МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЛАТФУЛЛИН ТАГИР ГУМЕРОВИЧ

КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Специальность

01.01.01. - Математический анализ

диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

г. Тюмень   2000 г.

Содержание

Введение

§1. Квазигиперболическая метрика и квазигиперболические гомеоморфизмы

В диссертации рассмотрены некоторые проблемы теории квазигиперболических отображений, то есть отображений, ограниченно изменяющих квазигиперболическое расстояние между точками. Класс квазигиперболических отображений (QH) занимает промежуточное положение между классами квазиконформных (QC) и квазиизометрических (QI) отображений. То есть, $QI \subset QH \subset QC$, кроме того, граничное поведение квазигиперболических гомеоморфизмов такое же как у квазиконформных гомеоморфизмов, а ограничение любого гомеоморфизма f класса QH на компактную подобласть области определения f принадлежит классу QI. Сказанное будет уточнено в последующем тексте.

Квазигиперболические отображения как самостоятельный объект изучения привлекли к себе внимание математиков после работы Тукиа и Вяйсяля 1981 года [76], в которой они обосновали возможность аппроксимации квазиконформных отображений квазигиперболическими. Термин "квазигиперболический"принадлежит Тукиа и Вяйсяля [77].

Квазигиперболические гомеоморфизмы обычно использовались как инструмент при изучении квазиизометрических гомеоморфизмов. Их применение основано на эффекте обнаруженном Л.Альфорсом [2, с. 70], заключающемся в том, что квазигиперболический гомеоморфизм, квазиизометрический на границе (в случае достаточно протяженной границы) является квазиизометрическим. Позднее этот эффект был использован в работах автора [15], [16], [17], П.Тукиа и Ю.Вяйсяля [77], Д.С.Джерисона и С.Е.Кенига [61], Ю.Вяйсяля [73].

Класс QH в современной конфигурации теории отображений играет вспомогательную роль при изучении классов QC и QI. В силу включения $QH \subset QC$ все, что верно для квазиконформных отображений верно и для квазигиперболических отображений. Теория квазиконформных отображений и их обобщений — отображений с ограниченным искажением имеет богатую историю и хорошо разработана, поэтому постановка вопросов специфических для отображений класса QH — задача не простая. Однако, класс этот (QH) привлекает к себе внимание именно сочетанием свойств, присущих отображениям классов QC и QI. Будучи близким к классу QC он состоит из отображений, у которых отсутствуют некоторые "неудобные"свойства квазиконформных отображений. Например, любая локально спрямляемая кривая переходит в локально спрямляемую при QH-отображениях, этим свойством не обладают квазиконформные отображения; частные производные первого порядка компонент QH-отображения ограниченны на компактных подобластях области определения. QH-гомеоморфизмы наследуют больше свойств конформных отображений плоских областей, чем QC-гомеоморфизмы. Родственность классов QC и QH выражается также тем, что любой квазиконформный гомеоморфизм является грубо квазигиперболическим (по терминологии Вяйсяля) и любой квазиконформный гомеоморфизм можно аппроксимировать с любой точностью квазигиперболическими гомеоморфизмами.

Перейдем к более точным формулировкам.

Определение 1. *Пусть D - область в пространстве R^n и ее граница ∂D — непустое множество, такие области называют собственными подобластями R^n.*

Для точек x_1, x_2 из D квазигиперболическим расстоянием между ними называется величина

$$k_D(x_1, x_2) = \inf \int\limits_{\gamma} \frac{ds}{\delta_D(x)} \ ,$$

где нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым γ, соединяющим x_1 и x_2 в D, интеграл — криволинейный первого рода, s — натуральный параметр, $\delta_D(x)$– евклидово расстояние от x до ∂D.

Напомним, что если для любых двух точек x и y некоторого множества X определено расстояние между ними $\sigma(x, y)$, то функция $\sigma : X \times X \to R$ называется метрикой.

Определение 2. *Пусть D и G – собственные подобласти R^n и φ – гомеоморфизм D на G, $K \geq 1$ – постоянная. Гомеоморфизм φ называется K-квазигиперболическим, если для любых $x_1, x_2 \in D$ выполнено*

$$\frac{1}{K} k_D(x_1, x_2) \leq k_G(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq K k_D(x_1, x_2).$$

Определение 3. *Гиперболическое расстояние между точками круга $B = \{z \in C : |z| < 1\}$ комплексной плоскости определяется выражением*

$$\sigma_B(z_1, z_2) = \inf \int\limits_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

где нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым, соединяющим в B точки z_1 и *z_2.*

Гиперболическая метрика является традиционным объектом теории функций комплексного переменного. Гиперболическое расстояние не изменяется при дробно-линейных автоморфизмах круга B [12, с. 391]. Посредством конформных отображений круга на односвязные собственные подобласти плоскости производится перенос гиперболической метрики.

Пусть D односвязная собственная подобласть C и f — конформное отображение D на B. Для точек $z_1, z_2 \in D$ положим

$$\sigma_D(z_1, z_2) = \sigma_B(f^{-1}(z_1), f^{-1}(z_2)).$$

Такое определение расстояния в D корректно, так как оно не зависит от выбора гомеоморфизма f. Действительно, пусть f_1 и f_2 — два конформных отображения B на D. Тогда найдется дробно-линейный автоморфизм φ круга такой, что $f_2 = f_1 \circ \varphi$, а так как гиперболическое расстояние в B инвариантно при дробно-линейных преобразованиях, то для любых $z_1, z_2 \in D$

$$\sigma_B(f_1^{-1}(z_1), f_1^{-1}(z_2)) = \sigma_B(f_2^{-1}(z_1), f_2^{-1}(z_2)).$$

Из определения гиперболической метрики с помощью формулы замены переменной в интеграле можно получить представление

$$\sigma_D(z_1, z_2) = \inf \int\limits_{\gamma} \frac{2|f'||dz|}{1 - |f(z)|^2},$$

где нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым, соединяющим в D точки z_1 и z_2, f — конформное отображение D на B. Функцию

$$\mu_D(z) = \frac{2|f'(z|)}{1 - |f(z)|^2}$$

называют плотностью гиперболической метрики, она не зависит от выбора отображающей функции f [12, с. 420].

Происхождение термина "квазигиперболическая метрика"объясняется тем, что гиперболическая и квазигиперболическая метрики эквивалентны, то есть, существует постоянная $C \geq 1$ такая, что для любой пары точек $z_1, z_2 \in D$ выполнено

$$\frac{1}{C}\sigma_D(z_1, z_2) \leq k_D(z_1, z_2) \leq C\sigma_D(z_1, z_2).$$

В следующей теореме устанавливается универсальная оценка постоянной C.

Теорема 1. *Пусть D – односвязная собственная подобласть комплексной плоскости C, тогда для любых точек z_1 и z_2 из D выполнено*

$$\frac{1}{2}\sigma_D(z_1, z_2) \leq k_D(z_1, z_2) \leq 2\sigma_D(z_1, z_2) \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $z \in D$ и f – конформное отображение D на круг $B = \{|z| < 1\}$, $f(z) = 0$. Функция $g(z) = (f^{-1}(z) - z)f'(z)$, $z \in B$, отображает B на область $D^* = (D - z)f'(z)$, $g'(0) = 1$, $g(0) = 0$. Тогда по теореме Кёбе [57, с. 51] область D^* содержит круг $B(z, 1/4)$. Но так как D^* подобна D с коэффициентом подобия $|f'(z)|$, область D содержит круг $B(z, 1/(4|f'(z)|)$, следовательно $\delta_D(z) \geq 1/(4|f'(z)|)$.

Так как $f(z) = 0$

$$\mu_D(z) = 2|f'(z)| \geq \frac{1}{2\delta_D(z)}. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(t) = f(\delta_D(z)t + z)$, $t \in C$, $|t| < 1$. Так как $\psi(0) = f(z) = 0$ и $\psi(t) \in f(U)$, то есть $|\psi(t)| < 1$, выполнены условия леммы Шварца [57, с.29], согласно которой $|\psi'(0)| \leq 1$. Это неравенство означает, что $\delta_D(z)|f'(z)| \leq 1$, поэтому

$$\mu_D(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = 2|f'(z)| \leq \frac{2}{\delta_D(z)}. \qquad (3)$$

Из оценок (2) и (3) следуют неравенства (1).

Следствие. *Любое конформное отображение круга на область комплексной плоскости является 4-квазигиперболическим.*

Доказательство. Пусть $f : B \to D$ — конформное отображение. По теореме 1

$$k_D(f(z_1), f(z_2)) \leq 2\sigma_D(f(z_1), f(z_2)) \ .$$

Согласно определению метрики σ_D верно равенство

$$\sigma_D(f(z_1), f(z_2)) = \sigma_B(z_1, z_2) \ .$$

Снова применив оценки из теоремы 1, получим

$$\sigma_B(z_1, z_2) \leq 2k_B(z_1, z_2) \ .$$

Таким образом,

$$k_D(f(z_1), f(z_2)) \leq 4k_B(z_1, z_2) \ .$$

С помощью оценок снизу теоремы 1, подобные рассуждения приводят к неравенству

$$k_D(f(z_1), f(z_2)) \geq \frac{1}{4}k_B(z_1, z_2).$$

Верен и более общий результат (см., например,[2, с. 75])

Теорема 2. *Пусть D и G собственные подобласти комплексной плоскости и f конформно отображает D на G, тогда f является 4-квазигиперболическим* *отображением.*

Доказательство. Пусть $z \in D$, $w = f(z)$. Функция

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\delta_D(z)\zeta + z)}{\delta_D(z) f'(z)} - \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad |\zeta| < 1\,,$$

удовлетворяет условиям теоремы Кёбе, то есть $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, следовательно образ круга $\{|\zeta| < 1\}$ содержит круг радиуса $1/4$, поэтому

$$\delta_G(w) \geq \frac{1}{4}\delta_D(z)|f'(z)|$$

или

$$\frac{|f'(z)|}{\delta_G(w)} \leq \frac{4}{\delta_D(z)}.$$

При помощи обратной функции $g = f^{-1}$, получим неравенство $\delta_D(z) \geq (\delta_G(w)|g'(w)|)/4$. Однако, $g'(w) = 1/(f'(z))$, поэтому

$$\frac{|f'(z)|}{\delta_G(w)} \geq \frac{1}{4\delta_D(z)}.$$

Переходя к инфинитезимальным обозначениям, получим

$$\frac{|dz|}{4\delta_D(z)} \leq \frac{|f'(z)||dz|}{\delta_G(w)} \leq 4\frac{|dz|}{\delta_D(z)}$$

или

$$\frac{|dz|}{4\delta_D(z)} \leq \frac{|dw|}{\delta_G(w)} \leq \frac{4|dz|}{\delta_D(z)},$$

что и означает 4-квазигиперболичность f.

Замечание. Более формальное окончание доказательства можно получить с использованием теоремы 1.1 главы 1, если заметить, что $\Lambda(f,z) = \lambda(f,z) = |f'(z)|$, где

$$\lambda(f,z) = \varliminf_{w\to z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|}$$

и

$$\Lambda(f,z) = \varlimsup_{w\to z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|}$$

главные растяжения отображения f в точке z.

Согласно теореме Лиувилля [41] конформные отображения областей пространства R^n — суть ограничения мёбиусовых отображений $\overline{R}^n$ на себя. Для таких отображений верна теорема 3, аналогичная теореме 2.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x) = x/|x|^2$ *— инверсия пространства* R^n *и* D *— область в* R^n *, такая, что* $0 \notin D$*. Тогда ограничение* φ *на* D *является* 2-*квазигиперболическим отображением.*

Доказательство. Пусть $x \in D$. Через S обозначим сферу с центром в точке x радиуса $r = \delta_D(x)$. Через R обозначим расстояние от $\varphi(x)$ до $\varphi(S)$. Так как $\varphi(S)$ — сфера (или гиперплоскость, когда $0 \in S$), число R легко вычисляется.

Если $r < |x|$, то

$$R = \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x|+r} = \frac{r}{|x|(|x|+r)} \;;$$

и если $r = |x|$, то

$$R = \frac{1}{|x|} \;.$$

Известно (см., например, [3, с. 19]), что при $x \neq 0$ матрица Якоби инверсии φ является конформной, то есть $\varphi' = \mu \cdot k$, где $\mu > 0$, k — ортогональная матрица. Группу ортогональных матриц обозначим $O(n)$

$$O(n) = \{A : \;\; A \cdot A^T = I \;\text{ или }\; A \cdot A = I\} \;.$$

Так как, $||\varphi'(x)|| = 1/|x|^2$, из конформности матрицы $\varphi'(x)$ следует, что для всех $x \neq 0$ имеют место равенства

$$\lambda(\varphi, x) = \Lambda(\varphi, x) = ||\varphi'(x)|| = 1/|x|^2 \,.$$

Обозначим $G = \varphi(D)$, так как $\delta_G(\varphi(x)) \geq R$, получим оценки: при $r < |x|$

$$\frac{\Lambda(\varphi, x) \cdot \delta_D(x)}{\delta_G(\varphi(x))} \leq \frac{r}{|x|^2 R} = \frac{r|x|(|x|+r)}{|x|^2 r} = \frac{|x|+r}{|x|} < 2$$

и при $r = |x|$

$$\frac{\Lambda(\varphi, x) \cdot \delta_D(x)}{\delta_G(\varphi(x))} \leq \frac{r}{|x|^2 R} = \frac{r|x|(|x|+r)}{|x|^2 r} = \frac{r \cdot 2|x|}{|x|^2} = 2 \,.$$

Итак, для любой точки $x \in D$

$$\frac{\Lambda(\varphi, x)}{\delta_G(\varphi(x))} \leq \frac{2}{\delta_D(x)} \tag{4}$$

Так как $\varphi^{-1} = \varphi$, то для любой точки $y \in G = \varphi(D)$ выполнено

$$\frac{\Lambda(\varphi, y)}{\delta_D(\varphi(y))} \leq \frac{2}{\delta_G(y)} \,.$$

Пусть $x = \varphi(y)$, тогда $x \in D$ и $\Lambda(\varphi, y) = 1/\lambda(\varphi, x)$, поэтому

$$\frac{1}{\lambda(\varphi, x)\delta_D(x)} \le \frac{2}{\delta_G(\varphi(x))}$$

или

$$\frac{\lambda(\varphi, x)}{\delta_G(\varphi(x))} \ge \frac{1}{2\delta_D(x)}\,. \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) означают, что ограничение отображения φ на область D является 2-квазигиперболическим отображением (см. следствие к теореме 1.1).

Определение 4. [41, с. 15]. *Отображение f пространства $\overline{R}$ на себя называется мёбиусовым, если оно представляет собой композицию конечного числа преобразований подобия и инверсий относительно сфер.*

Теорема 3. *Пусть f — мёбиусово отображение $\overline{R}^n$, $f(x_0) = \infty$. Если область $D \subset R^n$ такова, что $x_0 \notin D$, то ограничение f на D является 2-квазигиперболическим отображением.*

Доказательство. Согласно теореме 1.3 [41, с. 31] f представимо в виде $\alpha \circ g$, где α — инверсия относительно некоторой сферы $S^{n-1}(x_0, r)$, g — движение R^n. Заметим, что

$$\alpha(x) = r\varphi\left(\frac{x - x_0}{r}\right) + x_0\,,$$

где φ — инверсия относительно единичной сферы $S^{n-1}(0; 1)$. Обозначим $\beta(x) = rx$, $\gamma(x) = x + x_0$. Тогда

$$\alpha = \gamma \circ \beta \circ \varphi \circ \beta^{-1} \circ \gamma^{-1}$$

и

$$f = \gamma \circ \beta \circ \varphi \circ \beta^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ g.$$

Пусть $a = \gamma \circ \beta$, $b = \beta^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ g$, тогда $f = a \circ \varphi \circ b$. Отображения a и b суть линейные конформные преобразования R^n, то есть они представимы в виде композиции движений и гомотетий R^n с центром в нуле. Очевидно, что ограничения линейных конформных преобразований на собственные области R^n являются изометричными в квазигиперболической метрике отображениями. Инверсия φ по лемме 1 есть 2-квазигиперболическое отображение области $b(D)$, следовательно и отображение f является 2-квазигиперболическим отображением области D.

Заметим, что определения конформного (мёбиусова в случае $n > 2$) отображения не используют понятия "квазигиперболическая метрика однако такие отображения оказываются квазигиперболическими.

Поясним значение термина "грубо квазигиперболическое отображение".

Определение 5. [75, p. 12]. *Гомеоморфизм собственной области D на собственную область G называется грубо квазигиперболическим (coarsely quasyhyperbolic), если существуют постоянные M и C, такие, что для любых двух точек $x, y \in D$ выполнено*

$$(k_D(x,y) - C)/M \leq k_G(f(x), f(y)) \leq Mk_D(x,y) + C. \tag{6}$$

Предложение 1. *Гомеоморфизм $f : D \to G$ является грубо квазигиперболическим тогда и только тогда, когда существуют две постоянные d и L, такие, что для любых двух точек $x, y \in D$, удовлетворяющих условию $k_D(x,y) \geq d$ выполнено*

$$k_D(x,y)/L \leq k_G(f(x), f(y)) \leq Lk_D(x,y). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть f грубо квазигиперболическое отображение, то есть, для любых двух точек $x, y \in D$ справедливо неравенство (6). Положим $d = 2C$ и возьмем две точки $x, y \in D$, удовлетворяющие условию $k_D(x,y) \geq d$. Так как $k_D(x,y) = k_D(x,y)/2 + k_D(x,y)/2 \geq k_D(x,y)/2 + C$, получаем оценку $k_D(x,y) - C \geq k_D(x,y)/2$. С другой стороны, $Mk_D(x,y) + C \leq (M+1/2)k_D(x,y)$. Объединив найденные оценки, получим $k_D(x,y)/(2M) \leq k_G(f(x), f(y)) \leq (M + 1/2)k_D(x,y)$. Заметим, что в (6) $M \geq 1$, поэтому $2M > M + 1/2$ и верно неравенство $k_D(x,y)/(2M) \leq k_G(f(x), f(y)) \leq 2Mk_D(x,y)$. То есть, выполнено (7) с $L = 2M$.

Пусть теперь гомеоморфизм f таков, что если $k_D(x,y) \geq d$, то выполнено неравенство (7). Покажем, что для любых $x, y \in D$ справедлива оценка

$$(k_D(x,y) - d)/L \leq k_G(f(x), f(y)) \leq Lk_D(x,y) + Ld. \tag{8}$$

Действительно, если $k_D(x,y) \geq d$, то оценки

$$k_G(f(x), f(y)) \leq Lk_D(x,y) \leq Lk_D(x,y) + Ld$$

и

$$k_G(f(x), f(y)) \geq k_D(x,y)/L \geq ((k_D(x,y) - d)/L$$

очевидны. Если же $k_D(x,y) < d$, то также очевидна оценка

$$(k_D(x,y) - d)/L < 0 \leq k_G(f(x), f(y)).$$

С другой стороны, из гомеоморфности f следует, что
$k_G(f(x), f(y)) \leq Ld$, откуда, в свою очередь следует неравенство $k_G(f(x), f(y)) \leq$

$Ld \leq k_D(x,y) + Ld$. Таким образом, неравенство (8) доказано, значит отображение f является грубо квазигиперболическим с постоянными $M = L$ и $C = Ld$. Предложение доказано.

Оказывается, любой квазиконформный гомеоморфизм собственных областей R^n является грубо квазигиперболическим
(см., например [75, теорема 4.7]). Взяв определение грубой квазигиперболичности в форме предложения 1, можно понять связь между классами квазигиперболических и квазиконформных гомеоморфизмов: если "рассматривать квазиконформное отображение издалека его не отличить от квазигиперболического.

Замечание. В теореме 4.7 цитированной работы Вяйсяля [75] доказывается более общее утверждение: любой целый (solid) гомеоморфизм собственных областей нормированного пространства является грубо квазигиперболическим.

Гомеоморфное отображение собственных подобластей называется целым, если прямое и обратное отображение равномерно непрерывно относительно квазигиперболической метрики. Отображения с таким свойствами в работе Ефремовича В.А. и Тихомировой Е.С. [13] 1964 года были названы эквиморфизмами.

§2. Основные вопросы, рассмотренные в диссертации

В диссертации рассмотрены три задачи.

Первая задача — определить расширение класса квазигиперболических гомеоморфизмов так, чтобы новый класс содержал и негомеоморфные отображения.

Вторая задача — установить топологическую эквивалентность отображений с ограниченным искажением и отображений класса QH.

Третья задача — найти функциональные пространства "естественно"связанные с гомеоморфизмами класса QH.

Дадим краткое описание методов решения этих задач.

Расширение класса квазигиперболических отображений

В главе 2 определяется расширение класса квазигиперболических отображений на негомеоморфный случай. Там устанавливается, что гомеоморфизм f областей D и G пространства R^n является квазигиперболическим тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $\Phi : [0,\infty) \to [1,\infty)$, с которой для любых точек $x, y \in D$ выполнено

$$\Lambda(f,x) \leq \Phi(k_D(x,y))\lambda(f,y) \tag{9}$$

Класс отображений, подходящих под это определение обозначается QH.

Доказывается эквивалентность разных определений отображений класса QH.

Гомеоморфизмы класса QH областей пространства R^2, были рассмотрены К.Астала и Ф.Герингом в работе [48], О.Мартио распространил понятие для произвольной конечной размерности и на негомеоморфный случай, он назвал такие отображения квазиподобиями (quasisimilarities) [64]. Автором диссертации этот класс переоткрыт [28], новым по отношению к результатам Мартио является то, что доказана эквивалентность классов квазигиперболических гомеоморфизмов и класса гомеоморфных квазиподобий.

Топологическая эквивалентность отображений

В 3 главе изучается проблема топологической эквивалентности отображений с ограниченным искажением отображениям класса QH. Рассматриваются несколько определений эквивалентности отображений, однако основным является следующее.

Отображения f и g называются сильно эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi : D \to D$ тождественный на границе области D, такой, что $g = f \circ \varphi$.

Тождественным на границе называется такой гомеоморфизм $\varphi : D \to D$, что для любой точки $x \in D$ выполнено $k_D(x, \varphi(x)) < \varepsilon$, где ε — постоянная.

Согласно работе финских математиков Тукиа и Вяйсяля [76] любой квазиконформный гомеоморфизм $f : D \to R^n$, D и G — области из R^n, $n \neq 4$ можно аппроксимировать с любой точностью квазигиперболическим гомеоморфизмом. Точнее, $\forall \varepsilon > 0$, найдется квазигиперболический гомеоморфизм $g : D \to G$, такой, что для любой точки $x \in D$ выполнено

$$k_D(f(x), g(x)) < \varepsilon.$$

Ясно, что f и g сильно эквивалентны ($\varphi = f^{-1} \circ g$ — гомеоморфизм области D на себя тождественный на границе и $g = f \circ \varphi$).

Для негомеоморфных отображений с ограниченным искажением формулировка теоремы об аппроксимации, аналогичной цитированной теореме Тукиа-Вяйсяля, выглядела бы громоздко, поэтому задачу об аппроксимации отображений заменяем задачей о топологической эквивалентности отображений.

Устанавливается, что любое локально инъективное отображение с ограниченным искажением $f : D \to R^n$, $n \neq 4$, является сильно эквивалентным некоторому отображению класса QH (теорема 3.16). Доказательство этого факта проводится применением алгоритма пошаговой локальной аппроксимации. Этот алгоритм есть упрощенный вариант алгоритма аппроксимации, использованного в статье автора [33] об инволюциях.

Следует отметить, что алгоритм пошаговой локальной аппроксимации похож на алгоритм разбиения единицы, применяемый при изучении числовых функций (см., например, [43]).

Для размерности пространства $n = 2$ решается задача о топологической эквивалентности регулярной функции отображению класса QH или класса QI (теорема 3.8 и теорема 3.11). Теорема 3.11 представляет собой пример использования квазигиперболических отображений как инструмента исследования.

Доказывается, что комплексные многочлены топологически эквивалентны отображениям комплексной плоскости класса QI (теорема 3.13) и, что любое отображение с ограниченным искажением комплексной плоскости, имеющее в окрестности бесконечности степенной рост топологически эквивалентно некоторому многочлену (теорема 3.12).

Результаты, связанные с двумерными отображениями опубликованы в работах [25], [27].

В главе 4 доказывается, что любая квазиконформная инволюция φ пространства R^n, $n \neq 4$, топологически эквивалентна квазиизометрической инволюции с тем же самым множеством неподвижных точек, что и инволюция φ. Идея доказательства состоит в применении эффекта, замеченного Л.Альфорсом, состоящего в том, что непрерывная инволюция оказывается квазиизометрической, если ее ограничение на дополнение множества неподвижных точек есть квазигиперболическое отображение [2, с. 70]. Предложенное решение задачи очень громоздкое, построение квазиизометрической инволюции происходит при помощи метода пошаговой локальной аппроксимации, приспособленного для инволюций. По мнению автора в данном случае результат оправдывает средства. Теорема о квазиизометрической инволюции опубликована в [33].

Пространства Соболева, связанные с квазигиперболическими отображениями. Эллиптические уравнения и квазигиперболические отображения.

Хорошо изучена связь соболевских пространств L^1_n и квазиконформных гомеоморфизмов, см. например, [7], [9], [39]. Квазиконформное отображение $\varphi : D \to G$ индуцирует изоморфизм пространств

$$A_\varphi : L^1_n(G) \to L^1_n(D) \quad \text{по формуле} \quad A_\varphi(f)(x) = f(\varphi(x))\,,$$

где $f \in L^1_n(G)$. С другой стороны, если изоморфизм A_φ является изоморфизмом пространств $L^1_n(G)$ и $L^1_n(D)$, то f — квазиконформное отображение.

Подобная связь есть между квазиизометрическими гомеоморфизмами и пространствами L^1_p, $p \neq n$ [8], [9].

В пятой главе диссертации указаны пространства Соболева хорошо связанные с квазигиперболическими отображениями — это весовые пространства. Устанавливается вид весов, с которыми данное отображение индуцирует изоморфизм функциональных пространств и вычисляется вид весов, с которыми любое квазигиперболическое отображение индуцирует соответствующий изоморфизм.

В этой главе, в отличие от других глав вычисляются точные оценки искажения отображений, достигается это применением специальной техники пробных конденсаторов.[21]

Отдельно рассмотрен двумерный случай. Решается следующая задача. Какими должны быть веса в односвязных собственных подобластях D и G комплексной плоскости, чтобы любое конформное отображение $\varphi : D \to G$ индуцировало подобие соболевских пространств $L^1_p(G, \nu_G)$ и $L^1_p(G, \nu_G)$. Естественно предположить, что эти веса являются функциями плотности гиперболической метрики. Предположение это подтверждается вычислениями. Этот результат опубликован в [22].

Примыкает к изложенным задачам задача о уравнениях эллиптического типа связанных с квазигиперболическими отображениями. Задача о представлении решений эллиптических уравнений в виде композиции решения некоторого уравнения с негомеоморфными отображениями была впервые рассмотрена Ю.Г.Решетняком в [40], позже к ней обращались авторы работы [58]. Проблема состоит в следующем: указать класс уравнений, решения которых можно представить в виде композиции решения некоторого уравнения и негомеоморфного отображения класса QR.

Задача для отображений класса QI решена в статье Мартио и Вяйсяля [65]. В диссертации приводится решение задачи для класса QH. Решение получено применением методов упомянутой статьи [65]. Результат опубликован в [30].

Текст диссертации содержит введение, 5 глав, предметный указатель, список основных обозначений и список литературы. Нумерация теорем, лемм определений и предложений показывает главу и номер утверждения в главе. Например пятая лемма в третьей главе обозначается как Лемма 3.5. Нумерация формул в каждом параграфе начинается с единицы.

Глава 1. Основные определения и примеры

§1. Квазиизометрические отображения метрических пространств

Пусть (X, κ_X) и (Y, κ_Y) — метрические пространства, κ_X и κ_Y — метрики. Обычно пользуются следующим определением квазиизометрического отображения.

Определение 1.1. *Отображение $f : X \to Y$ называется K-квазиизометрическим , $K \geq 1$, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ выполнено*

$$\frac{1}{K}\kappa_X(x_1, x_2) \leq \kappa_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K\kappa_X(x_1, x_2)\,.$$

Иногда это определение будет неудобно использовать, поэтому сделаем более тонкое определение и по-другому определим понятие K-квазиизометричности.

Определение 1.2. *Пусть $0 < a \leq b < \infty$, отображение назовем (a, b)-квазиизометрическим, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ выполнено*

$$a\kappa_X(x_1, x_2) \leq \kappa_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq b\kappa_X(x_1, x_2)\,.$$

Отображение f назовем квазиизометрическим, если оно является (a, b)-квазиизометрическим отображением при некоторых a и b, $0 < a \leq b < \infty$.

Ясно, что если f удовлетворяет определению 1.1, то f удовлетворяет определению 1.2 с $a = 1/K$ и $b = K$; если f удовлетворяет определению 1.2, то f удовлетворяет определению 1.1 с $K = \max(b, 1/a)$.

Для объяснения мотивации следующих определений рассмотрим пример.

Пусть $f : R^n \to R^n$ — K-квазиизометрическое отображение в смысле определения 1.1. Для положительного числа C положим $F(x) = C \cdot f(x)$. Тогда

$$\frac{C}{K}|x_1 - x_2| \leq |F(x_1) - F(x_2)| \leq KC|x_1 - x_2|\,.$$

если $x_1, x_2 \in R^n$. Представляется естественным отделить в этом примере постоянную C от постоянной K. Приходим к следующему определению.

Определение 1.3. *Пусть $f : X \to Y$ — (a, b)-квазиизометрическое отображение. Параметром отображения f назовем число $C = \sqrt{ab}$; коэффициентом квазиконформности отображения f назовем число $K = \sqrt{b/a}$. Подобным K-квазиизометрическому будем называть (a, b)-квазиизометрическое отображение с коэффициентом квазиконформности K.*

§2. Расширение понятия квазиизометрического отображения областей пространства R^n

Определение 1.4. *Пусть D - область в R^n и $\omega : D \to R$ – непрерывная положительная функция.*

Для любых двух точек x_1, x_2 из D положим

$$\kappa(x_1, x_2) = \inf \int\limits_{\gamma} \omega(x) ds,$$

где нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым γ, соединяющим x_1 и x_2 в D. Функция $\kappa : D \times D \to R$ называется конформно-плоской метрикой с плотностью ω [53].

Для некоторых конформно-плоских метрик есть стандартные названия. *Если $\omega(x) = 1$, для всех x то метрика называется внутренней* [1], *обозначим ее ρ_D.*

Если $\omega(x) = 1/\delta_D(x)$, где $\delta_D(x)$ — евклидово расстояние от точки x до границы области D , то метрика называется квазигиперболической, обозначение — k_D.

Если D — односвязная собственная подобласть комплексной плоскости C, и $\omega(z) = 2|f'(z)|/(1-|f(z)|^2)$, где f некоторое конформное отображение D на круг $\{|w| < 1\}$, то метрика называется гиперболической, обозначим ее σ_D.

Метрическое пространство — область D с заданной на ней метрикой κ_D будем обозначать как пару (D, κ_D).

Определение 1.5. *Пусть D и G области пространства R^n и $f : D \to G$. Для любой точки $x \in D$ определим главные растяжения отображения f:*

$$\Lambda(f,x) = \overline{\lim_{y\to x}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}, \qquad \lambda(f,x) = \underline{\lim_{y\to x}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\,.$$

Заметим, что главные растяжения могут принимать в некоторых точках бесконечные значения.

Теорема 1.1. [25]. *Пусть в областях D и G заданы плотности ω_D и ω_G конформно плоских метрик κ_D и κ_G. Гомеоморфизм $f : D \to G$ является (a, b)-квазиизометрическим отображением метрических пространств (D, κ_D) и (G, κ_G) тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in D$*

$$\Lambda(f,x) \le b\frac{\omega_D(x)}{\omega_G(f(x))}, \;\; \lambda(f,x) \ge a\frac{\omega_D(x)}{\omega_G(f(x))}. \qquad (1)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f – (a,b)-квазиизометрическое отображение (D,κ_D) на (G,κ_G). Из непрерывности плотностей ω_D и ω_G следует, что $\forall x \in D$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки x,что $\forall y \in U$

$$(1-\varepsilon)\omega_D(x) \le \omega_D(y) \le (1+\varepsilon)\omega_D(x),$$

$$(1-\varepsilon)\omega_G(f(x)) \le \omega_G(f(y)) \le (1+\varepsilon)\omega_G(f(x)).$$

Из определения метрик κ_D и κ_G следует, что для $y \in U$

$$(1-\varepsilon)\omega_D(x)|x-y| \le \kappa_D(x,y) \le (1+\varepsilon)\omega_D(x)|x-y|,$$

$$(1-\varepsilon)\omega_G(f(x))|f(x)-f(y)| \le \kappa_G(f(x),f(y)) \le$$
$$\le (1+\varepsilon)\omega_G(f(x))|f(x)-f(y)|.$$

Из этих оценок получаем

$$\frac{(1-\varepsilon)\kappa_G(f(x),f(y))\omega_D(x)}{(1+\varepsilon)\kappa_D(x,y)\omega_G(f(x))} \le \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le$$
$$\le \frac{(1+\varepsilon)\kappa_G(f(x),f(y))\omega_D(x)}{(1-\varepsilon)\kappa_D(x,y)\omega_G(f(x))}.$$

Однако, f является (a,b)-квазиизометрическим, следовательно

$$a \le \frac{\kappa_G(f(x),f(y))}{\kappa_D(x,y)} \le b.$$

Применяя эту оценку к предыдущей, получим

$$a\frac{(1-\varepsilon)\omega_D(x)}{(1+\varepsilon)\omega_G(f(x))} \le \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le b\frac{(1+\varepsilon)\omega_D(x)}{(1-\varepsilon)\omega_G(f(x))}.$$

Так как ε произвольно, заключаем,что для любой $x \in D$

$$\Lambda(f,x) \le b\frac{\omega_D(x)}{\omega_G(f(x))}, \lambda(f,x) \ge a\frac{\omega_D(x)}{\omega_G(f(x))}.$$

Доказательство достаточности. Пусть гомеоморфизм f удовлетворяет условию (1). Для произвольных $x_1, x_2 \in D$ и $\varepsilon > 0$ найдется спрямляемая кривая γ, соединяющая точки x_1 и x_2 в D, с которой выполнено

$$\int\limits_{\gamma} \omega_D(x)ds \le \kappa_D(x_1,x_2) + \varepsilon.$$

Из определения искажений Λ и λ, из определения плотностей ω_D и ω_G и из того, что f гомеоморфизм, следует, что для любого $\delta > 0$ и любой точки $x \in D$ найдется ее окрестность $V(x)$ такая, что, для любой точки $y \in V(x)$ выполнено

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq (1 + \delta)\Lambda(f, x), \tag{2}$$

$$\kappa_D(x, y) \geq \frac{1}{1 + \delta}\omega_D(x)|x - y|, \tag{3}$$

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \leq (1 + \delta)\omega_G(f(x))|f(x) - f(y)|. \tag{4}$$

Фиксируем $\delta \in (0, 1)$. В силу компактности кривой γ, ее можно разбить точками $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$, которые упорядочены вдоль неё и расположены так, что для любого $k = 0, 1, ..., (n - 1)$ $x_{k+1} \in V(x_k)$. Из неравенства треугольника для метрики κ_G следует, что

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \leq \sum_{k=1}^{n} \kappa(f(x_{k-1}), f(x_k)).$$

Согласно выбору точек x_k, из неравенства (4) следует, что

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \leq (1 + \delta) \sum_{k=1}^{n} \omega_G(f(x_{k-1}))|f(x_{k-1}) - f(x_k)| \tag{5}$$

Применив неравенство (2), получим

$$|f(x_{k-1}) - f(x_k)| \leq (1 + \delta)\Lambda(f, x_{k-1})|x_{k-1} - x_k|. \tag{6}$$

По условию теоремы

$$\Lambda(f, x_{k-1}) \leq b\frac{\omega_D(x_{k-1})}{\omega_G(f(x_{k-1}))} \tag{7}$$

Учитывая (6) и (7), из (5) находим, что

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \leq b(1 + \delta)^2 \sum_{k=1}^{n} \omega_D(x_{k-1})|x_{k-1} - x_k|.$$

Согласно (3) $\omega_D(x_{k-1})|x_{k-1} - x_k| \leq (1 + \delta)\kappa_D(x_{k-1}, x_k)$, поэтому

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \leq b(1 + \delta)^3 \sum_{k=1}^{n} \kappa_D(x_{k-1}, x_k)$$

Обозначим через γ_k дугу кривой γ, заключенную между точками x_{k-1} и x_k, тогда

$$\kappa_D(x_{k-1}, x_k) \leq \int\limits_{\gamma_k} \omega_D(x) ds.$$

Таким образом,

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \le b(1+\delta)^3 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} \omega_D(x)ds = b(1+\delta)^3 \int\limits_{\gamma} \omega_D(x)ds.$$

Вспомнив как была выбрана кривая γ, заключаем, что

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \le b(1+\delta)^3(\kappa_D(x,y)+\varepsilon).$$

Так как ε и δ произвольны,

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \le b\kappa_D(x,y)\,, \tag{8}$$

для любых $x, y \in D$.

Для оценки снизу рассмотрим обратное отображение $\varphi = f^{-1}$ Заметим, что для любой точки $z \in G$

$$\Lambda(\varphi, z) = \overline{\lim_{w\to z}} \frac{|\varphi(z) - \varphi(w)|}{|z-w|} = \frac{1}{\lambda(f, \varphi(z))}.$$

Из условий теоремы следует, что

$$\Lambda(\varphi, z) = \frac{1}{\lambda(f, \varphi(z))} \le \frac{\omega_G(z)}{a\omega_D(\varphi(z))}.$$

То есть φ обладает свойством, аналогичным свойству отображения f, выраженному первым из неравенств (1). Тогда, по доказанному, для любых z и w из G выполнено

$$\kappa_D(\varphi(z), \varphi(w)) \le \frac{1}{a}\kappa_G(z,w),$$

что применительно к отображению f запишется как

$$\kappa_G(f(x), f(y)) \ge a\kappa_D(x,y).$$

Это неравенство и неравенство (8) означают,чтоf является (a,b)-квазиизометрическим отображением (D, κ_D) на (G, κ_G).

Следствие. Пусть D и G собственные подобласти R^n. Гомеоморфизм $f : D \to G$ является (a,b)-квазигиперболическим, $0 < a \le b$, тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in D$ выполнено

$$\lambda(f,x) \ge a\frac{\delta_G(f(x))}{\delta_D(x)}\,, \qquad \Lambda(f,x) \le b\frac{\delta_G(f(x))}{\delta_D(x)}\,.$$

Распространение понятия квазиизометричности на неинъективные отображения.

Определение 1.6. *Пусть D – область в R^n, $0 < a \le b < \infty$. Класс $QI(a,b;D)$ состоит из всех отображений $f : D \to R^n$ таких, что для любой точки $x \in D$ $a \le \lambda(f,x)$, $\Lambda(f,x) \le b$. Если по смыслу высказывания не существенна область определения отображения f, то будем писать $f \in QI(a,b)$. Для $f \in QI(a,b)$ число $K = \sqrt{b/a}$ назовем коэффициентом квазиконформности f, а число $C = \sqrt{a \cdot b}$ — параметром f.*

Пусть $K \ge 1$. Определим классы квазиизометрических отображений. $QI_0(K) = QI(1/K, K)$.
Класс $QI(K)$ состоит из объединения классов $QI(a,b)$, у которых $\sqrt{b/a} \le K$, отображенияя класса $QI(K)$ будем называть подобными K-квазиизометрическим. Класс QI состоит из отображений, принадлежащих какому-нибудь классу $QI(K)$, $K \ge 1$.

Отображения класса QI будем называть квазиизометрическими, уточняя являются ли эти отображения гомеоморфизмами, локально инъективными или постоянной ориентации.

Замечания. Согласно теореме 1.1 гомеоморфизмы класса $QI(a,b)$ являются (a,b)-квазиизометрическими отображениями соответствующих метрических пространств.

Обычно квазиизометрическими отображениями называют локально инъективные отображения класса $QI_0(K)$, $K \ge 1$ [62]. (Отображение $f : D \to R^n$ называется локально инъективным, если для каждой точки x области D найдется окрестность, в которой отображение f инъективно, то есть взаимно однозначно.)

Если $f \in QI$, то f локально липшицево, следовательно по теореме Степанова [53] дифференцируемо почти всюду.

Класс BLD-отображений (boundary length distortion), определенный O.Martio и J.Väisälä [65] состоит из QI-отображений постоянной ориентации, то есть таких, у которых якобиан в точках дифференцируемости имеет один и тот же знак.

§3. Отображения с ограниченным искажением

Определения этого параграфа взяты из книги Ю.Г.Решетняка [39].

Через $L_p(D)$ обозначается пространство функций, интегрируемых в степени p в области D, $L_{p,loc}(D)$ – пространство функций, ограничения которых на компактные множества из D интегрируемы в степени p. $W_p^1(D)$ – пространство Соболева функций из $L_p(D)$, чьи обобщенные частные производные первого порядка принадлежат $L_p(D)$. $W_{p,loc}^1(D)$ – пространство Соболева функций с обобщенными частными производными первого порядка таких, что сами они и их обобщенные частные производные принадлежат $L_{p,loc}(D)$.

Отображение $f : D \to R^k$ принадлежит классу $W_{p,loc}^1(D)$,если все k его координатных функций принадлежат $W_{p,loc}^1(D)$.

Будем говорить, что функция $u : D \to R$ не меняет знака в D, если либо $u(x) \geq 0$почти всюду в D, либо $u(x) \leq 0$ почти всюду в D.

Определение 1.7. [39, с.24]. *Отображение $f : D \to R^n$ называется отображением с ограниченным искажением, если*

1) *f непрерывно,*

2) *f принадлежит классу $W_{n,loc}^1(D)$,*

3) *f имеет постоянную ориентацию, то есть якобиан $J(f,x)$ не меняет знак в области D,*

4) *существует число $K \geq 1$ такое, что для почти всех $x \in D$ выполнено*

$$||f'||^n \leq K|J(f,x)|, \tag{1}$$

где f' — матрица Якоби отображения f, $||f'||$ — норма матрицы f'.

В некоторых задачах условие 4) удобно заменить эквивалентным условием [51].

4*) *Существует число K_1 такое, что для почти всех $x \in D$ выполнено*

$$\Lambda(f,x) \leq K_1 \lambda(f,x) \tag{1*}$$

Несложные расчеты показывают, что если выполнено (1), *то* $\Lambda(f,x) \leq K\lambda(f,x)$ *и если выполнено* (1*), *то*

$$||f'||^n \leq K_1^n |J(f,x)|.$$

Топологические отображения с ограниченным искажением называются квазиконформными. Наименьшая из постоянных K с которой выполнено неравенство (1) *почти всюду в D, называется коэффициентом искажения f и обозначается $K(f)$.*

Замечание. Отображения с ограниченным искажением принято также называть квазирегулярными [66].

Определение 1.8. *Класс отображений удовлетворяющих условиям* 1), 2), 4) *определения* 1.7 *обозначим QR.*

Гомеоморфизмы класса QR называются квазиконформными отображениями.

Локально инъективные отображения класса QR назовем локально квазиконформными отображениями.

Отображения класса QR постоянной ориентации называются отображениями с ограниченным искажением.

§4. Емкость конденсаторов

Формулировки, приведенные в этом параграфе взяты из книги Ю.Г.Решетняка [39].

Определение 1.9. *Пусть дано открытое множество $U \subset R^n$. Упорядоченная пара (A_0, A_1) замкнутых относительно U непересекающихся множеств называется конденсатором. Символом $\tilde{W}_p(A_0, A_1, U)$ обозначим совокупность всех функций $u \in C_0^\infty(U)$, для каждой из которых существуют открытые множества $G_0 \supset A_0$ и $G_1 \supset A_1$, такие, что $u(x = 0)$ при $x \in U \cap G_0$, $u(x) = 1$ при $x \in U \cap G_1$ и $0 \le u(x) \le 1$ для всех $x \in U$.*

Точную нижнюю границу интеграла

$$\int\limits_U |\nabla u(x)|^p dx$$

на множестве $\tilde{W}_p(A_0, A_1, U)$ называют p-емкостью конденсатора (A_0, A_1) относительно U и обозначают символом $\operatorname{cap}_p(A_0, A_1, U)$. В случае $U = R^n$ используем обозначение $\operatorname{cap}_p(A_0, A_1)$ вместо $\operatorname{cap}_p(A_0, A_1, R^n)$. Отметим, что n-емкость в областях из R^n называется конформной емкостью.

Рассмотрим два специальных конденсатора в R^n. Пусть дано число $t \in (0, 1)$. Обозначим $K_G(t)$ конденсатор (A_0, A_1), у которого

$$A_0 = \{x \in R^n : |x| \ge 1\},$$

A_1 есть отрезок, состоящий из всех точек $x = \lambda e_1$, где $0 \le \lambda \le t$, e_1 – орт координатной оси x_1. $K_G(t)$ называется конденсатором Гретша.

Пусть $t > 0$. Символом $K_T(t)$ обозначим конденсатор (A_0, A_1), у которого

$$A_0 = \{x \in R_n : x = \lambda e_1, \lambda \ge t\},$$

$$A_1 = \{x \in R^n : x = \mu e_1, -1 \le \mu \le 0\}.$$

Данный конденсатор называется конденсатором Тейхмюллера.

Конденсаторы $K_G(t)$ и $K_T(t)$ обладают свойствами, выражающимися теоремами.

Теорема 1.2. *Пусть (A_0, A_1) есть конденсатор в R^n такой, что A_0 содержит внешность некоторого шара $B(a,r)$, а множество A_1 имеет связную компоненту, соединяющую точку $x_0 \in B(a,r)$ с точкой $a, a \neq x_0$. Тогда*

$$\mathrm{cap}_n(A_0, A_1) \geq \mathrm{cap}_n(K_G(|x_0 - a|/r)).$$

Теорема 1.3. *Пусть (A_0, A_1) есть конденсатор в R^n. A_0 содержит неограниченную связную компоненту E_0, а множество A_1 имеет связную компоненту E_1, содержащую две различные точки x_0 и y_0. Пусть ρ – расстояние от x_0 до E_0. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathrm{cap}_n(A_0, A_1) \geq \mathrm{cap}_n(K_T(\rho/|x_0 - x_1|)).$$

Конформная емкость ограниченно изменяется при квазиконформных отображениях, то есть является квазиинвариантом последних. Это свойство выражается в следующем.

Теорема 1.4. [39]. *Пусть D – область в R^n и $f : D \to G$ квазиконформный гомеоморфизм. Для произвольного конденсатора (A, B) из D верно неравенство*

$$\mathrm{cap}_n(f(A), f(B), G) \leq K(f)\mathrm{cap}_n(A, B, D).$$

Введем обозначения [55]

$$\mathrm{cap}_n(K_G(t)) = \omega_{n-1}/(\ln \Phi_n(1/t))^{n-1}\,,$$

$$\mathrm{cap}_n(K_T(t)) = \omega_{n-1}/(\ln \Psi_n(t))^{n-1}\,,$$

где ω_{n-1} — $(n-1)$-мерная мера сферы $S^{n-1} = \partial B^n$.

Функции $\Phi_n : [1, \infty) \to R$ и $\Psi_n : [0, \infty) \to R$ монотонно возрастают, $\Phi_n(1) = \Psi_n(0) = 1$,

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_n(t) = \lim_{t\to\infty} \Psi_n(t) = \infty\,.$$

Существует число $\lambda \in [4, e^n]$ такое, что

$$1 \leq \tau \leq \Phi_n(\tau) \leq \lambda_n \tau.$$

Функции Φ_n и Ψ_n связаны соотношением

$$\Psi_n(\tau) = [\Phi_n((\tau + 1)^{1/2})]^2.$$

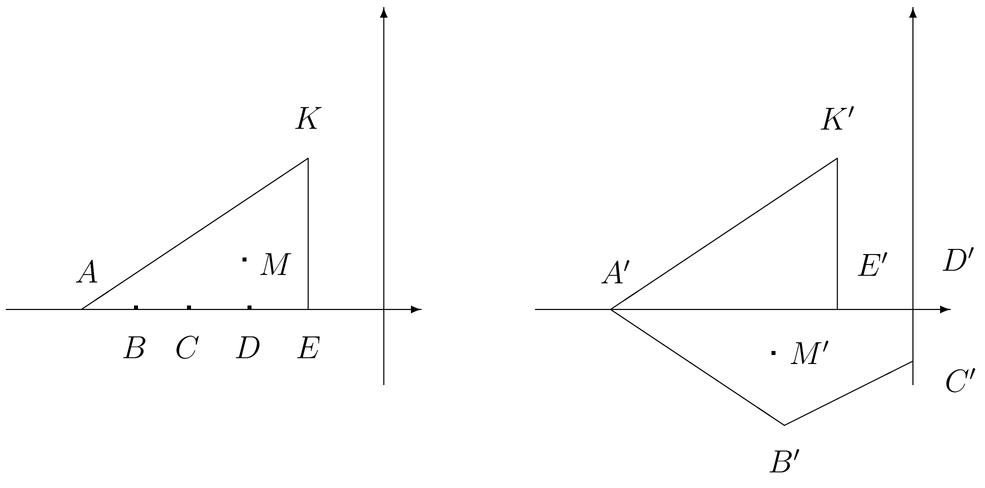

Рис. 1: 1

§5. Примеры

Пример 1. Через R^2_+ обозначим верхнюю полуплоскость $\{x_2 > 0\}$ плоскости R^2. Построим отображение $f : R^2_+ \to R^2$, локально инъективное класса QI и не имеющее предела

$$\lim_{x \to \infty} f(x).$$

Треугольник AEK имеет следующие координаты вершин:
$A(-2,0)$, $E(-1/2,0)$, $K(-1/2,1)$, у треугольника $A'E'K'$ соответствующие вершины имеют те же координаты. Пусть точка M — внутренняя для треугольника AEK, точка M' расположена так, что отрезки, соединяющие её с вершинами шестиугольника $A'B'C'D'E'K'$ целиком лежат в этом шестиугольнике. С помощью точек M и M' можно построить симплициальные разбиения треугольника AEK и шестиугольника $A'B'C'D'E'K'$, соответственно. Эти разбиения позволяют построить кусочно-линейный гомеоморфизм ψ треугольника AEK на шестиугольник $A'B'C'D'E'K'$, причем на сторонах AK и EK гомеоморфизм ψ совпадает с тождественным отображением.

Обозначим через f^* отображение верхней полуплоскости R^2_+, совпадающее с ψ на треугольнике AEK и тождественное вне него. Через φ обозначим зеркальное отражение относительно оси ординат и определим отображение

$$f_0(x,y) = \begin{cases} f^*(x,y)\,, & \text{если } \ x < 0 \\ \varphi(f^*(-x,y))\,, & \text{если } \ x \geq 0\,. \end{cases}$$

Для любого натурального числа k положим $f_k(x,y) = 6^k f_0(z/6^k)$, здесь $z = (x,y)$ — точка плоскости R^2.

Далее для любого натурального k определим отображение $F_k = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$ и, наконец, отображение

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} F_k(z)\,.$$

Построенное отображение f обладает объявленными свойствами.

Пример 2. Локально инъективное квазиизометрическое отображение бесконечной полосы на круговое кольцо, такое, что любая точка в образе имеет счетный прообраз.

Пусть $D = \{z \in C : |\mathrm{Re}\, z| < d, d > 0\}$ – полоса.

$$G = \{w \in C : e^{-d} < |w| < e^d\},$$

$$f : D \to G, f(z) = e^z.$$

Для любой точки $z \in D$

$$\Lambda(f,z) = \lambda(f,z) = |e^z| = |e^{x+iy}| = e^x.$$

Так как $e^{-d} < e^x < e^d$, $f \in QI(e^d)$. Для каждой $w = u + iv \in G$

$$f^{-1}(w) = \{z = x + iy : x = \ln|w|,\ y = \arg w + 2\pi n,\ n \in Z\}.$$

Множество $f^{-1}(w)$ счетное.

Пример 3. Квазигиперболический гомеоморфизм полупространства

$$D = R^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_n > 0\}$$

на цилиндр

$$C_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 < 1, x_n \in R\}.$$

Отображение построено в [39].

$$f(x) = (\frac{x_1}{|x| + x_n}, \frac{x_2}{|x| + x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{|x| + x_n}, \ln|x|).$$

f представимо в виде композиции $f = \varphi \circ \psi$, где $\psi : R^n \to Z^{n+1}_+$ меркаторова проекция полупространства R^n_+ на полуцилиндр

$$Z^{n+1}_+ = \{(y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}) \in R^{n+1} : \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1, y_n > 0, y_{n+1} \in R\},$$

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = (\frac{x_1}{|x|}, \frac{x_2}{|x|}, ..., \frac{x_{n-1}}{|x|}, \ln|x|),$$

$$\varphi : Z_+^{n+1} \to C_n, \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y) = (\frac{x_1}{1+x_n}, \frac{x_2}{1+x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}, y).$$

Главные растяжения отображений ψ и φ находятся по формулам [39, с. 29] $\Lambda(\psi, x) = 1/|x| = \lambda(\psi, x)$, $\Lambda(\varphi, (x, y)) = 1, \lambda(\varphi, (x, y)) = 1/1 + x_n$. Тогда $\Lambda(f, x) = 1/|x|$, $\lambda(f, x) = 1/(|x| + x_n)$. Обозначим $\delta(f(x)) = \delta_{C_n}(f(x))$ и проведем оценку этой величины.

$$\delta(f(x)) = 1 - \frac{1}{(|x| - x_n)^2} \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2.$$

Пусть $\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, тогда

$$\delta(f(x)) = \frac{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + x_n^2} + x_n - |\tilde{x}|}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + x_n^2} + x_n}.$$

Так как

$$\sqrt{|\tilde{x}|^2 + x_n^2} - |x| \le x_n, \qquad \sqrt{|\tilde{x}|^2 + x_n^2} + x_n \ge |x|,$$

то $\delta(f(x)) \le x_n/|x|$. С другой стороны,

$$\sqrt{|\tilde{x}|^2 + x_n^2} + x_n - |x| \ge x_n, \qquad \sqrt{|\tilde{x}|^2 + x_n^2} + x_n = |x| + x_n \le 2|x|,$$

поэтому $\delta(f(x)) \ge x_n/(2|x|)$. Так как $\delta_D(x) = x_n$ имеем оценки

$$\Lambda(f, x) = \frac{1}{|x|} = \frac{x_n}{|x| x_n} \le 2\frac{\delta(f(x))}{\delta(x)}$$

$$\lambda(f, x) = \frac{1}{|x| + x_n} = \frac{x_n}{|x| + x_n} \ge \frac{\delta(f(x))}{2x_n} = \frac{\delta(f(x))}{2\delta(x)}.$$

Итак, f является 2-квазигиперболическим гомеоморфизмом.

Пример 4. Локально однолистное счетнократное квазиизометрическое накрытие тора $T^n \subset R^n$, ($T^n = S^1(R) \times B^{n-1}(1)$, $R > 1$).

Через C_n обозначим цилиндр

$$C_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1\,;\; x_n \in R\}.$$

Отображение $f : C_n \to T^n$ задается так

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((x_1 + R)\cos x_n, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, (x_1 + R)\sin x_n)\,.$$

Найдем матрицу Якоби отображения f

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \cos x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & -(x_1+R)\sin x_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \sin x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & (x_1+R)\cos x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого вектора $h = (h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n)$ имеет место равенство

$$||f'(x_1, x_2, \dots, x_n)(h)||^2 = (h_1 \cos x_n - h_n(x_1+R)\sin x_n)^2 + h_2^2 +$$

$$\dots, h_{n-1}^2 + (h_1 \sin x_n + h_n(x+R)\cos x_n)^2 = h_1^2 + \dots, h_{n-1}^2 + (x_1+R)^2 h_n^2\,.$$

Так как $R-1 < (x_1+R) < R+1$, заключаем, что

$$\sqrt{(R-1)}|h| \le ||f'(x_1, x_2, \dots, x_n)(h)|| \le \sqrt{R+1}|h|$$

для любой точки $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C_n$. Доказанное неравенство означает, что отображение f является локально $(\sqrt{R-1}, \sqrt{R+1})$-квазиизометрическим отображением.

Пример 5. Локально инъективное счетно-кратное квазигиперболическое отображение шара B^n на тор T^n.

Пусть f – гомеоморфизм полупространства R^n_+ на цилиндр C_n из примера 3, g – отображение примера 4 и $\varphi : B^n \to R^n_+$ – мебиусово отображение. Тогда композиция $F = g \circ f \circ \varphi$ и есть нужный пример. F – квазигиперболическое отображение как композиция квазиизометрического и квазигиперболического отображений (теорема 2.4).

Пример 6. Квазиизометрическое отображение полосы на эллипс со счетным числом точек ветвления.

Пусть

$$D = \{z = x + iy : |y| < 1\},$$

$$\varphi(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!}\,.$$

Функция φ периодическая с периодом 2π, кроме того,

$$\varphi(z+\pi) = -\varphi(z).$$

Построим гомеоморфизм $\psi : D \to D$, с которым $\varphi \circ \psi \in QI$. Определим

$$\tilde{\psi}(z) = \begin{cases} z/\sqrt{2|z|}, & \text{если } |z| < 1/2 \\ z, & \text{если } z \in D_0 \setminus B^2(0, 1/2) \end{cases}$$

Отображение $\tilde{\psi}$ квазиконформно, так как для всех $|z| < 1/2$, $z \neq 0$, выполнено

$$\lambda(\tilde{\psi}, z) = 1/\sqrt{8|z|}, \quad \Lambda(\tilde{\psi}, z) = 1/\sqrt{2|z|}. \tag{1}$$

Пусть $x_n = -\pi/2 + \pi n$, рассмотрим отображение

$$\psi(z) = \begin{cases} \tilde{\psi}(z - x_n) + x_n, & \text{если } z \in B(x_n, 1/2), \\ z, & \text{если } z \notin \overline{B}(x_n, 1/2), \end{cases},$$

где $z \in D$, $n \in Z$. ψ – квазиконформный гомеоморфизм D на себя. Круги вида $B(x_n, 1/2)$ переводятся отображением ψ на себя Рассмотрим теперь отображение

$$F(z) = \sin(\psi(z)).$$

Ясно, что F является отображением с ограниченным искажением. Так как ψ имеет период π, функции

$$\lambda(F, z) = |\cos(\psi(z))|\lambda(\psi, z)$$

и

$$\Lambda(F, z) = |\cos(\psi(z))|\Lambda(\psi, z)$$

являются π-периодическими вещественнозначными.

Оценим главные растяжения отображения ψ в полосе D. Если $z \in B(\pi/2, 1/2)$, то $\psi(z) \in B(\pi/2, 1/2)$ и

$$\cos(\psi(z)) = \cos(\tilde{\psi}(z - \pi/2) + \pi/2) = \sin(\tilde{\psi}(z - \pi/2))$$

Обозначим $w = z - \pi/2$. Так как при $|w| < 1/2$

$$\cos(\psi(z)) = \sin(\tilde{\psi}(w)) = \sin(\frac{w}{\sqrt{2|w|}}),$$

Рассмотрим ряд

$$\sin z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Обозначим

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}.$$

Так как $S_1 < S_2$, $2S_1 < S_1 + S_2 = e$, получаем $S_1 < e/2$. Тогда при $|z| \leq 1$, имеем

$$|\sin z| \leq |z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} = |z| S_1 < \frac{e}{2}|z|.$$

Теперь оценим $|\sin z|$, сверху. Для $|z| \leq 1$, верны неравенства

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leq |z|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!} = |z|(S_1-1) < |z|(\frac{e}{2}-1) = |z|\frac{e-2}{2}\,.$$

Тогда при $|z| \leq 1$ имеем

$$|\sin z| = |\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!}| \geq |z| - \left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \geq$$

$$\geq |z| - |z|\frac{e-2}{2} = |z|\frac{4-e}{2}\,.$$

Переходя к переменной w, получим

$$A\sqrt{|w|} \leq \left|\sin(\frac{w}{\sqrt{2|w|}})\right| \leq B\sqrt{|w|}\,.$$

где

$$A = \frac{(4-e)}{2\sqrt{2}}\,, \qquad B = \frac{e}{2\sqrt{2}}\,.$$

Согласно (1)

$$\Lambda(\psi, z) = \frac{1}{\sqrt{2|z-\pi/2|}} = \frac{1}{\sqrt{2|w|}},$$

$$\lambda(\psi, z) = \frac{1}{\sqrt{8|z-\pi/2|}} = \frac{1}{\sqrt{8|w|}},$$

поэтому для всех $z \in B^2(\pi/2, 1/2)$ имеют место оценки

$$\Lambda(F, z) \leq \frac{B\sqrt{|w|}}{\sqrt{2|w|}} = B/\sqrt{2}, \qquad \lambda(F, z) \geq \frac{A\sqrt{|w|}}{\sqrt{8|w|}} = A/\sqrt{8}.$$

Так как главные растяжения отображения F — периодические функции, полученные оценки верны для всех $z \in B^2(\pi/2 + \pi n, 1/2) = B_n$, $n \in Z$. В прямоугольниках

$$D_n = \{z = x + iy : \pi n < x < \pi(n+1)\,,\ n \in Z \quad |y| < 1\}$$

вне кругов B_n верны оценки $\Lambda(F, z) \leq (e^2+1)/2 = M$, $\lambda(F, z) \geq \sqrt{2}/2 = L$.

Так как $A < L$, $M < B$, заключаем, что $F \in QI(A, B)$.

Пример 7. Квазигиперболическое отображение круга со счетным числом точек ветвления.

Пусть φ – конформное отображение круга B на полосу D из примера 6. Композиция $\Phi = F \circ \varphi$, где F отображение примера 6, дает нужное.

Пример 8. Квазиизометрическое отображение пространства R^n, не сохраняющее ориентации, на единичный куб.

Разобъем R^n на единичные кубы вида

$$Q = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : k_i \leq x_i \leq k_i + 1,\ i = 1, 2, ..., n;\ k_i \in Z\}.$$

Каждому такому кубу сопоставим n-мерный мультииндекс, например, кубу Q соответствует мультииндекс $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$, тогда этот куб будем обозначать Q_k или $Q_{(k_1, k_2, ..., k_n)}$. Для любого мультииндекса k построим отображение куба Q на себя.

$$\varphi_k(x) = (y_1, y_2, ..., y_n),$$

$$\begin{aligned} y_i &= x_i, && \text{если } k_i \text{ четное},\\ y_i &= 1 - x_i, && \text{если } k_i \text{ нечетное}. \end{aligned}$$

Обозначим через q_k центр куба Q_k и определим отображение

$$\varphi(x) = \varphi_k(x - z_k + z_0), \text{ если } x \in Q_k,$$

здесь z_0 – центр куба $Q_{(0,0,...,0)}$. Отображение φ обладает нужными свойствами. Действительно, $\varphi(R^n) = Q_{(0,0,...,0)}$. Для любой точки $x \in R^n$

$$\Lambda(\varphi, x) = \lambda(\varphi, x) = 1.$$

Глава 2. Расширение класса квазигиперболических отображений

В определении квазигиперболических гомеоморфизмов $f : D \to G$ присутствуют квазигиперболические расстояния в областях D и G или, согласно теореме 1.1, расстояния от x и $f(x)$ до границ ∂D и ∂G, то есть учитывается геометрическое строение обеих областей.

Заметим, однако, что любое конформное отображение собственной области R^n в R^n является квазигиперболическим (теоремы 2 и 3 Введения), хотя в определении конформных отображений гиперболическое расстояние отсутствует. Проблема состоит в указании свойств гомеоморфизма $f : D \to R^n$, которые гарантируют квазигиперболичность отображения D на $f(D)$. В этой главе излагается решение данной проблемы [28]. Кроме того, будет дано распространение понятия квазигиперболического отображения на неинъективный случай (класс QH). Основные положения главы изложены в статье автора [28]

§1. Оценки квазигиперболического расстояния в областях

В дальнейшем часто придется давать оценки евклидового расстояния между точками, исходя из квазигиперболического расстояния и наоборот. Следующие леммы позволят делать такие оценки.

Лемма 2.1. [57]. *Для любых $x, y \in D$ выполняются неравенства*

$$k_D(x,y) \geq \ln \frac{\delta_D(x) + |x-y|}{\delta_D(x)}, \tag{1}$$

$$k_D(x,y) \geq \left| \ln \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(y)} \right| . \tag{2}$$

Следствие. *Если $k_D(x,y) \leq r$, то*

$$|x-y| \leq \delta_D(x)(e^r - 1).$$

Доказательство. Потенцируя (1), получим неравенство

$$e^{k_D(x,y)} \geq (\delta_D(x) + |x-y|)/\delta_D(x),$$

учитывая то, что $k_D(x,y) \leq r$, после элементарных преобразований получим нужную оценку.

Лемма 2.2. *Если* $k_D(x,y) \geq r$, *то*

$$|x-y| \geq \delta_D(x)(1-e^{-r}).$$

Доказательство. Пусть

$$|x-y| < \delta_D(x)(1-e^{-r}). \tag{3}$$

Так как шар $B = B^n(x, \delta_D(x))$ целиком лежит в области D, для любой точки $z \in B$ выполнено $\delta_D(z) \geq \delta_D(x) - |x-z|$. Тогда для y из B имеем оценку

$$k_D(x,y) \leq \int\limits_{[x,y]} \frac{ds}{\delta_D(z)} \leq \int\limits_{[x,y]} \frac{ds(z)}{\delta_D(x)-|x-z|} = \ln \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x)-|x-y|}\,.$$

Согласно неравенству (3)

$$\ln \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x)-|x-y|} < \ln \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(x)(1-1+e^{-r})} = r\,.$$

Поэтому $k_D(x,y) < r$.

Итак, из предположения (3) следует, что $k_D(x,y) < r$, поэтому в случае когда $k_D(x,y) \geq r$ выполнено доказываемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 2.3. [28]. *Пусть* $\alpha \in (0,1), x \in D$ *и* $|x-y| = \alpha\delta_D(x)$, *тогда*

$$\ln(1+\alpha) \leq k_D(x,y) \leq -\ln(1-\alpha).$$

Доказательство. *Оценка снизу* получится, если в (1) положить $|x-y| = \alpha\delta_D(x)$.

Оценка сверху. Пусть $B = B(x, \delta_(x))$. Так как $\delta_B(z) \leq \delta_D(z)$ для любой точки $z \in B$, из определения квазигиперболического расстояния следует, что $k_D(x,y) \leq k_B(x,y)$. Обозначим $\delta = \delta_D(x), \gamma$ — отрезок, с концами x и y. Тогда

$$k_B(x,y) \leq \int\limits_{\gamma} (1/\delta_B(z))ds = \int\limits_{(1-\alpha)\delta}^{\delta} (1/s)ds = -\ln(1-\alpha).$$

Учитывая предыдущее неравенство, получим требуемое. Лемма доказана.

§2. Критерий квазигиперболичности гомеоморфизма

В этом параграфе найдены условия, не использующие расстояния в образе, при выполнении которых гомеоморфизм является квазигиперболическим.

Лемма 2.4. *Пусть $f : D \to G$ квазиконформный гомеоморфизм. Тогда для любого $\beta \in (0, 1)$ существуют положительные постоянные P и Q, зависящие только от β, n и коэффициента квазиконформности $K(f)$, такие, что для любых двух точек $x, y \in D$, удовлетворяющих условию*

$$|x - y| = \beta\delta_D(x)$$

выполнено

$$P \le \frac{|f(x) - f(y)|}{\delta_G(f(x))} \le Q.$$

Доказательство. *Оценка сверху.* Положим $A_0 = [x, y]$, $A_1 = R^n \backslash B(x, \delta_D(x))$. Тогда

$$\mathrm{cap}_n(A_0, A_1) = \omega_{n-1} \ln^{1-n} \Phi_n(1/\beta)$$

В силу квазиконформности f

$$\mathrm{cap}_n(A_0, A_1) \ge \frac{1}{K}\mathrm{cap}_n(f(A_0), f(A_1))$$

Так как $f(A_0)$ — континуум, соединяющий точки $f(x)$ и $f(y)$, а расстояние от $f(x)$ до $f(A_1)$ не превосходит $\delta_G(f(x))$, по теореме 1.3 имеем оценку

$$\mathrm{cap}_n(f(A_0), f(A_1)) \ge \omega_{n-1} \ln^{1-n} \Psi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right)$$

Соединяя приведенные выражения, получим неравенство

$$\ln^{1-n} \Phi_n(1/\beta) \ge \frac{1}{K} \ln^{1-n} \Psi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right)$$

откуда

$$\ln^{1-n} \Psi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right) \ge K^{1/(n-1)} \ln^{1-n} \Phi_n(1/\beta) = C_1$$

Потенцирование дает оценку

$$\Psi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right) \ge e^{C_1}.$$

Функция Ψ_n монотонно возрастает, следовательно имеет обратную ${\Psi_n}^{-1}$, поэтому

$$\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \ge {\Psi_n}^{-1}(e^{C_1}) = \frac{1}{Q}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\delta_G(f(x))} \le Q.$$

Оценка снизу. Предположим, что $|f(x) - f(y)| \le \delta_G(f(x))$. Обозначим $A_0 = f^{-1}([f(x), f(y)])$,

$$A_1 = f^{-1}(R^n \backslash B(f(x), \delta_G(f(x)))).$$

Тогда

$$\mathrm{cap}_n(A_0, A_1) \le K \mathrm{cap}_n(f(A_0), f(A_1)) = K\omega_{n-1} \ln^{1-n} \Phi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right)$$

По теореме 1.3

$$\omega_{n-1} \ln^{1-n} \Psi_n(1/\beta) \le \mathrm{cap}_n(A_0, A_1).$$

Тогда имеем

$$\ln^{1-n} \Psi_n(1/\beta) \le K \ln^{1-n} \Phi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right),$$

$$\ln \Phi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right) \le K^{1/(n-1)} \ln \Psi_n(1/\beta) = C_2$$

поэтому

$$\Phi_n \left(\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|} \right) \le e^{C_3}$$

Применяя обратную функцию Φ_n^{-1}, получим

$$\frac{\delta_G(f(x))}{|f(x) - f(y)|}) \le \Phi_n^{-1}(e^{C_3}) = P^{-1}.$$

Откуда

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\delta_G(f(x))} \ge P.$$

Следствие. *Если f удовлетворяет условиям леммы 2.4, то образ замкнутого шара $\overline{B}(x, \beta\delta_D(x))$ содержит замкнутый шар $\overline{B}(f(x), P\delta_G(f(x)))$.*

Теорема 2.1.(Критерий квазигиперболичности.) *Гомеоморфизм $f : D \to R^n$ является квазигиперболическим тогда и только тогда, когда существуют числа $M \ge 1$ и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что для любой точки $x \in D$ и любой точки y для которой $|x - y| \le \alpha\delta_D(x)$, выполнено неравенство*

$$\Lambda(f, x) \le M\lambda(f, y).$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $G = f(D)$ и f является K-квазигиперболическим гомеоморфизмом D на G. Фиксируем произвольное $\alpha \in (0, 1)$ и возьмем точки $x, y \in D$ так, чтобы $|x - y| \le \alpha\delta_D(x)$. Из квазигиперболичности f следует, что

$$k_G(f(x), f(y)) \le K k_D(x, y).$$

К левой части этого неравенства применим оценку (2) леммы 2.1, а к правой части — оценку сверху леммы 2.3, получим

$$\left|\ln \frac{\delta_G(f(x))}{\delta_G(f(y))}\right| \leq -K\ln(1-\alpha).$$

Обозначим $a = \delta_G(f(x))/\delta_G(f(y))$, тогда неравенство будет выглядеть так $|\ln a| \leq -K\ln(1-\alpha)$, следовательно

$$\ln a \leq -K\ln(1-\alpha) \tag{1}$$

Пусть $b = \delta_D(y)/\delta_D(x)$. Непосредственно из условий теоремы следует, что $1-\alpha \leq b \leq 1+\alpha$, поэтому $\ln b \leq \ln(1+\alpha)$. Складывая это неравенство с неравенством (1), получим

$$\ln ab \leq \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}^K = \ln C.$$

Потенцируя неравенство и возвращаясь к прежним обозначениям, приходим к оценке

$$\frac{\delta_G(f(x))\delta_D(y)}{\delta_G(f(y))\delta_D(x)} \leq C\,,$$

эквивалентной следующей:

$$\frac{\delta_G(f(x))}{\delta_D(x)} \leq C\frac{\delta_G(f(y))}{\delta_D(y)}. \tag{2}$$

Так как f — квазигиперболический гомеоморфизм, применим к (2) следствие к теореме 1.1 и получим

$$\frac{\Lambda(f,x)}{K} \leq CK\lambda(f,y)\,,$$

или $\Lambda(f,x) \leq M\lambda(f,y)$, где $M = K^2(1+\alpha)/(1-\alpha)^K$. Итак, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть гомеоморфизм $f : D \to G$ таков, что существуют числа $M \geq 1$ и $\alpha \in (0,1)$, которыми для любых двух точек $x, y \in D$, удовлетворяющих условию $|x-y| \leq \alpha\delta_D(x)$, выполнено $\Lambda(f,x) \leq M\lambda(f,y)$. Пусть $\beta = \alpha/(1+\alpha)$. Если $|x-y| \leq \beta\delta_D(x)$, то верны две оценки $|x-y| \leq \alpha\delta_D(x)$ и $|x-y| \leq \alpha\delta_D(y)$. Тогда из условий теоремы следует, что

$$\lambda(f,y) \geq \frac{\Lambda(f,x)}{M} = A_1, \tag{3}$$

$$\Lambda(f,y) \leq M\lambda(f,x) = A_2 \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) означают квазиизометричность f в шаре $B = B(x, \beta\delta_D(x))$. Пусть теперь точка $y \in D$ такова, что $|x-y| = \beta\delta_D(x)$ и

$$|f(x)-f(y)| = R = \{\max|f(x)-f(z)| : \ |x-z| = \beta\delta_D(x)\}. \tag{5}$$

Из квазиизометричности f в шаре B следует оценка

$$A_1|x-y| \le R \le A_2|x-y|. \qquad (6)$$

Оценим $\Lambda(f,x)$ сверху. Из (4) и (6) находим, что

$$\Lambda(f,x) = MA_1 \le \frac{MR}{|x-y|}.$$

Так как f является квазиконформным гомеоморфизмом, по лемме 2.4 найдется постоянная $Q = Q(n,K,\beta)$, такая, что $R \le Q\delta_G(f(x))$, теперь учитывая то, что $|x-y| = \beta\delta_D(x)$, получим

$$\Lambda(f,x) \le \frac{MQ\delta_G(x)}{\beta\delta_D(x)}. \qquad (7)$$

Теперь оценим $\lambda(f,x)$ снизу. Из (3) и (6) следует, что

$$\lambda(f,x) = A_2/M \ge R/(M|x-y|) = R/(M\beta\delta_D(x)).$$

Тогда, с учетом леммы 2.4, получим

$$\lambda(f,x) \ge \frac{P\delta_G(f(x))}{M\beta\delta_D(x)}. \qquad (8)$$

Положим, $K = \max(MQ/\beta, M\beta/P)$. Тогда из (7) и (8) вытекают неравенства

$$\Lambda(f,x) \le K\frac{\delta_G(f(x))}{\delta_D(x)}, \qquad \lambda(f,x) \ge \frac{\delta_G(f(x))}{K\delta_D(x)},$$

которые и означают, что f является K-квазигиперболическим гомеоморфизмом.

Теорема доказана.

Замечание. Гомеоморфизмы областей пространства R^2, обладающие свойствами, указанными в теореме 2.1 были рассмотрены К.Астала и Ф.Герингом в работе [48], О.Мартио распространил понятие для произвольной конечной размерности и на негомеоморфный случай, он назвал такие отображения квазиподобиями (quasisimilarities) [64]. Автором диссертации этот класс переоткрыт, новым является то, что доказана эквивалентность классов квазигиперболических гомеоморфизмов и класса гомеоморфных квазиподобий [28].

Задача. В доказательстве достаточности условий теоремы 2.1 использовалось свойство квазиконформности гомеоморфизма f. Представляет интерес доказательство без использования этого свойства.

§3. Определение отображений класса QH

Выделим класс отображений, которые обладают свойством, определенным в теореме 2.1, но без свойства инъективности. Полученный класс будет представлять собой естественное обобщение класса квазигиперболических гомеоморфизмов.

Определение 2.1. *Пусть D — область в R^n. Отображение $f : D \to R^n$ принадлежит классу QH, если существуют постоянные $K \geq 1$ и $\alpha \in (0,1)$ такие, что для любой точки $x \in D$ и любой точки $y \in B(x, \alpha\delta_D(x))$ выполнено*

$$\Lambda(f,x) \leq K\lambda(f,y)$$

Отображения класса QH будем называть квазигиперболическими.

Замечание 1. Если $f \in QH$ и является гомеоморфизмом, то по теореме 2.1 f — квазигиперболический гомеоморфизм.

Замечание 2. Постоянное отображение принадлежит классу QH, однако постоянные отображения не представляют интереса в данном контексте, поэтому впредь всегда будем считать, что рассматриваемые отображения непостоянны.

Предложение 2.1. *Имеет место следующее включение классов отображений.*

$$QI \subset QH \subset QR.$$

Доказательство. Пусть $f \in QI$, тогда существуют числа L и K такие, что для любой точки $x \in D$

$$L \leq \lambda(f,x) \leq \Lambda(f,x) \leq K.$$

Тогда для любой $y \in D$

$$\Lambda(f,x) \leq K = \frac{K}{L}L \leq \lambda(f,y)$$

следовательно $f \in QH$.

Пусть теперь $f \in QH$. Так как для любой $x \in D$ $\Lambda(f,x) \neq \infty$, отображение f непрерывно в x.

Если $y \in B(x, \frac{\alpha}{1+\alpha}\delta_D(x))$, то

$$|x-y| \leq \alpha\delta_D(y),$$

тогда из принадлежности f классу QH следует, что

$$\Lambda(f, y) \le K\lambda(f, x) = C(x).$$

Это значит, что для таких y $|f(x) - f(y)| \le K\lambda(f, x)|x - y|$, то есть f в шаре $B(x, \frac{\alpha}{1+\alpha}\delta_D(x))$ удовлетворяет условию Липшица, следовательно по теореме Степанова-Радемахера [53] f почти всюду дифференцируемо и принадлежит $W^1_{n,loc}$. Кроме того, выполнено условие

$$\Lambda(f, y) \le K\lambda(f, x).$$

Таким образом, f принадлежит классу QR.

Эквивалентные определения отображений класса QH.

Пользоваться определением 2.1 класса QH не всегда удобно, поэтому предложим другие условия, эквивалентные определению 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть D — собственная подобласть R^n и $f : D \to R^n$. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) $f \in QH$.

2) *Существуют числа $\alpha \in (0, 1)$ и $M \ge 1$ такие, что для любого $x \in D$ ограничение f на шар $B(x, \alpha\delta_D(x))$ принадлежит классу $QI(M)$ (подобно M-квазиизометрическому отображению).*

3) *Существует неубывающая непрерывная функция $\Phi : [0, \infty] \to [1, \infty]$ такая, что для любых $x, y \in D$ выполнено неравенство*

$$\Lambda(f, x) \le \Phi(k_D(x, y))\lambda(f, y)$$

Доказательство. Из 1) следует 2). Пусть $f \in QH$, это означает, что найдутся $\alpha \in (0, 1)$ и $K \ge 1$ такие, что для любой точки $x \in D$ и любой $y \in B(x, \alpha\delta_D(x))$

$$\Lambda(f, x) \le K\lambda(f, y).$$

Пусть $\alpha_1 = \alpha/(1 + \alpha)$ и $z \in B(x, \alpha_1\delta_D(x))$, тогда

$$|x - z| < \alpha_1\delta_D(x) \le \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}\delta_D(z) = \alpha\delta_D(z)$$

то есть $x \in B(x, \alpha\delta_D(z))$. Тогда из принадлежности f классу QH следует, что

$$\Lambda(f, z) \le K\lambda(f, x) \le K\Lambda(f, x).$$

Так как $\lambda(f,z) \geq 1/K\Lambda(f,x)$ и z произвольная точка из $B = B(x, \alpha_1\delta_D(x))$, заключаем, что ограничение f на B принадлежит $QI(K)$.

Из 2) следует 3). Пусть $f : D \to R^n$ удовлетворяет условию 2) с постоянными α и M. Возьмем произвольные точки x и y из D и обозначим $r = k_D(x,y)$. Герингом и Осгудом в работе [57] установлено, что существует кратчайшая γ, относительно метрики k_D, соединяющая x и y в D.

Разобъем кривую γ точками $x = x_0, x_1, ..., x_m = y$ в направлении от x к y так, чтобы

$$k_D(x_{k-1}, x_k) = r/m.$$

Натуральное число m выберем так, чтобы

$$\frac{r}{\ln(1+\alpha)} < m \leq \frac{r}{\ln(1+\alpha)} + 1 \tag{1}$$

Тогда $r/m < \ln(1+\alpha)$ и по следствию к лемме 2.1 имеем $|x_{k-1} - x_k| \leq \alpha\delta_D(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Так как f удовлетворяет условию 2),

$$\Lambda(f,x) = \Lambda(f,x_0) \leq K^2\lambda(f,x_1)$$

$$\lambda(f,x_1) \leq \Lambda(f,x_1) \leq K^2\lambda(f,x_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda(f,x_{m-1}) \leq \Lambda(f,x_{m-1}) \leq K^2\lambda(f,y)$$

Отсюда следует оценка

$$\Lambda(f,x) \leq K^{2m}\lambda(f,y).$$

Согласно (1) имеем $m \leq (r/\ln(1+\alpha)) + 1$, поэтому $K^{2m} \leq K^2C^r$, где $C = K^{2/\ln(1+\alpha)}$. Положим $\Phi(t) = K^2C^t$.

Итак,

$$\Lambda(f,x) \leq \Phi(k_D(x,y))\lambda(f,y).$$

Таким образом, найдена функция Φ, с которой выполнено условие 3).

Из 3) следует 1). Пусть Φ — функция, удовлетворяющая условию 3). Фиксируем произвольное $\alpha \in (0,1)$ и возьмем $x, y \in D$ так, чтобы $|x - y| \leq \alpha\delta_D(x)$. Тогда по лемме 2.3

$$k_D(x,y) \leq -\ln(1-\alpha)$$

из монотонности Φ следует, что

$$\Phi(k_D(x,y)) \leq \Phi(-\ln(1-\alpha)).$$

Положим $K = \Phi(-\ln(1-\alpha))$. Тогда

$$\Lambda(f,x) \le \Phi(k_D(x,y))\lambda(f,y) \le K\lambda(f,y)$$

то есть f удовлетворяет свойству 1).

Теорема доказана.

Достаточные условия, с которыми принадлежность классу QR влечет принадлежность классу QH

Напомним, что $J(f,x)$ — якобиан отображения f.

Лемма 2.5. *Пусть D собственная подобласть пространства R^n и $f : D \to R^n$ — локально квазиконформное отображение. Если существуют постоянные $a > 0$ и $b > 0$, $a \le b$, такие, что в любой точке дифференцируемости отображения f выполнено*

$$a \le \lambda(f,x)\,, \qquad \Lambda(f,x) \le b\,, \tag{1}$$

тогда неравенства (1) *выполнены в произвольной точке $x \in D$.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что якобиан отображения почти всюду удовлетворяет неравенству

$$a^n \le J(f,x) \le b^n \tag{2}$$

из которого следует, что для тех шаров, на которых отображение f инъективно, выполнено

$$\Omega_n a^n r^n \le m(f(B^n(x,r))) \le \Omega_n b^n r^n, \tag{3}$$

где Ω_n — мера шара $B^n(1)$.

Для $x \in D$, $r > 0$ обозначим

$$L_f(x,r) = \max_{|t-x|=r} |f(t) - f(x)|\,, \qquad l_f(x,r) = \min_{|t-x|=r} |f(t) - f(x)|\,.$$

В силу локальной квазиконформности f согласно теореме 7.2 [39, с. 158], найдется число $r_0 > 0$, такое, что при $0 < r \le r_0$ выполнено

$$\frac{L_f(x,r)}{l_f(x,r)} \le C \tag{4}$$

где $C > 0$ — постоянная, значение которой определяется параметрами n и $K(f)$.

Пусть $x \in D$ произвольная точка и $0 < r \leq r_0$, тогда, с учетом оценок (4) и (3), найдем, что

$$\Omega_n l_f^n(x,r) \geq \frac{\Omega_n}{C^n} L_f^n f(x,r) \geq \frac{1}{C^n} m(f(B^n(x,r))) \geq \frac{\Omega_n a^n r^n}{C^n}$$

и

$$\Omega_n L_f^n(x,r) \leq C^n \Omega_n l_f^n f(x,r) \leq C^n m(f(B^n(x,r))) \leq C^n \Omega_n b^n r^n .$$

Из этих неравенств следует. что для произвольной точки $x \in D$ выполнены неравенства $l_f(x,r) \geq (ar)/C$, $L_f(x,r) \leq Cbr$. Это значит, что для $t \in D$, таких, что $|t-x| = r$ справедливы оценки $|f(t) - f(x)| \geq (ar)/C$ и $|f(t) - f(x)| \leq Cbr$. Разделим эти неравенства на r и перейдем в первом из них к нижнему пределу, а во втором к верхнему и получим, что для произвольной точки $x \in D$ имеют место оценки

$$\lambda(f,x) \geq \frac{ar}{C}, \qquad \Lambda(f,x) \leq Cbr.$$

которые означают, что отображение f локально квазиизометрическое на области D.

Для завершения доказательства заметим, что отображение f удовлетворяет условиям леммы 5.4 диссертации, следовательно неравенства (1) выполнены в произвольной точке области D.

Теорема 2.3. *Пусть D собственная подобласть пространства R^n и $f : D \to R^n$ — локально квазиконформное отображение. Если существует непрерывная функция $\Phi : [0,\infty) \to [1,\infty)$, такая, что для всех $x, y \in D$ в которых f дифференцируемо, выполнено*

$$J(f,x) \leq \Phi(k_D(x,y)) J(f,y), \tag{5}$$

то отображение f принадлежит классу QH.

Доказательство. Если x и y — точки дифференцируемости отображения f, то $\lambda^n(f,x) \leq J(f,x)n$ и $J(f,y) \leq \Lambda^n(f,x)$; учитывая квазиконформность f, отметим также, что $\Lambda(f,x) \leq K(f)\lambda(f,x)$ и $\Lambda(f,y) \leq K(f)\lambda(f,y)$. Тогда применение неравенства (5) позволяет получить оценку

$$\Lambda^n(f,x) \leq K^{2n}(f) \Phi(k_D(x,y)) \lambda^n(f,y)$$

или

$$\Lambda(f,x) \leq K^2(f) \Phi^{1/n}(k_D(x,y)) \lambda(f,y) \tag{6}$$

Так как множество точек дифференцируемости отображения f плотно в D, а функция f непрерывна, с помощью леммы 2.5 можно доказать, что неравенство

(6) справедливо для всех $x \in D$. Тогда, согласно теореме 2.2 отображение f принадлежит классу QH.

Теорема 2.4. *Пусть D собственная подобласть пространства R^n и $f : D \to R^n$ — отображение с ограниченным искажением. Если якобиан отображения f является непрерывно дифференцируемой функцией и не равен нулю всюду в D и существует постоянная P, такая, что для любой точки $x \in D$ выполнено неравенство*

$$|\nabla J(f,x)| \leq \frac{P|J(f,x)|}{\delta_D(x)}\,,$$

то $f \in QH$.

Доказательство. Пусть $x, y \in D$ и $\gamma : [0, L] \to D$ — естественная параметризация квазигиперболической кратчайшей, соединяющей x и y. Функция $\alpha(s) = \ln|J(f, \gamma(s))|$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, L]$ и

$$|\alpha'(s)| \leq |\nabla J(f,\gamma(s))|/|J(f,\gamma(s))|\,. \tag{7}$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$|\alpha(L) - \alpha(0)| = \left|\int\limits_0^L \alpha'(s)ds\right| \leq \int\limits_0^L |\alpha'(s)|ds\,.$$

Согласно оценке (7) и неравенству из условия теоремы, находим, что

$$\int\limits_0^L |\alpha'(s)|ds \leq \int\limits_0^L \frac{P}{\delta_D(\gamma(s))}ds = Pk_D(x,y)\,.$$

Так как $|\alpha(L) - \alpha(0)| = |\ln(J(f,x))/J(f,y)|$, получаем неравенство

$$|\ln(J(f,x))/J(f,y)| \leq Pk_D(x,y)\,,$$

потенцируя которое, получаем, что $|J(f,x)|/|J(f,y)| \leq e^{Pk_D(x,y)}$. Доказанное неравенство означает, что выполнены условия теоремы 2.3 с функцией $\Phi(t) = e^{Pt}$, то есть отображение f принадлежит классу QH.

О коэффициенте искажения отображений класса QH

Коэффициент искажения отображений некоторого класса должен показывать меру отличия данного отображения от отображений подкласса, имеющего минимальные искажения. В случае отображений класса QH подклассом отображений с минимальными искажениями следует признать ограничения мёбиусовых отображений на области R^n. Однако, как это показано в в теореме 3 введения, такие отображения являются не 1-квазигиперболическими, а 2-квазигиперболическими гомеоморфизмами. В случае гомеоморфизмов положение можно поправить введением на областях специальных метрик эквивалентных квазигиперболической метрике. Ситуация осложняется при рассмотрении негомеоморфных отображений. Вопрос об определении коэффициента искажения отображений класса QH в диссертации не разработан подробно, однако, в качестве рабочего варианта предлагается следующее определение.

Определение 2.2. *Пусть $f : D \to R^n$ — отображение класса QH. Для каждой точки $x \in D$ найдем число*

$$l(x) = \sup\{\Lambda(f, y)\,, \quad y \in B^n(x, \delta_D(x)/4)\}\,.$$

Коэффициентом искажения отображения f назовем число

$$L(f) = \{\sup \sqrt{\frac{l(x)}{\lambda(f, x)}}\,, \quad x \in D\}\,,$$

а отображение f назовем в этом случае $L(f)$-квазигиперболическим.

Как видно из теоремы 2.2, отображения с конечным коэффициентом искажения и только они принадлежат классу QH.

Замечание. Коэффициент искажения $L(f)$ плохо приспособлен к изучению вопроса об устойчивости отображений класса QH в теореме Лиувилля [41]. Действительно, если $L(f) = 1$, это означает, что отображение f является ограничением на область D некоторого отображения подобия пространства R^n. Мёбиусовы отображения, не являющиеся подобиями, имеют коэффициент $L(f)$, больший единицы.

§4. Некоторые свойства отображений класса QH

Композиция квазигиперболических отображений

Определение 2.3. [39, с.142] *Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется изолированным, если для любой точки $y \in Y$ все точки множества $f^{-1}(y)$ являются изолированными.*

f называется открытым, если для всякого открытого множества $U \subset X$ множество $f(U)$ открыто в Y.

Лемма 2.6 *Любое непостоянное отображение $f : D \to R^n$ класса QH является изолированным.*

Доказательство. Предположим, что $f \in QH$ и f не изолированное отображение. Тогда для некоторой точки $y \in R^n$ найдется точка $x_0 \in f^{-1}(y)$, являющаяся предельной для множества $f^{-1}(y)$. Это означает, что существует последовательность точек $\{x_n\} \subset f^{-1}(y)$, сходящаяся к x_0. Тогда

$$\frac{|f(x_0) - f(x_n)|}{|x_0 - x_n|} = \frac{|y - y|}{x_0 - x_n} = 0$$

откуда следует, что $\lambda(f, x_0) = 0$. Так как f непостоянное отображение, найдется $z \in D$ такая, что $\Lambda(f, z) > 0$. Тогда по теореме 2.2

$$\lambda(f, x_0) \geq \Phi(k_D(x_0, z))/\Lambda(f, z) > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно. Лемма доказана.

Для доказательства следующей теоремы понадобятся некоторые определения и построения из работы [65].

Пусть $f : D \to R^n$ — открытое, изолированное отображение постоянной ориентации. Будем записывать $G \subset\subset D$ если $\overline{G} \subset D$.

Область $G \subset\subset D$ называется нормальной областью для f, если $f(\partial G) = \partial(f(G))$.

Нормальная область G называется нормальной окрестностью точки $x \in D$, если

$$G \cap f^{-1}(f(x)) = x.$$

Для $x \in D$ символом $U(x, f, r)$ обозначим ту связную компоненту множества $f^{-1}(B^n(f(x), r))$, которая содержит точку x.

Предложение 2.2. [65, p.427]. 1) *Если $U = U(x, f, r) \subset\subset D$, то U является нормальной областью для f* и $f(U) = B^n(f(x), r)$.

2) *Существует $r_0 > 0$ такое, что $U(x, f, r)$ является нормальной окрестностью точки x для всех $r \leq r_0$.*

Теорема 2.5. [65, Theorem, 4.20, p.438]. *Для каждого $L \geq 1$ и $n \geq 2$ существуют числа $c_1, c_2 \geq 1$ со следующими свойствами:*

если $f : D \to R^n$ принадлежит классу $QI_0(L)$ и если $B^n(x, c_1 r) \subset D$, то $U = U(x, f, r)$ есть нормальная область для f и

$$(1) \qquad r/L \leq l^*(x, f, r) \leq Lr\,,$$

$$(2) \qquad r/L \leq L^*(x, f, r) \leq c_2 r\,,$$

где

$$l^*(x,f,r) = \inf\{|y-x| : y \in \partial U\}\,,$$

$$L^*(x,f,r) = \sup\{|y-x| : y \in \partial U\}\,.$$

Если $c_0 = 6(n+1)L^{2n+1}$, $K = 3L + 2^{n+2}L^{2n+1}$, *то* $c_1 = \max(c_0, 2K)$, $c_2 = K$.

Замечание. Пусть $f : D \to R^n$ принадлежит классу $QI(a,b)$, $b/a = L^2$, и имеет постоянную ориентацию. Тогда отображение $\tilde{f} = f(x)/\sqrt{ab}$ принадлежит классу $QI_0(L)$ и для него теорема верна. Для отображения f соответствующие оценки находятся пересчетом. В частности, если $B^n(x, c_1 r) \subset D$, то $U = U(x, f, \sqrt{ab}r)$ есть нормальная область для f.

Лемма 2.7. *Пусть D и G — собственные подобласти R^n и $g : D \to G$ — квазигиперболическое отображение постоянной ориентации. Тогда существует постоянная $K \geq 0$, зависящая только от коэффициента искажения отображения g и размерности n такая, что для любой точки $x \in D$ выполнено*

$$\frac{\Lambda(g,x)}{\delta_G(g(x))} \leq \frac{K}{\delta_D(x)}.$$

Доказательство. Пусть $x \in D$, так как $g \in QH$, найдутся постоянные a и b такие, что для всех $y \in B^n(x,r)$, где $r = \delta_D(x)/2$, выполнено

$$\Lambda(g,y) \leq b, \qquad \lambda(g,y) \geq a.$$

Обозначим $L = \sqrt{b/a}$. Отображение $\tilde{g}(x) = g(x)/\sqrt{ab}$ является $QI(L)$-отображением шара $B^n(x,r)$. Тогда по замечанию к теореме 2.5 $U = U(x, g, r\sqrt{ab}/c_1)$ — нормальная область для g. Согласно пункту (1) предложения 2.1 $g(U) = B^n(g(x), r\sqrt{ab}/c_1)$, то есть $\delta_G(f(x)) \geq r\sqrt{ab}/c_1$.

Проведем оценки.

$$\frac{\Lambda(g,x)}{\delta_G(g(x))} \leq \frac{bc_1}{r\sqrt{ab}} = \frac{2Lc_1}{\delta_D(x)}\,.$$

Положим $K = 2Lc_1$. Лемма доказана.

Теорема 2.6. *Пусть D и G — собственные подобласти R^n, $g : D \to G$, $f : G \to R^n$ — отображения класса QH, причем g имеет постоянную ориентацию. Тогда композиция $F = f \circ g$ также принадлежит классу QH.*

Доказательство. Пусть $\Phi_g : [0,\infty) \to [1,\infty)$ и $\Phi_f : [0,\infty) \to [1,\infty)$ такие гомеоморфизмы, что для любых $x_1, x_2 \in D$

$$\Lambda(g,x_1) \leq \Phi_g(k_D(x_1,x_2))\lambda(g,x_2) \tag{1}$$

и для любых $y_1, y_2 \in G$

$$\Lambda(f, y_1) \le \Phi_f(k_G(y_1, y_2))\lambda(f, y_2) \qquad (2)$$

Так как для произвольной точки $x \in D$ выполнено

$$\Lambda(F, x) \le \Lambda(f, g(x))\Lambda(g, x),$$

то согласно (1) и (2)

$$\Lambda(F, x_1) \le \Phi_f(k_G(g(x_1), g(x_2))\lambda(f, g(x_2))\Phi_g(k_D(x_1, x_2))\lambda(g, x_2). \qquad (3)$$

По лемме 2.7 для любой точки $x \in D$

$$\frac{\Lambda(g, x}{\delta_G(g(x))} \le \frac{K}{\delta_D(x)}\,. \qquad (4)$$

Из оценки (4) следует, что для любых точек $x_1, x_2 \in D$ справедливо неравенство

$$k_G(g(x_1), g(x_2)) \le K \cdot k_D(x_1, x_2)$$

(см. доказательство достаточности условий теоремы 2.1). Применим последнее неравенство к правой части (3) и получим

$$\Lambda(F, x_1) \le \Phi_f(K \cdot k_D(x_1, x_2)\Phi_g(k_D(x_1, x_2))\lambda(f, g(x_2))\lambda(g, x_2).$$

Функция $\Phi(t) = \Phi_f(K \cdot t)\Phi_g(t)$ отображает $[0, \infty)$ в $[1, \infty)$ монотонно, она непрерывна, кроме того

$$\lambda(f, g(x_2))\lambda(g, x_2) \le \lambda(F, x),$$

поэтому

$$\Lambda(F, x) \le \Phi(k_D(x_1, x_2))\lambda(F, x).$$

Так как последняя оценка верна для произвольной пары x_1, x_2, отображение F принадлежит классу QH.

Замечание. Теорема 2.6 перестает быть верной, если на замену переменной g не наложить условие постоянства ориентации.

Пример. Пусть $D = \{(x, y) \in R^2 : |y| < 1,\ x > 0\}$ — полуполоса. Определим кусочно линейную функцию $\varphi : [0, \infty) \to R$.

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1/2, \ldots.., \varphi(2n) = 1/(n+1),\ \varphi(2n+1) = 1, \ldots. \quad n \in N.$$

На отрезках $[n, n-1]$ φ линейна, φ непрерывна. Положим $g(x, y) = (\varphi(x), y)$, $(x, y) \in D$. Считаем, что на R^2 задана комплексная структура и $z = x + iy$. Положим $f(z) = z^2$. Отметим, что $f \in QH$, так как является конформным. Отображение g принадлежит классу QI ($\Lambda(g, z) \leq 1$, $\lambda(g, z) \geq 1/2$ для любой точки $z \in D$), следовательно, принадлежит классу QH, g не есть отображение постоянной ориентации. Покажем, что отображение $F = f \circ g$ не принадлежит классу QH.

Если бы отображение F принадлежало классу QH, существовала бы постоянная $M > 0$, такая, что $\Lambda(F, 2n+1) \leq M \cdot \lambda(F, 2n)$, так как $k_D(2n; 2n+1) = 1\,, n \in N$.

Для отображения F легко вычисляются значения $\lambda(F, 2n) = 2(n-1)/n^2$, $\Lambda(F, 2n+1) = 2$. Следовательно

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Lambda(F, 2n+1)}{\lambda(F, 2n)} = \infty.$$

То есть F не принадлежит классу QH.

Равномерная локальная инъективность отображений класса QH

Определение 2.4. *Пусть D — область в пространстве R^n. Отображение $f : D \to R^n$ называется равномерно локально инъективным, если существует число $\alpha \in (0; 1)$, такое, что для любой точки $x \in D$ ограничение f на шар $B^n(x, \alpha\delta_D(x))$ является инъективным. Число α назовем параметром инъективности отображения f.*

Теорема 2.7. *Любое локально инъективное квазигиперболическое отображение равномерно локально инъективно.*

Доказательство. Пусть $f : D \to R^n$ K-квазигиперболическое отображение. Согласно определению 2.2, для любой точки $x \in D$ ограничение f на шар $B^n(x, r)$, где $r = \delta_D(x)/4$, является локально инъективным K-квазиизометрическим отображением. Согласно известной теореме Джона о радиусе инъективности [62], отображение f инъективно на шаре $B^n(x, \beta r)$, $\beta = r/K^2$. Таким образом, f инъективно на шаре $B^n(x, (\beta/4)\delta_D(x))$, что в силу произвольности точки x и означает равномерную локальную инъективность f.

Замечание. Теорема 2.7 есть прямое следствие теоремы Мартио, Рикмана, Вяйсяля [67] о радиусе инъективности отображений с ограниченным искажением в случае, когда размерность пространства $n > 2$. Действительно, это так потому, что квазигиперболические отображения являются отображениями с ограниченным искажением.

Глава 3. Топологическая эквивалентность отображений

§1. Эквивалентность квазиконформных и квазигиперболических гомеоморфизмов

Определение 3.1. [36, с. 735]. *Пусть X_1, X_2, Y — топологические пространства. Отображения $f_1 : X_1 \to Y$ и $f_2 : X_2 \to Y$ называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм φ, отображающий X_2 на X_1, такой, что $f_2 = f_1 \circ \varphi$.*

Мы будем использовать более узкое определение.

Определение 3.2. *Пусть X и Y — топологические пространства. Отображения $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : X \to Y$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм φ, отображающий X на себя, такой, что $f_2 = f_1 \circ \varphi$.*

Если $Y = R^n$, а $X = D \subset R^n$ — область с непустой границей, определим еще одно отношение эквивалентности отображений — сильную эквивалентность. Сначала определим понятие гомеоморфизма, тождественного на границе.

Определение 3.3. *Пусть D — собственная подобласть пространства R^n и φ — гомеоморфизм D на себя. Назовем φ тождественным на границе, если для любой последовательности точек $\{x_k\} \subset D$, сходящейся к точке x границы области D, выполнено*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = x.$$

Определение 3.4. *Пусть D — собственная подобласть пространства R^n. Отображения $f_1 : D \to R^n$ и $f_2 : D \to R^n$ назовем сильно эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi : D \to D$, тождественный на границе, такой, что*

$$f_2 = f_1 \circ \varphi$$

Ясно, что из сильной эквивалентности отображений следует их эквивалентность

Интерпретируя теоремы о продолжении и об аппроксимации квазиконформных гомеоморфизмов, можно установить сильную эквивалентность квазиконформных и квазигиперболических гомеоморфизмов.

Напомним определение квазисимметрического отображения R на себя. Гомеоморфизм $h : R \to R$ называется K-квазисимметрическим, если для любой точки $x \in R$ и любого $h > 0$ выполнено

$$1/K \le \frac{h(x+h) - h(x)}{h(x) - h(x-h)} \le K\,.$$

В следующих построениях удобно будет называть K-квазисимметрические отображения K-квазиконформными.

Через R^{n-1} обозначим границу верхнего полупространства R^n_+.

Определим понятие "квазиконформного отображения"сферы на себя. Пусть ψ — гомеоморфизм сферы $S^{n-1} = \partial B^n$ на себя и $x_0 \in S^{n-1}$ — некоторая точка. Обозначим через $y_0 = \psi(x_0)$ и через α и β — мёбиусовы отображение пространства $\overline{R}^n$, переводящие S^{n-1} на подпространство R^{n-1}, $\alpha^{-1}(x_0) = \infty$, $\beta(y_0) = \infty$. Гомеоморфизм $\psi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ назовем K-квазиконформным, если отображение $\varphi = \beta \circ \psi \circ \alpha^{-1}$ является K-квазиконформным гомеоморфизмом пространства R^{n-1} на себя.

Теорема 3.1. [71] . *Любой K-квазиконформный гомеоморфизм $f : R^n_+ \to R^n_+$, такой, что*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

продолжается на границу до гомеоморфизма $F : \overline{R}^n_+ \to \overline{R}^n_+$. Ограничение F на $R^{n-1} = \partial R^n_+$ является K_1-квазиконформным отображением, $K_1 = K_1(K,n)$.

Следствие. *Любой K-квазиконформный гомеоморфизм $f : B^n \to B^n$, продолжается на границу до гомеоморфизма $F : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$. Ограничение F на $S^{n-1} = \partial B^n$ является K_1-квазиконформным отображением, $K_1 = K_1(K,n)$.*

Верны и утверждения, в некотором смысле, обратные двум предыдущим.

Теорема 3.2. [76]. *Любой K-квазиконформный гомеоморфизм $f : R^{n-1} \to R^{n-1}$, продолжается до гомеоморфизма $f : \overline{R}^n_+ \to \overline{R}^n_+$, K_1-квазигиперболического на R^n_+, $K_1 = K_1(K,n)$.*

Следствие. *Любой K-квазиконформный гомеоморфизм $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$, продолжается до гомеоморфизма $f : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$, K_1-квазигиперболического на B^n, $K_1 = K_1(K,n)$.*

В случае $n = 2$ теорема 3.2 доказана Бёрлингом и Альфорсом [50], при $n = 3$ — Альфорсом, при $n = 4$ — Карлесоном [52] и при произвольном $n \ge 2$ — Тукиа и Вяйсяля [76].

Приведенные результаты позволяют доказать следующие предложения.

Предложение 3.1. *Пусть квазиконформное отображение f шара B^n эквивалентно квазигиперболическому гомеоморфизму f_1. Тогда f сильно эквивалентно некоторому квазигиперболическому гомеоморфизму.*

Доказательство. Пусть $f : B^n \to R^n$ и $f_1 : B^n \to R^n$ – гомеоморфизмы, f – квазиконформный, f_1 – квазигиперболический и $\varphi : B^n \to B^n$ – гомеоморфизм такой, что

$$f = f_1 \circ \varphi. \tag{1}$$

Так как f и f_1 оба квазиконформны, φ — квазиконформный гомеоморфизм шара B^n на себя, следовательно продолжается по непрерывности на границу [71], за продолжением оставим прежнее обозначение φ.

Положим

$$\tilde{\varphi} = \varphi|\partial B^n.$$

По следствию к теореме 3.1 $\tilde{\varphi}$ является квазиконформным отображением сферы S^{n-1} на себя. Согласно следствию к теореме 3.2 $\tilde{\varphi}$ продолжается до гомеоморфизма замкнутого шара $\overline{B}^n$ на себя, квазигиперболического внутри шара. Обозначим это продолжение через ψ. Из (1) следует, что $f_1 = f \circ \varphi^{-1}$ Тогда $f_1 \circ \psi = f \circ \varphi^{-1} \circ \psi$. Обозначим $f_2 = f_1 \circ \psi$, $\theta = \varphi \circ \psi$, следовательно $f_2 = f \circ \theta$. Так как гомеоморфизм θ тождественный на границе, f и f_2 сильно эквивалентны.

Гомеоморфизм f_2 квазигиперболический как композиция двух квазигиперболических, гомеоморфизм θ квазиконформный. Предложение доказано.

Предложение 3.2. *Пусть D — шар или верхнее полупространство пространства R^n, $n \geq 2$. Любой K-квазиконформный гомеоморфизм D на себя сильно эквивалентен K_1-квазигиперболическому гомеоморфизму, $K_1 = K_1(K, n)$.*

Доказательство. Докажем утверждение сначала для шара. Пусть f — K-квазиконформный гомеоморфизм B^n на себя. Обозначим через F продолжение f на замкнутый шар $\overline{B}^n$ и через φ ограничение F на сферу S^{n-1} (следствие к теореме 3.1). По следствию к теореме 3.2 существует продолжение Φ отображения φ на замкнутый шар $\overline{B}^n$, квазигиперболическое на B^n. Обозначим $\psi = F^{-1} \circ \Phi$. Гомеоморфизм ψ — тождественный на границе шара B^n и $\Phi = F \circ \psi$. Рассмотрев ограничения отображений на открытый шар B^n, увидим, что то $f_1 = f \circ \psi$, то есть f и f_1 сильно эквивалентны.

Пусть теперь f — K-квазиконформный гомеоморфизм R^n_+ на себя. Обозначим через α некоторое мёбиусово отображение, переводящее шар B^n на полупространство R^n_+. Тогда $g = \alpha^{-1} \circ f \circ \alpha$ является K-квазиконформным отображением шара B^n на себя. Согласно доказанному выше отображение g сильно эквивалентно некоторому K_1-квазигиперболическому отображению g_1, то есть существует гомеоморфизм β шара B^n на себя, такой, что $g_1 = g \circ \beta$. Учитывая строение отображения g, получим $\alpha \circ g_1 = f \circ \alpha \circ \beta$. Отображение $\alpha \circ g_1$ — квазигиперболическое. Предложение доказано.

Перейдем к теореме Тукиа-Вяйсяля об аппроксимации квазиконформных гомеоморфизмов.

Теорема 3.3.[76]. *Пусть U и V — собственные подобласти в R^n, $n \geq 2$, $n \neq 4$. Если f — K-квазиконформное отображение U на V, то для любого $\varepsilon > 0$ существует отображение F области U на область V, такое, что*
a) $k_V(f(x), F(x)) \leq \varepsilon$ *для любого $x \in U$,*
b) для любых $x_1, x_2 \in U$, выполнено

$$\frac{1}{M} k_U(x_1, x_2) \leq k_V(F(x_1), F(x_2)) \leq M k_U(x_1, x_2)\,,$$

где M — постоянная, зависящая только от n, K и ε.

Как следствие этой теоремы получим

Предложение 3.3.. *Пусть U и V — собственные подобласти в R^n $n \geq 2$, $n \neq 4$. Любой K-квазиконформный гомеоморфизм $f : U \to V$ сильно эквивалентен некоторому M-квазигиперболическому гомеоморфизму $F : U \to V$, $M = M(n, K)$.*

Доказательство. В теореме 3.3 фиксируем $\varepsilon = 1/2$, пусть F — гомеоморфизм из этой теоремы. Обозначим $\varphi = f^{-1} \circ F$, тогда $F = f \circ \varphi$, то есть f и F эквивалентны. Свойство b) говорит о том. что гомеоморфизм F — M-квазигиперболический, свойство a) означает, что f и F совпадают на границе. Предложение доказано.

§2. Квазиконформность соединяющего гомеоморфизма

Определение 3.5. *Гомеоморфизмы φ из определений* 3.1, 3.2, 3.4 *назовем соединяющими отображения f_1 и f_2.*

В этом параграфе установим, что гомеоморфизм соединяющий два отображения с ограниченным искажением является квазиконформным.

Для для доказательства теоремы 3.7 понадобятся некоторые обозначения и две теоремы из книги Ю.Г.Решетняка [39].

Пусть $f : D \to R^n$ — непрерывное отображение области $D \subset R^n$. Если $r > 0$ таково, что замкнутый шар $\overline{B^n}(a, r)$ содержится в D, то положим

$$L_f(a,r) = \max_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|, \quad l_f(a,r) = \min_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)| .$$

Символом $j(x, f)$ обозначим индекс отображения f в точке x [39, с.145]. Если f — отображение с ограниченным искажением и $\overline{G} \subset D$, где G — область, то существует число m, с которым $|j(x, f)| \leq m$ для всех $x \in G$ [39, с.164].

Теорема 3.4.[39, теорема 7.2].*Пусть U — открытое множество в R^n, $f : U \to R^n$ — отображение с ограниченным искажением, не являющееся тождественно постоянным. Тогда для всякой точки $a \in U$ найдется число R_0, такое, что при всяком $R \leq R_0$, $R > 0$, выполняется неравенство*

$$\frac{L_f(a,R)}{l_f(a,R)} \leq \exp(\beta_n \cdot \alpha_1(a,f)) = M_1(a,f)\,, \tag{1}$$

а при всяком $x \in B^n(a, R)$

$$|f(x) - f(a)| \geq L_f(a,R) \left(\gamma_n \frac{|x-a|}{R}\right)^{\alpha_1(a,f)} =$$

$$= C_1(a,f) L_f(a,R) \left(\frac{|x-a|}{R}\right)^{\alpha_1(a,f)}, \tag{2}$$

где β_n, γ_n — постоянные, зависящие только от n,

$$\alpha_1(a,f) = (K(f)|j(a,f)|)^{1/(n-1)}.$$

Число R_0 определяется следующим образом. Найдем сначала $R_1 > 0$, такое, что при $0 < |x-a| \leq R_1$, $x \in U$ и $f(x) \neq f(a)$. Тогда R_0 таково, что $L_f(a, R_0) = l_f(a, R_1)$.

Теорема 3.5.[39, теорема 7.3] *Пусть U — открытое множество в R^n, $f : U \to R^n$ — отображение с ограниченным искажением, не являющееся тождественно постоянным. Тогда для всякой точки $a \in U$ найдется число R_0, такое, что при всяком $R \leq R_0$, $R > 0$, при $R < R_0$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(a)| \leq L_f(a,R) M_1(a,f) \left(\frac{|x-a|}{R}\right)^{\alpha(a,f)}, \tag{3}$$

где $M_1(a, f)$ есть постоянная, стоящая в правой части неравенства (1), $\alpha(a, f) = (|j(a, f)|/K_0(f))^{1/(n-1)}$, а R_0 может быть определено так же как и в теореме 3.4.

Теорема 3.6. *Пусть $f : D \to R^n$ — отображение с ограниченным искажением и φ — гомеоморфизм области D на себя, такой, что композиция $g = f \circ \varphi$ есть отображение с ограниченным искажением. Тогда гомеоморфизм φ — квазиконформный.*

Доказательство. Пусть $t > 0$ и $p(t) \in D$, $q(t) \in D$ таковы, что $|p(t) - a| = |q(t) - a| = t$ и $|\varphi(p(t)) - \varphi(a)| = R(t) = L_\varphi(a,t)$, $|\varphi(q(t)) - \varphi(a)| = r(t) = l_\varphi(a,t)$. Выберем t настолько малым, чтобы выполнялись оценки теоремы 3.4 с $R = R(t)$. Применяя неравенство (2), получим

$$|f(\varphi(p(t))) - f(\varphi(a))| \geq$$

$$\geq C_1(\varphi(a), f) L_f(\varphi(a), R) \left(\frac{|\varphi(p(t)) - \varphi(a)|}{R} \right)^{\alpha_1(f(\varphi(a)),f)} =$$

$$C_1(\varphi(a), f) L_f(\varphi(a), R)\,.$$

По теореме 3.5

$$|f(\varphi(q(t))) - f(\varphi(a))| \leq$$

$$M_1(\varphi(a), f) L_f(\varphi(a), R) \left(\frac{|\varphi(q(t)) - \varphi(a)|}{R} \right)^{\alpha_1(f(\varphi(a)),f)} =$$

$$= M_1(\varphi(a), f) L_f(\varphi(a), R) \left(\frac{r(t)}{R} \right)^{\alpha_1(f(\varphi(a)),f)}.$$

Так как $f(\varphi(p(t))) = g(p(t))$, $f(\varphi(q(t))) = g(q(t))$, $f(\varphi(a)) = g(a)$, сделанные оценки позволяют доказать неравенство

$$\frac{|g(p(t)) - g(a)|}{|g(q(t)) - g(a)|} \geq \frac{C_1(\varphi(a), f)}{M_1(\varphi(a), f)} \left(\frac{r(t)}{R(t)} \right)^{\alpha_1(f(\varphi(a)),f)} \tag{4}$$

Однако, $|g(p(t)) - g(a)| \leq L_g(a,t)$ и $|g(q(t)) - g(a)| \geq l_g(a,t)$, тогда, согласно теореме 3.4 имеем

$$M_1(a, g) \geq \frac{|g(p(t)) - g(a)|}{|g(q(t)) - g(a)|}.$$

Применяя полученную оценку к неравенству (4), получим

$$\left(\frac{r(t)}{R(t)} \right)^{\alpha_1(f(\varphi(a)),f)} \leq \frac{M_1(\varphi(a), f) M_1(a, g)}{C_1(\varphi(a), f)} = C^{\alpha_1(f(\varphi(a)),f)},$$

или

$$\frac{r(t)}{R(t)} \leq C.$$

Значение постоянной C зависит только n, коэффициентов квазиконформности $K(f)$ и $K(g)$ и значений модулей индексов $|j(\varphi(a), f)|$ и $|j(a, g)|$. Пусть U —

компактная подобласть области D, то есть $\overline{U} \subset D$. Тогда $\varphi(U)$ — компактная подобласть области G. Так как в компактных подобластях области определения отображения с ограниченным искажением индекс — ограниченная функция [39, с.164], заключаем, что для любой компактной подобласти $U \subset D$ найдется постоянная C_U, с которой выполнено неравенство

$$\frac{r(t)}{R(t)} \leq C_U.$$

Из этого неравенства следует, что гомеоморфизм φ квазиконформный в области U [39, с.176]. Следовательно, φ почти всюду дифференцируем и обладает N и N^{-1}-свойствами.

Сделаем оценку коэффициента квазиконформности гомеоморфизма φ в области D. Отображения f и g с ограниченным искажением, следовательно почти всюду дифференцируемы и почти всюду выполнено равенство для матриц Якоби

$$g'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Обозначим $A = f'(\varphi(x))$, $B = g'(x)$, тогда верно $\varphi'(x) = A^{-1} \cdot B$. Так как

$$||A^{-1}||^n \leq K_0(f)|\det A^{-1}|\,, \qquad ||B^{-1}||^n \leq K(g)|\det B|$$

имеем оценку

$$||\varphi'(x)||^n \leq K_0(f)K(g)|\det A^{-1}||\det B| = K_0(f)K(g)|J(x,\varphi)|\,,$$

которая и означает квазиконформность отображения φ, $K(\varphi) \leq K_0(f)K(g)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если отображения с ограниченным искажением f и g эквивалентны в смысле определения* 3.2, *то соединяющий их гомеоморфизм квазиконформный.*

§3. Эквивалентность регулярных функций комплексного переменного отображениям классов QI и QH

В этом параграфе рассмотрены три вопроса:

1) когда регулярная локально инъективная функция, заданная в области комплексной плоскости эквивалентна отображению класса QH?

2) когда регулярная локально инъективная функция, заданная в полуплоскости эквивалентна отображению класса QI?

3) когда регулярная функция, заданная в комплексной плоскости эквивалентна отображению класса QI?

Регулярные локально-инъективные функции, эквивалентные отображениям класса QH

Рассмотрим первый вопрос. Сначала дадим описание регулярных функций, принадлежащих классу QH.

Лемма 3.1. (J.Becker) [49]. *Пусть функция f — регулярная и однолистная в круге $B = \{|z| < 1\}$. Тогда для любой точки $z \in B$ выполнено*

$$|f''(z)| \le \frac{6}{1-|z|^2}|f'(z)|\,.$$

Теорема 3.7. *Пусть D — собственная подобласть комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Регулярная функция f принадлежит классу QH тогда и только тогда, когда f является равномерно локально инъективной функцией.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f \in QH$ и z — произвольная точка области D. Так как главные растяжения квазигиперболического отображения в любой точке положительны и f регулярная функция, $|f'(z)| = \lambda(f,z) = \Lambda(f,z) > 0$. Таким образом, f' не имеет нулей в D, то есть f локально инъективна. Итак, f локально инъективное отображение класса QH, следовательно, по теореме 2.5, f равномерно локально инъективная функция.

Достаточность. Пусть f равномерно локально инъективная функция. Это значит, что существует число α, такое, что для любой точки $z \in D$ функция f однолистна в круге $B = B^2(z, \alpha\delta_D(z))$. Пересчитывая условие Беккера из леммы 3.1 для круга B, получим, что для любой точки $w \in B$ выполнено

$$|f''(z)| \le \frac{6\alpha\delta_D(z)}{\alpha^2\delta_D^2(z) - |z-w|^2}|f'(z)|\,.$$

Положим $w = z$, тогда имеем

$$|f''(z)| \le \frac{p}{\delta_D(z)}|f'(z)|\,, \tag{1}$$

где $p = 6/\alpha$. Возьмем теперь две произвольные точки z_1 и z_2из D. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется гладкая дуга γ, параметризованная естественным параметром $s \in [0,S]$, такая, что $\gamma(0) = z_1$, $\gamma(S) = z_2$ и

$$\int\limits_\gamma \frac{ds}{\delta_D(\gamma(s)} \le k_D(z_1,z_2) + \varepsilon\,.$$

Рассмотрим функцию $\beta(s) = \ln|f'(\gamma(s)|$, $s \in [0,S]$. Эта функция дифференцируема и

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds}|f'(\gamma(s))| \,/\, |f'(\gamma(s))|\,.$$

Так как
$$|\frac{d}{ds}|f'(\gamma(s))|| \le |\nabla|f'(\gamma(s)|| = |f''(\gamma(s))|\,,$$
имеем неравенство
$$|\beta'(s)| \le \frac{|f''(\gamma(s))|}{|f'(\gamma(s))|}\,.$$
Учитывая оценку (1), получим, что $\beta'(s) \le p/(\delta_D(\gamma(s)))$. Интегрирование дает следующее
$$|\beta(S)-\beta(0)| = \left|\int\limits_0^S \beta'(s)ds\right| \le p\int\limits_0^S \frac{ds}{\delta_D(\gamma(s))} \le p(k_D(z_1,z_2)+\varepsilon)\,.$$
С другой стороны, по определению функции β
$$|\beta(S)-\beta(0)| = |\ln|f'(z_2)| - \ln|f'(z_1)|| = |\ln\frac{|f'(z_2)|}{|f'(z_1)|}|\,.$$
Учитывая, что ε — произвольное положительное число, сравнение последних двух выражений приводит к неравенству
$$\left|\ln\frac{|f'(z_2)|}{|f'(z_1)|}\right| \le p\,k_D(z_1,z_2)\,,$$
потенцируя его, получим двустороннюю оценку
$$e^{-p\,k_D(z_1,z_2)} \le |f'(z_2)|/|f'(z_1)| \le e^{p\,k_D(z_1,z_2)}\,,$$
которая эквивалентна условию: для любых двух точек z_1 и z_2 области D выполнено
$$|f'(z_2)| \le e^{p\,k_D(z_1,z_2)}|f'(z_1)|\,.$$
Так как $|f'(z_1)| = \lambda(f,z_1)$ и $|f'(z_2)| = \Lambda(f,z_2)$, согласно теореме 2.2 заключаем, что f принадлежит классу QH. Теорема доказана.

Соберем вместе все условия, которые были в тексте доказательства теоремы.

Предложение 3.4. *Пусть f — регулярная локально однолистная функция в области $D \in \mathbf{C}$. Следующие условия эквивалентны.*

1) *Функция f принадлежит классу QH.*

2) *Функция f равномерно локально однолистна.*

3) *Существует число p, такое, что для любой точки $z \in D$ выполнено*
$$|f''(z)| \le \frac{p}{\delta_D(z)}|f'(z)|\,.$$

4) *Существует число p, такое, что любых двух точек $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$ выполнено неравенство*

$$\left|\ln \frac{|f'(z_2)|}{|f'(z_1)|}\right| \leq p\, k_D(z_1, z_2)\,,$$

5) *Существует число p, такое, что для любых двух точек $z_1 \in D$ и $z_2 \in D$ выполнено неравенство*

$$|f'(z_2)| \leq e^{p\, k_D(z_1,z_2)}|f'(z_1)|\,.$$

Замечание. Локальной однолистности регулярной функции не достаточно для принадлежности её классу QH, например функция $f(z) = e^z$, определенная в верхней полуплоскости $R^2_+ = \{z = x + iy \in \mathbf{C} : y > 0\}$, локально однолистна, но не принадлежит классу QH. Действительно, для любого натурального n

$$|f''(z)| = |e^z| = |f'(z)| > \frac{n}{y}|f'(z)|\,,$$

если $\mathrm{Im} z > n$. Согласно пункту 3) предложения 3.4, f не принадлежит QH.

Далее не будем требовать от функции принадлежности классу QH, ограничимся лишь требованием эквивалентности функции некоторому отображению класса QH.

Теорема 3.8. *Пусть $f : D \to \mathbf{C}$ — регулярная локально однолистная функция, эквивалентная некоторому отображению $F : D \to \mathbf{C}$ класса QH. Тогда сама функция f принадлежит классу QH.*

Доказательство. Так как f и F — эквивалентные отображения, найдется гомеоморфизм $\varphi : D \to D$, такой, что $F = f \circ \varphi$. По теореме 3.6 гомеоморфизм φ квазиконформный. Отображение F равномерно локально инъективно (теорема 2.5), значит существует постоянная $\alpha \in (0; 1)$, такая,что в любом круге $B^2(x, \alpha\delta_D(x))$ с центром в точке $x \in D$ F инъективно. То есть, функция f инъективна на множествах вида $\varphi(B^2(x, \alpha\delta_D(x)))$, $x \in D$. По лемме 2.4 найдется постоянная $P > 0$, такая, что шар $B^2(\varphi(x), P\delta_D(\varphi(x))$ содержится в образе шара $B^2(x, \alpha\delta_D(x))$. Так как x — произвольная точка области D, а отображение φ — гомеоморфизм области D на себя, приходим к выводу, что для любой точки $y \in D$ отображение f инъективно в шаре $B^2(y, P\delta_D(y))$, то есть, f равномерно локально однолистна, а следовательно, по предложению 3.4, принадлежит классу QH .

Замечание. Теорема не переносится на класс регулярных функций, не являющихся локально однолистными.

Пример. Функция $f(z) = z^2$, определенная в круге $|z| < 1$ комплексной плоскости, сильно эквивалентна отображению класса QH, хотя сама не принадлежит QH.

Пусть $\varphi(z) = z/\sqrt{|z|}$ и $F(z) = f(\varphi(z)) = z^2/|z|$. Тогда $\lambda(F,0) = \Lambda(F,0) = 1$; $\lambda(F,z) = 1$, $\Lambda(F,z) = 2$, если $z \neq 0$. Таким образом $F \in QI \subset QH$. Функция f не принадлежит QH, так как $f'(0) = 0$.

Регулярные локально-инъективные функции, эквивалентные отображениям класса QI

Задача описания областей, квазиизометрически эквивалентных полуплоскости была решена в работах [15], [16], [77], [61], [73]. Там устанавливается критерий квазиизометрической эквивалентности области полуплоскости — условие "дуги и хорды"на границе. В этих работах подбирается гомеоморфизм φ полуплоскости R^2_+ или круга B^2 на себя, такой, что композиция конформного отображения f и гомеоморфизма φ является квазиизометрическим отображением. Вопрос о характеризации функций f, позволяющих применить построения не ставился. Сходная проблема для функций, участвующих в построении квазиизометрического отражения относительно кривой поставлена в книге Альфорса [2, с. 73].

В диссертации устанавливаются свойства регулярных функций f, заданных в верхней полуплоскости, сильно эквивалентных квазиизометрическим отображениям. Эти результаты опубликованы в [23], [25].

В этом пункте понадобятся некоторые сведения о граничном поведении регулярных функций из книги И.И.Привалова [37].

Определение 3.6. [37, с.78]. *Функция f регулярная в единичном круге принадлежит классу H_δ, ($\delta > 0$), если*

$$\lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^\delta d\theta = H_\delta(f) < \infty$$

Придется использовать следующую теорему Ф.Рисса.

Теорема 3.9. [37, с.89]. *Если f — функция класса H_δ, то каково бы ни было множество M положительной меры на отрезке $[0, 2\pi]$, имеют место* *равенства*

$$\lim_{\rho\to1}\int\limits_M |f(\rho e^{i\theta})|^\delta d\theta = \int\limits_M |f(e^{i\theta})|^\delta d\theta$$

и

$$\lim_{\rho\to1}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^\delta d\theta = 0.$$

Определение 3.7. [23] *Функция f регулярная в полуплоскости R^2_+ принадлежит классу EH, если для любой точки $x+iy \in R^2_+$ выполнено*

$$\sup_{0<\alpha\le1}\int\limits_x^{x+y} |f(t+i\alpha y)|dt < \infty\,.$$

Определение 3.8. [37, с.203]. *Функция f регулярная в ограниченной области D с жордановой границей, принадлежит классу E_p, $p>0$, если существует последовательность спрямляемых кривых $\{\gamma_n\}$, сходящихся к $\gamma = \partial D$ и таких, что*

$$\int\limits_{\gamma_n} |f(z)|^p|dz| \le C\,.$$

C не зависит от n.

Лемма 3.2. *Пусть функция f принадлежит классу EH. Тогда для любой точки $x_0 \in R = \partial R^2_+$ и почти всех $r>0$ f принадлежит классу E_1 в квадратах*

$$Q(x_0,r) = \{z:\ \ -r/2 \le \mathrm{Re}\,(z-x_0) \le r/2,\ 0<\mathrm{Im} z<r\}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим квадрат $Q(x_0,d)$. Так как $f\in EH$, существует число M, такое, что для всех $y\in(0,2d]$ выполнено

$$\int\limits_{x_0-d/2}^{x_0+d/2} |f(x+iy)|dx \le M\,.$$

Согласно теореме Фубини о кратном интегрировании функция f интегрируема на квадрате $Q(x_0,d)$ и

$$\iint\limits_{Q(x_0,d/2)} |f(x+iy)|dx\,dy = \int\limits_0^d \int\limits_{x_0-d/2}^{x_0+d/2} |f(x+iy)|dx\,dy = \int\limits_{x_0-d/2}^{x_0+d/2}\int\limits_0^d |f(x+iy)|dy\,dx\,.$$

Следовательно, для почти всех $x \in (x_0 - d/2, x_0 + d/2)$ функция $|f(x+iy)|$ интегрируема по переменной y на интервале $(0, d]$, множество таких x обозначим L. Через L^* обозначим подмножество действительной оси, полученное из L симметрией относительно центра x_0. Множество $L \cap L^*$ симметрично относительно x_0 и его мера равна мере отрезка $[x_0 - d/2, x_0 + d/2]$.

Пусть $P = \{x + iy \in \mathbf{C} : \quad a_1 \leq x \leq a_2\,, b_1 \leq y \leq b_2\}$ — замкнутый прямоугольник. Через P_* обозначим соответствующий прямоугольник без нижнего основания, то есть $P_* = \{x + iy \in \mathbf{C} : \quad a_1 \leq x \leq a_2\,, b_1 < y \leq b_2\}$. Положим $\partial_* P = \partial P \cap P_*$.

Пусть $r \in (0, d/2)$ — число, такое, что точка $x_0 + r$ принадлежит множеству $L \cap L^*$. Тогда функция $|f|$ суммируема на боковых сторонах квадрата $Q(x_0, r)$, следовательно и на $\partial_* Q(x_0, r)$. Положим

$$M_1 = \int\limits_{\partial_* Q(x_0, r)} |f(z)||dz|\,.$$

Так как f непрерывна на $(Q(x_0, r))_*$, для любого натурального n можно подобрать постоянную $\varepsilon_n \in (0, r/2n)$ так, что

$$\left| \int\limits_{\partial_* Q(x_0, r)} |f(z)||dz| - \int\limits_{\partial_* D_n} |f(z)||dz| \right| < 1\,,$$

где

$$D_n = \{x + iy \in \mathbf{C} : \ \ |x - x_0| \leq r - \varepsilon_n\ ,\ \frac{r}{2n} \leq y \leq 2r - \varepsilon_n\}\,,$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial D_n} |f(z)||dz| \leq \int\limits_{\partial_* D_n} |f(z)||dz| + 1 + \int\limits_{x_0 - r}^{x_0 + r} |f(x + i\frac{r}{2n})|dx \leq M_1 + M + 1\,.$$

Так как границы прямоугольников D_n сходятся к границе квадрата $Q(x_0, r)$, заключаем, что f принадлежит классу E_1 в квадрате $Q(x_0, r)$ (определение 3.8). Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $f : R^2_+ \to \mathbf{C}$ регулярная функция, удовлетворяющая условиям:*

а) *существует постоянная $p > 0$, такая, что для любой точки $z \in R^2_+$ справедливо неравенство*

$$|f''(z)| \leq \frac{p|f'(z)|}{\delta(z)}\,;$$

b) *существует постоянная* $Q \le 1$, *с которой выполнено*

$$\frac{1}{Q} \le \int\limits_x^{x+y} |f'(s+it)|ds \Bigg/ \int\limits_x^{x+y} |f'(s+iy)|ds \le Q\,,$$

для любой точки $x+iy \in R^2_+$ *и для всех* $t \in (0;y)$.

Тогда f *продолжается до функции* $\tilde{f}$ *непрерывной в замыкании* R^2_+, *ограничение которой на* $R = \partial R^2_+$ *— абсолютно непрерывная функция, обозначим это ограничение* g;

для почти всех $x \in R$ *производная* $f'(z)$ *имеет некасательные пределы при* $z \to x$, *причем эти пределы почти всюду совпадают с* $g'(x)$;

для любой точки $z \in R^2_+$ *выполнено*

$$\frac{1}{Q} \le \int\limits_x^{x+y} |f'(s+it)|ds \Bigg/ \int\limits_x^{x+y} |g'(s)|ds \le Q\,. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть d — число, при котором функция f' принадлежит классу E_1 на квадрате $Q_d = Q(0;d)$. Через φ обозначим конформное отображение круга $B_d = B(iR_d;R_d)$ на квадрат Q_d, переводящее центр круга в центр квадрата и удовлетворяющее условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 1$. Заметим, что радиус круга R_d перечисленными условиями определяется единственным образом. Обозначим $\varphi_d(w) = \varphi(R_d w + iR_d)$, φ_d отображает единичный круг на квадрат $Q(0;d)$. В книге И.И.Привалова [37, с.204] показано, что функция $F(w) = f(\varphi_d(w))$ такова, что ее производная принадлежит классу H_1. Следовательно, по теореме Рисса 3.9 F продолжается до непрерывной в замыкании круга $|w| < 1$ функции, при этом функция $\tilde{g}$ — продолжение F на границу круга, является абсолютно непрерывной и для почти всех $|\zeta| = 1$ функция $|F'(w)|$ имеет предел $\tilde{g}'(\zeta)$ при стремлении w к ζ по некасательным путям. Так как $f = F \circ \varphi_d^{-1}(z)$, f продолжается до функции, непрерывной в замыкании квадрата $Q(0;d)$. Пусть g — продолжение f на отрезок $[-d;d]$. Из формулы производной композиции функций следует, что производная f' имеет свойства, подобные свойствам производной F', то есть, g абсолютно непрерывна и для почти всех $x \in [-d;d]$ f' имеет некасательные пределы, совпадающие с $g'(x)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем d настолько большим, чтобы на 1-окрестности множества $\varphi^{-1}Q(0;1)$ было выполнено условие

$$1/(1+\varepsilon) \le |\varphi'(z)| \le 1+\varepsilon \tag{3}$$

Введем обозначения.

Для $t \in [0;1]$ положим $a_t = -1/2 + it$, $b_t = 1/2 + it$, $I_t = [a_t, b_t]$ — отрезок; $\tilde{a}_t = \varphi_{-1}(a_t)$, $\tilde{b}_t = \varphi_{-1}(b_t)$; σ_t — меньшая дуга окружности с центром в точке iR_d, проходящая через точки $\tilde{a}_t$ и $\tilde{b}_t$, r_t — радиус этой дуги.

Расстояние от любой точки $\zeta \in \sigma_t$ до границы круга B_d равно $R_d - r_t = \Delta_t$. В силу условия (3), верна оценка

$$\Delta_t/(1+\varepsilon) \le \delta(a_t) \le (1+\varepsilon)\Delta_t \,. \tag{4}$$

Следовательно, $\Delta_t/(1+\varepsilon) \le \delta(\varphi(\zeta)) \le (1+\varepsilon)\Delta_t$, то есть $\Delta_t/(1+\varepsilon) \le \Delta_t \le (1+\varepsilon)\Delta_t$. Применяя последнее неравенство к (4), получим

$$\delta(a_t)/(1+\varepsilon)^2 \le \delta(\varphi(\zeta)) \le (1+\varepsilon)^2\delta(a_t) \tag{5}$$

Пусть $\gamma_t = \varphi(\sigma_t)$. Заметим, что γ_t — гладкая дуга, симметричная относительно оси ординат, концы γ_t совпадают с точками a_t и b_t. Для $z \in I_t$ через z^* обозначим точку дуги γ_t, имеющую ту же ординату, что и точка z (z^* — проекция z на γ_t). Неравенство (5) позволяет оценить гиперболическое расстояние между z и z^*,

$$l(z, z^*) \le \ln(1+\varepsilon)^2 \tag{6}$$

Заметим теперь, что условие а) эквивалентно условию: для любых точек $z_1, z_2 \in R^2_+$ выполнено неравенство

$$\frac{|f'(z_1)|}{|f'(z_2)|} \le e^{p\, l(z_1,z_2)}.$$

Тогда из (6) следует, что

$$1/(1+\varepsilon)^{2p} \le |f'(z)|/|f'(z^*)| \le (1+\varepsilon)^{2p} \,.$$

Так как дуга γ_t однозначно проецируется на ось абсцисс, ее можно задать как график некоторой функции ψ. Увеличим, если нужно, параметр d, чтобы выполнялось неравенство $\sqrt{1+(\psi'(x))^2} < 1+\varepsilon$ для любого $x \in [-1/2; 1/2]$. Так как

$$\int\limits_{\gamma_t} |f'(z^*)||dz^*| = \int\limits_{-1/2}^{1/2} |f'(x+i\psi(x))|\sqrt{1+(\psi'(x))^2}dx \,,$$

сделанные оценки позволяют заключить, что

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2 p}\int\limits_{I_t} |f'(z)||dz| \le \int\limits_{\gamma_t} |f'(z^*)||dz^*| =\le (1+\varepsilon)^{2p+1}\int\limits_{I_t} |f'(z)||dz| \,.$$

Теперь обратим внимание на то, что согласно формуле замены переменной в интеграле имеет место равенство

$$\int\limits_{\sigma_t} |F'(w)||dw| = \int\limits_{\sigma_t} |f'(\varphi(w))||dw| = \int\limits_{\gamma_t} |f'(z^*)||dz^*|\,,$$

где $F = f \circ \varphi$. Так как функция F принадлежит классу E_1 в круге B_d, по теореме Рисса имеем

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\sigma_t} |F'(w)||dw| = \int\limits_{\sigma_t} |\tilde{g}'(w)||dw|\,.$$

Однако, интеграл, стоящий в равенстве справа, равен интегралу

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} |g'(x)|dx\,,$$

следовательно

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\gamma_t} |f'(z^*)||dz^*| = \int\limits_{-1/2}^{1/2} |g'(x)|dx\,, \tag{7}$$

Условия $b)$ и (7), примененные совместно, позволяют получить оценку

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2p}} \le \int\limits_{\gamma_t} |f'(z^*)||dz^*| / \int\limits_{I_t} |f'(z)||dz| \le Q(1+\varepsilon)^{2p+1},$$

из которой, с учетом произвольности ε следует доказываемое неравенство (2).

Замечание. Проведенные рассуждения позволяют доказать, что

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{I_t} |f'(z)||dz| = \int\limits_{-1/2}^{1/2} |g'(x)|dx\,,$$

Действительно, пусть

$$\alpha(t) = \int\limits_{I_t} |f'(z)||dz|\,, \quad \beta_\varepsilon(t) = \int\limits_{\gamma_t} |f'(z^*)||dz^*|\,, \quad \alpha_0 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} |g'(x)|dx.$$

Выберем d так, чтобы $1/(1+\varepsilon) \le \alpha(t)/\beta(t) \le 1+\varepsilon$. Так как

$$\lim_{t\to 0} \beta_\varepsilon(t) = \alpha_0\,,$$

найдется такое число $\delta > 0$, что если $t \in (0;\delta)$, то $|\beta_\varepsilon(t) - \alpha_0| \le \varepsilon$. Для таких t выполнено неравенство $|\alpha(t)-\alpha_0| \le 2\varepsilon$. Произвольность выбора ε означает, что

$$\lim_{t\to 0} \beta(t) = \alpha_0 \,.$$

Покажем, что условия леммы 3.3 достаточны для того, чтобы функция f была эквивалентной квазиизометрическому отображению.

Теорема 3.10. *Пусть $f : R^2_+ \to \mathbf{C}$ регулярная функция, удовлетворяющая условиям:*

a) *существует постоянная $p > 0$, такая, что для любой точки $z \in R^2_+$ справедливо неравенство*

$$|f''(z)| \le \frac{p|f'(z)|}{\delta(z)}\,;$$

b) *существует постоянная $Q \ge 1$, с которой выполнено*

$$\frac{1}{Q} \le \int\limits_x^{x+y} |f'(s+it)|ds \Bigg/ \int\limits_x^{x+y} |f'(s+iy)|ds \le Q\,,$$

для любой точки $x+iy \in R^2_+$ и любого $t \in (0;y)$.

Тогда f эквивалентна некоторому квазиизометрическому отображению $F : R^2_+ \to \mathbf{C}$

Доказательство. По лемме 3.3 f продолжается до непрерывной на замыкании полуплоскости R^2_+ функции $\tilde{f}$, ограничение этой функции на $R = \partial R^2_+$ обозначим g. Функция g абсолютно непрерывна на любом отрезке оси R. Положим

$$h(x) = \int\limits_0^x |g'(t)|dt\,.$$

Покажем, что h удовлетворяет M-условию Альфорса-Бёрлинга [2, c.62]. Пусть $y > 0$. Тогда по лемме 3.3

$$h(x+y) - h(x) = \int\limits_x^{x+y} |g'(t)|dt \le Q \int\limits_x^{x+y} |f'(t+iy)|dt\,, \tag{8}$$

$$h(x) - h(x+y) = \int\limits_{x-y}^{x} |g'(t)|dt \ge \int\limits_{x-y}^{x} |f'(t+iy)|dt/Q\,. \tag{9}$$

Обозначим $z = x+iy$, $z(t) = t+iy$, где $t \in [x-y, x+y]$. Как уже отмечалось в доказательстве леммы 3.3, справедливо неравенство

$$e^{-p\,l(z,z(t))} \le |f'(z(t))|/|f'(z)| \le e^{p\,l(z,z(t))}\,.$$

Из определения гиперболической метрики в полуплоскости легко следует оценка $0 \le l(z, z(t)) \le |t - x|/y$, поэтому

$$|f'(t+iy)| \le e^{p|t-x|/y}|f'(x+iy)|, \quad t \in [x, x+y]\,,$$

и

$$|f'(t+iy)| \ge e^{-p|t-x|/y}|f'(x+iy)|, \quad t \in [x-y, x]\,.$$

Проинтегрируем эти неравенства по t

$$\int\limits_{x}^{x+y} |f'(t+iy)|dt \le |f'(x+iy)| \int\limits_{0}^{y} e^{(ps)/y} ds = |f'(x+iy)|y\frac{e^p - 1}{p}\,,$$

$$\int\limits_{x-y}^{x} |f'(t+iy)|dt \ge |f'(x+iy)| \int\limits_{0}^{y} e^{-(ps)/y} ds = |f'(x+iy)|y\frac{1 - e^{-p}}{p}\,.$$

К интегралам, стоящим в левых частях неравенств применим оценки (8) и (9), тогда получим

$$\frac{1}{Q}(h(x+y) - h(x)) \le \frac{e^p - 1}{p}|f'(x+iy)|y$$

и

$$Q(h(x) - h(x-y)) \ge \frac{1 - e^{-p}}{p}|f'(x+iy)|y\,,$$

То есть

$$h(x+y) - h(x) \le C_2|f'(x+iy)|y\,, \tag{10}$$

и

$$h(x) - h(x-y) \ge C_1|f'(x+iy)|y\,, \tag{11}$$

где $C_1 = (1 - e^{-p})/(pQ)$, $C_2 = (Q(e^p - 1))/p$. Тогда

$$\frac{h(x+y) - h(x)}{h(x) - h(x-y)} \le \frac{C_2}{C_1} = M\,. \tag{12}$$

Если начать доказательство с оценки разности $h(x+y) - h(x)$ снизу, а разности $h(x) - h(x-y)$ сверху, то те же самые приемы приведут к неравенству

$$\frac{1}{M} \le \frac{h(x+y) - h(x)}{h(x) - h(x-y)}\,. \tag{13}$$

Неравенства (12) и (13) вместе означают, что h удовлетворяет M-условию с постоянной M.

Пусть $\psi(z) = u(z) + iv(z)$ — продолжение h методом Альфорса – Бёрлинга [2, с.66] до гомеоморфизма замыкания R^2_+ на себя, то есть

$$u(x,y) = \frac{1}{2y}\int\limits_{-y}^{y} h(x+t)\,dt\,,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2y}\int\limits_{0}^{y} (h(x+t) - h(x-t))dt\,.$$

Продолжение ψ называется отображением Альфорса – Бёрлинга.

На странице 70 книги [2] приводится оценка (2), которая эквивалентна следующим двум неравенствам

$$\Lambda(\psi, z) \le Cv(z)/y \tag{14}$$

$$\lambda(\psi, z) \ge v(z)/(Cy) \tag{15}$$

где $C \le 4M^2(M+1)$.

Для нормированного граничного соответствия h_0, то есть, удовлетворяющего условиям $h_0(0) = 0$, $h_0(1) = 1$, соответствующее отображение Альфорса-Бёрлинга ψ_0 таково, что его мнимая часть v_0 удовлетворяет неравенству [2, с. 70]

$$\frac{1}{2M} \le v_0(i) \le \frac{M}{2}. \tag{16}$$

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольная точка полуплоскости R^2_+. Отображение

$$\tilde{\psi}(z) = \frac{\psi(y_0 z + x_0) - h(x_0)}{h(x_0 + y_0) - h(x_0)}$$

обладает нормированным граничным соответствием $\tilde{h}$. Действительно,

$$\tilde{h}(0) = \frac{\psi(x_0) - h(x_0)}{h(x_0+y_0) - h(x_0)} = \frac{h(x_0) - h(x_0)}{h(x_0+y_0) - h(x_0)} = 0,$$

$$\tilde{h}(1) = \frac{\psi(y_0+x_0) - h(x_0)}{h(x_0+y_0) - h(x_0)} = \frac{h(x_0+y_0) - h(x_0)}{h(x_0+y_0) - h(x_0)} = 1.$$

Пусть $\tilde{v}$ — мнимая часть отображения $\tilde{\psi}$, тогда

$$\tilde{v}(i) = \frac{v(x_0 + iy_0)}{h(x_0+y_0) - h(x_0)}.$$

Согласно неравенству (16), имеем

$$\frac{1}{2M} \le \frac{v(x_0 + iy_0)}{h(x_0+y_0) - h(x-0)} \le \frac{M}{2}\,,$$

В силу того, что $x_0+iy_0 = z_0$, а z_0 – произвольная точка полуплоскости, нижний индекс 0 можно убрать и переписать полученное неравенство так

$$\frac{1}{2M}(h(x+y)-h(x)) \le v(z) \le \frac{M}{2}(h(x+y)-h(x))$$

Применим полученное неравенство к оценкам (14) и (15), получим

$$\Lambda(\psi,z) \le CM\frac{h(x+y)-h(x)}{2y}\,,$$

$$\lambda(\psi,z) \ge \frac{h(x+y)-h(x)}{2CMy}\,.$$

Оценим числители дробей при помощи неравенств (10) и (11) и найдем, что

$$\Lambda(\psi,z_0) \le K_2|f'(x_0+iy_0)|\,, \quad \lambda(\psi,z_0) \ge K_1|f'(x_0+iy_0)|\,, \tag{17}$$

где $K_1 = C_1/(2CM)$, $K_2 = CMC_2$.

Пусть φ — обратное по отношению к ψ отображение. Заметим, что граничное соответствие отображения φ — нормированное, поэтому для него справедливы оценки, аналогичные (17). Если $z \in R^2_+$ и $w = \psi(z)$, то

$$\Lambda(\varphi,w) = 1/\lambda(\psi,z)\,, \quad \lambda(\varphi,w) = 1/\Lambda(\psi,z)\,.$$

Тогда для отображения $F = f\circ\varphi$, учитывая (17), имеем оценки

$$\Lambda(F,w) = |f'(\varphi(w))|\cdot\Lambda(\varphi,w) \le 1/K_2\,,$$

$$\lambda(F,w) = |f'(\varphi(w))|\cdot\lambda(\varphi,w) \ge 1/K_1\,,$$

то есть F — квазиизометрическое отображение, а функция f эквивалентна F. Теорема доказана.

Замечание. Условия теоремы 3.10, взятые по отдельности не достаточны для того, чтобы f была эквивалентна квазиизометрическому отображению.

Пусть f_1 конформно отображает R^2_+ на область, граница которой не спрямляема ни в какой своей части; $f_2(z) = e^z$, $z \in R^2_+$. Функция f_1 удовлетворяет условию a), но не удовлетворяет условию b), функция f_2 удовлетворяет условию b), но не удовлетворяет условию a). Обе эти функции не эквивалентны ни какому квазиизометрическому отображению полуплоскости.

Топологическая эквивалентность многочленов и квазиизометрических отображений плоскости

В этом пункте рассматриваются отображения класса QI постоянной ориентации. Термин "квазиизометрическое отображение"здесь будет означать именно такие отображения. Устанавливается, что любой комплексный многочлен эквивалентен некоторому квазиизометрическому отображению $\mathbf{C}$ на себя и любое отображение с ограниченным искажением f, удовлетворяющее условию

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\,,$$

эквивалентно некоторому многочлену.

Лемма 3.4. *Для любого K-квазиконформного отображения φ плоскости $\mathbf{C}$ на себя существует постоянная $M > 0$, такая, что при больших значениях $|z|$ выполнено*

$$\frac{1}{M}|z|^{1/K} \le |\varphi(z)| \le M|z|^K\,.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим K-квазиконформное отображение f, нормированное условием $f(0) = 0$.

Для $t > 0$ положим

$$r(t) = \min_{|z|=t} |f(z)|\,, \quad R(t) = \max_{|z|=t} |f(z)|\,.$$

Положим $G(r) = \mathbf{C} \setminus B(r)$, где $B(r)$ — открытый круг с центром в точке 0 радиуса $r > 0$. Пусть $t > \max\{1; r(1)\}$. Так как $\overline{B}(r(1)) \subset f(\overline{B}(1))$, $G(R(t)) \subset f(G(t))$ и отображение f квазиконформно, справедливы оценки

$$\mathrm{cap}(\overline{B}(r(1)), G(t)) \le \mathrm{cap}(f(\overline{B}(1)), f(G(t))) \le K\,\mathrm{cap}(\overline{B}(1), G(t))\,.$$

По формуле емкости концентрических окружностей, получим

$$\ln\frac{R(t)}{r(1)} \ge \frac{1}{K}\ln\,t\,,$$

следовательно

$$R(t) \ge r(1)\,t^{1/K} \tag{18}$$

Квазиконформное отображение φ плоскости на себя, обладает D-свойством [49, с.18], то есть существует постоянная D, зависящая только от K, такая что для любого $t > 0$ выполнено $R(t) \le Dr(t)$. Применим это неравенство к (18), получим $r(t) \ge$

$(1/D)r(1)t^{1/K}$. Так как $|f(z)| \geq r(|z|)$, найдем, что при $|z| > \max\{1; r(1)\}$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \geq \frac{r(1)}{D}|z|^{1/K}.$$

Рассмотрим обратное отображение f^{-1}, оно тоже K-квазиконформно, значит при больших $|w|$ выполнено

$$|f^{-1}(w)| \geq D\tilde{r}(1)|w|^{1/K}, \tag{19}$$

где

$$\tilde{r}(1) = \min_{|w|=1} |f^{-1}(w)|.$$

Пусть $w = f(z)$, тогда неравенство (19) примет вид $|z| \geq \tilde{r}(1)|f'(z)|^{1/K}$, следовательно

$$|f(z)| \leq D\tilde{r}(1)|z|^K$$

Обозначим

$$M = \max\left(D\tilde{r}(1), \frac{D}{r(1)}\right),$$

тогда справедливо соотношение

$$\frac{1}{M}|z|^{1/K} \leq |f(z)| \leq M|z|^K.$$

Заметим теперь, что если $\varphi(0) \neq 0$, то при больших значениях $|z|$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2M}|z|^{1/K} \leq |f(z)| \leq 2M|z|^K.$$

Определение 3.9. *Будем говорить, что отображение $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ имеет в окрестности бесконечности степенной рост, если существуют постоянные $M > 0$ и $\mu > 0$, такие, что при больших R выполнено*

$$\max_{|z|\leq R} |g(z)| \leq MR^{\mu}.$$

Замечание. Согласно лемме 3.4 любое квазиконформное отображение плоскости $\mathbf{C}$ на себя имеет в окрестности бесконечности степенной рост.

Напомним, что целой называется регулярная функция, определенная на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Лемма 3.5. *Пусть $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — целая функция и φ — гомеоморфизм $\mathbf{C}$ на себя. Если существуют постоянные a и b, такие, что для любой точки $w \in \mathbf{C}$ выполнено*

$$a\Lambda(\varphi^{-1}, w) \leq |g'(z)| \leq b\lambda(\varphi^{-1}, w),$$

то для отображения $f = g \circ \varphi$ имеют место оценки $\lambda(\varphi, z) \geq a$, $\Lambda(\varphi, z) \leq b$ в каждой точке, где $g'(\varphi^{-1}(z)) \neq 0$.

Доказательство. Обозначим $\psi = \varphi^{-1}$. Пусть точка $w \in \mathbf{C}$ такова, что $g'(w) \neq 0$. Функция g комплексно дифференцируема, поэтому для $z = \psi(w)$ справедливы равенства

$$\lambda(f, z) = |g'(\varphi(z))|\lambda(\varphi, z), \quad \Lambda(f, z) = |g'(\varphi(z))|\Lambda(\varphi, z). \tag{20}$$

Так как

$$\lambda(\varphi, z) = \frac{1}{\Lambda(\psi, w)}, \quad \Lambda(\varphi, z) = \frac{1}{\lambda(\psi, w)}.$$

и, согласно условию леммы,

$$\frac{g'(w)}{\Lambda(\psi, w)} \geq a, \quad \frac{g'(w)}{\lambda(\psi, w)} \leq b,$$

то из равенств (20) следуют оценки $\lambda(f, z) \geq a$, $\lambda(f, z) \leq b$. Лемма доказана.

Приведем два критерия того, что целая функция является многочленом.

Лемма 3.6. *Если целая функция g имеет в окрестности бесконечности степенной рост, то g — многочлен,*[36, т.5, с.796].

Если целая функция g такова, что

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = \infty,$$

то g — многочлен. [38, с.225]

Теорема 3.11. *Пусть $f : C \to C$ — отображение с ограниченным искажением, имеющее в окрестности бесконечности степенной рост. Тогда f эквивалентно некоторому многочлену.*

Доказательство. Так как f — непостоянное отображение с ограниченным искажением, по теореме 6.4 книги Ю.Г.Решетняка [39, с.144], f является открытым отображением. По теореме 6.3 [39, с.143] отображение f — изолированное, то есть, для каждой точки $w \in C$ все точки множества $f^{-1}(w)$ являются изолированными. Следовательно, f не переводит никакой невырожденный континуум в точку. Тогда по терминологии Стоилова f является внутренним отображением [44, с.137] и по теореме [44, с.138] существуют гомеоморфизм ψ плоскости C на себя и голоморфная функция $g : C \to C$, для которых $f = g \circ \psi$. По теореме 3.6 отображение ψ квазиконформно.

По условию теоремы f имеет в окрестности бесконечности степенной рост, значит

$$|f(w)| =\leq N_1|w|^\mu \tag{21}$$

при больших $|w|$. Обозначим $\varphi = \psi^{-1}$, $w = \varphi(z)$. Отображение φ как и ψ является квазиконформным, следовательно имеет в окрестности бесконечности степенной рост, то есть,

$$|w| = |\varphi(z)| \leq N|z|^m \tag{22}$$

при больших $|z|$. Так как $w \to \infty$ при $z \to \infty$, для больших значений $|z|$, с учетом (21) и (22), имеем

$$|g(z)| = |f(w)| \leq N_1|w|^\mu \leq N_1(N|z|^m)^\mu = N_2|z|^{m\mu}\,,$$

где $N_2 = N_1 \cdot N^\mu$. Эта оценка означает, что целая функция g имеет в окрестности бесконечности степенной рост, следовательно является многочленом. Итак, доказано, что отображение f эквивалентно многочлену g, а с этим доказана теорема.

Следствие. *Любое квазиизометрическое постоянной ориентации отображение f плоскости C в себя эквивалентно некоторому многочлену.*

Доказательство. Так как f является отображением с ограниченным искажением, достаточно проверить, что f имеет в окрестности бесконечности степенной рост. Пусть K — коэффициент квазиизометричности отображения f, то есть

$$\lambda(f,z) \geq \frac{1}{K}\,, \quad \Lambda(f,z) \leq K\,.$$

Из второго неравенства следует, что при $|z| \geq |f(0)|$ выполнено

$$|f(z)| \leq (K+1)|z|\,,$$

то есть, f обладает нужным свойством.

Свойство степенного роста отображения с ограниченным искажением можно заменить более простым по форме условием.

Предложение 3.5. *Непостоянное отображение с ограниченным искажением $f : C \to C$ имеет в окрестности бесконечности степенной рост тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\,.$$

Доказательство. Пусть f имеет в окрестности бесконечности степенной рост, тогда по теореме 3.11 f эквивалентно многочлену, следовательно

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\,.$$

Если же

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\,,$$

то для целой функции g, которой эквивалентно отображение f также выполнено условие

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \infty\,,$$

которое означает, что g — многочлен. Таким образом, f эквивалентно многочлену, следовательно f имеет в окрестности бесконечности степенной рост.

Теорема 3.12. *Любой многочлен эквивалентен некоторому квазиизометрическому отображению плоскости C.*

Доказательство. Пусть g — многочлен степени n. Корни его производной обозначим через z_1, z_2, $\ldots z_k$; $\alpha(i)$ — кратность корня z_i. Тогда

$$g'(z) = a(z-z_1)^{\alpha(1)}\cdots(z-z_k)^{\alpha(k)}\,. \tag{23}$$

Пусть $4r$ — минимальное расстояние между корнями z_i и все они находятся в круге $|z| < R/2$. Определим отображение φ следующими условиями:

$$\varphi(z) = (|z-z_i|/r)^{\alpha(i)}(z-z_i) + z_i\,, \quad \text{если } \ z \in B(z_i, r)\,, \quad i = 3/4, <, \ldots, k\,;$$

$$\varphi(z) = z\,, \quad \text{если } \quad z \in D = \left(C \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(z_i, r)\right) \bigcap \overline{B}(0, R)\,;$$

$$\varphi(z) = |z|^{n-1}z/R^{n-1}, \quad \text{если} \quad |z| > R.$$

Оценим искажения отображений g и φ.

Если $i \neq j$, то $r \le |z_i - z_j| \le R$ и для $z \in B(z_i, r)$, справедливы оценки

$$3r \le |z_i - z_j| \le R + r.$$

Тогда из представления (23) следует, что для всех $z \in B(z_i, r)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, справедлива оценка

$$A_{1i}|z-z_i|^{\alpha(i)} \le |g'(z)| \le A_{2i}|z-z_i|^{\alpha(i)} \tag{24}$$

где $A_{1i} = |a|(3r)^{n-1-\alpha(i)}$, $A_{2i} = |a|(R+r)^{n-1-\alpha(i)}$.

Отображение φ задано явно, поэтому для него легко вычисляются значения искажений λ и Λ. Если $0 < |z - z_i| < r$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то

$$\lambda(\varphi, z) = \left(\frac{|z - z_i|}{r}\right)^{\alpha(i)}, \tag{25}$$

$$\Lambda(\varphi, z) = (\alpha(i) + 1)\left(\frac{|z - z_i|}{r}\right)^{\alpha(i)}, \tag{26}$$

Так как совокупность оценок (24) – (26) конечна, существуют положительные числа A_1 и A_2, для которых выполнено

$$A_1\Lambda(\varphi, z) \le |g'(z)| \le A_2\lambda(\varphi, z), \quad z \in \bigcup_{i=1}^{k} B(z_i, r).$$

Множество D (см. определение φ) компактно, значит существуют положительные постоянные d_1 и d_2, с которыми выполнено неравенство $d_1 \le |g'(z)| \le d_2$, $z \in D$. Во внутренних точках множества D имеем $\lambda(\varphi, z) = \Lambda(\varphi, z) = 1$. Для z, принадлежащих окружностям $\{|z - z_i| = r\}$ имеют место равенства $\lambda(\varphi, z) = 1$ и $\Lambda(\varphi, z) = \alpha(i) + 1$. Если $|z| = R$, то $\lambda(\varphi, z) = 1$ и $\Lambda(\varphi, z) = n$. Таким образом, для всех точек $z \in D$ выполнено

$$B_1\Lambda(\varphi, z) \le |g'(z)| \le B_2\lambda(\varphi, z),$$

где $C_1 = d_1/n$, $C_2 = d_2$.

При $|z| > R$ имеем $|a|(|z|/2)^{n-1} \le |g'(z)| \le |a|(3|z|/2)^{n-1}$, $\lambda(\varphi, z) = (|z|/R)^{n-1}$, $\Lambda(\varphi, z) = n\lambda(\varphi, z)$ (см. нижеследующие оценки для $|z| > R$). Следовательно

$$C_1\Lambda(\varphi, z) \le |g'(z)| \le C_2\lambda(\varphi, z),$$

где $C_1 = (|a|R^{n-1})/2^{n-1}$, $C_2 = (3^{n-1}/n)B_1$.

Пусть $f = g \circ \varphi^{-1}$, согласно лемме 3.5, из приведенных оценок следует, что для любой точки $z \in C$, $z \ne z_i$, $i = 1, 2, \ldots, z_k$, верно

$$\lambda(f, z) \ge P_1, \quad \lambda(f, z) \le P_2,$$

где $P_1 = \min(A_1, B_1, C_1)$, $P_2 = \max(A_2, B_2, C_2)$.

Теперь оценим искажения отображения f в центрах кругов z_i. Разложим многочлен g по формуле Тейлора в окрестности произвольной точки z_i. Так как z_i — ноль производной порядка $\alpha(i)$, разложение таково

$$g(z) = g(z_i) + \frac{g^{(\alpha(i)+1)}(w_i)}{(\alpha(i)+1)!}(z - z_i)^{\alpha(i)+1} + \sigma_i(z - z_i), \tag{27}$$

здесь $\sigma_i(z-z_i)$ — остаточный член,

$$\sigma_i(z-z_i) = o(|z-z_i|^{\alpha(i)+1}). \tag{28}$$

Гомеоморфизм φ отображает круг $B(z_i,r)$ на себя, обратный гомеоморфизм ψ в круге $B(z_i,r)$ задается формулой

$$\psi(z) = \left(\frac{r}{|z-z_i|}\right)^{\alpha(i)/(\alpha(i)+1)} (z-z_i)+z_i\,.$$

Для упрощения записей предположим, что $z_i=0$ и обозначим $\alpha=\alpha(i)$. Тогда для любой точки $z\in B(z_i,r)$, согласно (27), выполнено

$$|g(\psi(z)-g(z_i))| = |g(\psi(z)-g(0))| = \frac{g^{(\alpha+1)}(0)}{(\alpha+1)!}\left((\frac{r}{|z|})^{\alpha(\alpha+1)}z\right)^{\alpha+1} +$$

$$+\sigma_i\left((\frac{r}{|z|})^{\alpha/(\alpha+1)}z\right).$$

Так как модуль аргумента функции σ равен $r^{\alpha/(\alpha+1)}|z|^{1/(\alpha+1)}$, согласно (28) имеем

$$\sigma_i\left((\frac{r}{|z|})^{\alpha/(\alpha+1)}z\right) = o|z|.$$

Тогда

$$\lim_{z\to 0}\frac{|g(\psi(z))-g(0)|}{|z|} =$$

$$= \frac{g(0)^{\alpha+1}r^{\alpha/(\alpha+1)}}{(\alpha+1)!}\lim_{z\to 0}\frac{|z|}{|z|} + \lim_{z\to 0}\frac{\sigma_i(r/|z|)^{\alpha/(\alpha+1)}z}{|z|} = \frac{g(0)^{\alpha+1}r^{\alpha/(\alpha+1)}}{(\alpha+1)!} = Q_i\,.$$

Последнее означает, что

$$\lambda(f,z_i) = \Lambda(f,z_i) = Q_i\,.$$

Пусть $S_1 = \min(Q_1,\ldots,Q_k;P_1)$, $S_2 = \max(Q_1,\ldots,Q_k;P_2)$, тогда $\lambda(f,z)\geq S_1$, $\Lambda(f,z)\leq S_2$ для любой точки $z\in C$, то есть, f — квазиизометрическое отображение.

Теорема доказана.

§4. Покрытия областей шарами

Алгоритм пошаговой локальной аппроксимации использует специальные покрытия областей шарами. В данном параграфе изложено описание таких покрытий.

Определение 3.10. *Пусть Ξ некоторая совокупность множеств. Будем говорить, что семейство ξ множеств из Ξ является максимальным, если различные множества из ξ не пересекаются между собой и для любого $a \in \Xi \backslash \xi$ существует $b \in \xi$ такое, что $a \cap b \neq \emptyset$.*

Предложение 3.6. *Любая система множеств содержит максимальную подсистему.*

Доказательство. Пусть Ξ некоторая система множеств. Через $\mathcal{A}$ обозначим систему множеств, элементами которой являются наборы взаимно не пересекающихся множеств из Ξ. На $\mathcal{A}$ зададим частичный порядок (по включению), то есть считаем, что для $p, q \in \mathcal{A}$, $p \leq q$ тогда и только тогда, когда $p \subset q$. Пусть $\mathcal{L}$ – произвольное линейно упорядоченное подмножество из $\mathcal{A}$. Обозначим

$$L = \{\cup A,\ A \in \mathcal{L}\}\,.$$

Множество L является верхней гранью для $\mathcal{L}$. Следовательно, семейство $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна [14], значит, система $\mathcal{A}$ содержит максимальный элемент B. Покажем, что B является максимальным подсемейством семейства Ξ.

Так как $Q \in \mathcal{A}$, различные множества из B не пересекаются между собой. Если $p \in \Xi \setminus A$, то найдется $q \in\ B$, такой, что $p \cap q \neq \emptyset$, иначе множество B не будет максимальным элементом системы $\mathcal{A}$. Таким образом, B удовлетворяет всем условиям из определения максимальной системы.

Замечание. Из сепарабельности R^n следует, что любая максимальная система открытых множеств из R^n не более, чем счетна.

Далее рассмотрим покрытия областей шарами типа покрытий Уитни [11].

Обозначения. Любой собственной области D пространства R^n поставим в соответствие множество шаров $\mathcal{B}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, состоящее из шаров $B^n(x, \alpha\delta_D(x))$, $x \in D$.

Для $B = B^n(x, r)$ и $p > 0$ положим $pB = B^n(x, pr)$.

Если $\mathcal{Q}$ – семейство шаров, то через $p\mathcal{Q}$ обозначаем семейство шаров вида pB, $B \in \mathcal{Q}$.

Определение 3.11. *Пусть D – собственная область R^n, $\alpha \in (0;1)$, $a > 0$. Семейство шаров $\mathcal{Q}$, принадлежащее множеству $\mathcal{B}(\alpha)$, такое, что для* *любых двух шаров $B_1, B_2 \in \mathcal{Q}$ квазигиперболическое расстояние между их центрами не меньше числа a, назовем (α, a)-семейством, связанным с областью D.*

Лемма 3.7. *Пусть D – собственная область R^n, $\alpha \in (0;1)$, $a > 0$, и $\mathcal{Q}$ — (α, a)-семейство, связанное с областью D. Тогда любой шар $B \in \mathcal{Q}$ пересекается не более, чем с N шарами семейства $\mathcal{Q}$, $N = N(n, \alpha, a)$.*

Доказательство. Пусть $B_1 = B^n(x_1, \alpha\delta_D(x))$ и $B_2 = B^n(x_2, \alpha\delta_D(x_2))$ – шары семейства $\mathcal{Q}$.

Так как $k_D(x_1, x_2) \geq a$, по лемме 2.2

$$\delta_D(x_1) \leq \frac{|x_1 - x_2|}{1 - e^{-a}}, \quad \delta_D(x_2) \leq \frac{|x_1 - x_2|}{1 - e^{-a}}. \tag{1}$$

Пусть $\beta_1 = (1 - e^{-a})/(2\alpha)$, тогда, учитывая оценки (1), получим

$$\beta_1\alpha\delta_D(x_1) + \beta_1\alpha\delta_D(x_2) \leq |x_1 - x_2|.$$

Заметим, что слагаемые в левой части неравенства суть радиусы шаров $\beta_1 B_1$ и $\beta_1 B_2$, поэтому, при данном β_1 эти шары не пересекаются.

Пусть $B = B^n(x, \alpha\delta_D(x))$ и $\mathcal{Q}^* = \{B_i\}_1^m$ – множество шаров семейства $\mathcal{Q}$, пересекающихся с B.

Оценим радиусы шаров семейства $\mathcal{Q}^*$. Пусть $B_i \in \mathcal{Q}^*$. Так как $B \cap B_i \neq \emptyset$, выполнено $\delta_D(x) < \delta_D(x_i) + \alpha\delta_D(x_i) + \alpha\delta_D(x)$. Таким образом, для радиуса шара B_i справедлива оценка снизу

$$\alpha\delta_D(x_i) \geq \alpha\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\delta_D(x). \tag{2}$$

Положим, $\beta_2 = (1-\alpha)/(1+\alpha)$.

Отметим теперь, что любой шар B_i содержится в шаре $B^n(x, r\delta_D(x))$, где $r = (2\alpha\delta_D(x))/(1-\alpha)$. Действительно, для любой точки $y \in B_i$

$$|x - y| \leq \alpha\delta_D(x) + 2\alpha\delta_D(x_i).$$

Меняя в доказательстве неравенства (2) шары B и B_i местами, можно установить, что

$$\delta_D(x_i) \leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\delta_D(x)$$

откуда следует оценка

$$|x - y| \leq \alpha\delta_D(x) + \alpha\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\delta_D(x) = \frac{2\alpha}{1-\alpha}\delta_D(x).$$

Итак, установлено, что все шары $\beta_1 B_i$, $i \le m$, лежат в шаре $B^n(x, r\delta_D(x))$ и не пересекаются между собой и с шаром $\beta_1 B$. Поэтому выполнено неравенство для объемов этих шаров

$$\omega_n \alpha^n \beta_1^n \delta_D^n(x) + \sum_{i=1}^{m} \omega_n \alpha^n \beta_1^n \delta_D^n(x_i) \le \omega_n r^n \delta_D^n(x)\,,$$

где ω_n – n-мерный объем шара единичного радиуса в R^n. Однако, каждое слагаемое под знаком суммы в левой части неравенства оценивается снизу числом $\alpha^n \omega_n \beta_1^n \beta_2^n \delta_D^n(x)$. Поэтому

$$\omega_n \alpha^n \beta_1^n \delta_D^n(x) + m\omega_n \alpha^n \beta_1^n \beta_2^n \delta_D^n(x) \le \omega_n r^n \delta_D^n(x)\,.$$

Следовательно

$$m \le \left(\frac{2^n}{(1-\alpha)^n} - \beta_1^n \right) / \beta_1^n \beta_2^n = \nu\,.$$

Таким образом, лемма верна при N равном целой части числа $\nu + 1$.

Определение 3.12. *Пусть D — собственная область в R^n, $\alpha \in (0;1)$. Покрытие $\mathcal{F}$ области $D \subset R^n$ шарами вида $B^n(x, \alpha \cdot \delta_D(x))$ назовем специальным покрытием с параметром α, если для любых двух шаров из $\mathcal{F}$ центр одного из них лежит вне другого.*

Символом $\mathcal{F}(\alpha)$ будем обозначать специальное покрытие с параметром α.

Теорема 3.13. *Пусть D область в R^n. Для любого $\alpha \in (0;1)$ существует специальное покрытие $\mathcal{F}$ с параметром α.*

Доказательство. Напомним, что $\mathcal{B}(\alpha)$ — семейство всех шаров вида $B^n(x, \alpha\delta_D(x))$, $x \in D$.

Пусть $\mathcal{F}_1^*$ максимальное подсемейство семейства $\mathcal{B}(\alpha)$, $\mathcal{F}_1^*$ счетно.

Предположим, построены семейства шаров $\mathcal{F}_1^*$, …,$\mathcal{F}_{k-1}^*$. Положим

$$V_k = D \setminus \bigcup \left\{ B : B \in \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_i^* \right\}$$

и рассмотрим семейство $\mathcal{F}_k^{**} \subset \mathcal{F}_0$, состоящее из шаров с центрами во множестве V_k. Через $\mathcal{F}_k^*$ обозначим максимальное подсемейство семейства $\mathcal{F}_k^{**}$, $\mathcal{F}_k^*$ не более, чем счетно. По построению семейство $\cup_{i=1}^k \mathcal{F}_i^*$ является (α, a)-семейством. Действительно, так как для любых двух шаров этого семейства центр одного из них лежит вне другого, по лемме 2.3

$$k_d(x_i, x_j) \ge \ln(1 + \alpha/3) = a,$$

здесь $x_i,\ x_j$ - центры шаров. Поэтому, по лемме 3.7 существует число p, такое, что любой шар семейства может пересечься не более, чем с p шарами из этого же семейства. Однако, шар семейства $\mathcal{F}_k^*$ пересекается с некоторым шаром из каждого $\mathcal{F}_i^*$, $1 \le i \le k-1$, следовательно $k-1 \le p$. Это означает, что процесс построения семейств $\mathcal{F}_k$ обязательно прекратится на шаге с номером $P \le p+1$ и

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{P} \mathcal{F}_i^*$$

есть покрытие области D. Покрытие $\mathcal{F}$ есть (α, a)-семейство.

Теорема 3.14. *Любое специальное, с параметром α, покрытие $\mathcal{F}$ собственной области $D \subset R^n$ представимо в виде объединения конечного числа непересекающихся между собой семейств $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$,...,$\mathcal{F}_M$. Каждое из семейств $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \dots, M$, состоит из непересекающихся между собой шаров.*

Доказательство. Выделим $\mathcal{F}_1$ — максимальное подсемейство семейства $\mathcal{F}$. Из оставшихся шаров семейства $\mathcal{F}$ выделим максимальное подсемейство $\mathcal{F}_2$.

Продолжим процесс. Заметим, что если $B \in \mathcal{F}_k$, то для любого $m < k$ шар B пересекается с некоторым шаром из каждого $\mathcal{F}_m$. Так как семейство $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям леммы 3.7, существует натуральное число P, такое, что B может пересечься не более, чем с P шарами из $\mathcal{F}$, поэтому наибольший номер подсемейств $\mathcal{F}_i$ не превышает $P+1$. Теорема доказана.

§5. Топологическая эквивалентность локально квазиконформных отображений и отображений класса QH

В этом параграфе представлен алгоритм пошаговой локальной аппроксимации локально квазиконформных отображений. Цель построений параграфа — доказательство теоремы 3.15, которая является аналогом предложения 3.3 для негомеоморфных локально инъективных отображений.

Понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 3.7. *Пусть G – собственная подобласть R^n, $z_0 \in \partial G$, $z_1, z_2 \in G$ и $k_G(z_1, z_2) \le d$. Тогда*

$$e^{-d}|z_0 - z_1| \le |z_0 - z_2| \le e^d |z_0 - z_1|.$$

Доказательство. Согласно следствию к лемме 2.1

$$|z_1 - z_2| \le (e^d - 1)\delta_G(z_1),$$

кроме того $\delta_G(z_1) \leq |z_1 - z_0|$, поэтому применение этих оценок к неравенству

$$|z_0 - z_2| \leq |z_0 - z_1| + |z_1 - z_2|$$

дает

$$|z_0 - z_2| \leq e^d |z_0 - z_1|.$$

Так как в данном рассуждении точки z_1 и z_2 равноправны, также верно неравенство

$$|z_0 - z_1| \leq e^d |z_0 - z_2|.$$

Предложение доказано.

Обозначения. Пусть D – область в R^n, $x \in R^n$, $r > 0$ и $S = S^{n-1}(x, r) \subset D$. Для непрерывного отображения $f : D \to R^n$ положим

$$L(f, r, x) = \max_{y \in S} |f(x) - f(y)| \,, \quad l(f, r, x) = \min_{y \in S} |f(x) - f(y)| \,.$$

В следующих леммах устанавливаются оценки искажения расстояний и искажений сфер при квазиконформных гомеоморфизмах.

Лемма 3.8. ([57], теорема 3). *Пусть f — K-квазиконформное отображение области $D \in R^n$ на область $G \in R^n$, $n \geq 2$. Тогда существует постоянная C, зависящая только от n и K, такая, что для любых x и y из D выполнено*

$$k_G(f(x), f(y)) \leq C \max(k_D(x, y), (k_D(x, y))^\sigma) \,,$$

где $\sigma = K^{1/(1-n)}$.

Следствие. *Пусть f удовлетворяет условиям леммы. Тогда для любых $x, y \in D$*

$$\Gamma^{-1}(k_D(x, y)) \leq k_G(f(x), f(y)) \leq \Gamma(k_D(x, y)) \,,$$

где $\Gamma(t) = C \max(t, t^\sigma)$ — гомеоморфизм $[0, \infty)$ на себя, при этом

$$\Gamma^{-1}(t) = \min(t/C, (t/C)^{1/\sigma}) \,.$$

Заметим, что функция Γ определяется двумя параметрами n и $K(f)$, которые не указаны в обозначении этой функции, чтобы не загромождать записи. Функцию Γ назовем оценочной для отображения f.

Лемма 3.9. *Если $f : 2B \to R^n$ — K-квазиконформное отображение шара $2B = B^n(0, 2r)$, то*

$$\frac{L(f, r, 0)}{l(f, r, 0)} \leq C,$$

где C – постоянная, величина которой определяется n и K.

Доказательство. Для $y \in S = S^n(0, r)$

$$k_{2B}(0, y) = \ln 2.$$

Тогда по следствию к лемме 3.8

$$a = \Gamma^{-1}(\ln 2) \leq k_{f(2B)}(f(0), f(y)) \leq \Gamma(\ln 2) = b. \qquad (1)$$

Для упрощения обозначений положим $\delta = \delta_{f(2B)}(f(x))$. Применим к неравенству (1) оценки квазигиперболического расстояния из следствия к лемме 2.1 и леммы 2.2, получим

$$(1 - e^a)\delta \leq |f(0) - f(y)| \leq \delta(e^b - 1),$$

откуда следует, что

$$\frac{L(f, r, 0)}{l(f, r, 0)} \leq \frac{e^b - 1}{1 - e^a} = C.$$

Следствие. *Для произвольной точки $x \in B = B^n(0, r)$ положим*

$$\delta(x) = \delta_B(x) = r - |x|.$$

Если f — K-квазиконформное отображение шара $2B$, то

$$\frac{L(f, \delta(x), x)}{l(f, \delta(x), x)} \leq C,$$

где C та же постоянная, что и в лемме.

Доказательство. Покажем, что для $x \in B$ шар $B^n(x, 2\delta(x))$ содержится в шаре $2B$. Пусть $y \in B^n(x, 2\delta(x))$, тогда

$$|y| \leq |y - x| + |x| \leq 2\delta(x) + |x| = 2r - |x| < 2r.$$

Так как ограничение f на шар $B^n(x, 2\delta(x))$ K-квазиконформно, применим лемму к паре шаров $B^n(x, \delta(x))$ и $B^n(x, 2\delta(x))$ и получим нужную оценку.

В лемме 3.10 обосновывается возможность аппроксимации отображения на области, применением алгоритма локальной аппроксимации, по сути это лемма о склейке двух отображений.

Лемма 3.10. *Пусть D — область в пространстве R^n, $n \geq 2$, $f : D \to R^n$ — локально инъективное K_1-квазиконформное отображение, такое, что ограничение f на некоторый шар $B = B^n(x_0, r) \subset D$ гомеоморфно.*

Если g — K_2-квазиконформное отображение шара B на область $U = f(B)$, такое, что существует $\varepsilon > 0$, с которым
$k_U(f(x), g(x)) < \varepsilon$ для любой точки $x \in B$. Тогда отображение

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & \textit{если} \quad x \in B, \\ f(x), & \textit{если} \quad x \in D \setminus B \end{cases}$$

локально K-квазиконформно в D, $K \leq \max\{K_1, K_2\}$.

Доказательство. Обозначим $U = f(B)$. Так как f и g — гомеоморфизмы, на B определено отображение $\varphi = f^{-1} \circ g$. Отображение φ квазиконформно как композиция двух квазиконформных гомеоморфизмов. Кроме того, φ тождественно на границе шара B (см. определение 3.3). Действительно,

$$k_B(x, \varphi(x)) = k_B(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(g(x))) \leq \Gamma(k_U(f(x), g(x))) \leq (\varepsilon \qquad (1)$$

где $\Gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — гомеоморфизм, соответствующий отображению f^{-1} (следствие к лемме 3.8). Оценки (1) позволяют заключить, что для $x_0 \in \partial B$ выполнено

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = x_0.$$

Таким образом, φ продолжается до гомеоморфизма замкнутого шара $\overline{B}$, причем это продолжение тождественно на границе ∂B. Рассмотрим отображение

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad x \in B, \\ f(x), & \text{если} \quad x \in D \setminus B \end{cases}$$

ψ — гомеоморфизм D на себя и для почти всех $x \in D \setminus \partial B$, то есть, почти всюду в D выполнено

$$||\varphi'(x)||^n \leq K(x) \cdot J(\psi, x).$$

При $x \in D \setminus B$ имеет место равенство $K(x) = 1$, если $x \in B$, то $K(x) \leq K(f^{-1} \circ K(g))$. То есть ψ — квазиконформный гомеоморфизм D на себя. Поясним почему ψ квазиконформно в окрестности точек множества ∂B. Любой квазиконформный гомеоморфизм шара B на себя можно продолжить до квазиконформного гомеоморфизма всего пространства R^n. В данном случае это продолжение — тождественное вне B отображение. Так как $F = f \circ \psi$, где ψ — гомеоморфизм D на себя, заключаем, что F топологически эквивалентно f, следовательно F, как и f, локально инъективно. Для коэффициента квазиконформности отображения F верна оценка $K(F) \leq \max\{K(f), K(g)\}$.

Лемма 3.11. *Пусть $B = B^n(x_0, R)$, $f : 3B \to R^n$ – K-квазиконформный гомеоморфизм и ограничение f на B является K_1-квазиизометрическим. Тогда $f|B$ — есть K_2-квазиизометрический относительно евклидовой метрики гомеоморфизм, $K_2 = K_2(K, K_1, n)$.*

Доказательство. Квазиизометричность f на B означает существование постоянных $a > 0$ и $b > 0$, $b/a = K_1^2$, таких, что для любой точки $x \in B$

$$\lambda(f, x) \geq a > 0, \quad \Lambda(f, x) \leq b.$$

Пусть $x_1, x_2 \in B$. Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| \leq b|x_1 - x_2|$.

Сложнее доказать оценку снизу для $|f(x_1) - f(x_2)|$. Пусть $r = |x_1 - x_2|/2$, Через y_i, $i = 1; 2$, обозначим ближайшую к центру x_0 точку сферы $S^{n-1}(x_i, r)$. Можно вывести формулы для этих точек:

$$y_i = x_i - r\frac{x_i - x_0}{|x_i - x_0|}.$$

Заметим, что $|y_i - x_0| = |r - |x_i - x_0||$. Проверим, что шары $B^n(y_i, r)$ $i = 1; 2$, содержатся в шаре B. Для произвольной точки $z \in B^n(y_i, r)$ выполнено

$$|z - x_0| \leq |z - y_i| + |y_i - x_0| < r + |y_i - x_0| = r + |r - |x_i - x_0||.$$

Если $r - |x_i - x_0| < 0$, то $|r - |x_i - x_0|| = |x_i - x_0| - r$ и

$$|z - x_0| < |x_i - x_0| < R.$$

Если же $r - |x_i - x_0| > 0$, то $|r - |x_i - x_0|| = r - |x_i - x_0|$ и

$$|z - x_0| \leq 2r - |x_i - x_0|.$$

Однако, $2r = |x_1 - x_2|$, поэтому правая часть последнего неравенства примет вид $|x_1 - x_2| - |x_i - x_0|$. Для определенности положим $x_i = x_1$. Тогда, согласно неравенству треугольника, имеем

$$|x_1 - x_2| - |x_i - x_0| \leq |x_0 - x_2| < R.$$

Действительно, шары $B^n(y_i, r)$ $i = 1; 2$, содержатся в шаре B. Воспользуемся теперь тем, что на этих шарах ограничение отображения $f|B$ (a, A)-квазиизометрическое, $\sqrt{A/a} = K_1$, и точки x_i лежат на границах этих шаров, получим оценки

$$|f(x_i) - f(y_i)| \geq a|x_i - y_i| = ar.$$

Отображение f квазиконформно на $3B$, поэтому по лемме 3.9

$$\min_{|z-x_i|=r} |f(x_i) - f(z)| \geq \frac{ar}{C}.$$

Так как шары $B^n(x_i, r)$ $i = 1; 2$ не пересекаются между собой, и f гомеоморфизм, не пересекаются и образы этих шаров, поэтому согласно последнему неравенству

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \frac{2ar}{C} = \frac{a|x_1 - x_2|}{C}.$$

Итак, $f|B$ является $(a/C, b)$-квазиизометрическим в евклидовой метрике или, в приведенных обозначениях, $K_1\sqrt{C}$-квазиизометрическим отображением. Лемма доказана.

Следующая лемма будет использована при описании свойств оператора замены переменного.

Лемма 3.12. *Пусть D — собственная подобласть R^n, $a \in D$, $0 < \beta < 1$, $B = B^n(a, \beta)$. Тогда для любых двух точек $x, y \in B$ выполнено*

$$k_D(x, y) \leq \beta k_B(x, y). \tag{2}$$

Доказательство. Простое геометрическое наблюдение позволяет получить для $x \in B$ оценку $\delta_D(x) \geq \delta_B(x) + (1-\beta)\delta_D(a)$. Так как $\delta_D(a) = (1/\beta)\delta_B(a) \geq (1/\beta)\delta_B(x)$, из предыдущего неравенства получим

$$\delta_D(x) \geq \frac{1}{\beta}\delta_B(x).$$

Пусть теперь ε — произвольное положительное число, x и y — точки из B и γ — спрямляемая кривая, соединяющая их в B, такая, что

$$k_B(x, y) + \varepsilon \geq \int\limits_\gamma \frac{ds}{\delta_B(z)}. \tag{3}$$

Так как

$$\int\limits_\gamma \frac{ds}{\delta_B(z)} \geq \frac{1}{\beta} \int\limits_\gamma \frac{ds}{\delta_D(z)}$$

и интеграл, стоящий в этом неравенстве справа, не меньше, чем $k_D(x, y)$, с учетом (3), имеем

$$k_B(x, y) + \varepsilon \geq \frac{1}{\beta} k_D(x, y).$$

Так как ε произвольно, верно неравенство (2).

Пусть D — собственная подобласть R^n, $0 < \beta < 1$. Через $\mathcal{F}(\beta)$ обозначим множество всех шаров вида $B^n(x, \beta\delta_D(x))$, $x \in D$.

Операторы аппроксимации

Напомним, что $K(f)$ означает коэффициент квазиконформности отображения f, $L(f)$ — коэффициент квазигиперболичности отображения f.

Пусть $QC(B^n)$ — множество всех квазиконформных гомеоморфизмов шара B^n в пространство R^n; $QH(B^n)$ — множество всех квазигиперболических гомеоморфизмов шара B^n в пространство R^n.

Для $\varepsilon > 0$ оператор

$$A_\varepsilon : QC(B^n) \to QH(B^n)$$

назовем регулярным оператором аппроксимации, если существует функция $C : [1;\infty) \to [1,\infty)$, такая, что для любого отображения $f \in QC(B^n)$ с коэффициентом квазиконформности $K(f)$ выполнено

$$\begin{array}{ll} 1) & L(A_\varepsilon(f)) \leq C(K(f)), \\ 2) & \text{для любой точки } x \in D \text{ выполнено} \\ & k_D(f(x), A_\varepsilon(f)(x)) < \varepsilon. \end{array}$$

Замечание. Теорема 3.3 означает, что при $n \neq 4$ существуют регулярные операторы аппроксимации.

Определение 3.13. *Пусть $f : D \to R^n$ – равномерно локально инъективное отображение с ограниченным искажением, $\beta \in (0;1)$ – параметр инъективности. Определим оператор аппроксимации $A[B,\varepsilon]$.*

Пусть $\alpha = \beta/3$ и $\mathcal{F}$ — специальное покрытие области D с параметром α, (определение 3.12).

В доказательстве теоремы 3.13 показано, что $\mathcal{F}$ есть (α, a)-семейство, где $a = \ln(1+\alpha)$. Тогда семейство $2\mathcal{F}$ является $(2\alpha, a)$-семейством и по теореме 3.14

$$2\mathcal{F} = 2\mathcal{F}_1 \cup 2\mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup 2\mathcal{F}_M,$$

где семейства $2\mathcal{F}_i$ состоят из непересекающихся между собой шаров и каждый шар семейства $2\mathcal{F}$ входит лишь в одно из семейств $2\mathcal{F}_i$.

Для $\varepsilon > 0$ и $B \in \mathcal{F}$ положим

$$A[B,\varepsilon](f)(x) = \begin{cases} A_\varepsilon(f)(x), & \text{если } x \in 2B, \\ f(x), & \text{если } x \in D \setminus 2B. \end{cases}$$

Отображение $A[B,\varepsilon](f)$ является отображением с ограниченным искажением области D. Его коэффициент квазиконформности K^* зависит только от n и K.

Обозначим

$$V_i = \cup\{2B : B \in \mathcal{F}_i\} \ , \ \ 1 \le i \le M \ ,$$

и каждому из семейств $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_M$ *поставим в соответствие оператор аппроксимации* $A_i[\varepsilon]$.

$$A_i[\varepsilon](f)(x) = \begin{cases} A[B,\varepsilon](f)(x), & \text{если } x \in 2B, B \in \mathcal{F}_i \\ f(x), & \text{если } x \in D \setminus V_i. \end{cases}$$

Также как и в случае оператора $A[B,\varepsilon]$, *отображение* $A_i[\varepsilon](f)$ *является отображением с ограниченным искажением.*

Далее, в теореме 3.15, построим отображение $F : D \to R^n$,

$$F = A_M[\varepsilon_M] \circ A_{M-1}[\varepsilon_{M-1}] \circ \cdots \circ A_1[\varepsilon_1](f) \ ,$$

которое окажется квазигиперболическим. Подбор параметров ε_i производится так, чтобы для любого шара $B \in \mathcal{F}_k$, $k \ge 2$, образ шара $2B$ при отображении

$$f_{k-1} = A_{k-1}[\varepsilon_{k-1}] \circ \cdots \circ A_1[\varepsilon_1](\varphi)$$

лежал в $f(3B)$, Тогда $f_{k-1}|2B$ будет инъективным и к f_{k-1} можно применить оператор аппроксимации $A[\varepsilon_k]$.

В доказательстве теоремы 3.15 кажется удобным представить операторы аппроксимации в виде композиции с некоторыми гомеоморфизмами области определения отображения f.

Операторы замены переменного

Пусть $f : D \to R^n$ — равномерно локально инъективное K-квазиконформное отображение с параметром инъективности 3α,
$\alpha \in (0, 1/3)$, (т.е. для любого $x \in D$ ограничение отображения f на шар $B^n(x, 3\alpha\delta_D(x))$ инъективно). Для $x_0 \in D$ и $B = B^n(x, 2\alpha\delta_D(x_0))$ через $f_{B,\varepsilon}$ обозначим гомеоморфизм шара B на $f(B)$, аппроксимирующий $f|B$ с точностью $\varepsilon > 0$ в квазигиперболической метрике (теорема 3.3). Через $\varphi_{B,\varepsilon}$ обозначим гомеоморфизм шара B на себя, соединяющий $f|B$ и $f_{B,\varepsilon}$, то есть

$$\varphi_{B,\varepsilon} = f^{-1} \circ f_{B,\varepsilon}.$$

Пусть i — целое число из промежутка $[1, M]$, $\varepsilon > 0$. Определим оператор замены (переменного)

$$S_i[\varepsilon]f(x) = \begin{cases} \varphi_{B,\varepsilon}(x), & \text{если } x \in 2B, \ B \in \mathcal{F}_i \\ x, & \text{если } x \notin \cup\{2B : B \in \mathcal{F}_i\}. \end{cases}$$

Операторы аппроксимации $A_i[\varepsilon]$ определяются тогда формулами

$$A_i[\varepsilon]f = f \circ (S_i[\varepsilon]f).$$

Отметим, что для любой точки $x \in B \in \mathcal{F}_i$ имеет место оценка $k_B(x, \varphi_{B,\varepsilon}(x)) < \Gamma_i(\varepsilon)$, где Γ_i — оценочная функция, соответствующая отображению $f^{-1}|(f(B))$ (следствие к лемме 3.8), тогда, согласно лемме 3.12, для любой точки $x \in R^n$ выполнено

$$k_D(x, S_i[\varepsilon]f(x)) < 2\alpha\Gamma_i(\varepsilon).$$

Лемма 3.13. *Пусть D — собственная подобласть пространства R^n и f — равномерно локально инъективное отображение с параметром β.*

Если $\beta_1 \in (0, \beta)$ и φ — гомеоморфизм области D на себя, тождественный на границе, такой, что для любого шара $B_1 \in \mathcal{B}(\beta_1)$ выполнено включение $\varphi(B) \subset B$, где B — концентрический шару B_1 шар семейства $\mathcal{B}(\beta)$, то отображение $f_1 = f \circ \varphi$ равномерно локально инъективно с параметром β_1.

Доказательство. Пусть B_1 — шар семейства $\mathcal{B}(\beta_1)$; $x_1, x_2 \in B_1$. Обозначим $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$. По условию леммы точки y_1 и y_2 лежат в шаре $B \in \mathcal{B}(\beta_1)$, на котором f инъективно. Таким образом, если $x_1 \neq x_2$, то

$$f_1(x_1) = f(\varphi(x_1) = f(y_1) \neq f(y_2) = f(\varphi(x_2)) = f_1(x_2),$$

что и означает инъективность f_1 на шаре B_1. Лемма доказана.

В лемме 3.14 установлен способ подбора параметров ε_i в доказательстве теоремы 3.15.

Лемма 3.14. *Пусть $\varepsilon > 0$. Если φ — гомеоморфизм области D на себя, такой, что для любой точки $x \in D$ выполнено*

$$k_D(x, \varphi(x)) \leq \varepsilon, \tag{4}$$

то образ любого шара $B \in \mathcal{F}(\beta)$ содержится в шаре $C \cdot B$, где $C = (e^{\varepsilon}(1+\beta)-1)$.

Доказательство. Пусть $B = B^n(x_0, \beta\delta(x_0))$ — шар из семейства $\mathcal{F}(\beta)$ и $x \in B$.

По следствию к лемме 2.1, согласно свойству (4) отображения φ, получим

$$|x - \varphi(x)| \leq \delta_D(x)(e^{\varepsilon} - 1). \tag{5}$$

Кроме того,

$$\delta_D(x) \leq (1+\beta)\delta_D(x_0). \tag{6}$$

Неравенство треугольника дает оценку

$$|x_0 - \varphi(x)| \le |x_0 - x| + |x - \varphi(x)|.$$

Применив ко второму слагаемому правой части неравенства (5) и (6) и заметив, что $|x_0 - x| < \beta\delta(x_0)$, получим

$$|x_0 - \varphi(x)| \le (e^{\varepsilon}(1+\beta) - 1)\delta_D(x_0).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма — основная в доказательстве теоремы 3.15, с ее помощью будет возможно обосновать, что при последовательном применении операторов аппроксимации не ухудшаются свойства отображения (квазиизометричность на шарах сохраняется).

Лемма 3.15. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) $0 < \alpha < 1/3$ и отображение $f : D \to R^n$ локально K-квазиконформное отображение с параметром инъективности 3α;

б) шар $B_1 \in \mathcal{B}(\alpha)$ таков, что ограничение отображения f на B_1 является M-квазиизометрическим гомеоморфизмом относительно евклидовой метрики, то есть для любых $x, y \in B_1$ выполнено

$$a|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le |x - y|,$$

где a и b — положительные постоянные, $\sqrt{b/a} = M$;

в) шар $B_2 \in \mathcal{B}(2\alpha)$, $\tilde{f} = A[(1/2)B_2, \varepsilon](f)$ — отображение полученное из f действием оператора аппроксимации, постоянная ε такова, что $\tilde{f}$ инъективна на любом шаре семейства $\mathcal{B}(2\alpha)$.

Тогда ограничение отображения $\tilde{f}$ на шар B_1 является M_1-квазиизометрическим относительно евклидовой метрики, $M_1 = M_1(K, M, n, \varepsilon)$.

Доказательство. Если шары B_1 и B_2 не пересекаются, то $\tilde{f}|B_1 = f|B_1$, следовательно, в этом случае $\tilde{f}|B_1$ является M-квазиизометрическим относительно евклидовой метрики.

Предположим, что шары B_1 и B_2 пересекаются, обозначим $V = B_1 \cap \overline{B}_2$. Оценим искажения отображения $\tilde{f}$ в точках, расположенных в разных частях шара B_1.

Если $x \in B_1 \setminus \overline{B}_2$, то

$$\Lambda(\tilde{f}, x) = \Lambda(f, x) \le b, \qquad \lambda(\tilde{f}, x) = \lambda(f, x) \ge a \tag{7}$$

Пусть $x \in B_1 \cap (\partial B_2)$. Обозначим $S(r) = S^{n-1}(x,r)$. При малых $r > 0$ сфера S пересекается с шаром B_1. Для точки $y \in S(r) \cap B_1$, в силу квазиизометричности отображения $f|B_1$, выполнено

$$a|x-y| \leq |f(x) - f(y)| \leq b|x-y|. \tag{8}$$

По лемме 3.10 отображение $\tilde{f}$ квазиконформно в окрестности точки x, поэтому по лемме 3.9

$$\frac{L(\tilde{f}, r, x)}{l(\tilde{f}, r, x)} \leq C. \tag{9}$$

Так как $f(x) = \tilde{f}(x)$, $f(y) = \tilde{f}(y)$ и

$$l(\tilde{f}, r, x) \leq |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq L(\tilde{f}, r, x)$$

из неравенств (8) и (9) следуют оценки

$$L(\tilde{f}, r, x) \leq C \cdot l(\tilde{f}, r, x) \leq C \cdot b|x-y|$$

и

$$l(\tilde{f}, r, x) \geq \frac{1}{C} L(\tilde{f}, r, x) \geq \frac{a}{C}|x-y|,$$

которые верны при малых r. Следовательно

$$\Lambda(\tilde{f}, x) \leq C \cdot b, \quad \lambda(\tilde{f}, x) \geq \frac{a}{C}.$$

Положим $M_2 = \sqrt{(C \cdot b) \Big/ (a/C)} = C \cdot M$.

Теперь возьмем точку x из множества $V = B_1 \cap B_2$. Обозначим $\delta = \delta_{B_2(x)}$, $S = S^{n-1(x,\delta)}$. В силу выпуклости множества V множество $S \cap V$ не пусто то есть, найдется точка $y \in V \subset B_1$, $y \in S$. Из квазиизометричности отображения f на шаре B_1 следует, что

$$a\delta \leq |f(x) - f(y)| \leq b\delta. \tag{10}$$

Обозначим $U = f(B_2)$. Очевидны неравенства

$$l(f, \delta, x) \leq \delta_U(f(x)) \leq L(f, x) \leq C \cdot b. \tag{11}$$

$$l(f, \delta, x) \leq |f(x) - f(y)| \leq L(f, x) \leq C \cdot b. \tag{12}$$

По условию a) доказываемой леммы, отображение f инъективно на шаре $(3/2)B^n(x,\delta)$, поэтому по лемме 3.9

$$\frac{L(f, \delta, x)}{l(f, \delta, x)} \leq C.$$

С помощью неравенств (10) — (12) сделаем оценки

$$\delta_U(f(x)) \leq L(f,\delta,x) \leq C \cdot l(f,\delta,x) \leq C|f(x)-f(y)| \leq b \cdot C\delta$$

и

$$\delta_U(f(x)) \geq l(f,\delta,x) \geq \frac{1}{C}L(f,\delta,x) \geq \frac{1}{C}|f(x)-f(y)| \geq \frac{a}{C}\delta.$$

Таким образом,

$$\frac{a}{C} \leq \frac{\delta_U(f(x))}{\delta} \leq b \cdot C \tag{13}$$

Рассмотрим отображение $\tilde{f}$. Так как $\tilde{f}(B_2) = f(B_2) = U$, имеют место оценки

$$l(\tilde{f},\delta,x) \leq \delta_U(\tilde{f}(x)) \leq L(\tilde{f},\delta,x) \tag{14}$$

Из свойств оператора аппроксимации следует, что

$$k_U(\tilde{f}(x), f(x)) < \varepsilon \tag{15}$$

Пусть $x_0 \in \partial B_2$, такая точка, что $|f(x)-f(x_0)| = \delta_U(f(x))$. Тогда по предложению 3.6

$$|\tilde{f}(x)-f(x_0)| \leq e^{\varepsilon}|f(x)-f(x_0)| = e^{\varepsilon}\delta_U(f(x))$$

Так как $\delta_U(\tilde{f}(x)) \leq |\tilde{f}(x)-f(x_0)|$, заключаем, что

$$\delta_U(\tilde{f}(x)) \leq e^{\varepsilon}\delta_U(f(x)) \tag{16}$$

Меняя ролями $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ можно доказать оценку

$$\delta_U(f(x)) \leq e^{\varepsilon}\delta_U(\tilde{f}(x)). \tag{17}$$

Так как отображение $\tilde{f}|B_2$ является K_1-квазигиперболическим гомеоморфизмом, выполнены неравенства

$$\frac{\Lambda(\tilde{f},x)}{\delta_U(\tilde{f},x)} \leq \frac{K_1}{\delta_{B_2}(x)} \text{ и } \frac{\lambda(\tilde{f},x)}{\delta_U(\tilde{f},x)} \geq \frac{1}{K_1\delta_{B_2}(x)}.$$

С учетом оценок (15) и (17) и того, что $\delta_{B_2}(x) = \delta$, находим

$$\Lambda(\tilde{f},x) \leq \frac{K_1e^{\varepsilon}\delta_U(f(x))}{\delta}, \quad \lambda(\tilde{f},x) \geq \frac{\delta_U(f(x))}{K_1e^{\varepsilon}\delta}$$

Применяя к правым частям полученных неравенств оценки (13), получим

$$\Lambda(\tilde{f},x) \leq K_1e^{\varepsilon}bC = \tilde{b}, \quad \lambda(\tilde{f},x) \geq \frac{a}{K_1e^{\varepsilon}C} = \tilde{a}.$$

Положим $\tilde{M}_1 = \sqrt{\tilde{b}/\tilde{a}} = K_1 e^{\varepsilon} CM$. Итак, в какой части шара B_1 ни была бы расположена точка x, верны оценки

$$\Lambda(\tilde{f}, x) \leq \tilde{b}, \quad \lambda(\tilde{f}, x) \geq \tilde{a},$$

то есть, $\tilde{f}|B_1$ является $\tilde{M}_1$-квазиизометрическим гомеоморфизмом. По лемме 3.11 существует число $M_1 = M_1(K, M, n)$, такое, что гомеоморфизм $\tilde{f}|B_1$ — M_1-квазиизометрический относительно евклидовой метрики. Лемма доказана.

Теорема 3.15. *Предположим, что для данного n существует регулярный оператор аппроксимации. Пусть D собственная подобласть пространства R^n и f — локально инъективное K-квазиконформное отображение.*

Тогда f сильно эквивалентно локально инъективному K^*-квазигиперболическому отображению F. Величина постоянной K^* зависит только от K и n и от параметра инъективности отображения f.

Доказательство. Так как f локально инъективное квазиконформное отображение, оно является равномерно локально инъективным . Пусть β — параметр инъективности отображения f.

Воспользуемся далее специальным покрытием $\mathcal{F}$ области D шарами. Пусть $\alpha = \beta/3$ — параметр этого покрытия, то есть, $\mathcal{F}$ состоит из шаров вида $B^n(x, \alpha\delta_D(x))$, $x \in D$. Напомним (см. определение 3.13), что покрытие $2\mathcal{F}$ является $(2\alpha, a)$-семейством, где $a = \ln(1 + \alpha)$ и представимо в виде объединения непересекающихся семейств шаров:

$$2\mathcal{F} = 2\mathcal{F}_1 \cup 2\mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup 2\mathcal{F}_M.$$

Подействуем на отображение f оператором замены переменного $S_1[\varepsilon_1]$, получим гомеоморфизм $\varphi_1 : D \to D$, $\varphi_1 = S_1[\varepsilon_1]f$. Параметр ε_1 выбран так, чтобы образы шаров семейства $(2 + (M-1)/M)\mathcal{F}$ при отображении φ_1 лежали в концентрических шарах семейства $3\mathcal{F}$ (такой выбор ε_1 возможен по лемме 3.14). По условию теоремы отображение f инъективно на шарах семейства $3\mathcal{F}$, тогда по лемме 3.13 отображение $f_1 = f \circ \varphi_1$ инъективно на шарах семейства $(2 + (M-1)/M)\mathcal{F}$.

Далее построим отображение $\varphi_2 = S_2[\varepsilon_2]f_1$, параметр ε_2 подберем так, чтобы образы шаров семейства $(2 + (M-2)/M)\mathcal{F}$ при отображении φ_2 лежали в концентрических шарах семейства $(2 + (M-1)/M)\mathcal{F}$. Тогда образы шаров из $(2 + (M-2)/M)\mathcal{F}$ при отображении $\varphi_1 \circ \varphi_2$ содержатся в шарах семейства $3\mathcal{F}$ и отображение $f_2 = f_1 \circ \varphi_2 = f \circ \varphi_1 circ \varphi_2$ инъективно на шарах из $(2+(M-2)/M)\mathcal{F}$.

Продолжая процесс, придем к отображению φ_M. Параметр ε_M подобран так, чтобы образы шаров семейства $2\mathcal{F}$ при отображении φ_M лежали в концентрических шарах семейства $(2+1/M)\mathcal{F}$. Тогда образы шаров семейства $2\mathcal{F}$ при отображении

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_M$$

лежат в концентрических шарах семейства $3\mathcal{F}$ и отображение

$$f_M = f_{M-1} \circ \varphi_M = f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_M$$

инъективно на шарах из $2\mathcal{F}$. Заметим, что гомеоморфизм φ_M тождественный на границе области D, поэтому тождественный на границе и гомеоморфизм $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_M$.

Иллюстрируем изложенные рассуждения таблицей. Пусть
$B_M \in 2\mathcal{F}$, доказаны следующие включения:

$$\begin{array}{lllll}
\varphi(B_M) & \subset & B_{M-1} & \in & (2+\frac{1}{M})\mathcal{F}, \\
\varphi(B_{M-1}) & \subset & B_{M-2} & \in & (2+\frac{2}{M})\mathcal{F}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\varphi(B_2) & \subset & B_1 & \in & (2+\frac{M-1}{M})\mathcal{F}, \\
\varphi(B_1) & \subset & B_0 & \in & (2+\frac{M}{M})\mathcal{F}.
\end{array}$$

Обозначим $F = f_M$, отображение F является квазиконформным локально инъективным отображением с параметром инъективности 2α.

Осталось проверить, что F является квазигиперболическим отображением.

По лемме 3.10 f_1 локально K_1-квазиконформно, ограничения этого отображения на шары семейства $2\mathcal{F}_1$ — суть квазигиперболические гомеоморфизмы, ограничения же на шары семейства $\mathcal{F}_1$ — квазиизометрические отображения (теорема 2.2). Тогда по лемме 3.11 ограничения f_1 на шары семейства $\mathcal{F}_1$ подобны $\tilde{K}_1$-квазиизометрическим в евклидовой метрике отображениям. Рассуждая подобным образом, можно установить, что отображение f_2 K_2-квазиконформно, и на шарах семейства $\mathcal{F}_2$ ограничение f_2 подобно $\tilde{K}_2$-квазизометрическим в евклидовой метрике отображениям. По лемме 3.15 f_2 остается подобным $\tilde{K}_2$-квазиизометрическим отображением и на шарах семейства $\mathcal{F}_1$. Таким образом, f_2 — локально инъективное локально K_2-квазиконформное отображение, являющееся подобным $\tilde{K}_2$-квазиизометрическим на шарах семейства $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Продолжая рассмотрение отображений $f_1, f_2, \ldots, f_M$, можно убедиться, что отображение f_M является локально инъективным на D и на шарах семейства $\mathcal{F}$ подобно $\tilde{K}_M$-квазиизометрическим отображениям.

Покажем теперь, что на любом шаре $B = B^n(x, \delta(x))$, где $x \in D$, отображение f_M подобно K_0-квазиизометрическому отображению, $K_0 = K_0(n, K)$.

Так, как это было сделано в доказательстве леммы 3.7, можно показать, что шар B пересекается не более. чем с N шарами покрытия $\mathcal{F}$. Следовательно для любых двух точек x и y из шара B найдется цепочка шаров покрытия $\mathcal{F}$, соединяющая x и y. То есть найдется набор шаров $\{B_i\} \subset \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $p \leq N$, такой, что $x \in B_1$, $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ для $i = 1, 2, \ldots, p-1$ и $y \in B_p$. Из свойств цепочки $\{B_i\}$ следует существование точек $x_i \in B_{i-1} \cap B_i$, $i = 2, 3, \ldots, p-1$.

Ограничение отображения f_M на любой шар семейства $\mathcal{F}$ подобно K_M-квазиизометрическому отображению, поэтому можно провести следующие оценки. Так как $x, x_2 \in B_1$,

$$\lambda(f_M, x_2) \leq K_M^2 \lambda(f_M, x).$$

Так как $x_2, x_3 \in B_2$,

$$\lambda(f_M, x_3) \leq K_M 2\lambda(f_M, x_2) \leq K_M^4 \lambda(f_M, x).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Так как $x_{p-1}, y \in B_p$,

$$\Lambda(f_M, y) \leq K_M^2 \lambda(f_M, x_{p-1}) \leq K_M^{2^{p-1}} \lambda(f_M, x).$$

Обозначим $L = K_M^{2^{p-1}}$. Итак, доказано, что для произвольных двух точек x и y шара B выполнено

$$\Lambda(f_M, y) \leq L\lambda(f_M, x),$$

это означает, что f_M подобно L-квазиизометрическому отображению на шаре B.

Так как B — произвольный шар семейства $\mathcal{B}(\alpha)$, по теореме 2.2 отображение f_M является K^*-квазигиперболическим с K^*, зависящим только от L, α и n то есть от K, β и n. Положим, $F = f_M$.
Теорема доказана.

Замечание. Согласно теореме 3.3 Тукиа-Вяйсяля об аппроксимации гомеоморфизмов, при $n \neq 4$ существует регулярный оператор аппроксимации, поэтому при таких n любое локально инъективное квазиконформное отображение собственной подобласти R^n сильно эквивалентно некоторому QH-отображению.

Глава 4. Топологическая эквивалентность квазиконформных и квазиизометрических инволюций R^n

Инволюцией топологического пространства X называется гомеоморфизм φ, отображающий X на себя, такой, что для любой точки $x \in X$

$$\varphi(\varphi(x)) = x.$$

Здесь будут рассмотрены квазиконформные инволюции R^n.

Заметим, что если две инволюции $\varphi : R^n \to R^n$ и $\psi : R^n \to R^n$ имеют одно и то же множество неподвижных точек L, то они эквивалентны, причем существует такой соединяющий их гомеоморфизм ξ, что $\xi(x) = x$ для любой точки $x \in L$. Справедливость этого высказывания проверяется указанием гомеоморфизма $\xi = \varphi \circ \psi$.

§1. История вопроса

В книге Л.Альфорса [2] доказано, что если φ – квазиконформное отражение относительно кривой, то существует квазиизометрическое (в евклидовой метрике) отражение относительно этой же кривой. Этот результат перенесен на пространства размерности $n > 2$, $n \neq 4$, P.Tukia и J.Väisälä [76]. Ими установлено, что если φ – квазиконформная инволюция R^n со множеством неподвижных точек L, причем L разбивает R^n, то есть множество $U = R^n \setminus L$ несвязно, то существует квазиизометрическая инволюция с тем же самым множеством неподвижных точек L.

Цель настоящей главы — доказательство теоремы (теорема 4.4) в случае когда множество неподвижных точек инволюции φ не разбивает пространства R^n. Схема доказательство была депонирована в 1985 году в работе [18], однако, в той работе свойство отталкивания союзных точек квазиконформных инволюций (теорема 4.1) не было доказано, а накладывалось дополнительно. В 1999 году было опубликовано доказательство без дополнительных предположений [33].

Идея доказательства состоит в том, чтобы квазиконформную инволюцию φ аппроксимировать отображением φ_a квазигиперболическим на U (см. [2]). Аппроксимация квазиконформных гомеоморфизмов при $n \neq 4$ возможна согласно упомянутой работе [76], однако, отображение φ_a будучи квазиизометрическим, может не быть инволюцией. Для того, чтобы аппроксимирующее отображение было инволюцией пришлось применить громоздкую конструкцию локальной аппроксимации.

Замечание. Оценки постоянных в леммах весьма грубые. Вычисление точных оценок не оправданно, так как доказательства двух вспомогательных теорем — теоремы 4.1 и теоремы 4.3, не позволяют эффективно вычислять постоянные в неравенствах.

§2. Отталкивание союзных точек квазиконформных инволюций

Через L будем обозначать множество неподвижных точек инволюции φ, $U = R^n \setminus L$, $\delta(x)$ — евклидово расстояние от $x \in U$ до L.

Точки x и y назовем союзными (относительно инволюции φ), если $\varphi(x) = y$, ясно, что при этом $\varphi(y) = x$.

Определение 4.1. *Будем говорить, что союзные точки инволюции* $\varphi : R^n \to R^n$ *отталкиваются, если существует число* C *такое, что для любой точки* $x \in U\setminus L$ *(т.е.* x *не есть неподвижная точка* φ*) выполнено*

$$\delta(x) \leq C|x - \varphi(x)| \tag{1}$$

Согласно оценкам леммы 2.3 неравенство (1) означает существование числа C^*, с которым для любой $x \in U$ верна оценка квазигиперболического расстояния $k_U(x, \varphi(x)) \geq C^*$.

Доказательство основного утверждения этого параграфа (Теорема 4.1) опирается на следующие три леммы.

Лемма 4.1. [42, с. 482]. *Любая инволюция* R^n *имеет неподвижные точки.*

Лемма 4.2. *Пусть* f *– гомеоморфизм* R^n *на некоторую область* $U \in R^n$*. Если существует число* $m > 0$ *такое, что для любой точки* x *из* R^n *шар* $B^n(x, m|x - f(x)|)$ *содержит точку* y *такую, что* $|y - f(y)| < |x - f(x)|/2$*, то шар* $B^n(x, 2m|x - f(x)|)$ *содержит неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть x – произвольная точка, согласно условию леммы найдется точка $y = \psi(x)$ такая, что

$$|x - y| \leq m|x - f(x)| \quad \text{и} \quad |y - f(y)| < |x - f(x)|/2.$$

Для отображения $\psi : R^n \to R^n$ справедливы оценки

$$|x - \psi(x)| \le m|x - f(x)|, \tag{2}$$

$$|\psi(x) - f(\psi(x))| < |x - f(x)|/2. \tag{3}$$

Заметим, что если x неподвижная точка отображения f, то $y = \psi(x) = x$. Построим последовательность точек $\{x_n\}, n \in N$, взяв за x_1 произвольную точку и положив $x_n = \psi(x_{n-1})$ для $n > 1$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Пусть $m, n \in N$, оценим $|x_{n+m} - x_n|$. Из неравенства треугольника следует

$$|x_{n+m} - x_n| \le |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + ... + |x_{n+1} - x_n|. \tag{4}$$

По свойству (2) для любого k

$$|x_k - x_{k-1}| = |\psi(x_{k-1}) - x_{k-1}| \le m|x_{k-1} - f(x_{k-1})|.$$

Так как $x_{k-1} = \psi(x_{k-2})$, свойство (3) позволяет заключить, что

$$|x_{k-1} - f(x_{k-1})| \le |x_{k-2} - f(x_{k-2})|/2 \le |x_1 - f(x_1)|/2^{k-2}. \tag{5}$$

Применяя полученные оценки к неравенству (4), получим оценку

$$|x_{n+m} - x_n| \le m|x_1 - f(x_1)|(1/2^{n+m-1} + 1/2^{n+m-2} + ... + 1/2^n)|. \tag{6}$$

Так как сумма, стоящая в скобках оценивается сверху числом $1/2^{n-1}$, заключаем, что

$$|x_{n+m} - x_n| \le \frac{m}{2^n}|x_1 - f(x_1)|.$$

Полученное неравенство означает фундаментальность последовательности x_n.

Через x_0 обозначим предел последовательности x_n. Согласно оценке (5)

$$|x_n - f(x_n)| \le |x_1 - f(x_1)|/2^{n-1}. \tag{7}$$

Отображение f непрерывно, поэтому последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$, тогда, переходя к пределу в неравенстве (7), получим

$$|x_0 - f(x_0)| \le 0.$$

Учитывая неотрицательность модуля, заключаем, что x_0 неподвижная точка отображения f.

Согласно неравенству (6)

$$|x_n - x_1| \le 2m|x_1 - f(x_1)|.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получим

$$|x_0 - x_1| \le 2m|x_1 - f(x_1)|,$$

то есть, расстояние от точки x_1 до множества неподвижных точек отображения f не превосходит правой части последнего неравенства. Лемма доказана.

Лемма 4.3. ([57, теорема 3]). *Пусть f — K-квазиконформное отображение области $D \in R^n$ на область $G \in R^n$, $n \ge 2$. Тогда существует постоянная C, зависящая только от n и K, такая, что для любых x и y из D выполнено*

$$k_G(f(x), f(y)) \le C \max(k_D(x,y), (k_D(x,y))^\sigma) \,,$$

где $\sigma = K^{1/(1-n)}$.

Следствие. *Пусть f удовлетворяет условиям леммы. Тогда для любых $x, y \in D$*

$$\Gamma^{-1}(k_D(x,y)) \le k_G(f(x), f(y)) \le \Gamma(k_D(x,y)) \,,$$

где $\Gamma(t) = C\max(t, t^\sigma)$ — гомеоморфизм $[0, \infty)$ на себя, при этом

$$\Gamma^{-1}(t) = \min(t/C, (t/C)^{1/\sigma}) \,.$$

Теорема 4.1.(Отталкивание союзных точек.) *Пусть φ – K-квазиконформная инволюция R^n, L ее множество неподвижных точек, L не разделяет R^n, $U = R^n \setminus L$. Существует число C, зависящее только от K и n такое, что для любой точки $x \in U$ выполнено*

$$\delta(x) \le C|x - \varphi(x)|.$$

То есть, союзные точки квазиконформной инволюции отталкиваются.

Приведем два доказательства — для малых коэффициентов квазиконформности и для произвольных коэффициентов. Первое, будучи конструктивным, позволяет оценивать искажения отображений. Второе доказательство опирается на свойство компактности семейства квазиконформных отображений и позволяет установить лишь наличие свойства отталкивания, не давая инструмента для эффективного вычисления констант.

Предложение 4.1. [71]. *Любое квазиконформное отображение $f : R^n \to R^n$ обладает D-свойством* [49], *то есть существует постоянная $d = d(K, n)$,* *зависящая только от коэффициента квазиконформности отображения f и от размерности пространства n такая, что для любого $r > 0$ и любого $x \in R^n$ выполнено*

$$\frac{\max_{|x-y|=r} |f(x) - f(y)|}{\min_{|x-y|=r} |f(x) - f(y)|} \leq d.$$

Отметим, что

$$\lim_{K \to 1} d(K, n) = 1.$$

Доказательство теоремы 4.1 для инволюций с малым коэффициентом квазиконформности.

Итак, пусть коэффициент квазиконформности инволюции φ близок к 1 так, что $d \leq 3/2$. Возьмем произвольную точку $x \in U$ и обозначим $y = \varphi(x)$, $\gamma : [0, r] \to R^n$ — натуральная параметризация отрезка $[x, y]$.

Рассмотрим функцию $\sigma(t) = |x - \gamma(t)| - |x - \varphi(\gamma(t))|$.

$$\sigma(0) = |x - x| - |x - y| < 0\,,$$

$$\sigma(r) = |x - y| - |x - x| > 0.$$

Так как функция σ непрерывна, найдется число t_0 такое, что $\sigma(t_0) = 0$, то есть $|x - \gamma(t_0)| = |x - \varphi(\gamma(t_0))|$. Это означает, что точки $z = \gamma(t_0)$ и $w = \varphi(z)$ лежат на сфере $S = S^{n-1}(x, |x - z|)$. Так как φ – инволюция, эти же точки лежат на $\varphi(S)$. Согласно D-свойству отображения φ имеет место неравенство $|y - w| \leq d|y - z|$. Обозначим $|x - z| = r$. Неравенство треугольника дает

$$|w - z| \leq |w - y| - |z - y| \leq d|y - z| - |z - y| = (d - 1)|y - z|.$$

Так как $|y - z| < l$, заключаем, что

$$|w - z| \leq (d - 1)l \leq \frac{l}{2}.$$

Таким образом, φ удовлетворяет условию леммы 4.2 с постоянной $m = 1$, поэтому в шаре

$$\overline{B}(x, 2|x - \varphi(x)|)$$

содержится неподвижная точка отображения φ. Значит для любой $x \in U$ выполнено

$$\delta(x) \leq 2|x - \varphi(x)|. \tag{8}$$

Напомним, что $\delta(x)$ это расстояние от точки x до множества неподвижных точек L. Доказательство для малого коэффициента квазиконформности закончено.

Замечание. Коэффициент 2 в формуле (8) можно улучшить, если предварительно оценить сверху отношение l/r.

Доказательство теоремы 4.1 для случая произвольного коэффициента квазиконформности.

Предположим, что существуют квазиконформные инволюции R^n для которых не выполнены условия леммы 4.2. Сформулируем точнее.

Через Ω обозначим класс K-квазиконформных отображений R^n. Предположим, найдется такое $K > 1$, что для любого натурального k найдется инволюция $\varphi_k \in \Omega$ такая, что существует $x_k \in R^n$ для которого $\varphi_k(x_k) \neq x_k$ и для любой точки y из шара $B^n(x_k, k|x_k - \varphi_k(x_k)|)$ выполнено

$$|y - \varphi_k(y)| \geq \frac{1}{2}|x_k - \varphi_k(x_k)|.$$

Нормируем семейство инволюций $\{\varphi_k\}$, то есть преобразуем отображения, составляющие его к стандартному виду. Пусть $e = (1, 0, 0, ..., 0) \in R^n$, A_k — одно из ортогональных преобразований R^n, переводящее вектор e в вектор, сонаправленный вектору
$(\varphi_k(x_k) - x_k)$. Определим

$$B_k(x) = |x_k - \varphi_k(x_k)|A_k(x) + x_k$$

Отметим, что B_k – мебиусово отображение, $B_k(0) = x_k$, $B_k(e) = \varphi_k(x_k)$, $B_k(\infty) = \infty$. Положим

$$\Phi_k = B_k^{-1} \circ \varphi_k \circ B_k\,.$$

Φ_k как и φ_k является K-квазиконформной инволюцией, $\Phi_k(0) = e$, $\Phi_k(e) = 0$, $\Phi_k(\infty) = \infty$ и для любой точки $|x| < k$ имеет место оценка

$$|\Phi_k(x) - x| > \frac{1}{2} \tag{9}$$

Последовательность K-квазиконформных отображений $\{\Phi_k\}$ образует нормальное семейство [71], то есть равностепенно непрерывна на компактных подмножествах R^n. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на компактных подмножествах R^n, при этом предельное отображение либо K-квазиконформно, либо постоянно [39]. Чтобы не усложнять обозначения будем считать, что последовательность $\{\Phi_k\}$ равномерно сходится на компактных подмножествах R^n к отображению Φ.

Покажем, что предельное отображение Φ является инволюцией. Легко проверить, что Φ не постоянно, действительно

$$\Phi(0) = \lim_{k\to\infty} \Phi_k(0) = e \neq 0.$$

Нормировка отображений Φ_k обеспечивает также равенство

$$\Phi_k(\infty) = \infty.$$

Таким образом, отображение Φ является квазиконформным гомеоморфизмом R^n.

Пусть $x \in R^n$, $y = \Phi(x)$. Обозначим $y_k = \Phi_k(x)$. Заметим, что

$$y = \Phi(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi_k(x) = \lim_{k\to\infty} y_k.$$

Докажем равенство $\Phi(y) = x$.

$$|\Phi(y) - x| = \lim_{k\to\infty} |\Phi_k(y) - x| = \lim_{k\to\infty} |\Phi_k(y) - \Phi_k(y_k)|. \tag{10}$$

Так как $y_k \to y$ и семейство $\{\Phi_k\}$ равностепенно непрерывно в окрестности точки y, заключаем, что последний предел в цепочке равенств (10) равен 0. Итак, если $y = \Phi(x)$, то $\Phi(x) = y$, то есть Φ — инволюция.

Из оценки (9) следует, что

$$|\Phi(x) - x| = \lim_{k\to\infty} |\Phi_k(x) - x| \geq \frac{1}{2}$$

для любого $|x| < k$, $k \in N$. То есть, для любого $x \in R^n$выполнено

$$|\Phi(x) - x| \geq \frac{1}{2}.$$

Итак, установлено, что Φ квазиконформная инволюция R^n без неподвижных точек. Это противоречит лемме 4.1. Противоречие указывает,на то, что предположение, сделанное в начале доказательства не верное, то есть верно утверждение теоремы.

Следствие 1. *Если φ удовлетворяет условиям теоремы* 4.1*, то для любой точки $x \in U$ выполнено*

$$k_U(x, \varphi(x)) \geq a = \ln(1 + 1/C)\ .$$

Доказательство. Для $z \in U$, $r > 0$, квазигиперболическим шаром назовем множество $H(z, r) = \{y \in U : k_D(z, y) < r\}$. Согласно лемме 2.1

$$k_U(x, \varphi(x)) \geq \ln \frac{\delta(x) + |x - \varphi(x)|}{\delta(x)}.$$

По теореме 4.1 $|x - \varphi(x)| \geq \delta(x)/C$, применим эту оценку к предыдущему неравенству и получим

$$k_U(x, \varphi(x)) \geq \ln(1 + 1/C).$$

Следствие 2. *Существует число* $\beta \in (0,1)$*, такое, что для любого* $x \in U$ *шар* $B^n(x, \beta\delta(x))$ *не пересекается со своим* φ*-образом и*

$$\varphi(B^n(x, \beta\delta(x))) \subset B^n(\varphi(x), \delta(x)/2)\,.$$

Доказательство. Так как $k_U(x, \varphi(x)) \geq a$, для всех $x \in U$ выполнение условия $\Gamma(t)+t \leq a$ гарантирует, что квазигиперболические шары $H(x,t)$ и $H(\varphi(x), \Gamma(t))$ не пересекаются. Пусть $y \in H(x,t)$, тогда согласно следствию 1

$$k_U(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \Gamma(k_U(x,y)) \leq \Gamma(t)\,.$$

Поэтому $\varphi(H(x,t)) \subset H(\varphi(x), \Gamma(t))$, значит $H(x,t) \cap \varphi(H(x,t)) = \emptyset$.

Пусть t_0 — максимальное среди чисел t, удовлетворяющих условиям $\Gamma(t)+t \leq a$ и $\Gamma(t) \leq \ln 3/2$. Первое из этих условий означает, что $H(x,t_0)$ не пересекается со своим образом, из второго (с помощью леммы 2.2) следует включение $\varphi(H(x,t_0)) \subset B^n(x, \delta(x)/2)$.

Оценка сверху из леммы 2.3 позволяет заключить, что $H(x,t_0)$ содержит шар $B^n(x, \alpha\delta(x))$, где $\alpha = 1 - e^{-t_0}$. Следствие доказано.

§3. Покрытия области U.

Обозначения. φ — K-квазиконформная инволюция R^n со множеством неподвижных точек L, $U = R^n \backslash \mathrm{L}$, U — связно. Если Ξ– некоторое семейство множеств из U, $\varphi(\Xi)$ обозначает семейство их φ-образов. Для $B = B^n(x,r)$ и $p > 0$ положим $pB = B^n(x, pr)$. Если $\mathcal{Q}$ — семейство шаров, то через $p\mathcal{Q}$ обозначаем семейство шаров вида pB, $B \in \mathcal{Q}$. Для $\gamma \in (0;1)$ символом $\mathcal{B}(\gamma)$ обозначим множество всех шаров вида $B^n(x, \gamma\delta(x))$, $x \in U$.

Пусть β — число, определенное в следствии 2 теоремы 4.1, то есть для любого $x \in U$ шар $B^n(x, \beta\delta(x))$ не пересекается со своим φ-образом и

$$\varphi(B^n(x, \beta\delta(x))) \subset B^n(\varphi(x), \delta(x)/2)\,.$$

Дополнительно предположим, что $\beta < 1/2$ и обозначим $\alpha = \beta/3$.

Согласно теореме 3.14 существует специальное покрытие $\mathcal{F}$ области U шарами вида $B^n(x, \alpha\delta(x))$, $x \in U$ такое, что для любых двух шаров B_1 и B_2 из $\mathcal{F}$, центр одного из них лежит вне другого.

Пусть $\mathcal{F}_i$ — подсемейство семейства $\mathcal{F}$. Для $p > 0$ через $p\mathcal{W}_i$ обозначим семейство множеств вида $pB \cup (\varphi(pB))$, $B \in \mathcal{F}_i$.

Теорема 4.2. *Свойства семейства $2\mathcal{W}$.*

1) Существует натуральное число $N = N(n, K(\varphi))$, такое, что каждое из множеств $w \in 2\mathcal{W}$ пересекается не более, чем с N множествами из $2\mathcal{W}$.

2) семейство $2\mathcal{W}$ представимо в виде объединения конечного числа не пересекающихся между собой семейств $2\mathcal{W}_1$, $2\mathcal{W}_2$,…,$2\mathcal{W}_M$, $M \leq N+1$. Каждое из семейств $2\mathcal{W}_i$ состоит из не пересекающихся между собой множеств вида $B \cup \varphi(B)$, $B \in 2\mathcal{F}$.

Доказательство. 1) Согласно выбору постоянной α в определении семейства $2\mathcal{F}_0$, имеют место включения

$$B = B^n(x, \alpha\delta(x)) \subset B^n(x, \delta(x)/2) \ \text{ и } \ \varphi(B) \subset B^n(\varphi(x), \delta(\varphi(x))/2)\,.$$

Заменим каждый шар $B^n(x, \alpha\delta(x))$ семейства $2\mathcal{F}$ и его φ-образ шаром $B^n(x, \delta(x)/2)$ и, соответственно, $B^n(\varphi(x), \delta(\varphi(x))/2)$. Получим два семейства шаров $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Пусть x_1 и x_2 — центры двух шаров из семейства $\mathcal{P}_1$. Так как эти же точки являются центрами двух шаров специального покрытия $\mathcal{F}$ с параметром α , по лемме 2.3 $k_U(x_1, x_2) \geq \ln(1+\alpha) = a_1$. Обозначим $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$. По следствию к лемме 4.3 $k_U(y_1, y_2) \geq \Gamma^{-1}(k_U(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = \Gamma^{-1}(k_D(x_1, x_2)) = a_2$. Итак, множество шаров $\mathcal{P}_1$ является $(1/2, a_1)$-семейством, а множество шаров $\mathcal{P}_2$ — $(1/2, a_2)$-семейством (см. определение 4.11). Тогда по лемме 4.7 существует натуральное число q, такое, что шар из семейства $2\mathcal{F}$ может пересечься не более, чем с q шарами каждого из семейств $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$.

Пусть w_1 и w_2 — два множества из $2\mathcal{W}$ и B_1 — шар, входящий в состав w_1. Заметим, что $w_1 \cap w_2 \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $B_1 \cap w_2 \neq \emptyset$. Это замечание позволяет заключить, что любое множество $w \in 2\mathcal{W}$ пересекается не более, чем с $N = 2q$ множествами из $2\mathcal{W}$.

2) Опишем алгоритм выделения максимального подсемейства из последовательности множеств.

Занумеруем шары семейства $2\mathcal{F} = \{B_i\}$. Обозначим $u_i = B_i \cup \varphi(B_i)$, $B_i \in 2\mathcal{F}$. Положим $w_1 = u_1$. Допустим, найдены множества w_1,w_2,…,w_{k-1}.

В последовательности $\{u_i\}$, из которой удалены множества w_1,w_2, …,w_{k-1}, найдем множество с наименьшим номером, которое не пересекается ни с одним из w_i, $1 \leq i \leq k-1$, обозначим это множество w_k. Так полученная последовательность $2\mathcal{W}_1 = \{w_i\}$ — есть максимальное подсемейство семейства $\{u_i\}$.

К оставшейся от $\{u_i\}$, после удаления $2\mathcal{W}_1$, подпоследовательности тоже применим алгоритм выделения максимального семейства, получим семейство $2\mathcal{W}_2$. Продолжим процесс выделения семейств $2\mathcal{W}_i$. Покажем, что таких семейств конечное число.

По построению, любое множество $w = B \cup \varphi(B)$, $B \in 2\mathcal{F}_k$, пересекается со множествами из каждого $2\mathcal{W}_i$, $1 \le i \le k-1$. Следовательно, B пересекается не менее, чем с $(k-1)$ множествами семейства $2\mathcal{W}$. Согласно пункту 1), $k-1 \le 2q$, то есть число семейств $2\mathcal{W}_i$, не превосходит постоянной $M = 2q+1 = N+1$. Теорема доказана.

§4. Операторы аппроксимации.

Приведем еще раз формулировку теоремы Вяйсяля-Тукиа.

Теорема 4.3. [76]. *Пусть D и G – области с непустыми границами в R^n, $n \neq 4$. Для любого K-квазиконформного гомеоморфизма $f : D \to G$ и любого $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфизм $f_\varepsilon : D \to G$, K_1-квазигиперболический и K_2-квазиконформный, такой, что*

$$k_G(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$$

для всех $x \in D$. Величина постоянной K_1 определяется параметрами n, K, ε, а величина постоянной K_2 определяется n и K.

Пусть $\psi : R^n \to R^n$ – K-квазиконформная инволюция со множеством неподвижных точек L, $U = R^n \setminus L$ — область. Согласно следствию 2 к теореме 4.1 для любого шара B семейства $\mathcal{B}(\alpha)$ выполнено $\psi(B) \cap B = \emptyset$.

Определение 4.2. (Оператор аппроксимации $A[B, \varepsilon]$.) *Пусть $\varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{B}(\alpha)$. Через ψ_ε обозначим аппроксимацию ограничения $\psi|2B$, определенную в теореме 4.3. Тогда*

$$A[B,\varepsilon](\psi)(x) = \begin{cases} \psi_\varepsilon(x), & \text{если } x \in 2B, \\ \psi_\varepsilon^{-1}(x), & \text{если } x \in \psi(2B), \\ \psi(x), & \text{если } x \in R^n \setminus (2B \cup \psi(2B)). \end{cases}$$

Отображение $A[B,\varepsilon](\psi)$ является квазиконформной инволюцией R^n со множеством неподвижных точек L. Его коэффициент квазиконформности K^* зависит только от n и K.

Заметим, что оператор $A[B,\varepsilon]$ можно определить только в том случае, когда $(2B) \cap (\varphi(2B)) = \emptyset$.

Пусть $i \in [1, M]$ — натуральное число, через $\mathcal{F}_i$ обозначим подсемейство семейства $\mathcal{F}$, состоящее из шаров B, таких, что $2B \cup \varphi(2B) \in 2\mathcal{W}_i$.

Определение 4.3. (Операторы аппроксимации $A_i[\varepsilon]$.) *Для $1 \le i \le M$, положим*

$$V_i = \cup\{(2B \cup \psi(2B)) : B \in \mathcal{F}_i\},$$

и каждому из семейств $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_M$ поставим в соответствие оператор аппроксимации $A_i[\varepsilon]$.

$$A_i[\varepsilon](\psi)(x) = \begin{cases} A[B,\varepsilon](\psi)(x), & \text{если } x \in V_i \\ \psi(x), & \text{если } x \in R^n \setminus V_i. \end{cases}$$

Так же, как и в случае оператора $A[B,\varepsilon]$, отображение $A_i[\varepsilon](\psi)$ является K^*-квазиконформной инволюцией R^n со множеством неподвижных точек L.

Дадим краткое описание смысла дальнейших построений.

Как было с самого начала, φ — K-квазиконформная инволюция. Квазиизометрическая инволюция будет представлена в виде композиции

$$A_M[\varepsilon_M] \circ A_{M-1}[\varepsilon_{M-1}] \circ \dots \circ A_1[\varepsilon_1](\varphi)\ ,$$

которая окажется квазиизометрической на каждом шаре семейства $\mathcal{F}$, а следовательно, и на R^n. Параметры ε_i подбираются так, чтобы образ любого шара $2B \in 2\mathcal{F}_k$ при отображении

$$\varphi_{k-1} = A_{k-1}[\varepsilon_{k-1}] \circ \dots \circ A_1[\varepsilon_1](\varphi)$$

лежал в $\varphi(3B)$, следовательно, не пересекался с шаром B. Делается это для того, чтобы к отображению φ_{k-1} можно было применить оператор аппроксимации $A_k[\varepsilon_k]$.

§5. Построение квазиизометрической инволюции

Замечание. Далее символом $\Gamma(t)$ будем обозначать функцию, определенную в следствии к лемме 4.3. Когда существенна зависимость функции от коэффициента квазиконформности K, будем писать $\Gamma(K,t)$.

В следующей лемме указывается способ подбора параметров ε_i.

Лемма 4.4. *Пусть ψ и φ — квазиконформные инволюции с одним и тем же множеством неподвижных точек L. Если для любого шара $B \subset \mathcal{F}$ выполнено включение $\psi(2B) \subset \varphi(3B)$, причем*

$$k_U(\psi(2B), R^n \setminus \varphi(3B)) \ge a_i\,,$$

где $a_i > 0$ — постоянная (здесь k_U означает квазигиперболическое расстояние между множествами), то существует $\varepsilon > 0$, такое, что верны неравенство

$$k_U(A_i[\varepsilon]\psi(2B), R^n \setminus \varphi(3B)) \geq a_i/2,$$

а следовательно, и включение $A_i[\varepsilon]\psi(2B) \subset \varphi(3B)$).

Доказательство. Пусть B — некоторый шар семейства $\mathcal{F}$, и x — произвольная точка из $2B$, y — произвольная точка из $R^n \setminus (3B)$. Обозначим $\tilde{\psi}(x) = A_i[\varepsilon]\psi(x)$, $\Delta = k_U(\tilde{\psi}(x), \varphi(y))$.

1) Если $B \in \mathcal{F}_i$, то $\tilde{\psi}(2B) = \psi(2B)$ и $\Delta \geq a_i$.

2) Пусть B не принадлежит $\mathcal{F}_i$, и шар $2B$ не пересекается со множествами из семейства $2\mathcal{W}_i$, тогда $\tilde{\psi}|2B = \psi|2B$ и $\Delta \geq a_i$.

3) Пусть B не принадлежит $\mathcal{F}_i$, но шар $2B$ пересекается с некоторыми множествами из $2\mathcal{W}_i$. Обозначим

$$V = \cup\{(2B' \cup \psi(2B')) : B' \in \mathcal{F}_i\} .$$

Если $x \notin V$, то $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) \in \psi(2B)$ и $\Delta \geq a_i$.

Если же $x \in V$, то найдется шар $B^* \in \mathcal{F}_i$, такой, что $x \in 2B^*$, либо $x \in \psi(2B^*)$.

Пусть $x \in 2B^*$. Тогда

$$\Delta = k_U(\tilde{\psi}(x), \varphi(y)) \geq k_U(\psi(x), \varphi(y)) - k_U(\psi(x), \tilde{\psi}(x)) .$$

Так как $k_U(\psi(x), \tilde{\psi}(x)) < \varepsilon$, имеем неравенство $\Delta \geq a_i - \varepsilon$. Если взять $\varepsilon < a_i/2$, то $\Delta \geq a_i/2$.

Пусть теперь $x \in \psi(2B^*)$. Обозначим $z = \psi(x)$, $z' = \tilde{\psi}(x)$, $x' = \psi(z')$. Заметим, что $z, z' \in 2B^*$. Так как $\tilde{\psi}$ является ε-аппроксимацией отображения ψ на множестве $2B^*$ то

$$k_{\psi(2B^*)}(x', x) = k_{\psi(2B^*)}(\psi(z'), \tilde{\psi}(z')) < \varepsilon .$$

Отображение $\psi|\psi(2B^*)$ является $K(\psi)$-квазиконформным, поэтому по следствию к лемме 4.3,

$$k_{2B^*}(z, z') = k_{2B^*}(\psi(x), \psi(x')) \leq \Gamma(k_{\psi(2B^*)}(x, x')) \leq \Gamma(\varepsilon) ,$$

где $\Gamma(t) = \Gamma(K(\psi), t)$. Пусть $\varepsilon = \Gamma^{-1}(a_i/2)$, тогда, с учетом того, что $k_U(\psi(x), \tilde{\psi}(x)) \leq k_{\psi(2B^*)}(\psi(x), \tilde{\psi}(x))$, получим

$$k_U(\tilde{\psi}(x), \varphi(y)) \geq k_U(\psi(x), \varphi(y)) - k_U(\psi(x), \tilde{\psi}(x)) \geq a_i/2 .$$

Окончательно положим $\varepsilon = \Gamma^{-1}(K(\psi), a_i/2)$.

Лемма 4.5. *Пусть D и G собственные области в R^n, $G \subset D$. Если $f: D \to R^n$ — K-квазигиперболическое отображение, то ограничение f на область G является K_1-квазигиперболическим, $K_1 = K_1(K, n)$.*

Доказательство. По теореме 2.2 найдется непрерывная неубывающая функция $E: [0, \infty) \to [1, \infty)$, с которой для любых точек $x, y \in D$ выполнено

$$\Lambda(f, x) \le E(k_D(x, y))\lambda(f, y)\ .$$

Если $x, y \in G$, то $k_D(x, y) \le k_G(x, y)$, поэтому

$$\Lambda(f, x) \le E(k_G(x, y))\lambda(f, y)\ ,$$

тогда по той же теореме 2.2, f является квазигиперболическим отображением.

Лемма 4.6. *Пусть ψ — K-квазиконформная инволюция со множеством неподвижных точек L, $\gamma \in (0, 1)$, $x_0 \in U$, $B = B^n(x_0, \gamma\delta(x_0))$. Если ограничение ψ на B есть K_1-квазигиперболическое отображение, то найдется постоянная $C = C(K, K_1, \gamma, n)$, такая, что*

$$\Lambda(\psi, x_0) \le C\ ,\quad \lambda(\psi, x_0) \ge 1/C\ .$$

Доказательство. Согласно критерию квазиизометричности отображений областей с конформно-плоскими метриками (теорема 1.1) из квазигиперболичности отображения ψ следуют оценки

$$\Lambda(\psi, x_0) \le \frac{K_1 \delta_{\psi(B)}(\psi(x_0))}{\delta_B(x_0)}\ , \tag{1}$$

$$\lambda(\psi, x_0) \ge \frac{\delta_{\psi(B)}(\psi(x_0))}{K_1 \delta_B(x_0)}\ . \tag{2}$$

Пусть точка z, такова, что $|z - x_0| = \gamma\delta_U(x_0)$ и $|\psi(z) - \psi(x_0)| = \delta_{\psi(B)}(\psi(x_0))$. Тогда, по лемме 2.2, $r = \ln(1 + \gamma) \le k_U(z, x_0) \le -\ln(1 - \gamma) = R$. В силу квазиконформности ψ, согласно следствию к лемме 4.3, имеем

$$d = \Gamma^{-1}(r) \le k_U(\psi(x_0), \psi(z)) \le \Gamma(R) = D\ .$$

Отсюда, по лемме 2.2,

$$q \le \frac{\delta_{\psi(B)}(\psi(x_0))}{\delta_U(\psi(x_0))} \le Q\ ,$$

где $q = 1 - e^{-d}$, $Q = e^D - 1$. Так как $\delta_B(x_0) = \gamma\delta_U(x_0)$, с учетом (1) и (2), находим, что

$$\lambda(\psi, x_0) \ge \frac{m\delta_U(\psi(x_0))}{\delta_U(x_0)}\ , \tag{3}$$

$$\Lambda(\psi, x_0) \leq \frac{M\delta_U(\psi(x_0))}{\delta_U(x_0)} \ , \qquad (4)$$

где $m = q/(K_1\gamma)$, $M = (K_1Q)/\gamma$.

Отображение ψ квазиконформно отображает R^n на себя, поэтому является квазисимметрическим [72], то есть существует постоянная $T = T(K(\psi), n)$, такая, что для любых трех точек x, y, z, удовлетворяющих условию $|x-z| = |y-z|$, выполнены неравенства

$$\frac{1}{T} \leq \frac{|\psi(x) - \psi(z)|}{|\psi(y) - \psi(z)|} \leq T \ . \qquad (5)$$

Пусть z — ближайшая к x_0 точка множества L. Обозначим $S = \partial B^n(z, |x_0 - z|)$, $a = \min\{|\psi(t) - z| : t \in S\}$, $A = \max\{|\psi(t) - z| : t \in S\}$. Из (5) следует, что $A/a \leq T$. Так как ψ – инволюция, множества $B^* = B^n(z, |x_0 - z|)$ и $\psi(B^*)$ могут содержаться одно в другом лишь в случае их совпадения. Это наблюдение позволяет заключить, что $a \leq |x_0 - z| \leq A$. Так как $\delta_U(\psi(x_0)) \leq |\psi(x_0) - z| \leq T|x_0 - z|$, имеет место оценка $\delta_U(\psi(x_0)) \leq T\delta_U(x_0)$, справедливая для любой точки из U, значит и для точки $\psi(x)$, то есть верно неравенство $\delta_U(x_0) \leq T\delta_U(\psi(x_0))$. Применив эти оценки к (3) и к (4), получим $\lambda(\psi, x_0) \geq m/T$, $\Lambda(\psi, x_0) \leq MT$. Положим

$$C = \max(MT, T/m) \ .$$

Лемма доказана.

Следствие. *Квазигиперболическая на U инволюция является квазиизометрической.*

Лемма 4.7. *Пусть ψ — K-квазиконформная инволюция, ограничение которой на шар $2B = B^n(x_0, 2\alpha\delta(x_0)) \in \in\mathcal{F}$ является K^*-квазигиперболическим отображением. Тогда ограничение ψ на шар B является Q-квазиизометрическим отображением в евклидовой метрике, $Q = Q(K, K^*, n)$.*

Доказательство. Так как отображение $\psi|(2B)$ является K^*-квазигиперболическим, по теореме 2.2, существует неубывающая непрерывная функция $\Phi : [0, \infty] \to [1, \infty]$ такая, что для любых $x, y \in D$ выполнено неравенство

$$\Lambda(\psi, x) \leq \Phi(k_{2B}(x, y))\lambda(\psi, y).$$

Для $x \in B$ $k_{2B}(x, x_0) \leq \ln 2$, поэтому для любой точки $x \in B$, верны оценки

$$\Lambda(\psi, x) \leq \Phi(\ln 2)\lambda(\psi, x_0)$$

и

$$\lambda(\psi, x_0) \leq \Lambda(\psi, x_0) \leq \Phi(\ln 2)\lambda(\psi, x) \ .$$

Согласно лемме 4.6, найдется постоянная C, с которой

$$1/C \le \lambda(\psi, x_0) \le \Lambda(\psi, x_0) \le C\ .$$

Следовательно, $\Lambda(\psi, x) \le M$ и $\lambda(\psi, x) \ge (1/M)$, где $M = \Phi(\ln 2)C$. Полученные неравенства и означают квазиизометричность ψ на B.

Докажем теперь квазиизометричность ψ в евклидовой метрике. Будучи образом шара B при квазиконформном отображении R^n на себя, область $\psi(B)$ является равномерной [74]. Следовательно, существует постоянная P, такая, что для любых двух точек $y_1, y_2 \in \psi(B)$, найдется спрямляемая дуга $\gamma(y_1, y_2)$, соединяющая их в $\psi(B)$, причем $|\gamma(y_1, y_2)| \le P|y_1 - y_2|$, здесь $|\gamma(y_1, y_2)|$ — длина дуги.

Пусть $x_1 = \psi(y_1)$, $x_2 = \psi(y_2)$, $[x_1, x_2]$ — отрезок с концами x_1 и x_2. Тогда

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \le |\psi([x_1, x_2])| \le M|x_1 - x_2|\ .$$

Если $\gamma(y_1, y_2)$ — упомянутая дуга, то

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \ge \frac{1}{P}|\gamma(y_1, y_2)| \ge \frac{1}{MP}|\psi^{-1}(\gamma(y_1, y_2))| \ge \frac{|x_1 - x_2|}{MP}\ .$$

Таким образом, отображение $\psi|B$ является Q-квазиизометрическим в евклидовой метрике, где $Q = MP$. Лемма доказана.

Лемма 4.8. *Пусть ψ_1 — K–квазиконформная инволюция, B_1 и B_2 — шары семейства $\mathcal{F}$ и ограничение ψ_1 на шар B_1 есть C_1-квазиизометрическое в евклидовой метрике отображение. Тогда ограничение отображения $\psi_2 = A[B_2, \varepsilon](\psi_1)$ на B_1 является C-квазиизометрическим в евклидовой метрике отображением, $C = C(K, C_1, n, \varepsilon)$.*

Доказательство. Обозначим $w = 2B_2 \cup \psi_1(2B_2)$. Если $B_1 \cap w = \emptyset$, то $\psi_2|B_1 = \psi_1|B_1$, и $\psi_2|B_1$ является C_1-квазиизометрическим.

Если же $B_1 \cap w \ne \emptyset$, ту связную компоненту множества w, с которой пересекается шар B_1, обозначим V ($V = 2B_2$, либо $V = \psi_1(2B_2)$).

Пусть $x \in V \cap B_1$. Рассмотрим сначала случай, когда сфера

$$S = S^{n-1}(x, \delta_V(x))$$

пересекается с шаром B_1. Возьмем точку $y \in B_1 \cap S$. Так как ограничение ψ_1 на B_1 квазиизометрическое в евклидовой метрике,

$$|x - y|/C_1 \le |\psi_1(x) - \psi_1(y)| \le C_1|x - y|\ . \tag{6}$$

Обозначим

$$a = \min_{y \in S} |\psi_1(x) - \psi_1(y)| \,, \quad A = \max_{y \in S} |\psi_1(x) - \psi_1(y)| \,.$$

Так как ψ_1 квазиконформно, $A/a \le R$ (см. доказательство леммы 4.6). Заметим, что

$$a \le |\psi_1(x) - \psi_1(y)| \le A \ \text{ и } \ a \le \delta_{\psi_1(V)}(\psi_1(x)) \le A \,,$$

следовательно

$$\frac{1}{T} \le \frac{\delta_{\psi_1(V)}(\psi_1(x))}{|\psi_1(x) - \psi_1(y)|} \le T \,. \tag{7}$$

Так как $|x - y| = \delta_V(x)$, из (6) и (7) получаем

$$\frac{1}{CT} \le \frac{\delta_{\psi_1(V)}(\psi_1(x))}{\delta_V(x)} \le CT \,. \tag{8}$$

Отображение $\psi_2|V$ квазигиперболическое, поэтому по теореме 1.1 справедливы оценки

$$\Lambda(\psi_2, x) \le K_1 \frac{\delta_{\psi_1(V)}(\psi_2(x))}{\delta_V(x)} \tag{9}$$

и

$$\lambda(\psi_2, x) \ge \frac{1}{K_1} \frac{\delta_{\psi_1(V)}(\psi_2(x))}{\delta_V(x)} \,. \tag{10}$$

Однако,

$$k_{\psi_1(V)}(\psi_1(x), \psi_2(x)) < \varepsilon \,, \text{если} \,, \ x \in B_2 \,,$$

и

$$k_{\psi_1(V)}(\psi_1(x), \psi_2(x)) < \Gamma(K, \varepsilon) = \varepsilon^* \,, \text{если} \,, \ x \in \psi_1(B_2) \,.$$

Пусть $\sigma = \max(\varepsilon, \varepsilon^*)$. Тогда, по лемме 2.1

$$e^{-\sigma} \le \frac{\delta_{\psi_1(V)}(\psi_2(x))}{\delta_{\psi_1(V)}(\psi_1(x))} \le e^{\sigma} \,.$$

Учитывая (7), применим найденные оценки к (9) и (10), получим

$$\Lambda(\psi_2, x) \le C_2 \,, \quad \lambda(\psi_2, x) \ge \frac{1}{C_2} \,, \tag{11}$$

где $C_2 = K_1 e^{\sigma} C_1 T$.

Пусть теперь $S \cap B_1 = \emptyset$, то есть, шар B_1 содержится в шаре $B = B^n(x, \delta_V(x)) \subset V$. Тогда

$$\delta_V(x) \ge \frac{2\alpha}{3 + \alpha} \delta_U(x) \,.$$

Согласно лемме 4.5, ограничение ψ_2 на $B \subset V$ является K_2-квазигиперболическим отображением отображением. Тогда, по лемме 4.6

$$\Lambda(\psi_2, x) \le C_3\,, \quad \lambda(\psi_2, x) \ge \frac{1}{C_3}\,. \tag{12}$$

Пусть $C_4 = \max(C_2, C_3)$, оценки (11) и (12) означают, что $\psi_2|(W \cap B_1)$ является C_4-квазиизометрическим отображением на шаре B_1, $C_4 = \max(C_1, C_3)$. По лемме 4.7 оно C-квазиизометрическое в евклидовой метрике.
Лемма доказана.

Теорема 4.4. *Пусть φ — K-квазиконформная инволюция R^n, $n \ne 4$, со множеством неподвижных точек L, $U = R^n \setminus L$ — связное множество.*

Тогда существует C-квазиизометрическая в евклидовой метрике инволюция R^n с тем же самым множеством неподвижных точек L. Величина постоянной C определяется числами n и K.

Доказательство. Заметим, что для любого шара $B = B^n(x, \alpha\delta(x))$, $x \in U$, выполнено

$$k_U(\varphi(2B), R^n \setminus \varphi(3B) \ge a\,,$$

($a = \Gamma^{-1}(\ln((1-2\alpha)/(1-3\alpha))$ согласно лемме 4.3). Лемма 4.4 гарантирует существование $\varepsilon_1 > 0$, такого, что отображение $\varphi_1 = A_1[\varepsilon_1](\varphi)$ обладает следующим свойством. Для любого шара $B \in \mathcal{F}$

$$k_U(2B, R^n \setminus \varphi(3B)) \ge a/2\,, \text{ следовательно } \varphi_1(2B) \subset \varphi(3B)\,.$$

Допустим построено отображение φ_k, $k \le M$, которое является квазиконформной инволюцией со множеством неподвижных точек L (напомним, что число M определено в теореме 4.2). Кроме того, φ_k таково, что для любого шара $B \in \mathcal{F}$

$$k_U(2B, R^n \setminus \varphi_k(3B)) > a/2^k\,,$$

следовательно, $\varphi_k(2B) \subset \varphi(3B)$. А так как $2B \subset 3B$ и $3B \cap \varphi(3B) = \emptyset$, множества $2B$ и $\varphi_k(2B)$ не пересекаются. Это позволяет применить к отображению φ_k оператор $A_{k+1}[\varepsilon_{k+1}]$. Постоянную $\varepsilon_{k+1} > 0$ подберем так (лемма 4.4), что для любого $B \in \mathcal{F}$

$$k_U(\varphi_{k+1}(2B), R^n \setminus \varphi(3B)) \ge a/2^{k+1}\,.$$

Понятно, что процесс закончится построением отображения

$$\varphi_M = A_M[\varepsilon_M](\varphi_{M-1})\,.$$

По лемме 4.7 ограничение φ_1 на шары семейства $\mathcal{F}_1$ является C_1-квазиизометрическим отображением. По той же лемме ограничение инволюции φ_2 на шары семейства $\mathcal{F}_2$ является C_2-квазиизометрическим отображением.

А по лемме 4.8 ограничение φ_2 на любой шар семейства $\mathcal{F}_1$ является C_1^*-квазиизометрическим отображением. тогда на шарах семейства $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ отображение φ_2 является C_2-квазиизометрическим. По индукции заключаем, что ограничение φ_M на шары семейства $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_M = \mathcal{F}$ есть C_M-квазиизометрическое отображение. Так как $\mathcal{F}$ – покрытие множества U, отображение φ_M является C_M-квазиизометрическим на U, а следовательно C_M-квазиизометрическим в евклидовой метрике на всем пространстве R^n. Положим, $C = C_M$. Теорема доказана.

Глава 5. Пространства С.Л.Соболева, связанные с квазигиперболическими отображениями

§1. Постановка задачи. Определения.

Для области $U \subset R^n$ линейное пространство всех вещественнозначных функций, определенных на U, обозначим $F(U)$. Пусть D и G — области в R^n и φ — гомеоморфизм D на G. Если $X(G)$ — линейное подпространство пространства $F(G)$, то гомеоморфизм φ порождает оператор $A_\varphi : X(G) \to F(D)$ по формуле

$$A_\varphi f(x) = f(\varphi(x)),$$

где f — функция из $F(G)$. В том случае, когда φ — квазиконформный гомеоморфизм, оператор A_φ является линейным изоморфизмом соболевских пространств $L^1_n(G)$ и $L^1_n(D)$ [9], если же φ — квазиизометрический гомеоморфизм, то A_φ — линейный изоморфизм пространств $L^1_p(G)$ и $L^1_p(D)$ для любого $p \geq 1$ [9].

В 5 главе решаются следующие задачи.

1. Найти функциональные пространства $X(G)$ и $Y(D)$ в областях G и D, для которых любой квазигиперболический гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ порождает линейный изоморфизм этих пространств.

2. Указать вид весов в односвязных собственных подобластях D и G комплексной плоскости, с которыми любой квазигиперболический гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ порождает линейный изоморфизм , а конформное отображение порождает подобие соответствующих весовых пространств Соболева.

3. Указать пары эллиптических уравнений второго порядка, такие, что решение одного из них представимо в виде композиции решения другого с квазигиперболическим гомеоморфизмом.

Решение первой задачи изложено в 4 и 5 параграфах, параграфы 2 и 3 являются подготовительными. Решение второй задачи приведено в 6 параграфе, решение третьей задачи — в 7 параграфе.

Требует комментариев содержание параграфов 2 и 3. В §3 изучаются гомеоморфизмы классов $I_p(K_1, K_2)$, порождающие изоморфизмы соболевских пространств L^1_p без веса. Для удобства вычислений класс $I_p(K_1, K_2)$ заменяется классом гомеоморфизмов $Q_p(K_1, K_2)$, ограниченно изменяющих емкость конденсаторов. Поясним, почему в этом параграфе рассматривается класс $Q_p(K_1, K_2)$, а не класс $Q_p(K)$ гомеоморфизмов ограниченно изменяющих емкость сферических конденсаторов, определенный Герингом в работе [55]. Класс $Q_p(K)$ формально более подходит на роль базового понятия, так как использует более узкий класс конденсаторов, однако он гораздо хуже приспособлен для вычисления искажений отображений, чем класс $Q_p(K_1, K_2)$.

В качестве инструмента исследований предлагается техника пробных конденсаторов, чьи "обкладки"представляют собой евклидовы окрестности прямоугольных параллелепипедов. Техника эта изложена в параграфе 2.

Пусть D — область в R^n и ν_D — положительная непрерывная в D функция, $p \geq 1$. Пространство $L^1_p(D, \nu_D)$ состоит из функций f, имеющих в D обобщенные производные 1 порядка, таких, что функция $|\nabla f(x)|^p \nu_D(x)$ интегрируема в D. Полунорма в $L^1_p(D, \nu_D)$ определяется формулой

$$||f|| = \left(\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \nu_D(x) d\mu \right)^{1/p}.$$

Если вес ν_D тождественно равен 1, то в обозначении пространства он не пишется. О весовых пространствах см [46].

Понятие конденсатора было определено в §4 главы 1, здесь используем понятие кольцевого конденсатора.

Определение 5.1. *Ограниченная область $U \subset R^n$ называется кольцом* [55], *если ее дополнение имеет точно две связные компоненты A и B, причем B — неограниченное множество. Конденсатор (A, B) назовем кольцевым, если его область, то есть дополнение множества $A \cup B$ есть кольцо. Конденсатор (A, B) называется сферическим, если A и $R^n \setminus B$ — концентрические шары.*

Замечание. В работе [55] класс колец содержит и неограниченные множества. Свойство ограниченности, использованное здесь, упрощает рассуждения и не приводит к логическим трудностям, так как в этой главе рассматриваются только гомеоморфизмы собственных подобластей R^n.

Определение 5.2 [55]. *Пусть D и G — области в R^n, $p \geq 1$, $K > 0$. Класс $Q_p(K)$ состоит из таких гомеоморфизмов $\varphi : D \to G$, что для любого сферического конденсатора (A, B), область которого содержится в D, выполнено*

$$\mathrm{cap}_p(\varphi(A), \varphi(B)) \leq K^p \mathrm{cap}_p(A, B).$$

Предложение 5.1. *Если $\varphi \in Q_n(K)$, то φ является K_1-квазиконформным отображением, $K_1 = K_1(K, n)$* [54].

Предложение 5.2. [55, теорема 2]. *Если $\varphi, \varphi^{-1} \in Q_p(K)$, $p \neq n$, то φ является C-квазиизометрическим гомеоморфизмом, C зависит только от p, K и n.*

Определение 5.3. *Пусть $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $p \geq 1$ — постоянные, $K_1 \leq K_2$. Класс $Q_p(K_1, K_2)$ состоит из гомеоморфизмов $\varphi : D \to G$, таких, что для любого кольцевого конденсатора (A, B) из области D выполнено*

$$K_1^p \operatorname{cap}_p(\varphi(A), \varphi(B)) \leq \operatorname{cap}_p(A, B) \leq K_2^p \operatorname{cap}_p(\varphi(A), \varphi(B)).$$

Замечание. При $p = n$ коэффициенты K_1 и K_2 не являются независимыми. Можно установить, что в этом случае при заданном K_2 коэффициент K_1 удовлетворяет условиям

$$K_2^{1-n} \leq K_1 \leq K_2^{1/(1-n)}.$$

Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ порождает изоморфизм

$$A_\varphi : L_p^1(G, \nu_G) \to L_p^1(D, \nu_D)\ ,$$

где $A_\varphi f = f \circ \varphi$.

Определение 5.4. *Для $p \geq 1$ класс $I_p(K_1, K_2)$ состоит из гомеоморфизмов $\varphi : D \to G$, порождающих линейный изоморфизм A_φ пространств $L_p^1(G)$ и $L_p^1(D)$ ($A_\varphi f = f \circ \varphi$), причем $||A_\varphi|| \leq K_2$ и $||(A_\varphi)^{-1}|| \leq (1/K_1)$.*

Далее установим оценки искажений отображений классов $Q_p(K_1, K_2)$ и $I_p(K_1, K_2)$ и докажем, что эти классы совпадают.

§2. Пробные конденсаторы

В этом параграфе будут определены конденсаторы при помощи окрестностей параллелепипедов [21] (см. определение 5.5). Для оценки их емкости понадобятся предварительные результаты.

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_n$ — неотрицательные числа, $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}), l_n$. Обозначим через

$$A(l) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ |x_i| \leq l_i/2,\ 1 = 1, 2, \ldots, n\}$$

замкнутый параллелепипед пространства R^n. Для $t \geq 0$ через $A_t(l)$ обозначим замкнутую t-окрестность множества $A(l)$, заметим, что $A(l) = A_0(l)$ и для любого $t \geq 0$ множество $A_t(l)$ выпуклое.

Лемма 5.1. *Для любого набора* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}), l_n$ *неотрицательных чисел и* $t \geq 0$ *n-мерная мера множества* $A_t(l)$ — *t-окрестности множества* $A(l)$, *находится по формуле*

$$V_n(A_t(l)) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k t^k S_{n-k}, \qquad H(n)$$

где ω_k — *k-мера шара радиуса 1 в пространстве* R^k, $\omega_0 = 1$, S_i — *сумма всех произведений по i чисел из набора* $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, $S_0 = 1$.

Доказательство. Применим метод полной математической индукции.

Проверка $H(1)$. Так как $P_t = [-l_1/2 - t, l_1/2 + t]$, $\omega_0 = 1$, $S_1 = l_1$ и $V_1(P_t) = l_1 + 2t$ формула $A(1)$ верна.

Предположим, что верна гипотеза $H(n-1)$. Докажем формулу $H(n)$. Рассмотрим сечение множества $A_t(l) \subset R^n$ гиперплоскостью $x_n = (-l_n/2 - h)$, $0 \leq h \leq t$. В сечении получится множество P_h, представляющее собой замкнутую $\sqrt{t^2 - h^2}$-окрестность в пространстве R^n $(n-1)$-мерного параллелепипеда с ребрами $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$. По предположению индукции $(n-1)$-мера множества P_h равна

$$V_{n-1}(P_h) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (t^2 - h^2)^{k/2} \tilde{S}_{n-1-k}\,,$$

где $\tilde{S}_i$ — сумма всех произведений по i чисел из набора
$(l_1, l_2, \ldots, l_{n-1})$.

Обозначим n-меру части множества $A_t(l)$, заключенной между гиперплоскостями $x_n = -l_n/2$ и $x_n = (-l_n/2 - t)$ через W_1, тогда

$$W_1 = \int_0^t V_{n-1}(\tilde{P}_h)dh = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}_{n-1-k} \int_0^t \omega_k (t^2 - h^2)^{k/2} dh.$$

Подынтегральная функция в интеграле k-го слагаемого равна k-мере сечения $(k+1)$-мерного шара радиуса t k-мерной плоскостью, следовательно этот интеграл равен $(1/2)\omega_{k+1}t^{k+1}$ — половине объема $(k+1)$-мерного шара радиуса t. Итак,

$$W_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}_{n-1-k} \omega_{k+1} t^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \tilde{S}_{n-k} \omega_k t^k.$$

Так как $\tilde{S}_0 = S_0 = 1$, формулу перепишем по-другому

$$W_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{S}_{n-k} \omega_k t^k + \frac{1}{2} S_0 \omega_n t^n. \qquad (1)$$

Через W_2 обозначим n-меру части множества $A_t(l)$, заключенной между гиперплоскостями $x_n = -l_n/2$ и $x_n = 0$. Так как эта часть — цилиндрическое множество с основанием P_0, имеем

$$W_2 = \frac{l_n}{2} V_{n-1}(P_0) = \frac{l_n}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}_{n-1-k} \omega_k t^k.$$

Обозначим через S_i^* сумму произведений по i чисел из набора $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, которые содержат в качестве множителя число l_n. Тогда

$$W_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-k}^* \omega_k t^k \, .$$

Отметим, что $S_n^* = S_n$, поэтому

$$W_2 = \frac{1}{2} \omega_0 t^0 S_{n-0} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} S_{n-k}^* \omega_k t^k. \tag{2}$$

Так как $(1/2) V_n(A_t(l)) = W_1 + W_2$, из (1) и (2) получим, что

$$V_n(A_t(l)) = \omega_0 t^0 S_{n-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k t^k (\tilde{S}_{n-k} + S_{n-k}^*) + S_{n-n} \omega_n t^n = \sum_{k=0}^{n} \omega_k t^k S_{n-k} \, ,$$

то есть, верна формула $H(n)$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Пусть $M \subset R^n$ — замкнутое выпуклое множество, $U = R^n \setminus M$. Для $x \in U$ через $\delta(x)$ обозначим евклидово расстояние от x до M. Тогда выполнено:*

1) для любой точки $x \in U$ существует единственная точка $\pi(x) \in M$, такая, что $|x - \pi(x)| = \delta(x)$;

2) отображение $\pi : U \to M$ (проекция U на M) непрерывно;

3) функция $\delta(x)$ непрерывно дифференцируема и

$$\nabla \delta(x) = \frac{x - \pi(x)}{|x - \pi(x)|}$$

Доказательство. 1) Воспроизведем доказательство из учебника [4]. Так как

$$\delta(x) = \inf_{y \in M} |x - y|,$$

найдется последовательность точек $\{y_i\}$ из M, такая, что

$$\lim_{i \to \infty} |x - y_i| = \delta(x) > 0.$$

Покажем, что $\{y_i\}$ сходится к некоторой точке из M. Пусть $i, j \in N$, тогда, применяя тождество параллелограмма, получим

$$0 \le |y_{i+j} - y_i|^2 = 2|x - y_{i+j}|^2 + 2|x - y_i|^2 - 4\left|x - \frac{y_{i+j} + y_i}{2}\right|^2$$

Из выпуклости M следует, что $(y_{i+j} + y_i)/2 \in M$, поэтому

$$\left|x - \frac{y_{i+j} + y_i}{2}\right|^2 \ge \delta^2(x),$$

тогда имеем

$$0 \le |y_{i+j} - y_i|^2 \le 2(|x - y_{i+j}|^2 + |x - y_i|^2) - 4\delta^2(x).$$

Выражение, стоящее в правой части неравенства стремится к 0 при $i \to \infty$, что означает фундаментальность последовательности $\{y_i\}$. Так множество M замкнутое, найдется $y \in M$, $y = \lim_{i\to\infty} y_i$. Таким образом

$$|x - y| = \lim_{i\to\infty} |x - y_i| = \delta(x),$$

то есть, y — ближайшая к x точка множества M.

Докажем единственность ближайшей точки. Пусть y и y' таковы, что $|x - y| = \delta(x)$ и $|x - y'| = \delta(x)$. Тогда

$$|y - y'|^2 = 2|x - y|^2 + 2|x - y'|^2 - 4|x - \frac{y - y'}{2}|^2.$$

Так как $(y - y')/2 \in M$, выполнено $|x - (y - y')/2| \ge \delta(x)$. Согласно выбору точек y и y' имеют место равенства $|x - y| = \delta(x)$ и $|x - y'| = \delta(x)$, следовательно

$$|y - y'|^2 = 4\delta^2(x) - 4\left|x - \frac{y - y'}{2}\right|^2 \le 4\delta^2(x) - 4\delta^2(x) = 0\,.$$

Из неотрицательности левой части заключаем, что $y = y'$.

2) Пусть $x_1, x_2 \in U$. Обозначим $y_1 = \pi(x)$, $y_2 = \pi(x)$, тогда

$$|y_1 - y_2|^2 = 2|y_1 - x_1|^2 + 2|y_2 - x_2|^2 - 4\left|x_1 - \frac{y_1 - y_2}{2}\right|^2$$

Так как $|y_1 - x_1| = \delta(x_1)$, $|x_1 - (y_1 - y_2)/2| \ge \delta(x_1)$, находим, что

$$|y_1 - y_2|^2 \le 2\delta^2(x_1) + 2|y_2 - x_1|^2 - 4\delta^2(x_1) = 2|y_2 - x_1|^2 - 2\delta^2(x_1)\,. \tag{3}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ произвольно и $|x_1 - x_2| < \varepsilon$, тогда

$$|y_2 - x_1| \le |y_2 - x_2| + |x_2 - x_1| < \delta(x_2) + \varepsilon\,.$$

и

$$\delta(x_2) \leq |x_2 - y_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_2 - y_1| < \delta(x_1) + \varepsilon \,.$$

поэтому $|y_2 - x_1| \leq \delta(x_1) + 2\varepsilon$. Применим эту оценку к неравенству (3) и получим

$$|y_1 - y_2|^2 \leq 2\delta^2(x_1) + 4\delta(x_1) \cdot \varepsilon + 4\varepsilon^2 - 2\delta^2(x_1) = 4\delta(x_1) \cdot \varepsilon + 4\varepsilon^2 \,.$$

Таким образом, если $|x_1 - x_2| < \varepsilon$, то $|\pi(x_1) - \pi(x_2)| < 4\delta(x_1) \cdot \varepsilon + 4\varepsilon^2$, следовательно π — непрерывное отображение.

3) Согласно п. 1) для точки $x \in U$ существует единственная ближайшая точка $y = \pi(x)$ из множества M. Положим $\nu = (x - y)/|x - y|$ и через P обозначим гиперплоскость с нормальным вектором ν, проходящую через точку y. Заметим, что P является опорной гиперплоскостью для множества M.

Пусть h — элемент пространства R^n, имеющий малую норму. Рассмотрим выражение

$$\psi(h) = \delta(x + h) - \delta(x) - \langle \nu, h \rangle,$$

где $\langle \nu, h \rangle$ — скалярное произведение.

В этом пункте нужно доказать, что $\psi(h) = o(h)$. Сначала рассмотрим наиболее удобный для вычислений случай, когда $y = 0$ и $|x| = 1$. В этой ситуации $\nu = x$.

Так как, вообще, $\pi(x + h) \neq 0$ справедливо неравенство $\delta(x + h) \leq |x + h|$. Так как $\delta(x + h)$ не меньше расстояния от $x + h$ до опорной гиперплоскости P, выполнено

$$\delta(x + h) \geq \langle n, x + h \rangle = 1 + \langle \nu, h \rangle \,.$$

Соединим последние две оценки и получим

$$1 + \langle \nu, h \rangle - 1 - \langle \nu, h \rangle \leq \delta(x + h) - \delta(x) - \langle \nu, h \rangle \leq |x + h| - 1 - \langle \nu, h \rangle \,,$$

или

$$0 \leq \psi(h) \leq |x + h| - \langle x, x + h \rangle \,. \tag{4}$$

Оценим правую часть неравенства (4)

$$|x + h| - 1 - \langle \nu, h \rangle = |x + h| - \langle x, x \rangle - \langle x, h \rangle = |x + h| - \langle x, x + h \rangle \,.$$

Заметим, что

$$|x + h| - \langle x, x + h \rangle = \frac{|x + h|^2 - \langle x, x + h \rangle^2}{|x + h| + \langle x, x - h \rangle} \tag{5}$$

и преобразуем числитель дроби:

$$|x + h|^2 - \langle x, x + h \rangle^2 = |x|^2 + 2\langle x, h \rangle + |h|^2 - (|x|^2 + \langle x, h \rangle)^2 = |h|^2 - \langle x, h \rangle^2.$$

Теперь оценим знаменатель в (5), полагая, что h имеет малую норму,

$$|x+h| + \langle x, x-h\rangle \geq \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2} = |x| = 1\,.$$

Итак, при малых h выполнено

$$0 \leq \psi(h) \leq |h|^2 - \langle x, h\rangle^2 = o(h)\,.$$

Рассмотрим общий случай, то есть $y \neq 0$ и $|x-y|$ — произвольно. Пусть $F : R^n \to R^n$, $F(z) = (z-y)/|x-y|$, отображение F — подобие. Положим $M^* = F(M)$, $x^* = F(x)$, $h^* = F(h)$ и заметим, что $F(y) = 0$. Для $w \in U^* = R^n \setminus M^*$ через $\delta^*(w)$ обозначим евклидово расстояние от w до M^*. Так как $|x^*| = 1$, по доказанному имеем

$$0 \leq \delta^*(x^*+h^*) - \delta^*(x) - \langle \nu, h^*\rangle < |h^*|^2 - \langle x^*, h^*\rangle^2 = o(h^*) \qquad (6)$$

Пусть $h = F^{-1}(h^*)$ тогда $\delta(x+h) = |x-y|\delta^*(x^*+h^*)$, $\delta(x) = |x-y|\delta^*(x^*)$, $\langle \nu, h\rangle = |x-y|\langle \nu, h^*\rangle$, $|h|^2 = |x-y|^2|h^*|2$ и $\langle x, h\rangle = |x-y|\langle x^*, h^*\rangle$. Поэтому

$$\psi(h) = \delta(x+h) - \delta(x) - \langle \nu, h\rangle = |x-y|(\delta^*(x^*+h^*) - \delta^*(x) - \langle \nu, h^*\rangle)$$

и согласно (6), имеем

$$0 \leq \psi(h) \leq (|h|^2 - \langle x^*, h^*\rangle) = \frac{1}{|x-y|}(|h|^2 - \langle x, h\rangle) = o(h)\,. \qquad (7)$$

Равенство (7) означает, что в любой точке $x \in U$ функция $\delta(x)$ дифференцируема и имеет градиент, равный вектору ν, то есть

$$\nabla\delta(x) = \frac{x-\pi(x)}{|x-\pi(x)|}\,, \quad |\nabla\delta(x)| = 1\,.$$

Вектор функция $\nabla\delta(x)$ непрерывна, так как функция $x-\pi(x)$ непрерывна и не обращается в 0 на U.

Лемма доказана.

Замечание. Так как $|\nabla\delta(x)| = 1$, для любой точки $x \in U$, функция δ равномерно непрерывна в U и ее можно продолжить по непрерывности на множество M нулем. Продолженная функция определена на всем R^n и удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом 1, следовательно принадлежит классу ACL_p для любого $p > 0$ (см. [39]), а это означает, что δ принадлежит локально пространству L^1_p для любого $p \geq 1$.

Лемма 5.3. *Пусть даны положительные постоянные* l_i, $i \in N$, $1 \le i \le n-1$, *для числа* $h > 0$ *через* Q *обозначим параллелепипед*

$$\{(x_1, x_2, \dots x_n) \in R^n : |x_i| \le l_i/2, \ \ 1 \le i \le n-1, \ \ 0 \le x_n \le h\}$$

с основаниями $P_0 = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in Q : \ x_n = 0\}$ *и*
$P_1 = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in Q : \ x_n = h\}$; *символом* $\mathcal{F}$ *обозначим множество непрерывных функций* ψ *пространства* $L^1_p(Q)$, *таких, что* $\psi(x) = 0$, *если* $x \in P_0$ *и* $\psi(x) = 1$, *если* $x \in P_1$.

Тогда функция $\psi_h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n/h$ *является решением экстремальной задачи*

$$\int\limits_Q |\nabla\psi|^p d\mu \to \min, \qquad \psi \in \mathcal{F}.$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathcal{F}$ и Γ — множество отрезков, ортогональных ко множествам P_0 и P_1, соединяющих их в Q. Так как $\psi \in L^1_p(Q)$, для почти всех $\gamma \in \Gamma$ функция $\psi|\gamma$ абсолютно непрерывна, следовательно

$$\int\limits_0^h \frac{\partial\psi}{\partial x_n} dx_n = \psi(h) - \psi(0) = 1.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^h |\nabla\psi| dx_n \ge 1.$$

По теореме Фубини о кратном интегрировании

$$\int\limits_Q |\nabla\psi| d\mu_n = \int\limits_{P_0} \left(\int\limits_\gamma |\nabla\psi| dx_n \right) d\mu_{n-1} \ge V_{n-1}(P_0) = l_1 \cdot l_2 \cdots l_{n-1}, \tag{8}$$

здесь $V_{n-1}(P_0)$ — $n-1$-мерная мера множества P_0. Сверху интеграл $\int\limits_Q |\nabla\psi| d\mu_n$ оценим при помощи неравенства Гельдера:

$$\int\limits_Q |\nabla\psi| d\mu_n \le \left(\int\limits_Q |\nabla\psi|^p d\mu_n \right)^{1/p} \left(\int\limits_Q 1^q d\mu_n \right)^{1/q}, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Так как второй интеграл в предыдущей оценке равен $V_n(Q) = l_1 \cdot l_2 \cdots l_{n-1} \cdot h$, с учетом неравенства (8) получим

$$\left(\int\limits_Q |\nabla\psi|^p d\mu_n \right)^{1/p} \ge \frac{V_{n-1}(P_0)}{(V_n(Q))^{1/q}} = \frac{V_{n-1}(P_0)}{(V_{n-1}(P_0) \cdot h)^{1/q}}.$$

Следовательно
$$\int\limits_Q |\nabla\psi|^p d\mu_n \geq \frac{V_{n-1}(P_0)}{h^{p-1}}.$$
Пусть ψ_h — функция из условия леммы, тогда
$$\int\limits_Q |\nabla\psi_h|^p d\mu_n = \int\limits_Q \left(\frac{1}{h}\right)^p d\mu_n = \frac{V_{n-1}(P_0)\cdot h}{h^p} = \frac{V_{n-1}(P_0)}{h^{p-1}}.$$
Итак, для любой функции $\psi \in \mathcal{F}$ выполнено
$$\int\limits_Q |\nabla\psi|^p d\mu_n \geq \int\limits_Q |\nabla\psi_h|^p d\mu_n = \frac{V_{n-1}(P_0)}{h^{p-1}}.$$

Лемма доказана.

Определение 5.5 *Пусть* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{n-1})$, *где* $l_1, l_2, \ldots l_{n-1}$ *— положительные постоянные,* $A(i) = A_0(l) =$
$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : |x_k| \leq l_k/2, k \in N,\ 1 \leq k \leq n-1,\ x_n = 0\}$. *Для* $t \leq 0$ *через* A_t *обозначим замкнутую* t*-окрестность множества* $A(l)$, $B_t(l)$ *— замыкание дополнения* $A_t(l)$ *до пространства* R^n.

Конденсаторы вида $(A_t(l), B_\tau(l))$, *где* $0 \leq t < \tau < \infty$, *назовем пробными и будем обозначать как* $C(l, t, \tau)$.

Теорема 5.1. *Пусть* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{n-1})$, $l_i > 0$, $1 \leq n-1$; $h > 0$; $0 \leq \varepsilon < 1$; $S = l_1 \cdot l_2 \cdots l_{n-1}$. *Тогда*
$$\frac{2S}{(h-\varepsilon h)^{p-1}} \leq \mathrm{cap}_p C(l, h\varepsilon, h) \leq \frac{2S}{(h-\varepsilon h)^{p-1}}(1 + o(h))\,. \tag{9}$$

Доказательство. *Оценка снизу.* Рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Пусть параллелепипед
$$Q = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : |x_k| \leq l_k/2,\ k \neq n;\ \varepsilon h \leq x_n \leq h\}\,,$$
имеет основания $P_0 = \{x \in Q : x_n = \varepsilon h\}$ и $P_1 = \{x \in Q : x_n = h\}$. Обозначим через $\mathcal{F}$ — множество непрерывных функций из $L^1_p(Q)$, таких, что $\psi(x) = 0$, если $x \in P_0$ и $\psi(x) = 1$, если $x \in P_1$. Требуется найти
$$c_p = \inf_{\psi \in \mathcal{F}} \int\limits_Q |\nabla\psi|^p\, d\mu\,.$$

По лемме 5.3 эта задача имеет точное решение

$$c_p = \frac{S}{(h - \varepsilon h)^{p-1}}.$$

Однако, любая допустимая функция $\tilde{\psi}$ для p-емкости конденсатора $C(l,\, \varepsilon h,\, h)$ такова, что ее ограничение на Q принадлежит $\mathcal{F}$, поэтому

$$c_p \le \int\limits_Q |\nabla \tilde{\psi}|^p \, d\mu \le \int\limits_{R^n_+} |\nabla \tilde{\psi}|^p \, d\mu \,,$$

где R^n_+ — верхнее полупространство $x_n \ge 0$. По симметрии получим

$$c_p \le \int\limits_{R^n_-} |\nabla \tilde{\psi}|^p \, d\mu \,,$$

где R^n_- — нижнее полупространство $x_n \le 0$. Складывая эти два неравенства найдем, что для любой допустимой функции $\tilde{\psi}$ выполнено

$$2c_p \le \int\limits_{R^n} |\nabla \tilde{\psi}|^p \, d\mu \,,$$

откуда, с учетом определения емкости, следует оценка снизу в (9).

Замечание. Приведенные рассуждения будут верны не только для конденсатора $C(l, \varepsilon h, h)$, но и для любого конденсатора вида $(A_{\varepsilon h}, B)$, где $B \supset B_h$, $P_1 \cup P_1^* \subset B$, где P_1^* — множество, симметричное P_1 относительно гиперплоскости $x_n = 0$.

Оценка сверху. Пусть $\delta(x)$ равно расстоянию от точки x до множества $A_{\varepsilon h}$. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \in A_{\varepsilon h} \\ 1 & \text{если } x \in B_h \\ (\delta(x) - \varepsilon h)/(h - \varepsilon h) & \text{если } x \in (A_{\varepsilon h} \cup B_h) \end{cases}$$

является допустимой для p-емкости конденсатора $C(l, h\varepsilon, h)$. По лемме 5.2 $|\nabla \psi(x)| = 1/(h - h\varepsilon)$ — постоянная функция в области этого конденсатора. Тогда

$$\int\limits_{R^n_-} |\nabla \psi|^p \, d\mu = (h - h\varepsilon)^{-p} (V_h - V_{\varepsilon h}) \,.$$

Таким образом, по определению емкости, имеем

$$\operatorname{cap}_p C(l, \varepsilon h, h) \le (h - h\varepsilon)^{-p} (V_h - V_{\varepsilon h}) \,. \tag{10}$$

Однако, по лемме 5.1,

$$V_h - V_{\varepsilon h} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k S_{n-k} h^k (1-\varepsilon^k) = 2hS_{n-1}h(1-\varepsilon) + \sum_{k=2}^{n} \omega_k S_{n-k}(1-\varepsilon^k)$$

Для данного набора l найдется постоянная C, такая, что для всех натуральных $k \in [2,n]$ выполнено $\omega_k S_{n-k} \le C$, тогда при $h<1$ выполнено

$$\sum_{k=2}^{n} \omega_k S_{n-k} h^k (1-\varepsilon^k) \le C \sum_{k=2}^{n} h^k \le \frac{Ch^2}{1-h}\,.$$

Таким образом, при $h<1/2$, выполнено

$$V_h - V_{\varepsilon h} \le 2hS_{n-1}h(1-\varepsilon) + 2Ch^2\,.$$

Учитывая оценку (10) для емкости, получим

$$\operatorname{cap}_p C(l, \varepsilon h, h) \le (h - h\varepsilon)^{-p}(2hS_{n-1}h(1-\varepsilon) + 2Ch^2) =$$

$$= \frac{2S}{h^{p-1}(1-\varepsilon)^{p-1}}\left(1 + \frac{Ch^{p+1}(1-\varepsilon)^{p-1}}{S}\right) = \frac{2S}{(h-\varepsilon h)^{p-1}}(1+o(h))\,.$$

Теорема доказана.

§3. Оценка искажений отображений, порождающих изоморфизмы пространств без веса

Установим оценки искажений отображений классов $Q_p(K_1, K_2)$ и $I_p(K_1, K_2)$ и докажем, что эти классы совпадают.

Пусть x_0 — точка дифференцируемости отображения φ. Для упрощения выкладок будем считать, что области D и G лежат в разных экземплярах пространства R^n (R^n_D и R^n_G) и в этих экземплярах так выбраны ортонормированные базисы, что линейное отображение $\varphi'(x_0)$ имеет матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

где $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ [39, с.13]. Числа λ_k называются главными коэффициентами растяжения отображения $\varphi'(x_0)$.

Теорема 5.2. *Пусть $p \geq 1$, $\varphi : D \to G$ — гомеоморфизм, такой, что для любого конденсатора (A, B) из D выполнено*

$$\mathrm{cap}_p(A, B) \leq M^p \cdot \mathrm{cap}_p(\varphi(A), \varphi(B)).$$

Если x_0 — точка дифференцируемости φ и ранг линейного отображения $A = \varphi'(x_0)$ равен n, то главные коэффициенты растяжения отображения A связаны между собой соотношением

$$\frac{\lambda_n^{p-1}}{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}} \leq M^p.$$

то есть

$$||\varphi'(x_0)||^p \leq M^p J(\varphi, x_0)\ ,$$

где $||\varphi'(x_0)||$ — норма матрицы Якоби, J — якобиан.

Доказательство. В пространствах R^n_D и R^n_G выберем ортонормированные системы координат так, чтобы $x_0 = 0 \in D$, $\varphi(0) = 0$ и матрица линейного отображения $\varphi'(0)$ имела бы вид (1) (заметим, что так как ранг $\varphi'(0)$ равен n, $\lambda_1 > 0$).

Пусть $\mu > 0$, $h > 0$, $l = (\lambda_1\mu, \lambda_2\mu, \ldots \lambda_{n-1}\mu)$. В области G рассмотрим пробный конденсатор $C_1 = C(l, 0, \mu h\lambda_n)$. Отображение $(\varphi'(0))^{-1}$ переведет этот конденсатор в конденсатор $C_1^*(A_0, B)$ пространства R^n_D, содержащийся в пробном конденсаторе $C_2^* = C(l^*, 0, \mu h)$, где $l^* = (\mu, \mu, \ldots, \mu)$, причем A_0 совпадает с ограниченной компонентой C_2^*, а неограниченная компонента B удовлетворяет условиям замечания, сделанного после оценки снизу в теореме 5.1.

Согласно оценке снизу теоремы 5.1 и замечанию после этой оценки, справедливо неравенство

$$\frac{2\mu^{n-1}}{\mu^{p-1}h^{p-1}} \leq \mathrm{cap}_p C_1^* \tag{2}$$

По условию теоремы

$$\mathrm{cap}_p C_1^* \leq M^p \mathrm{cap}_p(\varphi(C_1^*)) \tag{3}$$

Отображение φ дифференцируемо в точке 0, поэтому для любого $\nu > 0$ найдется $r > 0$, такое, что для всех $x < r$ выполнено

$$|\varphi(x) - \varphi'(0) \cdot x| < \nu|x|. \tag{4}$$

Положим μ таким, чтобы диаметр области конденсатора C_1^* был меньше чем $2r$, тогда для любой точки $x \in A_0 \subset R^n_D$ выполнено

$$|\varphi(x) - \varphi'(0) \cdot x| < \nu\mu,$$

следовательно

$$\varphi(A_0) \subset A_{\nu\mu} \subset R^n_G\ .$$

Для любой точки $x \in R^n_D \setminus B$ верна оценка $|x| \le (\mu h \lambda_n)/\lambda_1$, поэтому

$$|\varphi(x) - \varphi'(0) \cdot x| < \nu\mu h \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(B) \subset B_\tau \subset R^n_G,$$

где $\tau = \mu h \lambda_n (1 - \nu/\lambda_1)$. Таким образом, конденсатор $\varphi(C_1^*)$ содержится в пробном конденсаторе $C_3 = C(l, \nu\mu, \tau)$, то есть

$$\mathrm{cap}_p \varphi(C_1^*) \le \mathrm{cap}_p C_3.$$

Из оценки сверху теоремы 5.1 следует вывод: для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $h > 0$ настолько малым, что

$$\mathrm{cap}_p C_3 \le \frac{2\mu^{n-1}\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}(1+\varepsilon)}{\mu^{p-1}h^{p-1}\lambda_n^{p-1}} .$$

Соединим теперь это неравенство с неравенствами (2), (3) и (4) и получим оценку

$$\frac{2\mu^{n-1}}{\mu^{p-1}h^{p-1}} \le M^p \frac{2\mu^{n-1}\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu^{p-1}\lambda_n^{p-1}}(1+\varepsilon) .$$

После сокращения и преобразования неравенства находим, что

$$\frac{\lambda_n^{p-1}}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}} \le M^p(1+\varepsilon)$$

Так как ε произвольно, приходим к выводу, что теорема верна.

Следствие 1. Пусть $\varphi \in Q_p(M_1, M_2)$, тогда в произвольной точке дифференцируемости x_0 отображения φ главные коэффициенты растяжения для $\varphi'(x_0)$ связаны соотношениями

$$\frac{\lambda_n^{p-1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}} \le M_2^p \tag{5}$$

$$\frac{\lambda_1^{p-1}}{\lambda_2\lambda_3 \cdots \lambda_n} \ge M_1^p \tag{6}$$

Доказательство. По предложению 5.2 φ является квазиизометрическим отображением, поэтому $\lambda_1 > 0$, $\lambda_n < \infty$ в точке дифференцируемости x_0, и отображение $\varphi'(x_0)$ имеет ранг n. Следовательно по теореме 5.2 оценка (5) верна. Обратное отображение φ^{-1} дифференцируемо в точке $\varphi(x_0)$ и если $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le$

$\ldots \lambda_n$ — главные коэффициенты растяжения отображения $\varphi'(x_0)$, то главные коэффициенты растяжения отображения $(\varphi^{-1})'(\varphi(x_0))$, соответственно, равны

$$\Lambda_1 = \lambda_n^{-1}, \ \ \Lambda_2 = \lambda_{n-1}^{-1}, \ \ldots \ \Lambda_n = \lambda_1^{-1} \ .$$

Так как $\varphi^{-1} : G \to D$ принадлежит $Q_p(M_2^{-p}, M_1^{-p})$, имеем

$$M_1^{-p} \geq \frac{\Lambda_n^{p-1}}{\Lambda_1 \cdots \Lambda_{n-1}} = \frac{\lambda_2 \cdots \lambda_n}{\lambda_1^{p-1}} \ ,$$

то есть, верно (6).

Следствие 2. При выполнении условий следствия 1, выполнено

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \geq M_1 M_2^{n/(p-n)} \\ \lambda_n \leq M_2 M_1^{n/(p-n)} \end{array}\right\} \text{ если } \ p < n \ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \geq M_1^{p/(p-n)} \\ \lambda_n \leq M_2^{p/(p-n)} \end{array}\right\} \text{ если } \ p > n \ .$$

Доказательство. Из неравенства (5) следует оценка

$$\lambda_n^{p-1} \leq M_2^p \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \leq M_2^p \lambda_n^{n-1} \,, \lambda_n^{p-n} \leq M_2^p \ ,$$

а из (6) — оценка

$$\lambda_1^{p-1} \geq M_2^p \lambda_2 \cdots \lambda_n \geq M_1^p \lambda_1^{n-1} \,, \lambda_1^{p-n} \geq M_1^p \ .$$

Если $p > n$, получаем $\lambda_1 \geq M_1^{p/(p-n)}$, $\lambda_n \leq M_2^{p/(p-n)}$.
Если же $p < n$, то $\lambda_n \geq M_2^{p/(p-n)}$, $\lambda_1 \leq M_1^{p/(p-n)}$.
Преобразуем неравенство (3) так, чтобы оно стало одноименным с неравенством (2) и перемножим эти неравенства, тогда получим $\lambda_n^p \lambda_1^{-p} \leq M_2^p M_1^{-p}$. Тогда, применив последние две оценки, найдем, что

$$\lambda_n \leq \left(\frac{M_2}{M_1}\right) \lambda_1 \leq M_2 M_1^{n/(p-n)} \ , \ \ \lambda_1 \geq \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \lambda_n \geq M_1 M_2^{n/(p-1)} \ .$$

Теорема 5.3. *Класс $I_p(M_1, M_2)$ совпадает с классом $Q_p(M_1, M_2)$.*
Доказательство. Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ принадлежит классу $I_p(M_1, M_2)$. Это значит, что

1) для любой функции $f \in L_p^1(G)$, $f \circ \varphi \in L_p^1(D)$ и
$\|f \circ \varphi\| \leq M_2 \|f\|$,

2) для любой функции $g \in L^1_p(D)$, $g \circ \varphi^{-1} \in L^1_p(G)$ и
$\|g \circ \varphi^{-1}\| \leq (1/M_1)\|g\|$.

Пусть (A, B) — произвольный кольцевой конденсатор в области D.

Рассмотрим функцию $f \in L^1_p(G)$, допустимую для p-емкости конденсатора $(\varphi(A), \varphi(B))$. Функция $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ допустима для p-емкости конденсатора (A, B), поэтому

$$\mathrm{cap}_p(A, B) \leq \|f \circ \varphi\|^p \leq M_2^p \|f\| \leq M_2^p \mathrm{cap}_p(\varphi(A), \varphi(B))$$

Повторяя рассуждения для гомеоморфизма φ^{-1}, поменяв роли (A, B) и $(\varphi(A), \varphi(B))$, получим неравенство

$$\mathrm{cap}_p(\varphi(A), \varphi(B)) \leq \frac{1}{M_1^p} \mathrm{cap}_p(A, B)\ ,$$

которое вместе с предыдущим неравенством означает принадлежность гомеоморфизма φ классу $Q_p(M_1, M_2)$.

Пусть теперь гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ принадлежит классу $Q_p(M_1, M_2)$. По предложению 5.2 отображение φ квазиизометрическое, поэтому для любой функции $f \in L^1_p(G)$ композиция $f \circ \varphi$ принадлежит пространству $L^1_p(D)$ и $\nabla(f \circ \varphi)(x) = (\nabla f(\varphi(x))) \cdot \varphi'(x)$ [35, с.20] почти всюду. Однако,

$$|(\nabla f(\varphi(x)))| \leq |\nabla f(\varphi(x))| \cdot ||\varphi'(x)||$$

и так как $\varphi \in Q(p, M_1^p, M_2^p)$, по теореме 5.2 $||\varphi'(x)||^p \leq M_2^p J(\varphi, x)$, следовательно имеем оценку

$$|\nabla(f \circ \varphi)x|^p \leq M_2^p |\nabla f(\varphi(x))|^p J(\varphi, x)\ .$$

Интегрируя это неравенство по области D с применением формулы замены переменной, получим

$$\int\limits_D |\nabla(f \circ \varphi)|^p d\mu \leq M_2^p \int\limits_G |\nabla f|^p d\mu\,.$$

Подобные рассуждения, проведенные для обратного отображения φ^{-1} позволяют получить оценку

$$\int\limits_G |\nabla g|^p d\mu \leq M_1^p \int\limits_D |\nabla(g \circ \varphi^{-1})|^p d\mu$$

для любой функции $g \in L^1_p(D)$, которая вместе с предыдущей означает, что $\varphi \in I(p, M_1, M_2)$. Теорема доказана.

Лемма 5.4. *Пусть φ — квазиизометрическое отображение области F на область G, такое, что в любой его точке дифференцируемости x_0 выполнено $\lambda(\varphi, x_0) = \lambda_1 \geq K_1$ и*
$\Lambda(\varphi, x_0) = \lambda_n \leq K_2$. Тогда φ является (K_1, K_2)-квазиизометрическим отображением.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — точки из D, такие, что отрезок $[x_1, x_2]$ лежит в D, а отрезок $[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$ лежит в G. Так как отображение φ удовлетворяет условию Липшица, оно дифференцируемо почти всюду (теорема Степанова [53, с.236]).

Рассмотрим n-мерный параллелепипед Q, одним из ребер которого является отрезок $[x_1, x_2]$, соединяющий две $(n-1)$-мерные грани P_1 и P_2 параллелепипеда P. Обозначим через $\mathcal{I}$ множество отрезков, параллельных отрезку $[x_1, x_2]$ и соединяющих грани P_1 и P_2. Тогда из теоремы Фубини о кратном интегрировании [14, с. 317] следует, что почти во всех точках этих отрезков (в смысле одномерной меры) отображение φ дифференцируемо. Пусть $[z_1, z_2] \in \mathcal{I}$ — один из таких отрезков. Рассмотрим путь $\gamma(t) = \varphi((1-t)z_1 + tz_2)$ в G. В силу квазиизометричности φ путь γ абсолютно непрерывный, следовательно почти всюду дифференцируемый, в частности, дифференцируем в тех t, для которых точка $z(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ является точкой дифференцируемости отображения φ. В таких точках имеем

$$\gamma'(t) = \varphi'((1-t)z_1 + tz_2) \cdot (z_2 - z_1)\,.$$

Тогда длина пути γ равна

$$|\gamma| = \int\limits_0^1 |\gamma'(t)| dt\,.$$

Однако, $K_1|z_1 - z_2| \leq |\varphi'(z(t)) \cdot (z_2 - z_1)| \leq K_2|z_1 - z_2|$, поэтому $K_1|z_1 - z_2| \leq |\gamma| \leq K_2|z_1 - z_2|$. Отметим, что $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq |\varphi(x_1) - \varphi(z_1)| + |\gamma| + |\varphi(z_2) - \varphi(x_2)|$.. Отрезок $[z_1, z_2]$ можно подобрать так, чтобы первое и третье слагаемые в правой части неравенства были как угодно малы. Из последнего высказывания следует, что

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq |\gamma| \leq K_2|z_2 - z_1|\,.$$

Из рассмотрения обратного отображения φ^{-1} подобным образом получается оценка $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \geq K_1|z_1 - z_2|$.

Лемма доказана.

Теорема 5.4. *Пусть $\varphi : D \to G$ принадлежит классу*
$I(p, M_1, M_2)$, $p \neq n$. Тогда φ является (K_1, K_2)-квазиизометрическим отобра-

жением, где

$$K_1 = \begin{cases} M_1 \cdot M_2^{n/(p-n)} & \text{если } \ p < n\,, \\ M_1^{p/(p-n)} & \text{если } \ p > n \end{cases}$$

$$K_2 = \begin{cases} M_2 \cdot M_1^{n/(p-n)} & \text{если } \ p < n\,, \\ M_2^{p/(p-n)} & \text{если } \ p > n\,. \end{cases}$$

Доказательство. По следствию 2 к теореме 5.2 в точках дифференцируемости отображения φ выполнено $\lambda_n \le K_2$ и $\lambda_1 \ge K_1$, числа K_1 и K_2 определены в условии теоремы. По лемме 5.4 φ является (K_1, K_2)-квазиизометрическим отображением.

Следствие. Если $M_1 = M_2 = M$, то φ является ограничением подобия пространства R^n на область D с коэффициентом $M^{p/(p-n)}$.

§4. Оценки для весовых пространств

Дадим определение для гомеоморфизмов, связанных с весовыми пространствами, подобное определению 5.4.

Определение 5.6. *Пусть* $p \ge 1$, $0 < K_1 \le K_2$. *Класс* $I_{p,w}(K_1, K_2)$ *состоит из гомеоморфизмов* $\varphi : D \to G$, *порождающих линейный изоморфизм* A_φ *весовых пространств* $L^1_p(G, \nu_G)$ *и* $L^1_p(D, \nu_D)$ $(A_\varphi f = f \circ \varphi)$, *причем* $||A_\varphi|| \le K_2$ *и* $||(A_\varphi)^{-1}|| \le 1/K_1$.

В этом параграфе рассматриваются только гомеоморфизмы областей, которые, однако, могут не принадлежать классам QR, QI или QH на всей области определения. Удобно будет придать новый смысл терминам "локально квазиконформный"и "локально квазиизометрический". Гомеоморфизм f области D на область G назовем локально квазиконформным (квазиизометрическим), если ограничение f на любую область U, замыкание которой лежит в D, квазиконформно (квазиизометрично).

Теорема 5.5. *Гомеоморфизм* $\varphi : D \to G$ *порождает изоморфизм пространств* $L^1_p(G, \nu_G)$ *и* $L^1_p(D, \nu_D)$ *с непрерывными положительными весами* ν_G *и* ν_D, *то есть принадлежит классу* $I_{p,w}(K_1, K_2)$, *тогда и только тогда, когда выполнены два условия*

1) *гомеоморфизм* φ *квазиконформный, если* $p = n$ *и локально квазиизометрический, если* $p \ne n$;

2) *в произвольной точке дифференцируемости* x_0 *гомеоморфизма* φ *главные коэффициенты растяжения для* $\varphi'(x_0)$ *связаны соотношениями*

$$\lambda_n^p \le K_2^p \frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n\,,$$

$$\lambda_1^p \geq K_1^p \frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \,.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $p \geq 1$ и $\varphi \in I_{p,w}(K_1, K_2)$. Докажем выполнение условия 1). Пусть $x_0 \in D$ — произвольная точка и $U = B^n(x_0, r)$ — шар, содержащийся в D вместе с замыканием. Вследствие непрерывности весов ν_D и ν_G и отображения φ, найдется число $M \geq 1$, такое, что для всех $x \in U$ выполнено

$$\nu_D(x)/M \leq \nu_D(x_0) \leq M\nu_D(x) \,, \tag{1}$$

$$\nu_G(\varphi(x))/M \leq \nu_G(\varphi(x_0)) \leq M\nu_G(\varphi(x)) \,.$$

Рассмотрим кольцевой конденсатор (A, B), лежащий в U. Во множестве $\varphi(U)$ ему соответствует конденсатор $(A', B') =$
$(\varphi(A), \varphi(B))$. Пусть f — допустимая функция для p-емкости конденсатора (A', B'). Градиенты функций f и $f \circ \varphi$ равны 0 на множествах B' и B, соответственно, поэтому $f \in L^1_p(G, \nu_G)$ и $f \circ \varphi \in L^1_p(D, \nu_D)$. Кроме того, $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$, следовательно является допустимой для p-емкости конденсатора (A, B). Так как $\varphi \in I_{p,w}(K_1, K_2)$, имеем

$$\int\limits_D |\nabla(f \circ \varphi)|^p \nu_D d\mu \leq K_2^p \int\limits_G |\nabla f|^p \nu_G d\mu$$

Используя оценки (1) получим неравенство

$$\frac{1}{M}\nu_D(x_0) \int\limits_D |\nabla(f \circ \varphi)|^p d\mu \leq K_2^p M \nu_G(\varphi(x_0)) \int\limits_G |\nabla f|^p d\mu. \tag{2}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Возьмем допустимую функцию f так, чтобы

$$\int\limits_G |\nabla f|^p d\mu \leq (1 + \varepsilon)\mathrm{cap}_p(A', B')$$

и заметим, что

$$\mathrm{cap}_p(A, B) \leq \int\limits_D |\nabla(f \circ \varphi)|^p d\mu$$

тогда из (2), учитывая произвольность ε получим

$$\frac{1}{M}\nu_D(x_0)\mathrm{cap}_p(A, B) \leq K_2^p M \nu_G(\varphi(x_0))\mathrm{cap}_p(A', B'). \tag{3}$$

Если $p = n$, по предложению 5.1 неравенство (3) означает квазиконформность φ^{-1} на множестве $\varphi(U)$, а следовательно квазиконформность φ на U, то есть, локальную квазиконформность φ на D. Квазиконформность φ на всей области D установим в конце доказательства пункта 2).

Поменяв ролями области $U \in D$ и $\varphi(U) \in G$ и используя ту же схему рассуждений, можно доказать следующее утверждение. Для любого кольцевого конденсатора (A, B) из U выполнено

$$\frac{1}{M}\nu_G(\varphi(x_0))\mathrm{cap}_p(A', B') \leq \frac{1}{K_1^p}M\nu_D(x_0)\mathrm{cap}_p(A, B). \tag{4}$$

Соединив оценки (3) и (4), получим

$$\frac{K_1^p\nu_G(\varphi(x_0))}{M\nu_D(x_0)}\mathrm{cap}_p(A', B') \leq \mathrm{cap}_p(A, B) \leq \frac{MK_2^p\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\mathrm{cap}_p(A', B') \tag{5}$$

Неравенство (5) означает, что $\varphi \in Q_p(L_1, L_2)$, где

$$L_1 = \frac{K_1}{M^{1p}}\left(\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\right)^{1/p}, \quad L_2 = M^{1/p}K_2\left(\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\right)^{1/p}.$$

То есть, при $p \neq n$ ограничение φ на шар U является квазиизометрическим, то есть, φ — локально квазиизометрическое отображение.

Докажем утверждение пункта 2). Так как локально квазиконформные и локально квазиизометрические отображения почти всюду дифференцируемы, заключаем что φ дифференцируемо почти всюду в области D.

Пусть теперь x_0 — точка дифференцируемости отображения φ. Положительный радиус r можно подобрать таким образом, что для шара $U = B^n(x_0, r)$ постоянная M в (1) будет как угодно близка к 1 ($M \geq 1$). Тогда применяя следствие 1 к теореме 5.2, в пределе получим, что в точке дифференцируемости $x_0 \in D$ главные коэффициенты растяжения отображения φ связаны соотношениями

$$\lambda_n^p \leq K_2^p\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\,, \tag{6}$$

$$\lambda_1^p \geq K_1^p\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\,. \tag{7}$$

Теперь докажем квазиконформность отображения φ на всей области D при $p = n$. Предположим, что в точке дифференцируемости x_0 главные коэффициенты растяжения отображения φ положительны, так как φ локально квазиконформно, это условие выполнено почти всюду. При $p = n$ из (6) и (7) следуют неравенства

$$\lambda_n^n \leq K_2^n\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\lambda_n^n \qquad \text{и} \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \geq K_1^n\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\,,$$

которые эквивалентны следующим двум неравенствам

$$\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)} \geq \frac{1}{K_2^n} \qquad \text{и} \qquad \frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)} \leq \frac{1}{K_1^n}\,. \tag{7}$$

Применим второе из них к неравенству (6) и получим, что почти всюду в области D выполнено

$$\lambda_n^n \leq \frac{K_2^n}{K_1^n}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\,,\,,$$

то есть отображение φ квазиконформно на области D.

Доказательство достаточности условий 1) и 2) при любом $p>1$ проводится с помощью формулы замены переменной в интеграле подобно тому как это было сделано в теореме 5.3.

Следствие. $(p\neq n)$. При выполнении условий теоремы для любой точки $x_0\in D$ выполнено: в случае когда $1\leq p<n$

$$\lambda(\varphi,x_0)\geq K_1K_2^{n/(p-n)}\left(\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\right)^{1/(p-n)}$$

и

$$\Lambda(\varphi,x_0)\leq K_2K_1^{n/(p-n)}\left(\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\right)^{1/(p-n)}\quad;$$

в случае же когда $p>n$

$$\lambda(\varphi,x_0)\geq K_1^{p/(p-n)}\left(\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\right)^{1/(p-n)}$$

и

$$\Lambda(\varphi,x_0)\leq K_2^{p/(p-n)}\left(\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\right)^{1/(p-n)}\quad.$$

($\Lambda(\varphi,x)$ и $\lambda(\varphi,x)$ — верхнее и нижнее искажения отображения φ в точке x.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и $U=B^n(x_0,r)$ — настолько малая окрестность точки $x_0\in U$, что для любой точки $x\in U$ выполнено

$$(1-\varepsilon)\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}\leq\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\leq(1+\varepsilon)\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}$$

Тогда по теореме 5.2 в любой точке дифференцируемости $x\in U$ выполнено

$$\frac{\lambda_1^p}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}\leq K_1^p(1-\varepsilon)\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}=\tilde{M}_1^p\,,$$

$$\frac{\lambda_n^p}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}\leq K_2^p(1+\varepsilon)\frac{\nu_G(\varphi(x_0))}{\nu_D(x_0)}=\tilde{M}_2^p\,,$$

Эти неравенства означают, что ограничение гомеоморфизма φ на область U принадлежит классу $I_p(\tilde{M}_1^p,\tilde{M}_2^p)$ (вес равен 1). По теореме 5.4 $\varphi|U$ является $(\tilde{K}_1,\tilde{K}_2)$-квазиизометрическим гомеоморфизмом, где

$$\tilde{K}_1=\begin{cases}\tilde{M}_1\cdot\tilde{M}_2^{n/(p-n)} & \text{если }\ p<n\,,\\ \tilde{M}_1^p/(p-n) & \text{если }\ p>n\end{cases}\quad,$$

$$\tilde{K}_2 = \begin{cases} \tilde{M}_2 \cdot M_1^{n/(p-n)} & \text{если } \ p < n\,, \\ \tilde{M}_2^p/(p-n) & \text{если } \ p > n\ . \end{cases}$$

То есть, в случае когда $0 \le p < n$

$$\tilde{K}_1 = K_1 \cdot K_2^{n/(p-n)}(1-\varepsilon)^{1/p}(1+\varepsilon)^{n/(p(p-n))} \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} ,$$

$$\tilde{K}_2 = K_2 \cdot K_1^{n/(p-n)}(1+\varepsilon)^{1/p}(1+\varepsilon)^{n/(p(p-n))} \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)}$$

и в случае когда $p > n$

$$\tilde{K}_1 = K_1^{p/(p-1)}(1-\varepsilon)^{1/(p-n)} \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} ,$$

$$\tilde{K}_2 = K_2^{p/(p-1)}(1+\varepsilon)^{1/(p-n)} \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} .$$

Так как при $r \to 0$ параметр ε также стремится к нулю, предельный переход в приведенных выражениях, приводит к доказательству следствия.

§5. Пространства, связанные с квазигиперболическими отображениями

В этом параграфе установим необходимые и достаточные условия на веса, при выполнении которых квазигиперболический гомеоморфизм областей порождает изоморфизм соответствующих весовых пространств. Рассмотрим случай, когда показатель суммируемости p не равен размерности пространства n.

Итак, пусть $\varphi : D \to G$ — квазигиперболический гомеоморфизм, который порождает изоморфизм весовых пространств $L^1_p(G,\nu_G)$ и $L^1_p(D,\nu_D)$. Так как φ является квазигиперболическим, найдется постоянная $K \ge 1$, такая, что для любой точки $x \in D$ имеют место оценки

$$\lambda(\varphi,x) \ge \frac{\delta_G(\varphi(x))}{K\delta_D(x)}\,, \qquad \Lambda(\varphi,x) \le \frac{K\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)} \tag{1}$$

В силу того, что φ порождает изоморфизм пространств, по следствию к теореме 5.5 найдутся постоянные M_1 и M_2, такие, что для любого $x \in D$ выполнено

$$\lambda(\varphi,x) \ge M_1 \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} , \tag{2}$$

$$\Lambda(\varphi,x) \le M_2 \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} .$$

Из (1) и (2) находим, что

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \leq \frac{\lambda(\varphi,x)}{M_1} \leq \frac{\Lambda(\varphi,x)}{M_1 \leq} \frac{K\delta_G(\varphi(x))}{M_1\delta_D(x)} \ ,$$

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \geq \frac{\Lambda(\varphi,x)}{M_2} \geq \frac{\lambda(\varphi,x)}{M_2} \geq \frac{\delta_G(\varphi(x))}{M_2K\delta_D(x)} \ .$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \leq C_2\frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)},$$

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \geq C_1\frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)} \ . \tag{3}$$

где $C_1 = 1/(M_2K)$ и $C_2 = K/M_1$.

Определение 5.6. *Скажем, что две функции $f_1 : D \to R$ и $f_2 : D \to R$ эквивалентны, если существуют постоянные C_1 и C_2, $0 < C_1 \leq C_2$, такие, что для любого x выполнено $C_1 f_1(x) \leq f_2(x) \leq C_2 f_1(x)$. То, что f_1 и f_2 эквивалентны, будем записывать так: $f_1 \sim f_2$.*

Условие (3) означает, что

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \sim \frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)} \ . \tag{4}$$

Итак, доказано

Предложение 5.3. *Если квазигиперболический гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ порождает изоморфизм весовых пространств $L^1_p(G,\nu_G)$ и $L^1_p(D,\nu_D)$, $p \neq n$, то*

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \sim \frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)} \ .$$

Теперь докажем обратное утверждение.

Предложение 5.4. *Если гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ порождает изоморфизм весовых пространств $L^1_p(G,\nu_G)$ и $L^1_p(D,\nu_D)$ и при этом*

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \sim \frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)} \ .$$

то φ является квазигиперболическим.

Доказательство. По условию найдутся постоянные C_1 и C_2,
$0 < C_1 \leq C_2$, такие, что

$$C_1\frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)} \leq \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \leq C_2\frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)} \ .$$

Так как φ порождает изоморфизм пространств, по следствию к теореме 5.5 найдутся постоянные M_1 и M_2, $0 < M_1 \le M_2$, с которыми выполнено

$$\lambda(\varphi, x) \ge M_1 \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)},$$

и

$$\Lambda(\varphi, x) \le M_2 \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)}.$$

Тогда

$$\lambda(\varphi, x) \ge M_1 \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \ge C_1 M_1 \frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)},$$

$$\Lambda(\varphi, x) \le M_2 \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \le C_2 M_2 \frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)}.$$

Полученные неравенства и означают, что φ — квазигиперболический гомеоморфизм.

Объединим предложения 5.3 и 5.4 в теорему.

Теорема 5.6. *Гомеоморфизм $\varphi : D \to G$, порождающий изоморфизм весовых пространств $L^1_p(G, \nu_G)$ и $L^1_p(D, \nu_D)$, $p \ne n$, является квазигиперболическим тогда и только тогда, когда*

$$\left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\right)^{1/(p-n)} \sim \frac{\delta_G(\varphi(x))}{\delta_D(x)}.$$

Укажем теперь веса, с которыми любой квазигиперболический гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ порождает изоморфизм весовых пространств.

Определение 5.7. *Области D и G назовем QH-эквивалентными, если D отображается на G посредством некоторого квазигиперболического гомеоморфизма.*

Предложение 5.5. *Пусть D и G — QH-эквивалентные области в R^n. Тогда любой квазигиперболический гомеоморфизм порождает изоморфизм весовых пространств $L^1_p(G, \delta_G^{p-n})$ и $L^1_p(D, \delta_D^{p-n})$, $p \ne n$.*

Доказательство этого предложения получается применением теоремы 5.6.

Замечание. Если веса ν_D и ν_G не равны δ_D^{p-n} и δ_G^{p-n}, соответственно, а лишь им эквивалентны ($\nu_D \sim \delta_D^{p-n}$, $\nu_G \sim \delta_G^{p-n}$) то любой квазигиперболический гомеоморфизм D на G порождает изоморфизм пространств $L^1_p(G, \nu_G)$ и $L^1_p(D, \nu_D)$, $p \ne n$.

§6. Подобие весовых пространств Соболева в плоских областях

Определение 5.8. *Подобием полунормированных пространств X и Y назовем такой линейный изоморфизм $A : X \to Y$, что для любого элемента $x \in X$ выполнено $||Ax|| = M||x||$, где $M > 0$ — постоянная.*

В этом параграфе установим вид весов в односвязных собственных подобластях пространства R^2, с которыми любое конформное отображение φ порождает подобие соответствующих функциональных пространств. Пространство R^2 отождествим здесь с комплексной плоскостью $\mathbf{C}$.

Заметим, что для конформного отображения $\varphi : D \to \mathbf{C}$ в любой точке $z \in D$ выполнено $0 \neq \lambda(\varphi, z) = \Lambda(\varphi, z) \neq \infty$.

Предложение 5.6. *Пусть D и G — области в R^n, $n \in N$, $n \geq 2$. Если гомеоморфизм $\varphi : D \to G$ порождает подобие весовых пространств $L^1_p(G, \nu_G)$ и $L^1_p(D, \nu_D)$, $p \neq n$, то φ — конформное отображение.*

Доказательство. Пусть φ порождает подобие, то есть, $||f \circ \varphi|| = M||f||$ для любой функции $f \in L^1_p(G, \nu_G)$. Это значит, что $f \in I_{p,w}(M, M)$. По следствию к теореме 5.5 в любой точке дифференцируемости $x \in D$ отображения φ минимальное и максимальное главные растяжения удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 \geq M^{p/(p-n)} \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)} \right)^{1/(p-n)} ,$$

$$\lambda_n \leq M^{p/(p-n)} \left(\frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)} \right)^{1/(p-n)} .$$

Так как $\lambda_1 \leq \lambda_n$, получаем, что $\lambda_1 = \lambda_n$, то есть отображение φ конформно.

Предложение 5.7. *Если конформное отображение $\varphi : D \to G$ $(D, G \subset R^n,\ n \in N,\ n \geq 2)$ порождает подобие весовых пространств $L^1_p(G, \nu_G)$ и $L^1_p(D, \nu_D)$, $p \neq n$, то для любой точки $x \in D$ выполнено*

$$||\varphi'(x)||^{p-n} \nu_D(x) = M^p \nu_G(\varphi(x)) . \tag{1}$$

Если конформное отображение $\varphi : D \to G$ таково, что для всех $x \in D$ выполнено (1)*, то φ порождает подобие пространств $L^1_p(G, \nu_G)$ и $L^1_p(D, \nu_D)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть конформное отображение φ порождает подобие пространств $L^1_p(G, \nu_G)$ и $L^1_p(D, \nu_D)$, Тогда по теореме 5.5

$$\frac{\lambda_1^p}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n} \geq M^p \cdot \frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)} ,$$

$$\frac{\lambda_n^p}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n} \le M^p \cdot \frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\,.$$

Однако, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n$, следовательно

$$\lambda_n^{p-n} = ||\varphi'(x)||^{p-n} = M^p \frac{\nu_G(\varphi(x))}{\nu_D(x)}\,,$$

то есть выполнено (1).

Достаточность. Так как φ конформно, с теми $x \in D$, для которых $\varphi(x)$ есть точка дифференцируемости функции f, выполнено

$$|\nabla(f \circ \varphi)(x)| = |\nabla f(\varphi(x)|\, ||\varphi'(x)||.$$

Тогда

$$|\nabla(f \circ \varphi)(x)|^p \nu_D(x) = |\nabla(f(\varphi(x))|^p\, \nu_D(x)||\varphi'(x)||^p. \tag{2}$$

Конформность φ означает еще и то, что $||\varphi'(x)||^n = J(\varphi, x)$. Применим это равенство к (2) и получим

$$|\nabla(f \circ \varphi)(x)|^p \nu_D(x) = |\nabla(f(\varphi(x))|J(\varphi, x)||\varphi'(x)||^{p-n} \nu_D(x).$$

К последним двум множителям правой части равенства применим формулу (1) и найдем, что

$$|\nabla(f \circ \varphi)(x)|^p \nu_D = M^p |\nabla(f(\varphi(x))|^p J(\varphi, x) \nu_G(\varphi(x)).$$

Проинтегрируем равенство по области D и применим к правой части формулу замены переменной в интеграле, тогда получим

$$\int\limits_D |\nabla(f \circ \varphi)(x)|^p \nu_D(x)\, d\mu = M^p \int\limits_G |\nabla(f(y)|^p \nu_G(y)\, d\mu.$$

Это и означает, что отображение φ порождает подобие пространств $L_p^1(G, \nu_G)$ и $L_p^1(D, \nu_D)$.

Пример. Пусть $\varphi : C \to C$, $\varphi(z) = (z-1)^2$. Ограничение φ на круг $B = \{z : |z| < 1\}$ однолистно, значит конформно. Положим $G = \varphi(B)$, $\nu_B(z) = 1$. Найдем вес ν_G, с которым отображение φ порождает изометрию (т.е. $M = 1$) пространств $L_p^1(G, \nu_G)$ и $L_p^1(B, \nu_B)$, $p \ne 2$. Так как $\varphi'(z) = 2(z-1)$ и $||\varphi'(z)|| = 2|z-1|$, из (1) находим, что

$$\nu_G(\varphi(z)) = (2|z-1|)^{p-2}.$$

Положим $w = \varphi(z) = (z-1)^2$, тогда $\nu_G(w) = 2^{p-2}|w|^{(p-2)/2}$. Таким образом, φ порождает изометрию пространств $L_p^1(G, \nu_G)$ и $L_p^1(B, \nu_B)$.

Теперь установим вид весов, с которыми любое конформное отображение $\varphi : D \to G$ порождает подобие соответствующих функциональных пространств.

Напомним, что плотностью гиперболической метрики в односвязной собственной области U из C называется функция $\mu(z) = 2|\varphi'(z)|/(1-|\varphi(z)|^2)$, где φ некоторое конформное отображение U на круг $B = \{w : |w| < 1\}$.

Лемма 5.5. *Пусть D и G — односвязные собственные подобласти комплексной плоскости и φ конформно отображает D на G, тогда*

$$\mu_D(z) = \mu_G(\varphi(z)) \cdot |\varphi'(z)| \,.$$

Доказательство. Пусть ψ_D и ψ_G — конформные отображения областей D и G на единичный круг $B = \{z \in C : |z| \le 1\}$, тогда по определению плотности гиперболической метрики, имеем

$$\mu_D(z) = \frac{|\psi_D'(z)|}{1-|\psi_D(z)|^2}\,,$$

$$\mu_G(\varphi(z)) = \frac{|\psi_G'(\varphi(z))|}{1-|\psi_G(\varphi(z))|^2}\,.$$

Так как значение $\mu_D(z)$ не зависит от выбора конформного отображения $D \to B$ [12, с.420], отобразим D на B посредством композиции $\psi_G \circ \phi$. Таким образом,

$$\mu_D(z) = \frac{|(\psi_G \circ \varphi)'(z)|}{1-|\psi_G(\varphi(z))|} = \frac{|\varphi'(z)| \cdot |\psi_G'(\varphi(z))|}{1-|\psi_G(\varphi(z))|^2}$$

Лемма доказана.

Теорема 5.7. *Для того, чтобы любое конформное отображение $\varphi : D \to G$, где D и G — односвязные собственные подобласти плоскости, порождало подобие пространств $L_p^1(G, \nu_G)$ и $L_p^1(D, \nu_D)$ с коэффициентом M, необходимо и достаточно, чтобы веса выражались формулами $\nu_D(z) = M^p K(\mu_D(z))^{2-p}$, $\nu_G(w) = K(\mu_G(w))^{2-p}$, где $K > 0$ — произвольная постоянная.*

Доказательство. *Необходимость.* Подчеркнем, что в областях D и G заданы веса ν_D и ν_G, с которыми любое конформное отображение $\varphi : D \to G$ порождает подобие весовых пространств $L_p^1(G, \nu_G)$ и $L_p^1(D, \nu_D)$.

Пусть $\psi_D : D \to B$ и $\psi_G : G \to B$ — фиксированные конформные отображения. Любое конформное отображение области D на область G имеет представление $(\psi_G)^{-1} \circ \gamma \circ \psi_D$, где γ — некоторое дробно-линейное отображение круга B на себя [12]. Общий вид отображения γ известен:

$$\gamma(w) = \frac{\alpha(w-a)}{1-\overline{a}w}\,,$$

где $a \in B$, $|\alpha| = 1$.

Пусть $z \in D$ — произвольная точка. Выберем отображение $\gamma : B \to B$ так, чтобы $\gamma(\psi_D(z)) = 0$, то есть

$$\gamma(w) = \frac{\alpha(w-a)}{1-\overline{a}w}\,,$$

где $a = \psi_D(z)$.

Положим $\varphi = (\psi_G)^{-1} \circ \gamma \circ \psi_D$, тогда выполнено $\varphi(z) = \psi_G^{-1}(0)$. По предложению 5.7 имеем

$$\nu_D(z) = M^p \nu_G(\varphi(z)) \cdot |\varphi'(z)|^{2-p} \tag{3}$$

Заметим, что

$$\varphi'(z) = (\psi_G^{-1})'(\gamma'(\psi_D(z))) \cdot \gamma'(\psi_D(z)) \cdot \psi_D'(z)\,.$$

Для преобразования $\varphi'(z)$ используем свойства отображения γ. Так как $a = \psi_D(z)$, имеем

$$\gamma'(\psi_D(z)) = \frac{\alpha(1-|a|^2)}{(1-\overline{a}a)^2} = \frac{\alpha}{1-|a|^2}\,.$$

Так как

$$\frac{|\psi_D'(z)|}{1-|\psi_D(z)|^2} = \mu_D(z),$$

равенство (3) преобразуется к виду

$$\nu_D(z) = M^p \cdot \nu_G(\varphi(z)) \cdot |(\psi_G^{-1})'(0)|^{2-p} \cdot \mu_D^{2-p}(z) =$$

$$= M^p \cdot \nu_G(\psi_G^{-1}(0)) \cdot |(\psi_G^{-1})'(0)|^{2-p} \cdot \mu_D^{2-p}(z)\,. \tag{4}$$

Так как выражение, стоящее перед $\mu_D^{2-p}(z)$ в правой части (4) не зависит от z и функции ν_G и ψ_G — фиксированные, положим

$$K = \nu_G(\psi_G^{-1}(0)) \cdot |(\psi_G^{-1})'(0)|^{2-p}\,.$$

Тогда

$$\nu_D(z) = M^p \cdot K \cdot \mu_D^{2-p}(z)\,. \tag{5}$$

Точка z — произвольная, поэтому формула (5) дает общий вид веса ν_D.

Согласно предложению 5.8

$$\nu_G(\varphi(z)) = M^{-p}|\varphi'(z)|^{2-p}\nu_D(z) =$$

$$= M^{-p}M^pK|\varphi'(z)|^{2-p}\mu_D(z) = K\mu_G(\varphi(z))\,.$$

Положив $w = \varphi(z)$, имеем $\nu_G(w) = K^{2-p\mu_G(w)}$ для любой точки $w \in G$.

Достаточность. Пусть

$$\nu_D(z) = M^p \cdot K \cdot \mu_D^{2-p}(z)\,,$$

$$\nu_G(w) = K \cdot \mu_D^{2-p}(z)\,.$$

Проверим, что веса удовлетворяют равенству (1)

$$|\varphi'(z)|^{2-p}\nu_G(\varphi(z)) = K \cdot |\varphi'(z)|^{2-p}\mu_G^{2-p}(\varphi(z)) = K \cdot \mu_D^{2-p}(z) =$$

$$= M^{-p} \cdot K^{-1} \cdot K\nu_D(z) = M^{-p}\nu_D(z)\,.$$

Таким образом,

$$\nu_D(z) = M^p|\varphi'(z)|^{2-p}\nu_G(\varphi(z)).$$

И по предложению 5.8 отображение φ порождает подобие пространств.

Теорема доказана.

§7. Эллиптические уравнения и квазигиперболические отображения

Задача о представлении решений эллиптических уравнений в виде композиции решения некоторого уравнения и отображения с ограниченным искажением впервые была поставлена и решена Ю.Г.Решетняком в [40]. В начале 80 годов эта задача другими методами была решена авторами работы [58].

О.Мартио и Ю.Вяйсяля в работе [65] решили подобную задачу для отображений класса QI постоянной ориентации (BLD-отображений по терминологии) авторов. Метод, использованный ими взят из работы [58].

В этом параграфе рассмотрим задачу применительно к отображениям постоянной ориентации класса QH. Содержание параграфа опубликовано в [29] и представляет собой переложение для нового класса отображений результатов статьи [65], поэтому будем придерживаться обозначений этой статьи.

ACL^p — класс функций абсолютно непрерывных на почти всех прямых, $p \geq 1$ — показатель суммируемости производных функций из этого класса. О классе ACL^p см. [71]. Отображение $f : D \to R^n$ принадлежит классу ACL^p если все его координатные функции оттуда. Отметим, что класс ACL^p совпадает с классом Соболева $W^p_{1,loc}$. Если отображение $f : D \to R^n$ принадлежит ACL^p, то для почти всех x из D определена матрица Якоби $f'(x)$ и якобиан $J(f, x)$, частные производные понимаются в обычном смысле. Будем использовать термин ACL^p-отображение (функция), если пойдет речь об отображении (функции) класса ACL^p, в случае когда $p = 1$ индекс p опустим. Полагаем, что все рассматриваемые отображения постоянной ориентации.

Через $\delta(x)$ будем обозначать расстояние от точки x до границы области G, скалярное произведение векторов x и y пространства R^n будем обозначать как $x \cdot y$;

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) \ -$$

оператор Гамильтона.

Определение 5.9. ([65], [40]). *Пусть $p > 1$, $A : D \times R^n \to R^n$ дифференциальный эллиптический оператор второго порядка в дивергентной форме, $p > 1$. Это означает, что A удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset D$ такое, что $m(D \setminus F) < \varepsilon$ и ограничение A на $F \times R^n$ непрерывно, $\mu(U)$ – мера Лебега множества U.*

(b) *Существуют положительные числа γ_1, γ_2 такие, что для почти всех $x \in D$ и всех $h \in R^n$ выполнено*

$$|A(x,h)| \leq \gamma_1 |h|^{p-1} \tag{1}$$

и

$$A(x,h) \cdot h \geq \gamma_2 |h|^p. \tag{2}$$

Свойство (1) *называется ограниченностью оператора A, свойство* (2) *— равномерной эллиптичностью оператора A.*

Непрерывная ACL^p-функция $u : D \to R$ является решением уравнения

$$\nabla \cdot A(x, \nabla u(x)) = 0, \tag{3}$$

если для всех $\varphi \in C_0^\infty(D)$ выполнено

$$\int\limits_D A(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla \varphi(x) d\mu(x) = 0.$$

Пусть теперь f — ACL-отображение области G в область D. Оператор $f^\# A$ определяется формулой

$$f^\# A(x,h) = J(f,x) f'(x)^{-1} A(f(x), (f'(x)^{-1})^* h),$$

если $J(f,x) \neq 0$; если же $J(f,x) = 0$ или не существует, то положим $f^\# A(x,h) = A(f(x),h)$. Напомним, что $f'(x)$ - матрица Якоби, если T – матрица, то T^{-1} - обратная, T^* – транспонированная матрицы. Вид оператора $f^\#$ объясняется теоремой 3.11 [65], в которой показано, что решение уравнения $\nabla \cdot A = 0$ определяет решение уравнения $\nabla \cdot f^{\#}$.

Приведем полностью формулировку и доказательство следующей теоремы Мартио и Вяйсяля.

Теорема 5.8. [65, теорема 3.9]. *Предположим, что $f : G \to D$ есть ACL-отображение, что $J(f,x) > 0$ почти всюду и, что A и $f^{\#}A$ удовлетворяют условиям* (a) *и* (b) *определения* 5.9 *в D и в G, соответственно. Тогда*

1) *f принадлежит классу $QI(L)$, если $p \neq n$,*

2) *f принадлежит классу $QR(K)$, если $p = n$ и если $J(f,x)$ локально интегрируемая функция.*

В обоих случаях L и K зависят только от констант для f и $f^{\#}A$, от p и от n.

Доказательство. Пусть $\gamma_1^{'}$, $\gamma_2^{'}$ — константы для $f^{\#}A$ в условиях (1) и (2) определения 5.9. Пусть E — множество всех $x \in D$, не удовлетворяющих условиям (1) и (2) определения 5.9 и пусть E' — соответствующее множество для $f^{\#}A$. Тогда $\mu(E) = \mu(E') = 0$. Из [69, Lemma 7, p. 348] следует, что $J(f,x) = 0$ почти всюду в $f^{-1}E$. Поэтому $\mu(f^{-1}E) = 0$. Фиксируем $x \in G \setminus (E' \cup f^{-1}E)$, тогда $J(f,x) > 0$. Положим $h \in R^n$ и обозначим $h' = f'(x)^* h$. Тогда

$$J(f,x)\gamma_2|h|^p \leq J(f,x)A(f(x),h)\cdot h = f^{\#}A(x,h')\cdot h' \leq$$

$$\leq {\gamma_1}'|h'|^{p-1}|h'| = {\gamma_1}'|f'(x)^*h|^p,$$

и подбирая h, чтобы $|h| = 1$ и $|f'(x)^*h| = \lambda(f,x)$, получим неравенство

$$\gamma_2 J(f,x) \leq {\gamma_1}'\lambda^p(f,x). \tag{4}$$

С другой стороны,

$$J(f,x)\gamma_1|h|^p \geq J(f,x)A(f(x),h)\cdot h = f^{\#}A(x,h')\cdot h' \geq {\gamma_2}'|f'(x)^*h|^p,$$

и подбирая h, чтобы $|h| = 1$ и $|f'(x)^*h| = \Lambda(f,x)$, получим

$$\gamma_1 J(x,f) \geq {\gamma_2}'\Lambda^p(f,x). \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) выполнены почти всюду в G.

Если $p = n$ и если $J(f,x)$ локально интегрируемая функция, то из этих неравенств следует, что f принадлежит классу $QR(K)$ с $K = \max(\gamma_1/{\gamma_2}', {\gamma_1}'/\gamma_2)$.

Предположим далее, что $p \neq n$. Теперь (4) и (5) позволяют утверждать, что

$$\Lambda(f,x) \leq H\lambda(f,x) \tag{6}$$

почти всюду в G, где $H = (\gamma_1 {\gamma_1}' / \gamma_2 {\gamma_2}')^{1/p}$.

Пусть сначала $p < n$. Тогда (4) дает

$$\lambda^n(f,x) \leq J(f,x) \leq ({\gamma_1}'/\gamma_2)\lambda^p(f,x)$$

и, следовательно,

$$\lambda(f,x) \leq ({\gamma_1}'/\gamma_2)^{1/(n-p)} \tag{7}$$

почти всюду в G. Согласно (5) имеем

$$\Lambda^p(f,x) \leq (\gamma_1/{\gamma_2}')J(f,x) \leq (\gamma_1/{\gamma_2}')\Lambda^n(f,x)$$

поэтому

$$\Lambda(f,x) \geq ({\gamma_2}'/\gamma_1)^{1/(n-p)} > 0 \tag{8}$$

почти всюду в G; заметим, что $J(f,x) > 0$ почти всюду. Теперь (6), (7) и (8) позволяют заключить, что

$$\Lambda(f,x) \leq H({\gamma_1}'/\gamma_2)^{1/(n-p)}, \qquad \lambda(f,x) \geq (1/H)({\gamma_2}'/\gamma_1)^{1/(n-p)}.$$

почти всюду в G. Таким образом, f принадлежит классу $QI(L)$, где $L = H^{(2n-p)/2(n-p)}$.

Пусть теперь $p > n$. Тогда (4) дает

$$\gamma_2\lambda^n(f,x) \leq \gamma_2 J(f,x) \leq {\gamma_1}'\lambda^p(f,x)$$

и, поэтому

$$\lambda(f,x) \geq (\gamma_2/{\gamma_1}')^{1/(p-n)}$$

почти всюду в G. Из (5) получим

$$\gamma_1\Lambda^n(f,x) \geq \gamma_1 J(f,x) \geq {\gamma_2}'\Lambda^p(f,x),$$

следовательно

$$\Lambda(f,x) \leq (\gamma_1/{\gamma_2}')^{1/(p-n)}$$

почти всюду в G. Таким образом, доказано, что f принадлежит классу $QI(L')$, где $L' = H^{p/2(p-n)}$.

Дальнейшие построения параграфа продиктованы наблюдением, состоящем в том, что ограничения отображений класса QH на компактные подобласти области определения принадлежат классу QI, поэтому на таких подобластях можно применять методы статьи Мартио и Вяйсяля.

Преобразуем условия определения 5.9, которым удовлетворяет оператор $f^{\#}A$ к новой ситуации. Мы будем предполагать, что оператор $f^{\#}A$ удовлетворяет условию (a) и условию (c): существуют две положительные функции γ'_1 и γ'_2, определенные на G такие, что существует положительное число M, с которым для каждой точки $y \in G$ выполнено

$$H(y) = \left(\frac{\gamma_1 \gamma_1{}'(y)}{\gamma_2 \gamma_2{}'(y)}\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$$

и для каждой точки $x \in B(y, \delta(y)/2)$ имеет место оценка

$$|f^{\#}A(x,h)| \leq \gamma'_1(y)|h|^{p-1}, \tag{9}$$

и

$$f^{\#}A(x,h) \cdot h \geq \gamma'_2(y)|h|^p. \tag{10}$$

Свойство (9) назовем локальной ограниченностью оператора $f^{\#}A$, а свойство (10) локальной равномерной эллиптичностью этого оператора.

Теореме 3.9 [65] у нас будет соответствовать

Теорема 5.9. *Пусть $f : G \to D$ ACL-отображение такое, что $J(f,x) > 0$ почти всюду, оператор A удовлетворяет условиям* (a) *и* (b)*, оператор $f^{\#}A$ удовлетворяет условиям* (a) *и* (c)*. Тогда*

1) *f — квазигиперболическое отображение, если $p \neq n$,*

2) *f — локально принадлежит классу QR и функция $J(f,x)$ локально интегрируемая, если p=n.*

Доказательство. Пусть y — произвольная точка из G. Обозначим через B шар $B^n(y, \delta(y)/2)$. Рассмотрим оператор $f^{\#}A$. По свойству (c) для любой точки $x \in B$ выполнены неравенства (9) и (10).

Заметим, что y фиксированная точка, значит на множестве $B \times R^n$ оператор оператор A удовлетворяет условиям (a) и (b), с постоянными γ_1 и γ_2, а оператор $f^{\#}A$ удовлетворяет условиям (a) и (c), с постоянными $\gamma_1{}'(y)$ и $\gamma_2{}'(y)$. Таким образом, выполнены условия теоремы 5.6, где множество G заменено шаром B.

Тогда при $p = n$ ограничение отображения f на шар B принадлежит классу $QR(K_y)$, где $K_y = \max(\gamma_1/\gamma_2{}'(y), \gamma_1{}'(y)/\gamma_2)$. Заметим, что условие (c) не гарантирует ограниченности K_y на всей области G, то есть само отображение f может и не принадлежать классу QR.

Пусть теперь $p < n$. Как это было доказано в теореме 5.6 ограничение отображения f на шар B принадлежит классу $QI(L(p))$, где $L(p) = H(y)^{(2n-p)/(2(n-p))} \leq M^{(2n-p)/(2(n-p))}$, то есть $f|B$ подобно $L(p)$-квазиизометрическому отображению.

При $p > n$ по теореме 5.8 для любого $x \in B$ выполнено

$$\Lambda(f,x) \leq (\gamma_1/\gamma_2{}'(y))^{1/(p-n)}$$

и

$$\lambda(f,x) \geq (\gamma_2/\gamma_1{}'(y))^{1/(p-n)}.$$

То есть $f|B$, принадлежит классу $QI(L(p))$,
где $L(p) = H(y)^{p/(2(p-n))} \leq M^{p/(2(p-n))}$.

Обозначим $L = \max\{L(p): \ \ p \geq 1, \ p \neq n\}$. Тогда для любой точки $y \in G$ ограничение f на шар $B^n(y, \delta(y)/2)$, подобно L-квазиизометрическому отображению, следовательно, по теореме 2.2 отображение f принадлежит классу QH.

Теорема 5.9 допускает обращение.

Теорема 5.10. *Предположим $p \neq n$, оператор A в уравнении* (3) *удовлетворяет условиям* (a) *и* (b) *и отображение $f : G \to D$ является K-квазигиперболическим.*

Тогда оператор $f^{\#}A$ удовлетворяет условиям (a) *и* (c) *в G, где функции γ'_1 и γ'_2 зависят только от A, K, p и n.*

Доказательство. Пусть $y \in G$. Рассмотрим ограничение f на шар $= B(y, \delta(y)/2)$. Отображению $f|B$ соответствует оператор $f^{\#}_y A$ – ограничение $f^{\#}A$ на $B \times R^n$. $f|B$ – M-квазиизометрическое отображение, тогда по теореме 3.15 [65] $f^{\#}_y A$ удовлетворяет условиям (a) и (b) с постоянными $\gamma'_1(y)$ и $\gamma'_2(y)$. Теперь покроем область G счетным набором шаров $\{B_k|\}$ вида $B(y, \delta(y)/2)$, где $y \in G$. Так как $f^{\#}A|(B_k|Rn)$ удовлетворяет условию (a), для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество $F_k \subset B_k$, $m(B_k \setminus F_k) < \varepsilon/2^{k+1}$ такое, что отображение $f^{\#}A|(F_k|Rn)$ непрерывно. Пусть $U_k = B_k \setminus F_k$, $U = \bigcup U_k$. Тогда $m(U) \leq \sum U_k < \sum \varepsilon/2^{k+1} = \varepsilon/2$. Положим, $F^* = G \setminus U$. При помощи соотношений двойственности для объединений и пересечений можно проверить, что $F^* = \bigcup F_k$. Так как множество F^* измеримо, найдется замкнутое множество $F \subset F^*$, такое, что $\mu(F^* \setminus F) < \varepsilon/2$, следовательно $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. По построению, отображение $f^{\#}A$ непрерывно на всех множествах $F_k \times R^n$, $k \in N$, следовательно непрерывно и на F. Таким образом, свойство (a) выполнено.

Проверим свойство (c). Так как f K-квазигиперболическое отображение, найдутся непрерывные положительные функции a и b на G такие, что для любой точки $y \in G$ и $x \in B(y, \delta(y)/2)$ выполнено $a(y) \leq \lambda(f,x), \ \Lambda(f,x) \leq b(y)$, $b(y)/a(y) \leq M^2$.

Положим как и в теореме 3.15 [65] $h^* = ((f\,'(x))^{-1})^* h$, тогда

$$|f^{\#}A(x,h)| = |J(f,x)(f\,'(x))^{-1}A(f,x), h^*)| \leq$$

$$\leq \Lambda^n(f,x)/\lambda(f,x)|A(f(x),h^*)| \leq\leq (\gamma_1 b^n(y)/a(y))|h^*|^{p-1} \leq$$

$$\le (b^n(y)\gamma_1/(a(y)\lambda^{p-1}(y))|h|^{p-1} \le (\gamma_1 b^n(y))/a^p(y))|h|^{p-1}.$$

Итак,

$$|f^{\#}A(x,h)| \le (\gamma_1 b^n(y))/a^p(y)|h|^{p-1}.$$

Положим $\gamma_1'(y) = \gamma_1 b^n(y))/a^p(y)$ Сделаем оценку снизу

$$f^{\#}A(x,h)\cdot h = J(f,x)A(f(x),h^*)\cdot h^* \ge \lambda^n(f,x)\gamma_2|h^*|^p.$$

Так как $h^* = ((f'(x))^{-1})^* h$, имеем $|h^*| \ge |h|/\Lambda(f,x)$, поэтому

$$f^{\#}A(x,h)\cdot h \ge \frac{a^n(y)}{b^p(y)}|h|^p.$$

Положим $\gamma_2'(y) = \gamma_2 a^n(y)/b^p(y)$. Осталось оценить отношение

$$H(y) = \frac{\gamma_1\gamma_1'(y)}{\gamma_2\gamma_2'(y)} = \frac{\gamma_1^2 b^{n+p}(y))}{\gamma_2^2 a^{n+p}(y)} \le \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}M^{2+p}.$$

Таким образом, $f^{\#}A$ удовлетворяет свойству (c).

Теореме 3.17 [65] соответствует

Теорема 5.11. *Пусть $f : G \to D$ – K- квазигиперболическое отображение. Предположим, что u – решение уравнения $\nabla \cdot A = 0$ в D. Тогда $v = u \circ f$ является решением уравнения $\nabla \cdot f^{\#}A = 0$ в G.*

Доказательство. Пусть $y \in G$, тогда ограничение f на шар $B = B(y, \delta(y)/2)$ является квазиизометрическим отображением. По теореме 3.17 [65] ограничение функции $v = u \circ f$ на B есть решение уравнения $\nabla \cdot f^{\#}A = 0$ в шаре . Так как точка y была взята произвольно в B, функция $v = u \circ f$ является решением уравнения $\nabla \cdot f^{\#}A = 0$ во всей области G.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что условие квазигиперболичности f избыточно, достаточно потребовать существования покрытия области G шарами, на каждом из которых f K-квазиизометрично.

Список литературы

[1] Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

[2] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: “Мир 1968.

[3] Альфорс Л. Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. – М.: “Мир 1986.

[4] Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: издательство “Университетское 1984.

[5] Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: “Наука 1974.

[6] Водопьянов С.К. Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств// Сиб. мат. журн. – 1989. – Т. 30, №5. – С. 25-41.

[7] Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Квазиконформные отображения и пространства функций с обобщенными производными// Сиб. мат. журн. – 1976. – Т. 17, №3. — С. 515-531.

[8] Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Функциональные характеристики квазиизометрических отображений// Сиб. мат. журн. – 1976. – Т. 17, №4. — С. 786-773.

[9] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Ведение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: “Наука”, 1983.

[10] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: “Наука 1968.

[11] Гусман М. Дифференцирование интегралов в R^n. – М.: “Мир 1978.

[12] Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: “Наука 1968.

[13] Ефремович В.А., Тихомирова Е.С. Эквиморфизмы и квазиконформные отображения абсолюта// Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 28. – С. 1139-1144.

[14] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Издание четвертое, переработанное. – М.: "Наука 1976.

[15] Латфуллин Т.Г. О геометрических условиях на образы прямой и окружности при квазиизометрии плоскости// Материалы XXIII Всесоюзной научной студенческой конференции. Математика. – Новосибирск, 1980. – С.18-22.

[16] Латфуллин Т.Г. Геометрическая характеристика квазиизометрического образа полуплоскости// Теория отображений, ее обобщения и приложения. Киев: "Наукова думка 1982. С. 116-126.

[17] Латфуллин Т.Г. О продолжении квазиизометрических отображений// Сиб.мат.журн. – 1983. – Т. 24, №4. – С. 212-216.

[18] Латфуллин Т.Г. О сглаживании квазиконформных инволюций/ Тюмен. ун-т, Тюмень, 1985, 33 с. Рукопись депонированная в ВИНИТИ 07.03.85, №1730–85 Деп.

[19] Латфуллин Т.Г. Функциональные пространства, связанные с квазигиперболическими отображениями/ Тюмен. ун-т. – Тюмень.– 1989. – 22 с. – Деп. в ВИНИТИ 06.12.89, №7229–В89.

[20] Латфуллин Т.Г. Диффеоморфизмы, сохраняющие пространства Соболева L_p^1/ Тюмен. ун-т. – Тюмень. – 1988. – 21 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.11.88, №8238–В88.

[21] Латфуллин Т.Г. Коэффициенты искажения для отображений, индуцирующих изоморфизмы пространств Соболева/ Тюмен. ун-т. – Тюмень. – 1990. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.06.90, №3379–В90.

[22] Латфуллин Т.Г. Условия на веса, гарантирующие подобие весовых пространств Соболева при конформных отображениях областей//Известия вузов. Математика.– 1991. – №11. – С. 96-97.

[23] Латфуллин Т.Г. Вариант теоремы Ф.Рисса для полуплоскости/ Тюмен. ун-т. – Тюмень. – 1993. – 8 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.07.93, №2055–В93.

[24] Латфуллин Т.Г. Критерий квазиизометричности отображений областей с внутренними метриками/ Тюмен. ун-т. – Тюмень. – 1994. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.09.94, №2265–В94.

[25] Латфуллин Т.Г. Регулярные в полуплоскости функции, топологически эквивалентные квазиизометрическим отображениям// Сиб.мат.журн. – 1994. – Т. 35, №6. – С. 370-372.

[26] Латфуллин Т.Г. Пространства Соболева в областях R^n и связанные с ними отображения// Фундаментальные проблемы математики и механики: Математика, Ч. 1. – М., 1994. – С. 75-76.

[27] Латфуллин Т.Г. Топологическая эквивалентность многочленов и квазиизометрических отображений плоскости// Сиб.мат.журн. – 1995. – Т. 36, №2. – С. 1305-1313.

[28] Латфуллин Т.Г. Критерий квазигиперболичности отображений// Сиб. мат. журн. – 1996. – Т. 37, №3. – С. 610–615.

[29] Латфуллин Т.Г. Квазигиперболические отображения// Второй Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-96), Новосибирск, июнь 1996 г.: Тез.докл. – Новосибирск, 1996. – С. 76.

[30] Латфуллин Т.Г. Квазигиперболические отображения и эллиптические уравнения// Вестник Тюменского государственного университета. – 1998. — №2. – С. 7–11.

[31] Латфуллин Т.Г. Неинъективные квазигиперболические отображения и эллиптические уравнения// Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-98), Новосибирск, июнь 1998 г.: Тез.докл. – Новосибирск, 1998. – С. 78.

[32] Латфуллин Т.Г. Топологическая эквивалентность отображений// Международная конференция по анализу и геометрии, посвящ. 70-летию акад. Ю.Г.Решетняка, Новосибирск, сент. 1999 г.: Тез. докл. – Новосибирск, 1999. – С. 56.

[33] Латфуллин Т.Г. Обобщение теоремы Альфорса о квазиизометрическом отражении// Сиб.мат.журн. – 1999. – Т. 40, №4. – С. 918-930.

[34] Латфуллин Т.Г. Аппроксимация отображений с ограниченным искажением// Четвертый Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), Новосибирск, июнь 2000 г.: Тез.докл. – Новосибирск, 2000. – С. 128.

[35] Мазья В.Г. Пространства С.Л.Соболева. – Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1985.

[36] Математическая энциклопедия. – М.: “Сов. энцикл. 1977. Т. 1

[37] Привалов И.И. Граничные свойства свойства аналитических функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950.

[38] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – 10-е изд. – М.: “Наука 1960.

[39] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: “Наука 1982.– 288 с.

[40] Решетняк Ю.Г. Об экстремальных свойствах отображений с ограниченным искажением// Сиб.мат.журн. – 1969. – Т.10, №6. – С.1308-1318.

[41] Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. – Новосибирск: “Наука 1982

[42] Смит П.А. Неподвижные точки периодических отображений. Прибавление В в книге Лефшец. С. Алгебраическая топология. – М.: Издательство Иностранной литературы, 1949.

[43] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: “Наука 1973.

[44] Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1964.

[45] Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. – Новосибирск: “Наука 1983.

[46] Успенский С.В. О теоремах вложения для весовых классов// Тр. Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1961. – Т.60. – С. 281–303.

[47] Федерер Г. Геометрическая теория меры. – М.: “Наука 1987.

[48] Astala K., Gehring F. Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space// J.Analyse Math. – 1986. – Vol. 46, P. 16-57.

[49] Becker J. Löwnersche Differental gleichung und quasikonform fortsetzbare schlihte Funktionen// J.Reine Angew. Math. – 1972. – Vol. 255, P. 23-43.

[50] Beurling A., Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings// Acta Math. – 1956. – Vol.96, – P. 125–142.

[51] Caraman P. On the equivalence of the definitions of the n-dimensional quasiconformal homeomorphisms (QCFH)// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1967. – Vol. 12, №7, P. 889-943.

[52] Carleson L. The extension problem for quasiconformal mappings. – In.: Contribution to Analysis, New York, Academic Press, 1974, p.39-47

[53] Ferrand J. A characterization of quasiconformal mappings by the behaviour of a functions of three points// Lect. Notes Math. – 1988. – Vol. 1351, P. 110-123

[54] Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space// Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 103, P. 353-393.

[55] Gehring F.W. Lipschitz mappings and p-capacity// Advanced Theory Riemann Surfaces, Proc. – 1969. – Stony Brook conf.– 1971. P. 175-183

[56] Gehring F.W., Hag K., Martio O. Quasihyperbolic geodesics in John domains// Math. Scand. – 1989. – Vol. 65. – P. 75-92.

[57] Gehring F.W., Osgood B.G. Uniform domains and the quasihiperbolic metric// J.Anal.Math. – 1979. – Vol. 36, P.50-74.

[58] Glanlund S., Linqvist P., Martio O. Conformally invariant variational integrals// Trans.Am.Math.Soc. – 1983. – Vol. 277. – P.43-73.

[59] Heinonen J., Rickman, Quasiregular maps $S^3 \to S^3$ With Wild branch sets. – Helsinki, 1996. – 226 p. – (Preprint 124/ Universiti of Helsinki).

[60] Heinonen J., Rohde S. The Gehring-Hayman inequality for quasihyperbolic geodesics// Math. Proc.Cambridge Philos. Soc. – 1993. – Vol. 114. – P. 393-405.

[61] Jerison D.S., Kenig C.E. Hardy spaces, A_∞, and singular integrals on chord-arc domains// Math. Scand. – 1982. – Vol. 50. – P. 221-247.

[62] John F. Quasi-isometric mappings, I// Comm.Pure Appl. Math. – 1968. – Vol. 21. – P. 77-110.

[63] John F. Quasi-isometric mappings, II// Comm.Pure Appl. Math. – 1968. – Vol. 22. – P. 256-278.

[64] Martio O. Quasisimilarities// Rev. Roumaine Pures Appl. – 1991. – Vol. 36, P. 395-406.

[65] Martio O., Väisälä J. Elliptic Equations and Maps of Bounded Length Distortion// Mathematishe Annalen. – 1988. – Vol. 282. – P.423-443.

[66] Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings// Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser.A1, Math. – 1969.– №448. – P.1-40.

[67] Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings// Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser.A1, Math. – 1971.– №488. – P.1-3.

[68] Martin G.J., Quasiconformal and bi-Lipschitz homeomorphisms, uniform domains and the quasihyperbolic metric// Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 292. – P. 169-191.

[69] Rado T., Reichelderfer P.V. Continious transformations in analysis. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1955.

[70] J.Sarvas, The Hausdorff dimension of the branch set of a quasiregular mapping// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, Math. – 1975. – №2. – P. 297-307.

[71] Väisälä J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. – Berlin, Heidelberg, New York. Springer, 1971.- 248 p.

[72] Väisälä J. Quasi-simmetric embeddings in euclidean spaces// Trans. Am. Math. Soc. – 1981. – Vol. 264. – P. 191–204.

[73] Väisälä J. Homeomorphisms of bounded length distortion// Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser.A1, Math.. – 1987. – Vol. 12. – P.303–312.

[74] Väisälä J. Uniform domains// Tôhoku Math. J. – 1988. – Vol. 40, №1. – P. 101–118.

[75] Väisälä J. The free quasiworld. – Helsinki, 1997. – 73 p. – (Preprint 137/ Universiti of Helsinki).

[76] Tukia P., Väisälä J. Lipschitz and quasiconformal approximation and extension// Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser.A1, Math. – 1981. – Vol. 6, P. 303–342.

[77] Tukia P., Väisälä J. Bilipschitz extension of maps having quasiconformal extensions// Math. Ann. – 1984. – Vol. 269. – P. 561-572.

[78] Ziemer P. Extremal length and conformal capacity// Tr. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 126, P. 460-473.

Список основных обозначений

R — множество действительных чисел.

R^n — n-мерное арифметическое пространство.

C — множество комплексных чисел.

$\overline{A}$ — замыкание множества A.

∂A — граница множества A.

$B^n(x,r)$ — открытый шар в пространстве R^n, x — центр шара, r — радиус шара.

$\overline{B}^n(x,r)$ — замкнутый шар в R^n.

$S^{n-1}(x,r)$ — сфера, граница шара $B^n(x,r)$.

$L^1_p(D)$ — полунормированное пространств Соболева, состоящее из функций $f : D \to R$, имеющих обобщенные производные первого порядка, суммируемые в степени $p \geq 1$. Полунорма в этом пространстве задается формулой

$$||f|| = \left(\int_D |\nabla f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

$L^1_p(D,\nu)$ — полунормированное пространств Соболева, состоящее из функций $f : D \to R$, имеющих обобщенные производные первого порядка, суммируемые в степени $p \geq 1$ с весом ν. Полунорма в этом пространстве задается формулой

$$||f|| = \left(\int_D |\nabla f(x)|^p \nu(x) d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

$\mathrm{cap}_p(A,B)$ — p-емкость конденсатора (A,B).

$$\lambda(f,z) = \varliminf_{w\to z} \frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|}, \quad \Lambda(f,z) = \varlimsup_{w\to z} \frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|} \quad —$$

главные растяжения отображения f в точке z.

$\Phi_n : [1,\infty) \to R$, $\Psi_n : [0,\infty) \to R$ — функции, через которые выражаются емкости конденсаторов Гретша и Тейхмюллера (с. 33).

Предметный указатель