

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

На правах рукописи

Князев Денис Вячеславович

ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С
ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ

01.02.05. – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание
учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
С.Н. Аристов

Пермь – 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА	10
1.1 Библиографический обзор точных решений уравнений движения вязкой жидкости	10
1.1.1 Конические течения	17
1.1.2 Решения линейные по двум пространственным переменным	23
1.1.3 Решения линейные по одной пространственной переменной	35
1.2 Класс точных решений уравнений гидродинамики с пространственным ускорением и его общие свойства	40
ГЛАВА 2. ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ	44
2.1 Вращательно-симметричные локализованные вихри в идеальной жидкости с дифференциальной закруткой	44
2.1.1. Постановка задачи	45
2.1.2 Точное решение задачи и его анализ	47
2.2 Стационарные периодические цепочки локализованных вихрей в идеальной жидкости	54
2.2.1 Постановка и решение задачи	54
2.2.2 Периодическая мода	59
2.2.3 Однородная мода	60
2.2.4 Анализ результатов	63
Основные результаты главы 2	69
ГЛАВА 3. ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ	70
3.1 Стационарное течение вязкой жидкости, вызываемое осевым деформированием цилиндрической поверхности	70
3.1.1 Постановка задачи	71
3.1.2 Осесимметричные течения	74

3.1.3 Вращательно-симметричные течения	79
3.2 Новое точное решение задачи о течении Куэтта - Пуазейля	87
3.2.1 Постановка задачи	87
3.2.2 Классическое решение задачи Куэтта - Пуазейля	90
3.2.3 Новое решение задачи Куэтта - Пуазейля	90
3.3 Устойчивость вращательно-симметричных режимов стационарного течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане	99
3.3.1 Основное течение	99
3.3.2 Возмущения конечной амплитуды	102
3.3.3 Интегральные соотношения для монотонных возмущений	108
3.3.4 Метод решения спектральной задачи	109
3.3.5 Устойчивость одноячеистого режима течения жидкости в цилиндрическом стакане	111
3.3.6 Неустойчивость двухячеистого режима течения жидкости в цилиндрическом стакане	117
Основные результаты главы 3	121
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	125

ВВЕДЕНИЕ

Нет сомнения в том, что всякое реальное течение жидкости является вихревым. В связи с этим вопросы исследования структуры вихрей, их генерации, эволюции и взаимодействия между собой представляются актуальными для гидродинамики в целом. В настоящее время известно лишь небольшое количество точных решений гидродинамических уравнений, адекватно описывающих структуру вихрей. К их числу можно отнести, например, вихри Бюргерса и Салливана. Между тем внутреннее устройство вихря, его интенсивность и масштаб в значительной степени определяют устойчивость вихревого образования и характер его взаимодействия с другими вихрями и потоком в целом. Так известно, что крупные атмосферные вихри обладают значительно большим временем жизни по сравнению с мелкими, что указывает на высокую степень их устойчивости и позволяет рассматривать такие вихри как автономные образования. В то же время, наличие в потоке чётко выраженных вихревых структур является одним из основных факторов, определяющих всю картину течения, складывающуюся в результате взаимодействия вихрей различной топологии и масштаба. Характер вихревых взаимодействий играет определяющую роль в протекании каскадных процессов в турбулентности, которые могут приводить либо к диссипации энергии (прямой каскад), либо к возникновению различных когерентных структур (обратный каскад). Теоретическое изучение этих и многих других процессов, связанных с исследованием дестабилизирующей или, напротив, организующей роли вихревых взаимодействий, в настоящее время, по-видимому, далеко от завершения. В связи с этим отыскание новых точных решений уравнений гидродинамики, описывающих вихревые течения жидкости, является актуальной задачей. Представляется, что её решение открывает наиболее простой и корректный путь к получению ряда теоретически и практически важных результатов.

Целью данной работы является описание структуры вращательно-симметричных вихрей и их воздействия на поток несжимаемой жидкости в ограниченных и бесконечных цилиндрических областях на основе класса точных решений уравнений гидродинамики с пространственным ускорением (линейностью) по продольной координате.

Содержание работы. Диссертация состоит из трёх глав, введения и заключения.

В первой главе диссертации приведён обзор литературы, посвящённой точным решениям уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса, и выполнена классификация точных решений. Все известные классы точных решений гидродинамических уравнений отнесены к двум типам: конические течения и решения линейные по части пространственных переменных.

Во втором разделе первой главы приведён класс точных решений вращательно-симметричных решений уравнений гидродинамики, характеризуемый линейной зависимостью азимутальной и продольной компоненты скорости от осевой координаты (решения с пространственным ускорением по осевой координате). С его помощью выполнена редукция уравнений Навье-Стокса к одномерной системе уравнений в частных производных для неизвестных функций, зависящих только от радиальной координаты и времени. Проведён анализ некоторых общих свойств, присущих решениям редуцированной системы.

Во второй главе рассмотрены радиально локализованные течения идеальной несжимаемой жидкости, занимающей неограниченный объём.

В первом разделе при помощи класса точных решений с пространственным ускорением найдено семейство точных решений уравнений Эйлера, описывающее колоннообразные вихри со всюду регулярным полем скорости, обращающимся в нуль на бесконечном удалении от оси симметрии. Показано, что внутренняя структура таких вихревых образований определяется отношением их радиального масштаба

к осевому. Квадрат этого отношения принимает счётное множество положительных целочисленных значений, то есть имеет место квантование вихрей, описываемых вышеупомянутым классом точных решений.

Во втором разделе описана структура периодических вдоль оси симметрии цепочек радиально локализованных вихрей. Показано, что при дискретных значениях энергии вихрей цепочки вблизи неё может возникать бесконечное (счётное) множество течений с характерным радиальным масштабом, превосходящим масштаб самой цепочки.

В третьей главе рассмотрены течения вязкой жидкости, происходящие под действием различных внешних факторов, в областях, ограниченных цилиндрическими поверхностями.

В первом разделе исследована задача о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между полубесконечными коаксиальными цилиндрами, вызываемом осевым деформированием внутреннего цилиндра. В случае растяжения внутреннего цилиндра задача интерпретирована как приближенная модель движения, возникающего в большом цилиндрическом сосуде при истечении жидкости через центральное отверстие на дне. При этом, растягивающийся внутренний цилиндр моделирует боковую поверхность струи, формирующуюся в жидкости непосредственно над отверстием. В случае сжатия цилиндра задача может быть интерпретирована как течение, возникающее в результате проникновения струи в заполненный жидкостью сосуд с непроницаемым дном.

При помощи класса точных решений с пространственным ускорением проблема описания вышеупомянутых течений сведена к исследованию спектральной краевой задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Роль собственного значения играет число Рейнольдса, построенное по скорости деформирования внутреннего цилиндра. Анализ спектра значений числа Рейнольдса выявил неединственность решения задачи. В частности, установлена возможность

существования вращательно-симметричных и не закрученных осесимметричных режимов течения при одинаковых числах Рейнольдса. Найдена точка ветвления решений, описывающих эти два режима.

В качестве примера разрешимости задачи об увлечении неограниченного объёма жидкости растягивающимся цилиндром приведено точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее радиально локализованное закрученное течение с азимутальной скоростью, не оказывающей влияние на полоидальную циркуляцию.

Во втором разделе рассмотрена задача об установившемся течении вязкой жидкости между неподвижным и вращающимся цилиндрами в присутствии заданной разности средних давлений между двумя сечениями кольцевого канала. Решение данной задачи вновь построено в рамках класса точных решений уравнений Навье-Стокса с пространственным ускорением вдоль осевой координаты, что, в частности, предполагает отказ от допущения об однородности потока в продольном направлении, характерного для классического решения задачи Куэтта-Пуазейля.

Отличительными особенностями найденного решения являются наличие у жидкости собственной торсионной закрутки, не связанной с вращением внутреннего цилиндра, и ненулевой радиальной компоненты скорости. Вследствие этих особенностей определяющая роль в формировании картины движения принадлежит силам инерции, что в свою очередь обуславливает некоторые необычные свойства решения. Одним из этих свойств является пропорциональность расхода угловой скорости вращения внутреннего цилиндра.

Третий раздел посвящён исследованию монотонной устойчивости одно и двухячеистого режимов стационарного течения вязкой жидкости в полубесконечном цилиндре с непроницаемым дном (стакане) относительно специальных возмущений конечной амплитуды.

В качестве основных течений выбраны два режима движения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане, описываемые в рамках класса точных

решений с пространственным ускорением. Выбор вида возмущений обусловлен требованием точной редукции амплитудных уравнений к линейной системе. Следствием специфики выбора типа возмущений и накладываемых на них дополнительных условий (граничных, нормировки и замкнутости) является дискретность спектра декрементов, положительным значениям которых соответствует затухание возмущений. Спектральная задача решена численно. Для одноячейстого основного течения не удалось обнаружить возмущения, растущие со временем. В случае двухячейстого основного режима в исследованной области параметров обнаружено одно нарастающее возмущение.

Научная новизна результатов исследования. Найдено счётное семейство точных стационарных решений уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости, описывающих радиально локализованные вихри различной пространственной структуры, определяемой отношением радиального и осевого масштабов течения.

Обнаружен класс периодических и локализованных в пространстве точных решений уравнений Эйлера. В рамках данного класса в конечном виде описано счётное семейство цепочек локализованных вихрей, обладающих конечной энергией. Показано, что при дискретном наборе энергий вихрей пространственно периодического движения на их фоне могут возникать радиально локализованные вращательно-симметричные течения большего масштаба (по сравнению с фоновым течением) с энергией, целиком определяемой периодом цепочки.

В рамках исследуемого класса точных решений уравнений Навье-Стокса исследована модельная задача о стационарном истечении вязкой жидкости из цилиндрического сосуда. Обнаружено ответвление решений с ненулевой азимутальной составляющей поля скорости от незакрученного режима истечения (бифуркация вращения).

Найдено новое точное решение задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами

в присутствие заданного неоднородного продольного градиента давления. Полученное решение обладает рядом существенных отличий от классического решения, описывающего течение Куэтта-Пуазейля.

В точной постановке показана неустойчивость двухячеистого режима стационарного течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане относительно возмущений специального вида.

Практическая значимость работы. Проведённые теоретические исследования могут быть использованы при анализе результатов натуральных и лабораторных наблюдений закрученных потоков жидкости, а также при проектировании и изучении работы узлов некоторых технологических конструкций.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Пермь, 23-29 августа 2001г.; Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.), III международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения» (Красноярск, 25-29 августа 2002 г.), Всероссийских конференциях «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 10-14 мая 2004 г.) и «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САМГОП-2004)» (Абрау-Дюрсо, 4-7 сентября 2004 г.).

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред УрО РАН.

Диссертация состоит из трёх глав, введения, заключения и списка цитируемой литературы (200 наименований). В работе приводится 25 рисунков, одна схема и таблица. Общий объём диссертации составляет 140 страниц. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах [31, 8, 7, 32, 4, 13].

Работа является составной частью плановой научно-исследовательской темы Лаборатории Гидродинамической устойчивости ИМСС УрО РАН «Гидродинамика и теплообмен в вязких жидкостях в условиях взаимодействия поверхностных сил» (01.20.06 04353).

ГЛАВА 1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

В первом разделе настоящей главы выполнен краткий обзор работ по точным решениям уравнений движения вязкой жидкости и приведена их формальная классификация по виду поля скорости. В обзоре основное внимание уделено работам, посвящённым анализу нелинейных свойств решений уравнений Навье – Стокса, близких к свойствам решений задач, рассматриваемых в данной диссертации. Во втором разделе приведён используемый в дальнейшем класс точных решений уравнений гидродинамики и проанализированы некоторые свойства редуцированной системы уравнений.

1.1. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Движение вязкой несжимаемой жидкости подчиняется системе уравнений Навье-Стокса, состоящей из закона изменения импульса (записанного в форме Громеки - Ламба) и условия несжимаемости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = -\nabla P + \frac{v^2}{2} - \nu \text{rot rot } \vec{v}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь \vec{v} – вектор скорости; P – давление, отнесённое к постоянной плотности; ν – коэффициент кинематической вязкости среды. Первое векторное уравнение (1.1) – уравнение баланса сил инерции, вязкости и градиента давления в движущейся среде.

Формулировка конкретной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости состоит в задании начальных и граничных условий для системы (1.1). Наиболее распространёнными краевыми условиями в гидродинамике являются условия прилипания жидкости к твёрдым поверхностям,

ограничивающим область течения и условия на свободной границе. При изучении движения в неограниченных (частично ограниченных) объёмах на решения уравнений Навье-Стокса часто накладываются требования периодичности или стремления потока к некоторому заданному состоянию (в том числе покою) на бесконечности.

Численные и аналитические исследования вязких течений наталкивается на серьёзные трудности связанные, прежде всего, с наличием в уравнениях движения как линейных, так и нелинейных слагаемых, представляющих различные вышеназванные силы, действующие на частицу жидкости в процессе её движения. Другой серьёзной проблемой является отсутствие в системе уравнений Навье-Стокса эволюционного уравнения для давления. Использование вместо (1.1) системы уравнений для завихрённости, не содержащей давления в явном виде, но имеющей более высокий порядок, приводит к необходимости формулировки дополнительных граничных условий, приближённых вариантов которых может быть множество [127]. Исключение давления из уравнений не избавляет от необходимости его вычисления, поскольку давление может фигурировать в граничных условиях, как, например, в задачах со свободными границами. Определённый прогресс в решении проблемы давления достигнут в недавней работе Аристова и Пухначёва [14], где для случая вращательно-симметричных течений вязкой жидкости получена новая, эквивалентная (1.1), форма записи уравнений движения и сформулировано необходимое число краевых условий для случая твёрдых границ. Как бы то ни было, задача исследования свойств уравнений (1.1) и разработки эффективных методов их решения далека от своего решения. Одним из основных направлений исследования системы (1.1) является отыскание возможных типов (классов) её точных решений.

Ясно, что в связи с серьёзными математическими трудностями, точное решение может быть найдено лишь для небольшого числа сравнительно

простых задач. Тем не менее, это не умаляет значимости точных решений для теории и приложений, поскольку любое решение наследует определённые свойства присущие полным уравнениям Навье-Стокса и одновременно свободно от ряда допущений, характерных для приближённых моделей. Роль, играемая классами решений уравнений гидродинамики, выходит далеко за рамки простых тестов, предназначенных для проверки правильности уже имеющихся теоретических представлений или отладки численных схем. Исследование классов точных решений даёт возможность получения совершенно новых, порой неожиданных результатов. Некоторые примеры таких исследований будут приведены далее.

Решением некоторого заданного уравнения, как известно, называется функция, которая будучи подставленной в это уравнение, обращает его в тождество. Аналогично вводится определение решения системы уравнений. В гидродинамике известно лишь очень небольшое количество точных решений (слово «точных» подчёркивает то, что речь идёт не о приближённых решениях (1.1)), удовлетворяющих жёстким требованиям данного только что классического определения. По этой причине понятие точного решения со временем трансформировалось и расширялось. Не пытаясь дать строгого определения, укажем лишь на то, что в настоящее время понимается под термином «класс точных решений» большинством исследователей [3, 182]. Класс точных решений это такое представление гидродинамических полей, которое позволяет редуцировать исходную систему уравнений Навье-Стокса к системе обыкновенных дифференциальных уравнений или к уравнениям в частных производных относительно функций не более чем двух аргументов, один из которых, как правило, связан со временем. К этому можно добавить требование сохранения редуцированной системой высокого порядка, например, того же, что (1.1).

Данное таким образом «определение» точного решения указывает на основной способ их получения, связанный с уменьшением количества переменных, от которых зависят искомые величины. Сокращение числа аргументов может быть достигнуто, например, путём учёта симметрий, заложенных в постановке исследуемой задачи (плоскопараллельность, осе – или центральносимметричность). Для нахождения автомодельных связей между переменными могут быть полезны принципы теории размерностей и подобия [46]. По-видимому, наиболее теоретически развитыми методами отыскания симметрий и точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе и уравнений Навье-Стокса, являются методы группового анализа [43, 3].

Особое место среди всевозможных решений уравнений Навье-Стокса (1.1) занимают потенциальные течения и течения Бельтрами - Тркала. Поля скоростей течений этих двух типов соответственно имеют вид $\vec{v} = \nabla \phi$ (ϕ – скалярная функция координат и времени) и $\vec{v} = \lambda \text{rot } \vec{v}$ ($\lambda = \text{const}$), позволяющий избавиться от нелинейности в правой части (1.1) и свести задачу к решению линейных уравнений. Порядок этих линейных уравнений значительно ниже порядка исходной системы (1.1), что, например, не позволяет удовлетворить условиям прилипания жидкости к твёрдым границам. Последнее обстоятельство указывает на ограниченность области применимости безвихревых течений и течений Бельтрами - Тркала, но не обесценивает их вовсе. В первую очередь это относится к потенциальным течениям, обнаруженным ещё основателем теоретической гидродинамики Л. Эйлером [59], успешно применяемым в классической теории поверхностных волн и в теории течения идеальной жидкости [33]. Не смотря на то, что в случае безвихревого течения диссипативные слагаемые в уравнениях движения тождественно обращаются в ноль, потенциальные решения могут быть использованы для описания движений вязкой жидкости. Ярким примером этому является задача Забабахина о заполнении пузырька вязкой жидкостью [29], в

которой при потенциальном течении влияние вязких напряжений проявляется через условия на свободной границе.

Методы исследования потенциальных течений подробно описаны во многих учебниках по гидродинамике (например, [33]), а важнейшие результаты, касающиеся течений Бельтрами - Тркала и их обобщения ($rot(rot \vec{v} \times \vec{v}) = 0$) изложены в обзорах [45, 170, 182]. В дальнейшем течения дух этих типов не обсуждаются.

Наибольший интерес представляют классы точных решений, сохраняющие нелинейные свойства исходных уравнений Навье-Стокса. Дальнейший материал этого раздела посвящён краткому обзору ряда задач, решённых в рамках таких нелинейных классов решений уравнений гидродинамики вязкой жидкости. В задачи этого обзора отнюдь не входит полный охват всех имеющихся работ по точным решениям гидродинамических уравнений или установление хронологии обнаружения классов точных решений. Основное внимание уделено тем задачам, где отчётливо проявляются нелинейные свойства решений уравнений движения, такие как потеря единственности и ветвление решений, исчезновение решения при некоторых значениях параметров задачи, а также упомянуты отдельные работы, связанные с исследованием устойчивости точных решений. Все перечисленные свойства встречаются в задачах, изученных в данной диссертации.

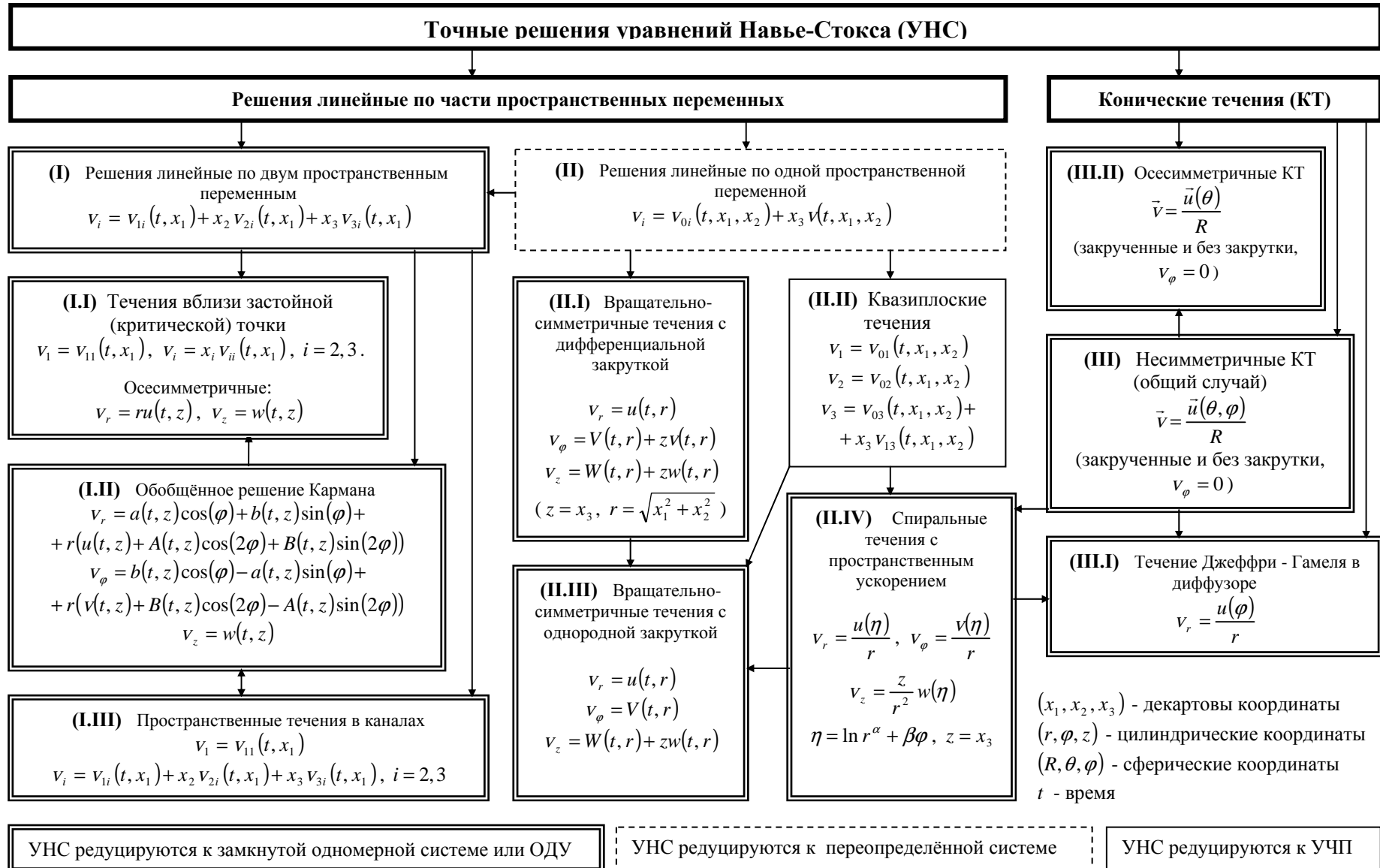
В литературе имеется несколько обзорных работ по точным решениям уравнений Навье-Стокса [70, 69, 90, 190]. Сравнительно недавно опубликованы обзоры [45, 170, 182, 185]. Подробнейший обзор В.В. Пухначёва [45] выполнен с позиций группового анализа дифференциальных уравнений и охватывает большое число современных работ по всему спектру известных точных решений уравнений Навье-Стокса. Особое внимание в этом обзоре уделено задачам со свободными границами. Обзоры Ванга (C.Y. Wang) [170, 182, 185] менее развёрнуты, по сравнению с [45], но содержат большую ссылочную информацию о

работах зарубежных авторов. Обстоятельный теоретический анализ ряда точных решений уравнений гидродинамики дан в монографии [27]. Книга [3] содержит изложение современных теоретико-групповых методов анализа дифференциальных уравнений применяемых к уравнениям Навье-Стокса, Эйлера и Обербека - Буссинеска. Некоторые классические задачи гидродинамики, допускающие точное решение, разобраны в широко известных учебниках [34, 16, 56, 38].

По-видимому, все известные в настоящее время классы точных решений уравнений Навье-Стокса могут быть отнесены к двум категориям: конические течения, в которых скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от начала координат, и решения линейные по части пространственных переменных (схема 1). Такая формальная классификация по виду поля скорости с одной стороны представляется общей, но с другой стороны, вероятно, не является конструктивной, поскольку не указывает конкретные направления поиска новых типов решений уравнений (1.1).

Основные классы точных решений, встречающиеся в дальнейшем обзоре, представлены на схеме 1. Сами классы точных решений заключены на схеме в двойные рамки и пронумерованы римскими цифрами в круглых скобках. Ссылки на них в тексте приводятся именно в таком виде (римские цифры в круглых скобках). Стрелки показывают связи между классами. Необходимо отметить, что не все использованные на схеме названия общеприняты. Кроме того, приведены два вида представления поля скорости (II) и (II.II) не являющиеся классами точных решений (1.1) в смысле данного выше «определения». Их включение в схему оправдано тем, что на взгляд автора настоящей диссертации, они могут послужить отправной точкой для поиска новых точных решений уравнений движения вязкой жидкости. Представление скорости (II) редуцирует уравнения Навье-Стокса к переопределённой системе, анализ совместности которой даёт все известные классы точных решений с линейной зависимостью

Схема 1



скорости от части пространственных координат. Для полей скорости типа (II.II) получается замкнутая система уравнений, частым случаем которой выступает класс (II.IV).

1.1.1 Конические течения

Классическим примером точного решения уравнений Навье-Стокса, отнесённого здесь к классу конических течений (III.I), является задача о стационарном течении вязкой жидкости вызываемым, наличием однородного источника или стока, расположенного на линии пересечения двух твёрдых плоскостей, наклонённых друг к другу под некоторым углом α . Впервые эта задача была рассмотрена Джеффри (Jeffrey) [113] и Гамелем (Hamel) [106], а различные её аспекты обсуждались в целом ряде последующих работ [27, 33, 97, 16]. Исследования показали, что сходящееся (конфузорное) течение существует при всех числах Рейнольдса, построенных по расходу и кинематической вязкости жидкости. В то же время в задаче о диффузоре (расходящееся течение) было обнаружено исчезновение одних решений и появление других по достижении конечных критических значений числа Рейнольдса. При этом установлено, что чистое расходящееся течение сменяется движениями с противотоками как симметричными, так и несимметричными относительно биссектрисы угла α . В работах [26, 97] показано, что счётное множество решений задачи о диффузоре бифурцирует от потенциального стока ($v_r = Q/(2\pi r)$). Там же и в недавних работах [1, 2] исследован вопрос о последовательности возникновения новых режимов течения в задаче Джеффри - Гамеля.

Течение Джеффри-Гамеля с одной или обеими свободными границами исследовано в монографии [3]. Выводы этого исследования в значительной мере отличаются от изложенных выше и иллюстрируют влияние типа граничных условий на получаемые результаты. Достаточно сказать, что при наличии свободных границ угол раствора α и расход не могут считаться независимыми параметрами задачи, как это имеет место в

случае твёрдых стенок, поскольку положение свободной границы заранее не известно. Анализ задачи с двумя свободными границами показал возможность существования только конфузорного течения реализующегося в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса ($-8\pi < Re < 0$). При этом оказалось, что в зависимости от величины Re задача может иметь от одного до семи решений, каждое из которых ответвляется от состояния покоя. Тем самым обнаружена неоднозначность зависимости решения от параметра Re и возможность бифуркационного возникновения движения непосредственно из состояния покоя, что указывает на то, что последнее не является изолированным в противоположность случаю одних только твёрдых границ.

Таким образом, анализ такого, сравнительно простого, точного решения как течение Джеффри–Гамеля даёт возможность обнаружить и корректно исследовать целый ряд свойств, присущих уравнениям Навье–Стокса, таких как исчезновение решения при конечных значениях параметра, неединственность решения в зависимости от величины этого параметра, потеря симметрии течения, возникновение множественных бифуркаций.

Изучение незакрученных осесимметричных конических течений началось с работы Слэзкина [50], где впервые показано, что представление гидродинамических полей вида (III.11) редуцирует систему Навье–Стокса к одному обыкновенному дифференциальному уравнению. Яцеевым [61] было найдено общее решение уравнения Слэзкина в виде гипергеометрических функций. В [61], а так же в работах Сквайра (Squire) [146, 145] приведён ряд частных решений, описывающих струйные течения, наиболее известным из них является затопленная струя Ландау [37].

В [145] Сквайром была предпринята попытка исследования задачи о струе бьющей из малого отверстия на плоскости. При этом оказалось невозможным одновременно удовлетворить условиям регулярности потока

на оси струи и условиям прилипания на плоскости. Вследствие этого, решение Сквайра следует интерпретировать как струйное течение, индуцированное движением вещества плоскости типа меридионального стока. Другие примеры струй индуцированных различными типами движений вещества плоскости приведены в [129, 130, 193, 21, 22, 144, 152]. Решение Сквайра представляет собой пример образования предельно сильных струй при конечных значениях числа Рейнольдса, построенного по обильности источника и коэффициенту кинематической вязкости. При приближении Re к конечному пороговому значению вблизи оси образуется струйный пограничный слой, толщина которого, по достижении Re критического значения, обращается в нуль и возникает струя с бесконечным импульсом. Обобщение задачи Сквайра на случай закрученных течений выполнено в работах [21, 193].

Неизбежная сингулярность скорости на оси при выполнении условий прилипания на твёрдых конических поверхностях (в частности на плоскости) является следствием представления гидродинамических полей в виде (III.II). Данное свойство осесимметричных конических течений играет определяющую роль при постановке и интерпретации результатов исследования целого ряда задач. Одним из способов конкретизации осевой сингулярности в рамках класса (III.II) является обобщение подхода Ландау [37] связанного с рассмотрением потока импульса через конус малого угла раствора окружающего ось. Данный подход развит в монографии [27] и призван моделировать некоторые интегральные характеристики реальных гидродинамических структур, образующихся в приосевой зоне, таких как тонкие турбулентные струи, однородные линейные источники массы или момента импульса.

Руководствуясь идеями близкими к вышеизложенному методу Шнайдер (Schneider) [138] построил квазиавтомодельное решение задачи о струе бьющей из точечного источника на плоскости. Для этого осевая сингулярность была задана в виде совместимом со струёй Шлихтинга

(Schlichting) [56], а возникающее в результате эжекции вторичное течение окружающей струю жидкости численно описывалось в рамках класса конических течений (Ш.И). При этом удалось удовлетворить условиям прилипания на твёрдой плоскости. Качественное сравнение результатов Шнайдера с данными экспериментов выполнено в [27].

В работе [52] эта же задача решена методом сращиваемых асимптотических разложений при больших значениях числа Рейнольдса. Область течения разбивается на три подобласти. В приосевом пограничном слое, как и в работе [138], течение описывается струёй Шлихтинга. В основной области движение жидкости совпадает с течением, индуцированным однородным линейным стоком перпендикулярным плоскости (см. далее). Решение в этих двух областях сшивается в разделяющей их промежуточной зоне.

Задача о взаимодействии однородного линейного источника или стока мощности Q (на единицу длины) с плоскостью обсуждалась в работах [58, 20, 27]. В [27] отмечено, что в случае источника существуют и имеют физический смысл ограниченные, но не аналитические на оси решения. В работе Голубинского и Сычёва [20] предполагалась ограниченность осевой скорости на линии источников и численно было показано, что решение задачи существует лишь для $Re = Q/\nu < 0,848$. При этом, вблизи критического значения числа Рейнольдса нарушается единственность и решений становится два.

Осесимметричное закрученное течение вида (Ш.И), моделирующее взаимодействие потенциального вихря ($v_\varphi = \Gamma/(2\pi r)$) с твёрдой плоскостью (или конусом), исследовано в [126, 121, 122, 24, 103, 102, 140]. В работе [126] решение задачи разыскивалось в рамках приближения пограничного слоя, а в [121, 122] решение получено в пренебрежении условиями прилипания на плоскости. М.А. Гольдштиком [24] было доказано существование и единственность решения в ограниченном

диапазоне чисел Рейнольдса (по [140] $Re < 5,53$). Проблема исчезновения решения при конечных Re обсуждалась в [103, 140] (а также смотреть ссылки из [27]). В работе Серрина (Serrin) [140] она решена ценой отказа от требования ограниченности осевой скорости на оси вихря (допускается логарифмическая сингулярность), но при этом теряется свойство единственности. При больших числах Рейнольдса задача о взаимодействии потенциального вихря с перпендикулярной ему плоскостью в работе [51] исследована методом сращиваемых асимптотических разложений, что позволило определить коэффициент при логарифмической сингулярности поля скорости на оси. Взаимодействие потенциального вихря со свободной поверхностью изучено в [41].

Общий случай неосесимметричных конических течений (III) рассмотрен Аристовым [10, 11]. Было установлено, что все гидродинамические поля выражаются через одну скалярную функцию углов, удовлетворяющую нелинейному уравнению $\Delta f = a + b e^{-f/\nu}$ (a и b - константы). Автору [10, 11] удалось показать, что в одном из частных случаев приведённое выше уравнение сводится к известному уравнению Лиувилля [120], все решения которого выражаются через произвольные гармонические функции. Последнее обстоятельство позволяет, в рамках класса конических течений, получать сколь угодно много точных решений трёхмерных уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.

Как и некоторые другие классы точных решений уравнений Навье-Стокса, конические течения допускают распространение на случай движений вязкой жидкости, происходящих под действием осложняющих внешних факторов (конвекция, наличие магнитного поля и тому подобное). В работе [17] исследована задача о течении вязкой проводящей жидкости в диффузоре. Магнитное поле индуцируется током, протекающим в вершине диффузора. Установлено, что поле, тормозя жидкость, делает профиль скорости более плоским по сравнению с течением без поля. Другим проявлением воздействия поля является

увеличение критического значения числа Рейнольдса, при котором происходит нарушение симметрии течения (смотреть выше).

Струйные течения проводящей жидкости типа Ландау и Сквайра в безындукционном приближении изучены в серии работ Щербинина с соавторами [55, 57, 58]. В [57] обнаружено нетипичное ускорение (а не торможение) потока жидкости бесконечно большой проводимости меридиональным ($H_\varphi = 0$) магнитным полем. МГД – аналоги струйных течений в азимутальном ($H_R = 0, H_\theta = 0, H_\varphi \neq 0$) поле исследованы в [55]. Отмечено, что при такой конфигурации магнитного поля в жидкости индуцируется электрическое поле. Показано, что азимутальное поле вызывает фокусировку струи вблизи оси её симметрии. Указано также, что фокусировки можно добиться и при $H_\theta \neq 0$. В работе [53] на основе обобщения класса осесимметричных конических течений с ненулевой закруткой, полученного в [54], исследована задача о взаимодействии вихревой нити с конической поверхностью в присутствии азимутального магнитного поля (обобщение [24]).

Известные «теоремы запретов» утверждают невозможность реализации магнитного динамо при осесимметричном течении жидкости. Тем ни менее в работе [25] показано существование критического числа Рейнольдса (для данного магнитного числа Прандтля), при котором от чисто гидродинамического решения Сквайра [145] ответвляется некоторое новое решение с ненулевой радиальной составляющей магнитного поля. Данный результат, по мнению авторов, не противоречит теоремам Каулинга и Брагинского поскольку последние предполагают более сильное чем $1/R$ убывание магнитного поля на бесконечности.

В работах [191, 6, 12] приведены обобщения класса конических течений на случай вязкого сжимаемого газа с коэффициентами вязкости и температуропроводности, вообще говоря, степенным образом зависящими от температуры. Более того, в [191, 6] показано, что в случае сжимаемой

среды поле скорости допускает представление в виде $\vec{v} = R^m \vec{u}$, где m - произвольное действительное число. Там же установлено существование конечного набора значений параметра автомодельности m при которых происходят бифуркации к режимам закрученных спиральных течений от невращательных режимов.

1.1.2 Решения линейные по двум пространственным переменным

По-видимому, наиболее общая формулировка задачи о течениях с линейной зависимостью поля скорости от части пространственных координат (I, II) (из (II) отмечен случай (II.II)) применительно к вязкой жидкости принадлежит А.Ф. Сидорову [47, 48]. В [5] показано, что класс (I.III) применим для описания конвективных течений вязкой магнитной жидкости во вращающейся системе координат (частный случай приведён в [49]). Отметим, что представления (I.II) и (I.III) полностью эквивалентны, а (I.I) их частный случай.

Течения вблизи застойной (критической) точки. При потенциальном обтекании потоком несжимаемой жидкости на поверхности тела нормальная составляющая поля скорости обращается в ноль, а касательная имеет конечное значение, то есть условия прилипания не выполняются. Тем не менее, на обтекаемой поверхности всегда имеется, по крайней мере, одна точка, где нулевое значение принимают обе компоненты скорости, такая точка называется застойной или критической. В окрестности критической точки скорость плоского потенциального течения и функция тока имеют вид [38]

$$V_1 = -a x_1, \quad V_2 = a x_2, \quad \psi = -a x_1 x_2, \quad a = const. \quad (1.2)$$

Поскольку, как указано выше, при потенциальном обтекании условия прилипания не выполняются, то следует считать, что критическая точка располагается не на самой поверхности тела, а у внешней границы пограничного слоя. В том случае, когда форма обтекаемой поверхности

может быть локально аппроксимирована плоскостью задача о течении между застойной точкой и этой твёрдой поверхностью допускает точное решение в рамках класса (I.I).

Плоская задача о стационарном течении вблизи застойной точки ортогональном плоскости (перпендикулярной оси x_1 , $v_{33} = 0$, см. (I.I)), по-видимому, впервые была решена Хименцем (Hiemenz) [108]. В осесимметричной постановке (I.I) данная задача исследована в [111]. Общий случай трёхмерного течения вблизи критической точки изучен в работах [87, 112]. Стюартом (Stuart) [150] впервые было описано плоское течение около застойной точки при натекании потока на плоскость, наклонённую к нему под некоторым углом, что эквивалентно наложению на движение жидкости (1.2) сдвигового течения с функцией тока $\psi \sim x_1^2$. Позднее эта задача вновь была рассмотрена в работах [157, 89]. Вангом [176, 173, 183, 184] исследован ряд задач касающихся течений, возникающих вблизи застойной точкой на деформируемой (растягивающейся или сжимающейся) жидкой поверхности.

Класс точных решений линейных по двум пространственным переменным (I) допускает прибавление к компонентам вектора скорости (I.I) дополнительных мод, независящих от планарных координат x_2, x_3 , это позволяет исследовать характер течения с застойной точкой около подвижных и проницаемых поверхностей. Плоскопараллельное течение вблизи стационарно движущейся вдоль оси x_2 плоскости было изучено в [136], осесимметричная задача решена в работах [168, 119]. Задача о застойной точке, расположенной вблизи колеблющейся плоскости решена в [96] (класс (I) допускает нестационарные решения). Стюатр [151] исследовал задачу о колебаниях, возникающих при однородном отборе жидкости через проницаемую плоскость, из параллельного ей (плоскости) потока. Комбинированное влияние колебаний плоскости и её проницаемости на течение вблизи застойной точки изучено в работе [189].

Было установлено, что при стремлении скорости отвода (подвода) жидкости через пронцаемую плоскость к бесконечности решение стремится к некоторому конечному пределу, а при увеличении частоты колебаний сдвиг фазы касательных напряжений, возникающих на плоскости (относительно фазы колебаний самой плоскости), стремится к $5\pi/4$.

В рамках класса точных решений уравнений Навье-Стокса (II.III), в работах [186, 167] исследована задача о стационарном течении вблизи кругового цилиндра, индуцированного движением жидкости на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) с полем скорости вида

$$v_r = k \frac{a}{r} - r, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r v_\varphi = 0, \quad v_z = 2kz, \quad k, a - const, \quad (1.3)$$

Распределение скорости (1.3) является, в некотором смысле, аналогом потенциального течения в окрестности застойной точки (1.2). Автором [186] было показано, что жидкость, движущаяся из бесконечности, может растекаться по цилиндру, как вдоль его образующих, так и в перпендикулярном им направлении. В работе [100] исследовалось застойное течение вблизи цилиндра, поступательно движущегося в осевом направлении и вращающегося с постоянной угловой скоростью. Статья [101] посвящена анализу нестационарной задачи о течении в застойной области около цилиндра, колеблющегося в осевом направлении. В сравнительно недавней работе [84] исследовалось установившееся движение жидкости от застойной точки (1.3) к пронцаемому цилиндру, вращающемуся вокруг своей оси с постоянной скоростью. Было установлено, что при подаче жидкости во внешний поток через пористую боковую поверхность цилиндра вблизи неё образуется зона интенсивного спирального течения.

Пространственные течения в каналах. Плоскопараллельное течение вязкой жидкости в канале со стенками равной проницаемости и в присутствии продольного градиента давления, в рамках класса точных решений (I.I) ($v_{33} = 0$, ось x_2 - параллельна оси канала), впервые было рассмотрено Берманом (Berman) [72]. Им же, в предположении симметрии течения относительно срединной плоскости, было получено асимптотическое разложение решения при малых числах Рейнольдса, построенных по ширине канала и скорости подвода/отвода массы жидкости через проницаемые боковые стенки. Дальнейшие численные и асимптотические исследования течений в каналах с проницаемыми границами были, в основном, выполнены Террилом (Terrill) с соавторами [160, 161, 141, 165]. В частности были построены асимптотические разложения для симметричных вдувов и отсосов большой интенсивности (ранее исследовались в [195]), а также численно изучены режимы с несимметричным расходом жидкости через границы. Подробное изложение результатов Террилла и других авторов можно найти в обзорных работах [80, 115, 42].

Устойчивость решений задачи Бермана изучена в [200]. В случае симметричного подвода массы была показана единственность и устойчивость решения при всех числах Рейнольдса. В тоже время в случае отвода установлено, что симметричные относительно срединной плоскости решения с увеличением числа Рейнольдса становятся неустойчивыми и переходят в несимметричные стационарные режимы, которые в свою очередь также теряют устойчивость и сменяются периодическими во времени течениями. Далее была показана возможность существования хаотических режимов, аналогичных аттрактору Лоренца. В работах [79, 80] установлено, что хаотическое поведение, впервые обнаруженное в [200], чувствительно к асимметрии граничных условий.

Течение жидкости в канале, стенки которого сжимаются с постоянным пространственным ускорением, в рамках (I.I) ($v_{33} = 0$, ось x_2 -

параллельна оси канала) исследовано в [139]. Подобная задача, но с растягивающимися стенками, рассмотрена в [74]. Установлено, что решение симметричное относительно срединной плоскости существует во всём диапазоне чисел Рейнольдса, построенных по скорости растяжения стенок и полуширине канала, но при этом с ростом величины данного безразмерного параметра обнаруживается потеря единственности решения. Для $0 < Re \leq 310$ - решение единственно, далее возникает ещё одно решение, а при $Re \geq 337,4$ возбуждается третий режим. При стремлении числа Рейнольдса к бесконечности все три решения стремятся к одному пределу.

Комбинированные течения с деформируемыми и проницаемыми стенками исследованы в [187, 198, 169, 179, 177, 105, 83, 85]. В работе [187] основное внимание уделено режимам с малой проницаемостью стенок канала. Изучение нестационарной динамики данного вида течений указывает на возможность перехода к хаосу путём удвоения периода. В статье [198] представлены результаты исследования устойчивости частного решения задачи о плоском течении, индуцируемом растяжением границ и их проницаемостью, задаваемое функцией тока вида $\psi \sim x_1 x_2$. Анализ линейной устойчивости данного движения относительно плоских возмущений показал, что критическим является число Рейнольдса, построенное по скорости отвода жидкости и полуширине канала, равное $Re_{\text{плоск}} = 4,51$. Исследование устойчивости относительно возмущений, перпендикулярных плоскости течения $x_1 x_2$, выполненное в рамках класса (I.I) $(v_{33}(t, x_1) \neq 0)$, показало, что критическим является $Re_{\text{простр}} = 1,71 < Re_{\text{плоск}}$. Таким образом, пространственные возмущения оказались более опасными, чем плоские.

Классом точных решений линейных по двум пространственным переменным (I) допускается автомодельность вида $\eta = x_1 / \sqrt{t_0 - t}$. Названное обстоятельство авторам [86] позволило рассмотреть

нестационарную задачу о течении вязкой жидкости между двумя проницаемыми плоскостями, расстояние между которыми изменяется обратно пропорционально квадратному корню времени протекания процесса. В названной статье имеется большое количество ссылок на работы, относящиеся к экспериментальному исследованию течений в каналах и трубах с проницаемыми стенками.

Общая трёхмерная постановка задачи о течении вязкой жидкости между проницаемыми плоскостями в рамках (I.Ш) ($v_{1i} = 0$, ось x_1 перпендикулярна плоскостям) дана в работе [158]. Одно из практически важных приложений такого рода течений связано с проблемами конструирования транспортных средств на воздушной подушке. Так в работе [109] изучалось осесимметричное стационарное течение между двумя дисками, через один из которых производится подача жидкости (напомним, что (I.Ш) и (I.П) эквивалентны). Ранее Гольдштиком и Яворским исследована постановка, допускающая вращение пористого диска с возможностью, как подвода, так и отвода жидкости через его поверхность [99, 27]. Коксом (Cox) [78] было показано, что задача, рассмотренная в [109] обладает решениями с неосесимметричным распределением поля скорости в условиях симметричном распределении давления. При этом обнаружилось, что для несимметричного режима течения подъёмная сила, удерживающая один из дисков наплаву, больше в сравнении с подъёмной силой, создаваемой осесимметричным потоком. В недавней работе [107] (допускался не только вдув, но и отвод жидкости) установлено, что несимметричные решения Кокса ответвляются (при отсосе жидкости) от симметричных, описанных в [109], по средствам подкритической вилочной бифуркации. Обе вновь возникающие ветви несимметричного режима сливаются при стремлении скорости вдува к бесконечности.

В статье [107] изучена задача о течении между проницаемыми плоскостями с неосесимметричным распределением давления, а также

задача о симметричном однородном отводе жидкости через проницаемые диски с использованием представления (I.П). В ходе исследования последней задачи были обнаружены четыре режима течения: а) осесимметричное течение без закрутки [99], б) осесимметричные течения с ненулевой тангенциальной составляющей скорости [99], в) неосесимметричные движения без закрутки и г) неосесимметричный закрученный режим. Несимметричные движения без закрутки ответвляются от симметричных (а)→в), а закрученные течения ответвляются от незакрученных (а)→б), в)→г). Впервые бифуркация вращения для осесимметричных режимов бала найдена в [99].

Как вытекает из вышеизложенного, нестационарные постановки задач класса (I) дают возможность изучить различные механизмы неустойчивости течений вязкой жидкости и даже описать переход к хаотическим (во времени) режимам. Данное обстоятельство ещё раз подчёркивает важность изучения точных решений уравнений гидродинамики, поскольку последние, пусть в обеднённом виде, наследуют свойства полной системы уравнений Навье-Стокса.

Обобщения класса точных решений Кармана. Как отмечалось ранее обобщённое (несимметричное) решение Кармана (von Karman) (I.П) есть ничто иное, как класс точных решений (I.П) записанный в цилиндрической системе координат. Обусловленные использованием цилиндрических координат симметрии позволяют сформулировать и изучить ряд новых задач, решения которых обладают рядом специфических свойств. В первую очередь это задачи связанные с исследованием закрученных течений индуцированных вращением ограничивающих жидкость границ (твёрдых дисков). Именно такого рода движениям жидкости здесь и будет уделено основное внимание. Более полный обзор решений уравнений гидродинамики относящихся к классу Кармана можно найти в [196].

Задача об осесимметричном течении вязкой жидкости, заполняющей полупространство над вращающимся твёрдым диском бесконечного радиуса, впервые поставлена Карманом [166] (в (I.И) $a = b = A = B = 0$ – класс Кармана). Единственное решение этой задачи численно получено в [77]. Бёдевадт (Bödewadt) [73] применил класс Кармана к изучению взаимодействия твердотельно вращающейся на бесконечности жидкости с покоящейся плоскостью, обнаружив неединственность решения. Как показали последующие исследования множественность решений и их изолированность друг от друга являются отличительной особенностью течений кармановского типа. Особенно ярко это свойство проявляется в задаче о течении жидкости между двумя соосно вращающимися с угловыми $\Omega_1 \leq \Omega_2 \neq 0$ бесконечными дисками, отстоящими один от другого на расстояние H (в (I.И) $a = b = A = B = 0$).

По-видимому, впервые эта двухпараметрическая задача (как и некоторые другие) была сформулирована в работе [66] Бэтчелором. Роль параметров играют отношение угловых скоростей дисков $s = \Omega_1 / \Omega_2 \in [-1; 1]$ ($s < 0$ - диски вращаются в разных направлениях, $s = 0$ – один из дисков покоится, $s > 0$ - диски вращаются в одну сторону) и число Рейнольдса $Re = \Omega_2 H^2 / \nu$. Вообще говоря, есть ещё и третий параметр, связанный с радиальным градиентом давления. Проведя качественный анализ, Бэтчелор пришёл к заключению, что почти во всём слое между дисками жидкость находится в твердотельном вращении, а вблизи дисков образуются пограничные слои ($s \geq 0$).

Иной вывод получил Стюартсон (Stewartson) [147]. В результате изучения движения жидкости между покоящимся и вращающимся дисками, а также при противовращении дисков, он заключил, что в ядре, то есть в основной массе жидкости, вращение практически отсутствует, локализуясь в пограничных слоях вблизи подвижных дисков. При строгом противовращении $s = -1$ решение Стюартсона симметрично относительно середины слоя.

Дальнейшие исследования показали существование обоих режимов. Лэнс (Lance) и Роджерс (Rogers) [135], для $s = 0$, обнаружили течение типа Бэтчелора с твердотельно вращающимся ядром. Авторами [124] для точного контрвращения $s = -1$, в предположении симметрии относительно середины зазора между дисками, теоретически доказано существование и единственность симметричного решения типа Стюартсона. Для $s = 0$ - ротор-статор в [125, 128] численно обнаружены оба решения. В [125] установлено существование решения с твердотельно вращающимся ядром при всех значениях числа Рейнольдса, в то время как стюартсоновский тип движения возникает лишь при некотором конечном значении этого параметра. Результаты исследований, представленные в [128], указывают на устойчивость решения Бэтчелора. Кроме этого, с ростом числа Рейнольдса авторами [125, 128, 117, 67] продемонстрировано появление всё новых решений всё более сложной структуры. При больших Re Пирсоном (Pearson) [131] описано течение, обладающее большей по сравнению со скоростями дисков, угловой скоростью вращения ядра. Все эти результаты подтверждаются расчётами [110], выполненными для фиксированного значения $Re = 625$ во всём диапазоне отношения угловых скоростей дисков s . Было обнаружено двадцать различных ветвей решения. В [75], со ссылкой на диссертацию [156], приведены результаты исследований задачи о течении между вращающимися дисками во всём диапазоне значений s для чисел Рейнольдса от нуля до тысячи. Утверждается, что найдено девятнадцать ветвей решения, причём обнаружена только одна бифуркация от симметричного режима Стюартсона к паре несимметричных решений, имеющая место в случае точного противовращения дисков при $Re = 119,8$. Все остальные ветви решения изолированы друг от друга, что нетипично для гидродинамики. При любой величине отношений угловых скоростей решение существует и единственно только до $Re < 55$, а для больших значениях числа Рейнольдса решение всегда не единственно. Анализ устойчивости,

проведённый в [128], установил неустойчивость решения Стюартсона и устойчивость течения, предсказанного Бэтчелором.

Наличие множества изолированных решений обсуждаемой задачи при достаточно больших значениях числа Рейнольдса побудило ряд исследователей к изучению вопроса о реализуемости того или иного решения в условиях реального течения между дисками конечного радиуса. Исследование данной проблемы велось, в основном, в двух направлениях: прямой численный счёт и лабораторный эксперимент. Существенным фактором, определяющим результаты такого рода исследований, оказались граничные условия, реализующиеся в эксперименте или задаваемые при численном расчёте на боковой цилиндрической поверхности (торце), ограничивающей зазор между дисками.

Эксперименты [154] проведены в условиях, когда на торце зазора выполнялись условия прилипания и непротекания. Для моделирования последних цилиндрическая боковая поверхность покрывалась слоем масла. Прямые численные расчёты [88] осуществлялись при выполнении требования прилипания к боковой цилиндрической поверхности. Ограниченные возможности численного метода [88] не позволили выполнить расчёты при больших числах Рейнольдса, для которых автомодельное решение предсказывает множественность режимов. Кроме того, затруднения вызвали расчёты при малом отношении ширины зазора к радиусу дисков H/R , вследствие необходимости использования очень подробной сетки. Тем ни менее результаты [88] указывают на то, что в приосевой области численное решение близко к автомодельному (в [45] утверждается, что использовать термин «автомодельное» по отношению к решениям кармановского типа не совсем верно). Для преодоления трудностей, с которыми столкнулись авторы [88] в расчётах с большими числами Рейнольдса и малыми величинами отношения H/R , в [75] было предложено использовать приближённую модель погранслоного характера. В рамках данной модели на торце были поставлены условия,

моделирующие твёрдый цилиндр (закрытый торец) и влияние большого массива жидкости в который погружены диски (открытые торцы). Необходимо отметить специальный характер сформулированных краевых условий, ориентированный на фильтрацию «нефизичных», по мнению авторов [75], решений.

Основные результаты [75] находятся в хорошем согласии с лабораторными и численными экспериментами [88, 154, 155] и в основном состоят в следующем. С ростом числа Рейнольдса краевые эффекты всё глубже проникают внутрь слоя. В результате этого автомодельное течение оказывается локализованным в узкой приосевой области. Более того, влияние торцов в некоторых расчётах влекло за собой полное исчезновение автомодельной зоны и потерю осевой симметрии. Установлено, что выбор типа торцевых условий существенно влияет на то, какой автомодельный режим формируется у оси симметрии. Так в условиях «открытого торца» наблюдается течение Стюартсона, а при «закрытом торце» - режим Бэтчелора. Предсказанная [156] смена симметричного относительно середины слоя течения несимметричным при $s = -1$ действительно имеет место, однако это происходит при Re значительно превышающем теоретически найденное $Re = 119,8$ (смотреть выше).

Множественность и изолированность решений имеет место не только в задаче о течении между вращающимися дисками, но и во многих других задачах, разрешимых в рамках класса Кармана. Например, аналогичными свойствами обладает, упоминавшаяся ранее, задача о течении между пористым неподвижным и вращающимся диском [98] (см. так же [63, 106, 149, 94, 116, 28, 134, 163, 188, 181, 178, 192] и монографию [27]). Интерес к этой задаче обусловлен тем, что она служит простейшей моделью платформы на воздушной подушке. Кроме того, в ходе решения этой задачи, вероятно впервые, была обнаружена осесимметричная бифуркация вращения [98]. Подробное обсуждение проблемы неединственности

решения этой задачи и постановки торцевых граничных условий в экспериментах можно найти в [27].

Другим примером, неединственности изолированных решений, является задача, в которой один из дисков заменён свободной поверхностью [143, 174]. В нестационарной постановке задача о движении в слое жидкости со свободной поверхностью, растекающейся (собирающейся) по вращающемуся диску, сформулирована в [44].

В случае, когда скорость вращения диска изменяется обратно пропорционально времени, последняя задача допускает введение автомодельной переменной, сводящей проблему к исследованию системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта автомодельная задача решена в [36]. Выявлена не монотонность зависимости толщины слоя от начальной угловой скорости вращения диска Ω . При небольших начальных угловых скоростях толщина слоя увеличивается, но, начиная с некоторого значения параметра Ω жидкость, начинает радиально растекаться по диску, вызывая сужение слоя. Замечательно, что в обоих случаях вблизи свободной поверхности среда обладает большей угловой скоростью, чем диск, и вращается в противоположном ему направлении. При больших скоростях вращения диска (большое число Рейнольдса) обнаружены две непересекающиеся ветви решения. Отмечено, что автомодельное решение существует только до определённого значения параметра, характеризующего отношение толщины слоя, к скорости вращения диска.

Все описанные выше задачи решены в рамках классического класса Кармана $a = b = A = B = 0$. Обобщённое представление этого класса точных решений (I.П) уравнений гидродинамики было использовано в [137] для решения задачи о течении жидкости вблизи вращающегося диска, перемещающегося в собственной плоскости. Ванг [175, 171, 180] изучил вращение диска в сдвиговом потоке. Беркер (Berker) [70, 69, 68] используя (I.П) ($A = B = 0$) рассмотрел задачу о течении, инициированном несоосным

вращением двух дисков. Им же была обнаружена неоднозначная разрешимость данной задачи. Исследования были продолжены в [62, 92, 86]. Проницаемость эксцентрических дисков учтена в [133]. Сравнительно недавняя работа [93] посвящена нестационарным постановкам задач о течении между смещёнными дисками, там же можно найти более полный обзор по затронутой тематике. Исследованию частично инвариантных решений уравнений Навье-Стокса методами теории групп Ли, частным случаем которых является (I.III), посвящена работа [39].

1.1.3 Решения линейные по одной пространственной переменной

Из всех известных в настоящее время классов точных решений уравнений гидродинамики, по-видимому, наименее изученным является класс решений с полем скорости, линейно зависящим от одной из пространственных переменных. В частности это связано с тем, что представление гидродинамических полей в виде (II) приводит, как отмечалось ранее, к переопределённой системе уравнений. В работе [48] отмечена нетривиальная разрешимость данной переопределённой системы и в качестве примеров этого приведены решения (I) и (II.II). Для решений уравнений гидродинамики с линейной зависимостью поля скорости от одной из пространственных координат авторами монографии [27] предложено название «течения с пространственным ускорением».

Анзац (II.II) не является классом точных решений в том смысле, который был описан в начале настоящего обзор. Тем ни менее (II.II) представляется интересным объектом исследований, поскольку результирующие уравнения имеют много общего с плоскими и погранслойными моделями движения жидкости. В тоже время (II.II) позволяет учесть пространственную структуру течения за счёт ненулевой составляющей скорости v_3 . Важным примером нестационарной эволюции потока, который может быть отнесен к типу (II.II), является временная неустойчивость, впервые описанная Крайком (Craink) и Криминале (Criminale) [82, 81] и впоследствии обобщённая в работах [64, 95]. Так в

[64] исследовалась устойчивость течения $v_1 = qx_1$, $v_2 = qx_2$, $v_3 = -2qx_3$ относительно плоских (плоскость x_1x_2) пространственно периодических возмущений. Было показано, что в том случае, когда возмущения ориентированы друг относительно друга строго определённым образом, их суперпозиция точно удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса, а амплитуды этих возмущений эволюционируют по закону $A(t) = A(0)\exp(-qt - (1 - e^{-2qt})Q^2/q)$. Согласно которому, при отрицательных q на начальном этапе своего развития возмущения экспоненциально быстро нарастают, что с точки зрения линейной теории является признаком неустойчивости. Однако в дальнейшем этот рост прекращается и происходит затухание возмущений во времени. Авторами [95] (с использованием лагранжевых переменных) показано, что при специальном подборе пространственно периодических возмущений свойством временной неустойчивости обладает произвольное основное течение. Столь смелые выводы [95] были подвергнуты критике в работе [118].

В ходе подготовки настоящего обзора удалось обнаружить лишь две работы [40, 148], где рассматриваются течения вязкой жидкости типа (II.IV). В работе [40] класс точных решений (II.IV) использован для построения моделей конвективных вихрей на различных стадиях их развития. Так при $u = const$ решение было соотнесено с начальной стадией формирования вихря, в ходе которой преобладает конвергенция скорости. Случай $v = const$ интерпретирован как развитая стадия вихря с симметричным потенциальным распределением азимутальной скорости. Случай $w = 0$ соответствует течению в приповерхностном слое ($z \rightarrow 0$), индуцированному потенциальным вихрестокком.

В работе [148] в рамках класса (II.IV) исследована задача о течении вязкой жидкости в угле между твёрдыми плоскостями на линии пересечения которых (совпадает с осью z) располагается линейный

источник (сток). Отличие [148] от течения Деффри – Гамеля заключается в том, что кроме чисто радиального течения допускается возможность движения жидкости в осевом (вдль оси z) и азимутальном направлениях. В этих предположениях рассмотрены два режима течения. Первый режим соответствует радиальному движению жидкости, индуцированному однородным линейным источником, с наложенным на него поперечным течением вдоль оси z ($v_\varphi = 0, v_z = w(\varphi)/r$). Как и следовало ожидать, движения в этих двух направлениях оказались не зависимыми друг от друга, причём радиальное течение совпадает с классическим течением Джеффри – Гамеля. Решения второго типа принадлежат классу (II.IV) с $\alpha = 0$ и описывают трехмерные движения вязкой жидкости от линейного источника, интенсивность которого пропорциональна расстоянию z от начала координат. Исследование показало, что течения этого типа обладают определёнными свойствами симметрии относительно биссектрисы угла между твёрдыми плоскостями, такими, что v_r – чётная функция угла φ , v_φ – нечётная. Также было установлено, что решение существует не для всякой величины удельного расхода, кроме того, оно (решение) может оказаться не единственным. Показано, что одна из ветвей решения данной задачи ответвляется от течения Джеффри – Гамеля.

Точные решения уравнений Навье - Стокса типа (II.III) неоднократно применялись для описания течений вязкой жидкости в трубах с подвижными и проницаемыми боковыми поверхностями. К этому же классу относятся две широко известные модели осесимметричных вязких вихрей, известные как одноячейстый вихрь Бюргера [76] и двухячейстый вихрь Салливана [153]. Поля скорости этих вихрей имеют вид

$$v_r = -\alpha r/2$$

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - \exp(-\alpha r^2/4\nu))$$

$$v_z = \alpha z, \quad \alpha, \Gamma - const$$

$$v_r = -\frac{\alpha r}{2} + \frac{6\nu}{r} \left(1 - \exp - \frac{\alpha r^2}{4\nu}\right)$$

$$v_z = \alpha z \left(1 - 3 \exp - \frac{\alpha r^2}{4\nu}\right)$$

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{H(x)}{H(\infty)}$$

$$H(x) = \int_0^x \exp -t + 3 \int_0^t \frac{1 - e^{-s}}{s} ds dt, \quad x = \frac{\alpha r^2}{4\nu}$$

Эволюция смерчьеобразных вихрей типа Бюргера и Салливана изучена Красновым и Кикнадзе [35].

В работах [23, 123, 164, 162, 142, 194, 159, 71] (см. монографию [27]), с использованием класса (II.3), рассматривалась задача о стационарном течении вязкой жидкости в трубе с пористой боковой поверхностью. В результате этих исследований была показана неединственность решения задачи в зависимости от числа Рейнольдса, построенного по скорости подвода (отбора) жидкости через пористую поверхность трубы. Кроме того, было обнаружено исчезновение решений в ограниченном диапазоне значений числа Рейнольдса. Аналогичные свойства неединственности и исчезновения решения были обнаружены при изучении течения жидкости в продольно растягивающейся трубе [74].

Неединственность является типичной чертой решений гидродинамических задач, и вопрос отбора физически реализуемых течений решается, как правило, путём исследования их устойчивости. В свою очередь проблема исчезновения решений в каком-либо диапазоне параметров представляется более сложной. Применительно к задаче о течении в пористой трубе [23, 162] эта проблема была решена путём рассмотрения течений типа (II.1) с не равной нулю азимутальной компонентой скорости [132, 163]. Оказалось, что на том участке спектра

Re , где решение без закрутки пропадает, существует вращательно-симметричное решение, одна из ветвей которого бифурцирует от режимов, изученных в [23, 162]. Подобный анализ был выполнен и для течения в растягивающейся трубе [74], но бифуркации вращения обнаружить не удалось.

В работе [163] обращено особое внимание на нетривиальную разрешимость задачи о незакрученном течении с линейно изменяющейся вдоль оси трубы продольной компонентой скорости при нулевом числе Рейнольдса. В связи с этим авторами [163] ставился, но остался не решённым, вопрос о существовании при $Re = 0$ вращательно-симметричного решения (II.I). Эта проблема была исследована в [9], где доказано существование двух решений задачи о стационарном течении вязкой жидкости в полубесконечном цилиндре, на боковой поверхности которого выполняются условия прилипания.

Устойчивость некоторых режимов течения вязкой жидкости в трубах с проницаемыми и деформируемыми стенками исследована в работах [114, 65, 199, 197].

Настоящая работа посвящена решению ряда задач о течении несжимаемой жидкости с полем скорости вида (II.I). Основные результаты этого исследования изложены в работах [31, 8, 7, 32, 4, 13].

1.2 КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ И ЕГО ОБЩИЕ СВОЙСТВА

В настоящей работе рассматриваются вращательно-симметричные течения жидкости с линейной зависимостью азимутальной и продольной компонент скорости потока от осевой координаты z цилиндрической системы координат (r, φ, z) . В монографии [27] точные решения уравнений гидродинамики, обладающие подобной структурой поля скорости, названы «течениями с пространственным ускорением».

Предполагая осевую симметрию движения, представим давление, отнесённое к постоянной плотности жидкости и компоненты вектора скорости потока в цилиндрической системе координат в виде

$$\begin{aligned}
 v_r &= \frac{\nu}{R} \frac{u(\tau, x)}{\sqrt{x}} \\
 v_\varphi &= \frac{\nu}{R} \sqrt{\frac{2}{x}} (V(\tau, x) + Z v(\tau, x)) \\
 v_z &= -2 \frac{\nu}{R} W(\tau, x) + Z \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} \\
 P &= P_0 + 2 \frac{\nu^2}{R^2} (B(\tau, x) - 4ZF(\tau, x) - 2Z^2G(\tau, x))
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Здесь R – некоторый характерный линейный масштаб течения; $x = (r/R)^2$, $Z = z/R$ – безразмерные пространственные переменные; $\tau = (2\nu/R^2)t$ – безразмерное время; P_0 – размерная константа. В качестве масштаба скорости используется отношение ν/R , поэтому новые неизвестные u, v, G, W, V, F, B безразмерны.

Подставляя (1.4) в систему уравнений (1.1) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях Z , получим систему уравнений в частных производных для функции u, v, G, W, V, F, B

$$\begin{aligned} u_{\tau x} + uu_{xx} - u_x u_x + 2G &= 2(xu_{xx})_x \\ v_{\tau} + u v_x - v u_x &= 2xv_{xx} \\ 4x^2 G_x + v^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} W_{\tau} + uW_x - u_x W + 2F &= 2(xW_x)_x \\ V_{\tau} + uV_x - vW &= 2xV_{xx} \\ 4x^2 F_x + vV &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$B + \frac{u^2}{4x} - \frac{1}{2} \int \frac{V(x)}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\partial U}{x \partial \tau} dx = u_x \quad (1.7)$$

Система (1.5) – (1.7) замкнута в том смысле, что количество уравнений совпадает с числом неизвестных. Таким образом, полученная система является точным следствием полных уравнений Навье-Стокса (с осевой симметрией), а представление гидродинамических полей (1.4) – класс точных решений. Левые части уравнений (1.5) – (1.7) содержат силы инерции и части градиента давления, а правые – силы вязкости. Нижний индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной.

Нетрудно заметить, что уравнения (1.5) образуют замкнутую подсистему для определения неизвестных u, v, G . Функции W, V, F находятся из линейной подсистемы (1.6), подчинённой (1.5). Если две группы неизвестных u, v, G и W, V, F не связаны между собой начальными или граничными условиями, то о течениях вида (1.4) можно говорить как о суперпозиции фонового (основного) потока (u, v, G) и индуцируемого им вторичного течения (W, V, F). В этом случае

существенным является то обстоятельство, что вторичное течение не оказывает влияния на фоновый поток.

Анализ системы (1.5), (1.6) показывает, что $W = C u_x$, $V = C v$, $F = C G$ удовлетворяют уравнениям (1.6) если u , v , G – решение (1.5). Это свойство связано с возможностью трансляции решений уравнений Навье-Стокса вдоль оси симметрии z .

Ещё одним следствием свойств симметрии, заложенных в уравнениях движения вязкой жидкости, является возможность растяжения решений (1.5), (1.6) в радиальном направлении:

$$\begin{aligned} x \rightarrow L^2 x_*, \quad \tau \rightarrow L^2 \tau_*, \quad u \rightarrow u_*, \quad v \rightarrow v_*/L, \quad G \rightarrow G_*/L^4 \\ W \rightarrow lW_*, \quad V \rightarrow lLV_*, \quad F \rightarrow F_*l/L^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь L и l – любые действительные числа. Преобразование (1.8) оказывается полезным при численном решении конкретных краевых задач, поскольку позволяет избавиться от части граничных условий за счёт того, что область интегрирования перестаёт быть фиксированной.

Специфическим свойством нестационарной системы (1.5), (1.6) является возможность введения автомодельной переменной x/τ :

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{\tau}, \quad u = u_*(\xi), \quad v = \frac{v_*(\xi)}{\sqrt{\tau}}, \quad G = \frac{G_*(\xi)}{\tau^2} \\ W = \tau^k W_*(\xi), \quad V = \tau^{k+1/2} V_*(\xi), \quad F = \tau^{k-1/2} F_*(\xi) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для новых неизвестных со звёздочками получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (u_* - \xi)u_*'' - u_*' u_*' - u_*' + 2G_* = 2(\xi u_*'')' \\ 2(u_* - \xi)v_*' - (2u_*' + 1)v_* = 4\xi v_*'', \quad 4\xi^2 G_*' + v_*^2 = 0 \end{aligned}$$

$$(u_* - \xi)W_*' - (u_*' - k)W_* + 2F_* = 2(\xi W_*')'$$

$$2(u_* - \xi)V_*' - 2v_*W_* + (2k + 1)V_* = 4\xi V_*'', \quad 4\xi^2 F_*' + v_*V_* = 0$$

Штрихом обозначено дифференцирование по ξ , а k – любое действительное число. В силу линейности уравнений (1.6), W , V , F (вида (1.9)) могут быть представлены как суммы решений последней системы, соответствующие различным k .

Система (1.5) может быть приведена к автономному виду, то есть к виду, не содержащему явно независимую переменную. Для этого достаточно произвести замену переменных

$$\xi = -\ln(x), \quad u = U(\xi), \quad v = e^{\frac{\xi}{2}}Y(\xi), \quad G = e^{2\xi}g(\xi) \quad (1.10)$$

приводящую стационарные $(\partial(\bullet)/\partial\tau)$ уравнения (1.5) к виду

$$2U_{\xi\xi\xi} = U_\xi U_\xi - (U + 4)U_{\xi\xi} - (U + 2)U_\xi - 2g$$

$$4Y_{\xi\xi} = (2U_\xi - U - 3)Y - 2(U + 4)Y_\xi \quad (1.11)$$

$$4g_\xi = Y^2 - 8g$$

В заключение этого короткого раздела отметим, что (1.4) можно интерпретировать как первые члены разложения скорости и давления в ряд Тейлора по переменной z . Условием обрыва ряда в данной ситуации служит требование точного выполнения уравнений Навье-Стокса. С такой точки зрения (1.4) выступает не только как точное решение (1.1), но и как некоторое приближение более общего представления гидродинамических полей. Это приближение описывает локальные по z свойства движения жидкости.