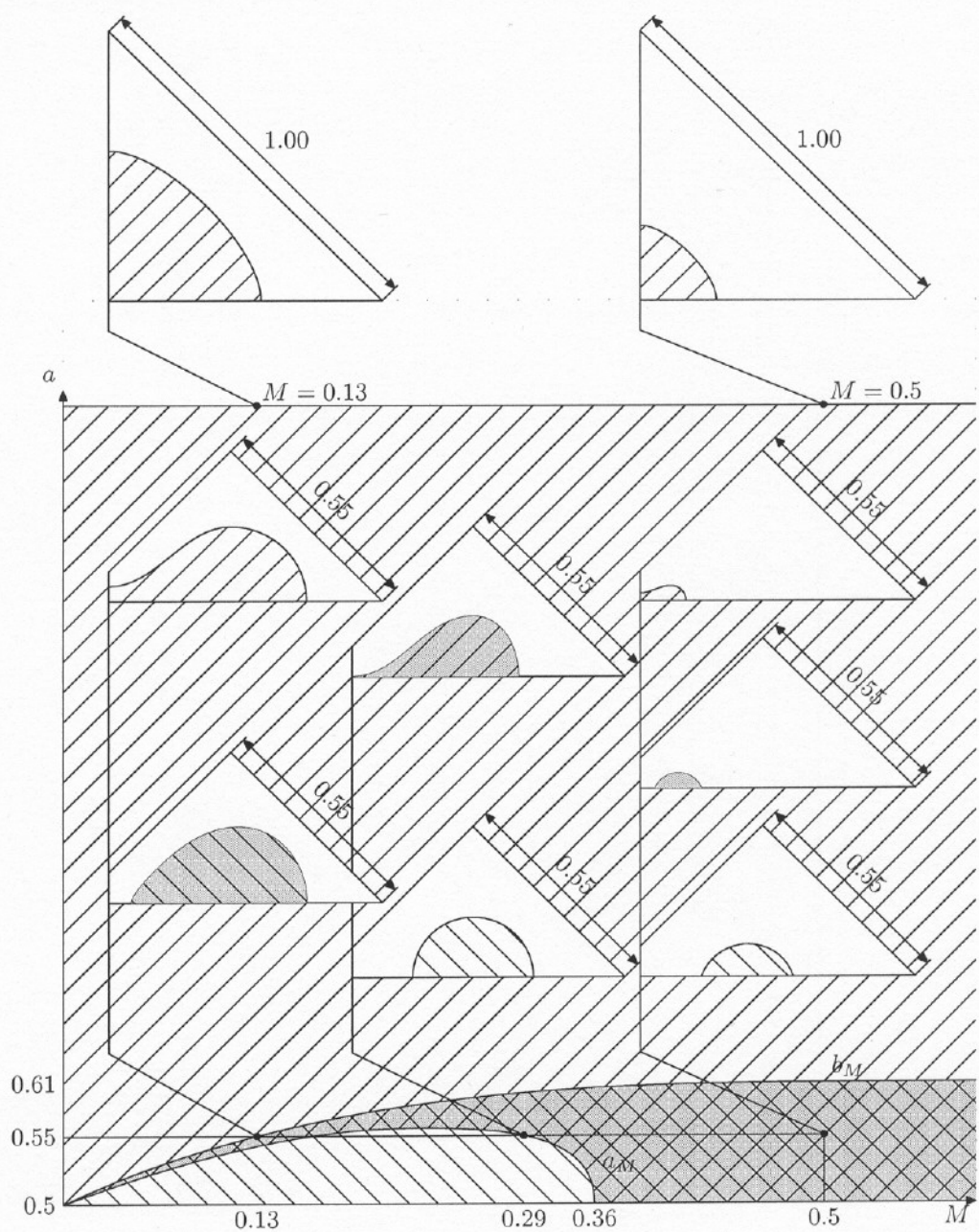


Рис. 4. Все типы симметричных "плазменных" конфигураций для семейства контуров  $\Gamma_a$ .

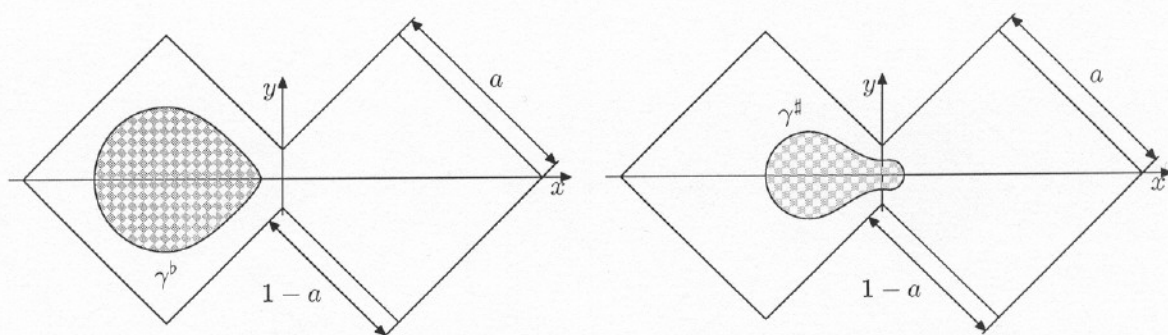


Рис. 5. Несимметричные "плазменные" конфигурации  $\gamma^b$  и  $\gamma^\#$  (при  $a = 0.54$  и  $M = 0.13$ ).

**Теорема 6** ( $\exists \gamma_1 \& \exists \gamma_2$ ) Пусть  $q = 1$ , а  $\Gamma = \Gamma_a$  — полигональный контур, длина которого  $|\Gamma|$  равна 4 и для которого функция (25) принимает ровно два значения

$$N(s) = \begin{cases} N_- = \pi/4, & \text{если } 0 \leq s < a \in (1/2, 1], \\ N_+ = 3\pi/4, & \text{если } a < s \leq 1 = |\Gamma|/4, \end{cases}$$

Пусть  $b_M < a < a_M$ , где функции  $M \mapsto a_M$  и  $M \mapsto b_M$  представлены своими графиками на рис. 4. Тогда внутри  $\Gamma$  существуют как контур  $\gamma = \gamma_1$ , так и контур  $\gamma = \gamma_2$ , каждый из которых симметричен относительно системы координат  $(x, y)$ , причем контур  $\gamma_k$  диффеоморфен  $k$  окружностям, а в области  $\Omega = \Omega_k$ , заключенной между  $\Gamma$  и  $\gamma_k$ , найдется гармоническая в  $\Omega_k$  функция  $u = u_k$ , удовлетворяющая условиям (28).

**Теорема 7** ( $\exists$  несимметричный контур  $\gamma_1$ ) Пусть  $q = 1$ , а  $\Gamma = \Gamma_a$  — контур, такой же, как в теореме 6. Для любого  $M > 0$  существует  $\varepsilon_M > 0$ , что при  $a \in (1/2, 1/2 + \varepsilon_M)$  внутри контура  $\Gamma_a$  найдется несимметричная относительно оси  $x$  аналитическая кривая  $\gamma = \gamma_1$ , диффеоморфная окружности, для которой в кольцевой области  $\Omega = \Omega_1$ , заключенной между  $\Gamma_a$  и  $\gamma_1$ , существует гармоническая функция, удовлетворяющая условиям (28).

Численный анализ соответствующих нелинейных интегральных функционалов (38) позволил найти все несимметричные конфигурации (см. рис. 5). Их число  $k = k(a, M)$  равно 1 при  $a \in (1/2, a_M)$  и 2 при  $a_M \leq a < b_M$  (по модулю отражений относительно оси  $y$ ). Бифуркационные связи симметричных и несимметричных конфигураций  $\gamma$  в случае  $q = 1$  и семейства контуров  $\Gamma_a$ , описанных в теоремах 6 и 7, представлены на рис. 6.

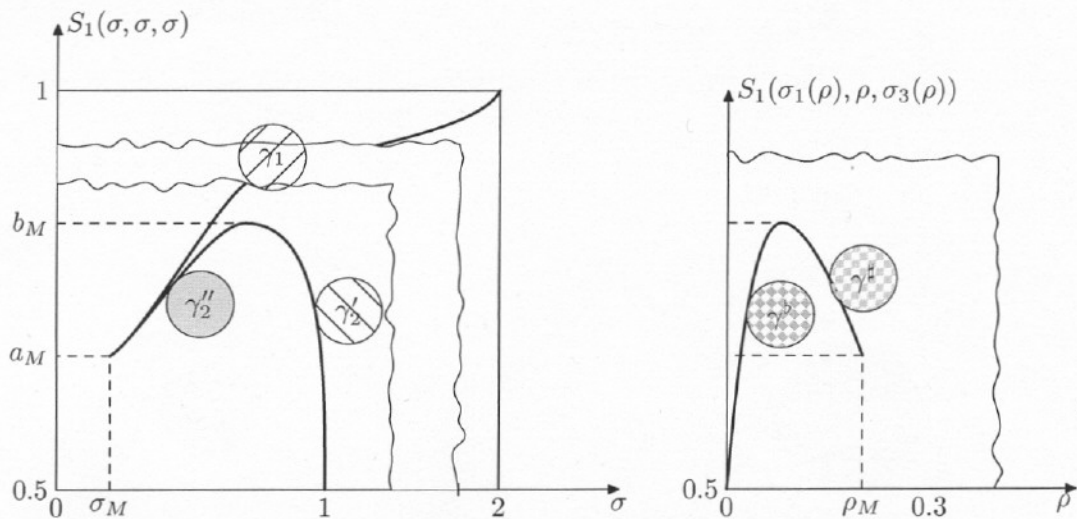


Рис. 6. Типичные (для всех  $M$ ) графики функций  $\sigma \mapsto S_1(\sigma, \sigma, \sigma)$  и  $\rho \mapsto S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho))$ , определенных в (38).

Корни уравнения  $a = S_1(\sigma, \sigma, \sigma)$  определяют симметричные “плазменные”

конфигурации  $\gamma_1, \gamma_2', \gamma_2''$ , а корни уравнения  $a = S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho))$  определяют несимметричные конфигурации  $\gamma^b$  и  $\gamma^\#$ .

Без каких-либо предположений о симметрии контура  $\Gamma$  доказана

**Теорема 8** ( $\exists$  выпуклый контур  $\gamma_1$ ) *Если  $\Gamma$  — выпуклая кривая, то для любого  $M > 0$  существует выпуклая аналитическая кривая  $\gamma = \gamma_1$ , для которой в кольцевой области  $\Omega = \Omega_1$ , заключенной между  $\Gamma$  и  $\gamma$ , существует гармоническая функция, удовлетворяющая условиям<sup>52</sup>*

$$u \Big|_{\Gamma} = M, \quad u \Big|_{\gamma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = \frac{1}{|\gamma|}. \quad (36)$$

**Комментарий.** Функционально-геометрический метод в части, касающейся доказательства приведенных здесь теорем существования, имеет некоторые специфические особенности. Проиллюстрируем одну из них на примере теоремы 7 о несимметричных конфигурациях. По-существу, все сводится к поиску мультипараметра  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , компоненты которого удовлетворяют следующим условиям:  $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1 < \sigma_3 < \sigma_4 = 2$  и

$$S_1 = S_4 > S_2 = S_3, \quad (37)$$

где

$$S_j(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \left( \exp \int_0^M \frac{\partial B}{\partial v}(u, v) du \right) dv, \quad (38)$$

а  $B = B^\sigma$  — гармоническая функция в  $Q_2 = \{0 < u < M, 0 < v < 2\}$ , удовлетворяющая таким граничным данным:

$$B(u, 0) = 0, \quad B(u, 1) = \pi, \quad B_u(0, v) = 0, \quad B(M, v) = \varphi(v), \quad (39)$$

где

$$\varphi(v) = \begin{cases} \pi/4 & \text{при } v \in (0, \sigma_1) \cup (\sigma_2, \sigma_3), \\ 3\pi/4 & \text{при } v \in (\sigma_1, \sigma_2) \cup (\sigma_3, 2). \end{cases} \quad (40)$$

Ясно, что формулы (37) выражают геометрические соотношения между длинами  $S_j$  последовательных четырех сегментов ломанной  $\Gamma_a \cap \mathbb{R}_+^2$ . Асимптотический анализ [3] интегралов, представляющих функции  $S_j$ , позволяет показать, что при достаточно малом  $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_2$  существуют такие параметры<sup>53</sup>  $\sigma_1 = O(\rho^2)$  и  $\sigma_3 = \sigma_3(\rho) > \rho$ , для которых выполнены соотношения (37). При этом, малость параметра  $\rho$  приводит к малости “перешейка” контура  $\Gamma_a$  (где  $1/2 < a \leq 1$ , см. рис. 5). Это означает, что

<sup>52</sup>В кандидатской диссертации В.В. Петровой (см. также [9]) теорема 8 обобщена на случай, когда условие  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = \frac{1}{|\gamma|}$  заменено на более общее, типа (26), с некоторыми ограничениями на функцию  $q$ , обеспечивающими выпуклость искомой кривой  $\gamma$ .

<sup>53</sup>Показатель  $\alpha$  в формуле  $\sigma_1 = O(\rho^\alpha)$  зависит от величины углов между сегментами контура  $\Gamma_a$ .



$S_1(\sigma_1(\rho), \rho, \sigma_3(\rho)) = \int_0^\rho \left( \exp \int_0^M \frac{\partial B}{\partial v}(u, v) du \right) dv \rightarrow 1/2$  при  $\rho \rightarrow 0$ . Аналогичные построения проводятся при доказательстве теорем 4 и 6. Что же касается теорем 2 и 8 для криволинейных контуров  $\Gamma$ , то, следуя идее Н.Е. Жуковского<sup>54</sup>, в ряде случаев воплощенной В.Н. Монаховым<sup>55</sup>, криволинейный контур  $\Gamma$  предварительно аппроксимируется полигональным  $\Gamma_m$ . Проблема поиска мультипараметра  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathcal{D}_m \subseteq \mathbb{R}^m$ , соответствующего контуру  $\Gamma_m$ , т.е. проблема аналогичная указанной выше в доказательстве теоремы 7, формулируется в этом случае в форме поиска неподвижной точки для гомотопически эквивалентных при  $\lambda \in [0, 1]$  отображений  $F_m^\lambda : \mathcal{D}_m \ni \sigma \mapsto F_m^\lambda(\sigma) \in \mathbb{R}^m$ , соответствующих удовлетворяющей определенным геометрическим ограничениям деформации контура  $\Gamma_m$  в квадрат (которому отвечает почти идентичное отображение  $F_m^0$ ). Эта проблема неподвижной точки отображения  $F_m^\lambda$  решается с помощью теории Лере–Шаудера. Здесь важно отметить следующее. В случае банахового пространства  $X$  требуемая в теореме Лере–Шаудера компактность отображения  $K^\lambda = I - F^\lambda : \mathcal{D} \rightarrow X$  эквивалентна тому, что  $K^\lambda$  является равномерным пределом конечномерных отображений. При доказательстве теорем 2 и 8 также применяются конечномерные аппроксимации  $K_m^\lambda = I - F_m^\lambda : \mathcal{D}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , но они *напрямую связаны с геометрическими характеристиками контура  $\Gamma$*  (с его самонепересекаемостью), а не с требованием равномерной сходимости. А это позволяет снять обременительное ограничение компактности отображения  $K^\lambda : \mathcal{D} \rightarrow X$ , которое при непосредственном применении теоремы Лере–Шаудера в пространстве  $X$  гельдеровских функций (возникающих в случае криволинейного контура  $\Gamma$ ) приводит к очень жестким ограничениям на геометрию  $\Gamma$ .

Отметим еще одну *особенность функционально-геометрического метода*, которая позволила сравнительно легко завершить доказательство теорем существования при переходе от полигональных контуров  $\Gamma_m$  к спрямляемому контуру  $\Gamma$ . Она опять-таки связана с геометрией: с геометрически очевидной оценкой  $|z_m(w)| \leq C$ ,  $\forall m \geq 1$  для функции  $z_m$ , биективно отображающей границу прямоугольника  $Q \stackrel{(2)}{=} \{0 < u < M, 0 < v < 1\}$  на  $\Gamma_m \rightarrow \Gamma$ . Поэтому существует такая подпоследовательность  $z_{m_k}$ , которая равномерно сходится на каждом компакте  $K \subset Q$  к искомой гармонической функции

$$Q \ni w \mapsto z(w) = z(0) + \int_0^w \exp(A + iB) \in \Omega.$$

<sup>54</sup>Она выражена в заключительных словах его работы<sup>16</sup> о перспективе решения задачи обтекания плоского криволинейного препятствия: “Может быть, эта задача могла бы быть разрешена, как предельный случай задачи об ударе (т.е. обтекании — А.Д.) потока на многогранный контур”.

<sup>55</sup>В.Н. Монахов (1977) *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*. 2-ое изд., “Наука”, Новосибирск.

**Глава 2** (параграфы 3 и 4) посвящена экстремальным задачам со свободной границей. Рассмотрена, в частности, задача

$$\Phi(\gamma) \rightarrow \inf, \quad \text{где} \quad \Phi(\gamma) = \max_{P \in \gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \right| / \min_{P \in \gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \right|. \quad (41)$$

Здесь  $u$  — функция, гармоническая в центрально-симметричной (см. рис. 7) области  $\Omega = \Omega_\gamma$ , ограниченной отрезками  $M_3M_0$ ,  $M_1M_2$  и кривыми  $\gamma_-$  и  $\gamma = \gamma_+$ . Положительные числа  $\mu, \rho, h$  заданы.  $N(s)$  — угол между осью  $x$  и нормалью  $\nu$  к  $\Gamma$  в точке  $P_s \in \gamma$ .  $Q = w(\Omega)$ , где  $w = u + iv$  — однолиственное отображение, причем  $u = \pm\mu$  на  $\gamma_\pm$ ,  $v = -1$  на  $M_3M_0$  и  $v = 1$  на  $M_1M_2$ .

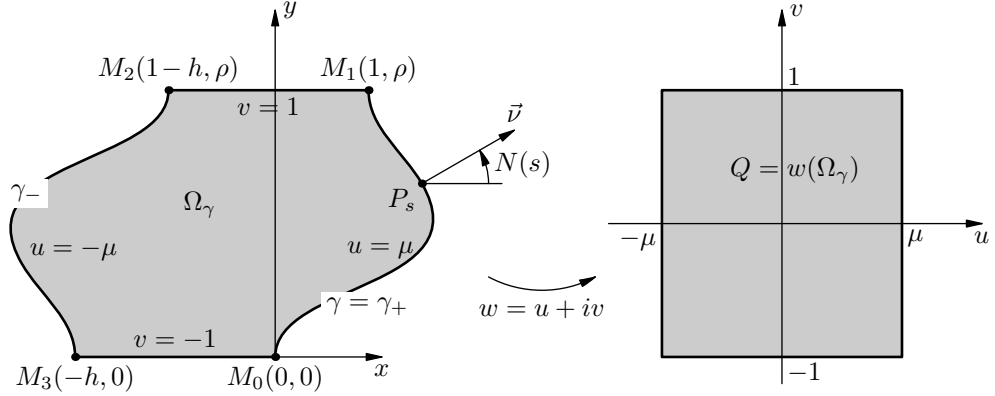


Рис. 7.

**Теорема 9** Пусть  $\max N - \min N \leq \pi$ , а  $N(0) = N(|\gamma|) = 0$ . В этом случае функционал  $\Phi$ , определенный формулой (41), достигает минимум, если ограничена гёльдеровская норма функции  $N$ . При этом, кривая  $\hat{\gamma}$ , доставляющая минимум, определяется, как множество точек

$$z(\mu, \cdot) : [-1, 1] \ni v \mapsto z(\mu, v) = i \int_{-1}^v \exp [\hat{\alpha}(\eta) + i\hat{\beta}(\eta)] d\eta,$$

где  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  — решение задачи  $F_0(\alpha) \rightarrow \inf$ ,  $F_1(\alpha, \beta) = 0$ ,  $F_2(\alpha, \beta) = 0$ . Здесь

$$F_0(\alpha) = \alpha^+ - \alpha^-, \quad \alpha^+ = \max_{|v| \leq 1} \alpha(v), \quad \alpha^- = \min_{|v| \leq 1} \alpha(v),$$

$$F_1(\alpha, \beta) = \rho - \int_{-1}^1 e^{\alpha(v)} \cos \beta(v) dv, \quad F_2(\alpha, \beta) = 1 + \int_{-1}^1 e^{\alpha(v)} \sin \beta(v) dv,$$

а  $\rho$  — ордината точки  $M_1(1, \rho)$ .

**В главе 3** (параграфы 5 и 6) рассмотрена задача Стокса–Лейбензона об эволюции односвязной ограниченной области  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$ , заданной в момент  $t = 0$  своей достаточно гладкой границей  $\Gamma_0$ , окружающей начало координат  $\{0\}$ . Закон деформации области  $\Omega_t$  соответствует динамике пятна жидкости с нулевым поверхностным натяжением, зажатой между двумя пластинами при наличии источника или стока этой жидкости, локализованного в начале координат  $\{0\} \in \Omega_0$ . Иными словами, в момент  $t$  точка

$\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t))$  границы  $\Gamma_t$  области  $\Omega_t$  движется со скоростью  $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{x}, \dot{y})$ , определяемой кинематическим граничным условием

$$\dot{\mathbf{s}} = \nabla u \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \quad (42)$$

где  $\nabla u = (u_x, u_y)$  — градиент функции  $u(t; \cdot, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющей условию Стокса

$$u_{xx} + u_{yy} = q\delta(x, y) \quad \text{в} \quad \Omega_t \quad (43)$$

и динамическому граничному условию Лейбензона

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t. \quad (44)$$

Здесь  $\delta(x, y)$  — это  $\delta$ -функция Дирака, сосредоточенная в начале координат, а коэффициент  $q$  характеризует мощность источника (стока). Случай источника соответствует  $tq > 0$ , а случай стока соответствует  $tq < 0$ . Предполагается, что область  $\Omega_t$  симметрична относительно оси  $x$ , а  $q = 2$ .

Для каждого фиксированного  $t$  можно запараметризовать точку  $\mathbf{s}(t) \in \Gamma_t^+ = \Gamma_t \cap \mathbb{R}_+^2$  той линией уровня  $\{(x, y) \in \Omega_t \mid v(t; x, y) = \eta\}$  функции  $v$ , гармонически-сопряженной к  $u$  в  $\Omega_t^+ = \Omega_t \cap \mathbb{R}_+^2$ , которая содержит эту точку  $\mathbf{s}(t)$ . В силу симметрии  $\Omega_t$  параметр  $\eta$  меняется от нуля до единицы. Тем самым, определена непрерывная функция

$$s(t, \cdot) : [0, 1] \ni \eta \mapsto s(t, \eta) = |P_0 P_\eta| \in [0, |\Gamma_t^+|], \quad (45)$$

где  $|P_0 P_\eta|$  — длина дуги  $\overset{\smile}{P_0 P_\eta}$  кривой  $\Gamma_t^+$ , отсчитываемая в положительном направлении от точки  $P_0$  ее пересечения с положительной полуосью  $x$  до точки  $P_\eta$  ее пересечения с линией уровня  $\{v(t; x, y) = \eta\}$ .

Декартовы координаты  $(x, y)$  точки  $P_v \in \Gamma_t$  представимы в виде

$$x(t, v) = x_0(t) - \int_0^v e^{a(t, \eta)} \sin b(t, \eta) d\eta, \quad y(t, v) = \int_0^v e^{a(t, \eta)} \cos b(t, \eta) d\eta, \quad (46)$$

где  $x_0(t) = \int_{-\infty}^0 e^{A(t; u, 0)} du$ , а

$$a(t, v) + ib(t, v) = A(t; 0, v) + iB(t, 0, v). \quad (47)$$

Здесь

$$A(t; u, v) + iB(t; u, v) = \ln \left| \frac{\partial z(t; w)}{\partial w} \right| + i \arg \frac{\partial z(t; w)}{\partial w}, \quad z = x + iy \in \Omega_t^+, \quad (48)$$

где (при каждом  $t$ )  $w = u + iv \in Q = \{-\infty < u < 0, 0 < v < 1\}$ .

В диссертации получено такое *необходимое условие разрешимости* задачи (42)–(44): функции  $a$  и  $b$  удовлетворяют интегро-дифференциальному уравнению

$$\dot{b}(t, v) = e^{-2a} a' + b' e^{-a} \int_0^v [e^a \dot{a} - e^{-a} b'] d\eta, \quad \dot{b} \stackrel{def}{=} \frac{\partial b}{\partial t}, \quad a' \stackrel{def}{=} \frac{\partial a}{\partial v}. \quad (49)$$

Если  $\Gamma_t$  — окружность, то  $b(t, v) = \pi v$ . Рассматривая  $\Gamma_t$ , как возмущение окружности, введем функцию

$$\beta : [0, 1] \ni v \mapsto \beta(t, v) \stackrel{def}{=} b(t, v) - \pi v = \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) \sin \pi k v, \quad (50)$$

удовлетворяющую (в силу симметрии и дифференцируемости кривой  $\Gamma$ ) такому условию:  $\beta(t, 0) = \beta(t, 1) = 0$ . Коэффициенты Фурье  $\beta_k(t)$  определяют, согласно (46), эволюцию контура  $\Gamma_t$ , ибо

$$A(t; u, v) = a_0(t) + \pi u + \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) e^{\pi k u} \cos \pi k v. \quad (51)$$

где  $a_0(t)$  — функция, которая тоже полностью определяется коэффициентами  $\beta_k(t)$ . Справедлива

**Теорема 10** *Эволюция коэффициентов Фурье  $\beta_k(\cdot)$  задается динамической системой вида*

$$\dot{\beta} - \mathbf{K}(\beta)\dot{\beta} = \frac{1}{2(t + t_0)} \mathbf{F}(\beta), \quad (52)$$

эквивалентной уравнению (49). Покоординатно система (52) такова:

$$\left. \begin{aligned} 2(t + t_0) \left( \beta_1 \dot{\beta}_1 + r_1(\beta) \dot{\beta} \right) &= \left( -\beta_1^2 + 2 \sum_{j \geq 2} \beta_j^2 \right) + s_1(\beta), \\ 2(t + t_0) \left( \dot{\beta}_k + r_k(\beta) \dot{\beta} \right) &= -(k + 2) \beta_k + s_k(\beta) \quad \text{для } k \geq 2, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где

$$|r_k(\beta) \dot{\beta}| \leq C \|\beta\|_1^{1 + \text{sgn} |k-1|} \|\dot{\beta}\|_0, \quad |s_k(\beta)| \leq C \|\beta\|_1^{2 + \text{sgn} |k-1|}, \quad (54)$$

а

$$\|\beta\|_1 = \max_t \sqrt{\sum_{k \geq 1} (k \beta_k(t))^2}, \quad \|\dot{\beta}\|_0 = \max_t \sqrt{\sum_{k \geq 1} (\dot{\beta}_k(t))^2}.$$

Теорема 10 служит не только базой для доказательства нижеследующей теоремы 11 о тех  $H^2$ -возмущениях окружности, которые, подчиняясь кинематическому условию (42), преобразуются за бесконечное время в окружность, но также выявляет принципиальное отличие уравнения (52)  $\iff$  (49) от обычно исследуемого в работах по задаче Стокса–Лейбензона уравнения Галина–Кочиной

$$\Re \left( \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right) = 1, \quad z = e^{i\theta} \in \partial D, \quad D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad (55)$$

относительно однолистного отображения

$$f(t, \cdot) : D \ni z \mapsto f(t, z) \in \Omega_t, \quad f(t, 0) = 0,$$

гомеоморфного вплоть до границы диска  $D$  и задающего искомым контур  $\Gamma_t = f(\partial D)$ . В отличие от уравнения (55), описывающего лишь деформацию контура, уравнение (52) задано в терминах коэффициента  $a(t, \cdot)$  продольного сжатия-растяжения контура  $\Gamma_t$  и эволюции касательного поля  $b(t, \cdot)$  к нему. Благодаря этому уравнение (52) позволяет обнаружить наличие аттракторов (и репеллеров) в пространстве контуров  $\Gamma_t$ . На них оператор  $\mathbf{I} - \mathbf{K}(\beta)$  вырождается. В частности, линеаризованное на окружности (т.е. для  $\beta = 0$ ) уравнение (52), имеющее, согласно теореме 10, такой вид

$$(k-1) \left[ \dot{\beta}_k + \frac{k+2}{2(t+t_0)} \beta_k \right] = 0, \quad (56)$$

вырождается для амплитуды первой гармоники возмущения (50).

В связи с только-что сказанным, подчеркнем, что уравнение (49) было получено посредством применения функционально-геометрического метода к задаче Стокса–Лейбензона.

Пусть  $S_{R(0)} \stackrel{def}{=} \{ |z| = R(0) \}$ , а  $\Gamma_0$  — слабое возмущением окружности  $S_{R(0)}$ , а именно: определяющая контур  $\Gamma_0$  функция

$$[0, 1] \ni v \mapsto b(0, v) = \pi v + \sum_{n \geq 1} \beta_n^0 \sin \pi n v \quad (57)$$

подчинена для некоторых положительных чисел  $\mu \leq 1$  и  $\rho < 1/8$  условию<sup>56</sup>

$$\sum_{k \geq 2} (k \beta_k^0)^2 \leq (\mu \rho)^{1/2} |\beta_1^0|^{3/2}, \quad 0 < |\beta_1^0| \leq \mu \rho. \quad (58)$$

**Теорема 11** *Существует такое  $\rho \in (0, 1/8)$ , что если выполнено условие (58) при том или ином  $\mu \in (0, 1]$ , то эволюция  $t \rightarrow \Gamma_t$  при  $t \geq 0$  (т.е. в случае источника) продолжается бесконечно долго и она единственна на любом временном интервале. При этом для любого  $t > 0$  кривая  $\Gamma_t$  аналитична и ее отклонение от окружности радиуса  $R(t) = \sqrt{R^2(0) + 2t/\pi}$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Более того, существует такая константа  $C$ , что для коэффициентов Фурье  $\beta_k(t)$  функции*

$$\beta : [0, 1] \ni v \mapsto \beta(t, v) \stackrel{def}{=} b(t, v) - \pi v = \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) \sin \pi k v,$$

задающей согласно (46)–(48) эволюцию контура  $\Gamma_t$ , справедливы оценки

$$\left| \dot{\beta}_1(t) - \dot{\bar{\beta}}_1(t) \right| \leq C\mu, \quad \sqrt{\sum_{k \geq 2} \left| \dot{\beta}_k(t) - \dot{\bar{\beta}}_k(t) \right|^2} \leq C\mu, \quad (59)$$

$$\text{где } \bar{\beta}_k(t) = \frac{\beta_k(0)}{(1 + t/t_0)^{k/2+1}}, \quad k \geq 2, \quad (60)$$

<sup>56</sup>Условие (58) позволяет обойти особенности, связанные с вырождением (56).

a

$$\bar{\beta}_1^2(t) = \frac{1}{t + t_0} \left( t_0 \beta_1^2(0) + 2 \sum_{k \geq 2} \beta_k^2(0) \int_0^t \frac{d\tau}{(1 + \tau/t_0)^{k+2}} \right). \quad (61)$$

**Замечание 1** Если предположить, что система уравнений (53) разрешима для  $t \in (T_-, 0)$  при каком-нибудь  $T_- < 0$ , то тогда можно показать, что начальный контур  $\Gamma_0$  необходимо аналитичен и справедливы формулы (59)–(61). Формулы (60) проясняют причину аналитичности начального контура  $\Gamma_0$  в этом случае, т.е. в случае стока. Действительно, функция (50) будет определена при некотором сколь угодно малом  $t < 0$  лишь тогда, когда коэффициенты Фурье  $\beta_k^0 = \beta_k(0)$  функции (57) экспоненциально быстро убывают. Тем самым, они определяют аналитическую функцию.

В случае произвольного начального контура уравнение (52) аппроксимировалось матричным уравнением вида

$$Q(N, \sigma) \dot{N} = P(t, N, \sigma).$$

Здесь  $N = (N_1, \dots, N_m)$ ,  $N_j$  — угол между осью  $x$  и внешней нормалью к  $j$ -ой стороне полигонального квазиконтура, а параметр  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  характеризует длины его сторон. Численный анализ показал, что в пространстве квазиконтуров имеется гиперповерхность

$$\mathfrak{N}_m = \{(N, \sigma) \mid \det Q(N, \sigma) = 0\}.$$

В случае источника (при  $t > 0$ ) эта поверхность коразмерности 1 является притягивающим многообразием (аттрактором). Если обратить время, т.е. рассмотреть случай стока, то эта гиперповерхность превращается в отталкивающее многообразие, как говорят, репеллер (анти-аттрактор). Численный анализ показывает, что вполне “приличный”, внешне ничем особо не выделяющийся контур  $\Gamma_0$ , представленный точкой  $P_0$ , расположенной очень близко к этой гиперповерхности, почти мгновенно изменяет свою форму. Дело в том, что точка  $P_0$  с громадной скоростью “отлетает” от гиперповерхности и через мгновение находится вдали от нее, представляя контур, существенно отличный от  $\Gamma_0$ . Отличие связано с тем, что сильно растут гармоники, соответствующие вырождению оператора  $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ , стоящему при  $\dot{\beta}$  в уравнении (52). При этом площадь, охватываемая контуром, за столь короткое время почти не уменьшается (т.к. мощность стока постоянна). Поэтому возникают так называемые “пальцы”, компенсирующие скачки кривизны контура (вызванные ростом некоторых гармоник) при почти постоянной площади, охватываемой этим контуром.

**Глава 4** (§7 – §9) диссертации посвящена построению (с помощью отображений типа (22)) экспоненциально точной асимптотики гармонической

функции в области с сильно гофрированной границей, а также построению такого асимптотического приближения  $u_\varepsilon$  решения  $U_\varepsilon$  краевой задачи

$$\Delta U_\varepsilon \Big|_\Omega = 0, \quad \left( U_\varepsilon + \lambda \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} \right) \Big|_{s \in \Gamma = \partial\Omega} = f(s/\varepsilon), \quad \text{где } f \in H^\beta(\Gamma), \quad \lambda \geq 0,$$

для которого справедлива следующая оценка

$$\|u_\varepsilon - U_\varepsilon\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq C_\alpha e^{-\tau/\varepsilon}, \quad \text{где } \tau > 0, \text{ а } \alpha = \beta + 1/2 + \text{sign } \lambda \geq 0.$$

Кроме того, в параграфе 8 рассмотрена задача Олейник-Темама об усреднении. Речь идет об асимптотике в  $\bar{\Omega}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения задачи Дирихле

$$\Delta U_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega \in \mathbb{R}^2, \quad U_\varepsilon = F(x/\varepsilon, y/\varepsilon) \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega. \quad (62)$$

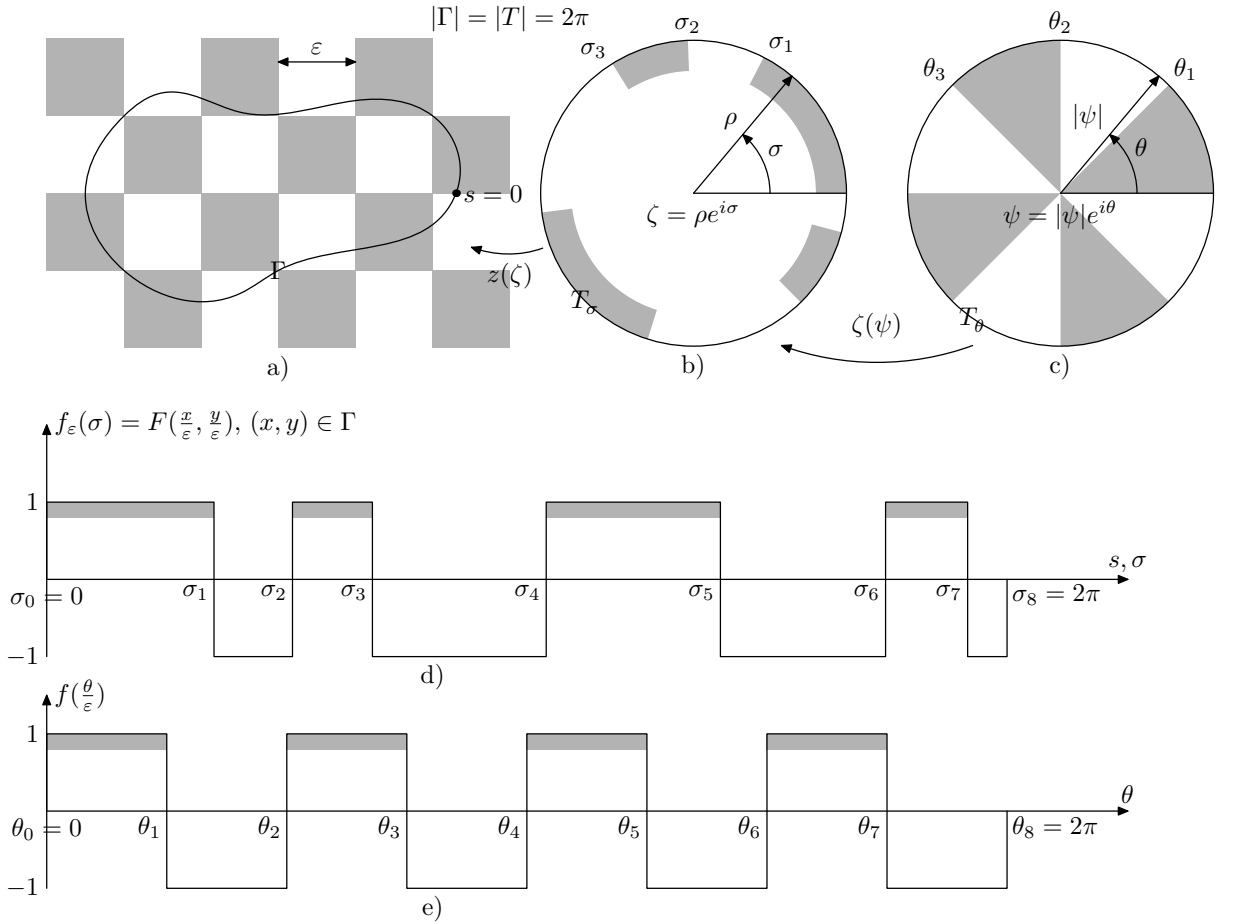


Рис. 7

Предполагается, что функция  $F$  в (62) периодична и нечетна по каждому переменному, двузначна и постоянна на полупериоде, равном единице. Пусть для определенности область  $\Omega$  односвязна (см. рис.7а), а аналитическая кривая  $\Gamma$ , длины  $|\Gamma| = 2\pi$ , задается функцией

$$N : \mathbb{T}_\sigma \ni \sigma \mapsto N(\sigma) - \sigma = F_0 + \sum_{k \geq 1} (F_k \cos k\sigma + G_k \sin k\sigma), \quad (63)$$

определенной на окружности  $\mathbb{T}_\sigma$  (см. рис. 7b). Здесь  $N(s)$  — угол между осью  $x$  и внешней нормалью к  $\Gamma$  в точке  $s$ . Пусть отображение

$$z : V_{\mathbb{T}}^\sigma \ni \zeta = \rho e^{i\sigma} \mapsto z(\zeta) = z_0 + \int_1^\zeta \exp(A + iB) d\zeta \in V_\Gamma, \quad z_0 \in \Gamma, \quad (64)$$

некоторой окрестности  $V_{\mathbb{T}}^\sigma$  на окрестность  $V_\Gamma$  кривой  $\Gamma$  построено (ср. с (22)) посредством функции Гельмгольца–Кирхгофа  $A + iB$ , где

$$A : \zeta = \rho e^{i\sigma} \mapsto A(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (\rho^k - \rho^{-k}) [G_k \cos k\sigma - F_k \sin k\sigma],$$

$$B : \zeta = \rho e^{i\sigma} \mapsto B(\rho, \sigma) = F_0 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (\rho^k + \rho^{-k}) [F_k \cos k\sigma + G_k \sin k\sigma].$$

При заданном числе  $\varepsilon > 0$  построение асимптотики осуществляется так. На  $\Gamma$  фиксируется след функции  $(x, y) \mapsto F(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$ . Развертка этого следа, параметризованная точками  $\sigma_k$  (см. рис.7d), переносится в виде графика функции  $\sigma \mapsto f_\varepsilon(\sigma)$  на окружность  $\mathbb{T}_\sigma$  (см. рис.7b). При сделанном предположении о двужначности функции  $F$  существует аналитический автоморфизм  $\sigma : \theta \mapsto \sigma(\theta)$  окружности  $\mathbb{T}_\theta$ , (см. рис.7c), при котором функция  $\theta \mapsto f_\varepsilon(\sigma(\theta))$  нечетна. Такой автоморфизм может, очевидно, задаваться полиномом, принимающим значение  $\sigma_k$  в точке  $\theta_k = k\tau$  (см. рис. 7d и рис. 7e). С помощью указанного автоморфизма  $\sigma : \theta \mapsto \sigma(\theta)$  в некоторой окрестности  $V_{\mathbb{T}}^\theta$  окружности  $\mathbb{T}_\theta$  строится отображение

$$\zeta : V_{\mathbb{T}}^\theta \ni \psi = \mu e^{i\theta} \mapsto \zeta(\psi) = 1 + \int_1^\psi \exp(a + ib) d\psi \in \zeta(V_{\mathbb{T}}^\theta), \quad (65)$$

где функции  $a = a(\mu, \theta)$  и  $b = b(\mu, \theta)$  представлены через коэффициенты  $c_k, d_k, f_k$  и  $g_k$  разложений в ряды Фурье  $2\pi$ -периодических функций

$$\sigma(\theta) - \theta = f_0 + \sum_{k \geq 1} (f_k \cos k\theta + g_k \sin k\theta), \quad -\frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} = \sum_{k \geq 1} k(c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta)$$

следующими рядами

$$a_0 + \sum_{k \geq 1} \left[ \left( \frac{d_k + g_k}{2} \mu^k + \frac{d_k - g_k}{2\mu^k} \right) \cos k\theta - \left( \frac{c_k + f_k}{2} \mu^k + \frac{c_k - f_k}{2\mu^k} \right) \sin k\theta \right],$$

$$f_0 + \sum_{k \geq 1} \left[ \left( \frac{c_k + f_k}{2} \mu^k - \frac{c_k - f_k}{2\mu^k} \right) \cos k\theta + \left( \frac{d_k + g_k}{2} \mu^k - \frac{d_k - g_k}{2\mu^k} \right) \sin k\theta \right],$$

где константа  $a_0$  определяется из нормировки:  $\int_0^{2\pi} e^{a(1,\theta)} d\theta = 2\pi$ .

Заметим, что отображение (65) однолистно и на  $\mathbb{T}^\theta$  совпадает с  $\sigma$ .



**Теорема 12** Пусть  $\max_k(\sigma_k - \sigma_{k-1}) = O(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда искомая экспоненциально точная асимптотика решения задачи (62) представима в виде  $u_\varepsilon : \bar{\Omega} \ni z = x + iy \mapsto u_\varepsilon(z) = \chi_\varepsilon(z) \cdot v_\varepsilon(\psi(\zeta(z)))$ . Здесь  $\chi_\varepsilon$  — гладкая в  $\bar{\Omega}$  функция, равная 1 вблизи  $\Gamma$  и нулю вне некоторой ее окрестности,  $v_\varepsilon$  — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в диске с граничной функцией  $f(\theta/\varepsilon)$ , представленной на рис. 7е, а отображение  $z \mapsto \psi(\zeta(z))$  — обратно к отображению

$$z \circ \zeta : V_{\mathbb{T}}^\theta \ni \psi = \mu e^{i\theta} \stackrel{(64)-(65)}{\mapsto} z(\zeta(\psi)). \quad (66)$$

При этом, линии уровня  $u_\varepsilon(x, y) = 0$  искомого асимптотического решения  $u_\varepsilon$  вкладываются в поле трансверсалей к  $\Gamma$ , которое есть образ нормалей к окружности  $\mathbb{T}_\theta$  при отображении (66).

### 3. Основные публикации по теме диссертации

( Публикации [1]–[16] из официального Перечня ВАК )

[1] Прямая и обратная задачи в теории равновесия плазмы. *Успехи матем. наук*, 1974, Т. 29, № 6, 203. (Диссертант доказал теоремы, относящиеся к прямой задаче о равновесия плазмы. Соавтор Л.Е. Захаров /институт им. Курчатова/ показал, что обратная задача в предположении однородности распределения тока имеет единственное решение в случае квадрупольного поля. Результат Л.Е. Захарова не включен в диссертацию).

[2] The form of a steady plasma subject to the skin effect in a tokamak with non-circular cross-section. *Nuclear Fusion*, 1975, v. 15, 765-768.

[3] Sur la perturbation "singulière" dans un problème à frontière libre. *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1977, v. 594, 123-130.

[4] Equilibrium form of a steady plasma *Physics of Fluids*, 1978, v. 21, 902-904.

[5] Об одной задаче со свободной границей в теории равновесия плазмы. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, 1978, вып. 4, 65-82.

[6] Теоремы существования, несуществования и регулярности в одной задаче со свободной границей. *Успехи матем. наук*, 1983, вып. 5, 151-152.

[7] Теоремы существования, несуществования и регулярности в одной задаче со свободной границей. *Математический сборник АН СССР*, 1983, №1, 1983, 421-444. (Соавтор А.Баджади /Алжир, аспирант диссертанта/ доказал в данной статье утверждения в замечаниях 1.1, 4.1 и 4.2, принял участие в доказательстве леммы 1.2 и предложения 3.3. Результаты, представленные в автореферате и в диссертации, получены диссертантом).

[8] Об одной экстремальной задаче со свободной границей. *Успехи матем. наук*, 1986, вып.4, 190-191. (Соавтор А.А. Созыкин /канд. техн. наук/

выполнил численные расчеты по написанной им программе, алгоритм которой соответствует конструктивной теореме, доказанной диссертантом).

[9] On inverse and direct free boundary problems in the theory of plasma equilibrium in a Tokamak. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1996, Т. 323, Série I, 353-358 (Соавторы — ученики диссертанта: канд. ф.-м.наук В.В. Петрова и дипломник В.М. Силантьев. Их вклад в эту заметку упомянут, соответственно, в примечании<sup>52</sup> и примечании<sup>45</sup>. Все основные конструкции доказательств теорем этой публикации принадлежат диссертанту).

[10] Полная асимптотика решения задачи Дирихле для 2-мерного уравнения Лапласа с быстро осциллирующими граничными данными. *Доклады РАН*, 1996, Т. 346, № 6, 732-734.

[11] Полигональная модель для течения Хил-Шоу. *Успехи матем. наук*, 1998, вып. 4, 195-196.

[12] Конечноточечная модель задачи Стокса-Лейбензона для Хил-Шоу течения. *Фундамент. и прикл. математика*, 1999, № 5, 67-84. (Соавтор канд. физ-мат наук О.А. Васильева выполнила численные расчеты. Постановка задачи и все теоретические результаты принадлежат диссертанту).

[13] Some Applications of the Helmholtz-Kirchhoff Method. *Russian J. Math. Ph.*, 2000, v. 7, No. 2, 166-186.

[14] Об эволюции слабого возмущения окружности в задаче о течении Хил-Шоу. *Успехи матем. наук*, 2002, вып. 6, 177-178.

[15] An inverse problem originating from magnetohydrodynamics. *Inverse Problems*, 2004, v. 20, No.1, 137-154 (Соавтор: проф. М. Moussaoui /Lyon/; его вклад в работу (стр. 145-146) никак не отражен в диссертации).

[16] Метод Гельмгольца-Кирхгофа и граничное управление при обтекании плоским потоком. *Фундамент. и прикл. математика*, 2006, № 4, 65-77.

[17] Configurations du plasma stationnaire équilibré. *Free Boundary Problems. Proceedings of a Sem. held in Pavia, Roma*, 1980, v. I, 467-486.

[18] The Stokes-Leibenson Problem for Hele-Shaw Flows. *Patterns and Waves* (Eds. A. Abramian, S. Vaculenko, V. Volpert), Saint Peresburg, 2003, 103-124 (Соавтор: Dr. J.-P. Loheac /Lyon/ выполнил численные расчеты по написанной им программе; теоретические результаты принадлежат диссертанту).

[19] Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele-Shaw flows *Journ. of Math. Sciences*, 2004, No. 8, 4381-4403.

[20] О минимуме непрерывных функционалов от производных гармонической функции, параметризованной ее искомой линией уровня и/или другими граничными данными. *Современная математика и ее приложения*, ВИНТИ, 2005, Т. 24 (Динамические системы и оптимизация), 35-50.

[21] Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele-Shaw flows. Part II. *Journ. of Math. Sciences*, 2006, No. 6, 7064-7078.