РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А.И.ГЕРЦЕНА

На правах рукописи

ЛИНЧУК ЛИДИЯ ВЛАДИМИРОВНА

СИММЕТРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. В.Д.Будаев

Научный консультант:
д.ф.-м.н., проф. В.Ф.Зайцев

Санкт-Петербург
2001

Введение

В диссертационной работе рассматривается класс обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений вида

$$F\Big(x, y(x), y\big(\varphi(x)\big), y'(x), y'\big(\varphi(x)\big),\ \ldots\ , y^{(n)}(x), y^{(n)}\big(\varphi(x)\big)\Big) = 0. \quad (0.1)$$

В обширной литературе, посвященной данному вопросу, различные подклассы уравнений такого типа называют также дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, дифференциально-разностными уравнениями, уравнениями с запаздыванием.

Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) встречаются уже в работах математиков XVIII века, например, в связи с решением задачи Л.Эйлера о разыскании общего вида линии, подобной своей эволюте. Однако до 1940 года число работ, посвященных этим уравнениям, было сравнительно невелико. Укажем, что до 40-х гг. еще не были сформулированы основные теоремы теории ФДУ, в литературе не было даже четкой постановки начальной задачи [44]. В 50-60 гг. в связи с появлением многочисленных приложений интерес к теории ФДУ резко возрос.

Как известно [20, 41, 65], ФДУ возникают в теории автоматического регулирования, в теории колебаний, при изучении процессов в реактивных двигателях, при решении ряда проблем теоретической физики, некоторых задач экономики, а также в различных отраслях биологии [23, 62].

Среди основных направлений исследований ФДУ следует отметить:

1) теоремы существования и приближенные методы;
2) теория линейных уравнений;
3) теория устойчивости;
4) исследование периодических решений,

а также вариационные задачи с отклоняющимся аргументом и связанные с ними краевые задачи.

Нетрудно видеть, что проблема поиска точных решений в замкнутом аналитическом виде не входит в число основных направлений

– не в силу отсутствия ее актуальности, а по причине недостаточной общности подходов, что легко объясняется чрезвычайной сложностью задаваемых ФДУ многообразий.

Наиболее полный обзор методов построения точных решений ФДУ представлен в монографиях Э.Пинни [61], Л.Э.Эльсгольца [64], а также в литературе других авторов [19, 21, 35, 43, 63, 66].

1. **Метод интегральных преобразований** (операционный метод, операторный метод). Э.Пинни считает его одним из наиболее сильных методов для решения ФДУ. Как правило, он применяется для линейных уравнений, в которых коэффициенты и отклонения аргумента являются линейными функциями независимой переменной.

Используя интегральные преобразования:

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} f(x)\, dx \qquad \text{(Лапласа)},$$

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} f(x)\, d\alpha(x) \quad \text{(Лапласа-Стильтьеса)},$$

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f(x)\, dx \qquad \text{(Фурье)},$$

$$F(z) = \int\limits_{a}^{b} e^{-zx} f(x)\, dx \qquad \text{(Эйлера-Лапласа)},$$

ФДУ в некоторых случаях можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению (без отклонения аргумента), к функциональным уравнениям и даже к алгебраическим, так как дифференцирование и сдвиг аргумента для функций $f(x)$ переходят в простое умножение для образа $F(z)$.

Модификацией метода интегральных преобразований является **метод производящих функций**: приведенные ранее интегралы заменяются интегральными суммами. Эти суммы вычисляются и далее свертываются для получения решений. Чаще всего этот метод применяется, когда интерес представляют лишь целочисленные значения переменной сдвига.

2. **Метод интегрального представления** или «метод определенных интегралов» по сути дела является эвристическим методом. Он основан на предположении, что решение $y_i(x)$ системы функционально-дифференциальных уравнений может быть представлено в виде
$$y_i(x) = \int_{X_i} G_i(x,z)Y(z)dV_i(z),$$
где V_i – функции, имеющие ограниченную вариацию на измеримых множествах X_i в пространстве x. Функциям G_i и V_i придана удобная форма. Задача состоит в определении функции $Y(z)$. Наиболее удобными являются представление Лапласа-Стильтьеса (функции G_i состоят из экспонент), а также представление в виде степенного ряда.

3. **Метод последовательного интегрирования (метод шагов)**. Рассмотрим основную начальную задачу для простейшего уравнения с запаздывающим аргументом
$$y'(x) = f\bigl(x, y(x), y(x-\tau)\bigr),$$
где постоянное запаздывание $\tau > 0$,
$$y(x) = \varphi_0(x) \quad \text{при} \quad x_0 - \tau \leqslant x \leqslant x_0.$$
Непрерывное решение $y(x)$ рассматриваемой задачи находится из дифференциальных уравнений без запаздывания
$$y' = f\bigl(x, y(x), \varphi_0(x-\tau)\bigr) \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \tau, \quad y(x_0) = \varphi_0(x_0),$$
так как при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \tau$ аргумент $x - \tau$ изменяется на начальном множестве $[x_0 - \tau, x_0]$ и, следовательно, третий аргумент $y(x-\tau)$ функции f равен начальной функции $\varphi_0(x-\tau)$. Предполагая существование решения $y = \varphi_1(x)$ этой начальной задачи на всем отрезке $[x_0, x_0 + \tau]$, аналогично получим дифференциальное уравнение без запаздывания
$$y' = f\bigl(x, y(x), \varphi_1(x-\tau)\bigr)$$
на отрезке $[x_0 + \tau, x_0 + 2\tau]$, и т.д.

Л.Э.Эльсгольц называет уравнения, к которым применим метод шагов, **интегрирующимися в квадратурах** [64].

4. **Метод квазиполиномов** (метод характеристических квазиполиномов) применим для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргументов

$$\sum_{q=0}^{m}\sum_{p=0}^{n} a_{pq}y^{(p)}(x-\tau_q)=f(x),$$

$a_{pq}, \tau_q \in \mathbb{R}, 0 < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$. Ищутся частные решения в виде $y(x)=e^{kx}$. При этом для определения постоянного k получается характеристическое уравнение

$$\sum_{q=0}^{m}\sum_{p=0}^{n} a_{pq}z^p e^{-\tau_q z}=0.$$

Левая часть этого уравнения называется характеристическим квазиполиномом.

Частные решения линейного неоднородного уравнения иногда легко подбираются или легко вычисляются операционными методами.

5. **Метод, основанный на дискретных симметриях множества аргументов**, широко представлен в работах Ю.Л.Майстренко, Г.П.Пелюха, А.Н.Шарковского [40, 49, 50]. Авторы рассматривали функциональные и функционально-дифференциальные уравнения, содержащие несколько отклонений аргумента. Исследование таких уравнений можно свести к исследованию системы уравнений без отклонения аргумента, если группа преобразований аргумента $\mathfrak{G}$ конечна (например, если неизвестная функция $y(x)$ входит в уравнение при двух значениях аргумента x и $-x$). Покажем идею этого метода на простом примере – уравнении $y'(x) = ay(-x)$, которое рассматривал Ч.Беббедж еще в начале XIX века. Аргументы неизвестной функции, входящей в это уравнение, образуют циклическую группу $\mathfrak{C}_2$. Обозначим $y(x)=y_1(x), \quad y(-x)=y_2(x)$, в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $y_1' = ay_2,\ y_2' = -ay_1$, что позволяет найти общее решение исходного

уравнения в виде

$$y(x) = C \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Если группа преобразований аргумента $\mathfrak{G}$ бесконечна, но содержит бесконечную циклическую инвариантную подгруппу $\mathfrak{H}$, и фактор группа $\mathfrak{G}\big|_{\mathfrak{H}}$ конечна, то исходное уравнение сводится к системе уравнений, содержащих меньшее число преобразований аргумента. Однако, заметим, возможности этого метода ограничиваются не только требованием конечности группы преобразований аргументов (или ее фактор-группы), но и требованием отсутствия инвариантности исходного уравнения относительно этой группы.

Идея редукции функционально-дифференциальных уравнений получила свое развитие в следующем методе той же группы украинских ученых.

6. **Исследование ФДУ с позиции теории функциональных уравнений** [42,49] можно охарактеризовать следующим образом. Каждому квазилинейному уравнению

$$A\big(x, y(x), y(\varphi(x))\big) + B\big(x, y(x), y(\varphi(x))\big)\frac{dy(x)}{dx} + \\ + C\big(x, y(x), y(\varphi(x))\big)\frac{dy(\varphi(x))}{dx} = 0 \quad (0.2)$$

можно сопоставить уравнение Пфаффа

$$A(x, u, v)dx + B(x, u, v)du + C(x, u, v)dv = 0,$$

которое может оказаться вполне интегрируемым [42]. Например, так будет, если $A \equiv 0$, а B и C не зависят от x. Уравнения вида (0.2), которым соответствует вполне интегрируемое уравнение Пфаффа, были названы вполне интегрируемыми. Такие уравнения «интегрированием» сводятся к однопараметрическому семейству функциональных уравнений $\Phi\big(x, y(x), y(\varphi(x))\big) = C$. Можно рассматривать и более общие уравнения, когда имеется несколько отклонений аргумента или отклонение зависит от неизвестной функции, и выделить среди них вполне интегрируемые.

Легко видеть, что методы, основанные на непрерывных симметриях многообразий, предложенные еще в конце XIX века С.Ли [6, 7, 32, 33, 45, 46], для исследования ФДУ практически не использовались. Некоторые попытки применения группового анализа можно найти в работах В.Р.Петухова [51–60]. Оказалось, что основной трудностью для перенесения классических результатов С.Ли на класс ФДУ является неоднозначность трактовки продолжения инфинитезимального оператора на переменные типа $\varphi(x)$, $y(\varphi(x))$ и их производные. Поэтому все предложенные подходы не получили практического продолжения и не составили сколько-нибудь цельной, содержательной теории.

Следует отметить, что в последнее время интерес к групповым методам снова возрос. Однако основным объектом исследования стали недоопределенные дифференциальные уравнения, например, обыкновенные дифференциальные уравнения относительно двух неизвестных функций. При введении фиксированной функциональной зависимости между неизвестными функциями такие уравнения превращаются в ФДУ [11, 14, 30]. Вместе с тем недоопределенные дифференциальные уравнения встречаются и сами по себе, а дополнительная неизвестная может трактоваться, например, как управление.

Недоопределенные дифференциальные уравнения рассматривались, например, И.М.Андерсоном с коллегами [1], а также Г.Н.Яковенко [67–69], В.И.Легеньким [5] и В.И.Елкиным [26], однако Андерсон рассматривал их просто как пример применения классического группового анализа и теории групп Ли-Беклунда, а отечественные математики рассматривали исключительно задачи управления: «лишние» переменные являлись в них компонентами вектора управления и не имели функциональной связи с основными неизвестными функциями. В.И.Легенький отмечал, в частности, что групповой анализ недоопределенных уравнений неэффективен в силу того, что допускаемые операторы имеют функциональный произвол (т.е. допускается бесконечномерная алгебра Ли), порожденный не реальными симметриями, а самой недоопределенностью уравнения. Естественно, при этом алгебра оказывается «пустой», т.е. упростить уравнение с ее помощью не удается.

Исследования, проведенные в последние годы [17, 27], показали, что классы симметрий, изучаемые в групповом анализе, могут быть значительно расширены. При этом выявляется групповая природа уравнений, разрешимых в замкнутой форме, но не интегрируемых классическим методом С.Ли [27]. Введение формального оператора позволило сформулировать теоремы, лежащие в русле общих идей декомпозиции моделей, одна из которых состоит в «погружении изучаемого объекта в класс, где определено понятие об изоморфизме объектов, и в отыскании среди объектов, изоморфных данному, такого, который является “представлением” исходного объекта с помощью семейства более простых в некотором смысле объектов. Примером “представления” о котором здесь идет речь, является ситуация, когда система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка посредством диффеоморфизма сведена к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, каждое из которых первого порядка» [47].

Легко усмотреть аналог декомпозиции в групповом анализе – как известно, любое уравнение, допускающее точечный оператор, может быть записано в инвариантах этого оператора. Таким образом, во-первых, понижается порядок исходного уравнения, а во-вторых, оно представляется в виде «матрешки» двух более простых уравнений, одно из которых «вложено» в другое. Такое представление является обобщением факторизации линейных дифференциальных операторов.

Целью настоящей работы является исследование симметрийных свойств функционально-дифференциальных уравнений, основанное на использовании как классического подхода, так и теории формальных операторов. Идея формальных операторов применяется к изучению свойств **обобщенных дифференциальных уравнений**, под которыми мы будем понимать недоопределенные дифференциальные уравнения, имеющие дополнительную функциональную или дифференциальную связь между неизвестными функциями (тем самым автоматически включая в рассмотрение класс (0.1)).

Таким образом, можно сформулировать следующие **задачи** диссертационной работы:

– продолжение теории формальных операторов на класс операторов, допускаемых обобщенными дифференциальными уравнениями;

– исследование свойств инвариантов формальных операторов и распространение принципа факторизации, заключающегося в представлении уравнения в инвариантах допускаемого оператора, на класс обобщенных дифференциальных уравнений;

– разработка алгоритмов поиска симметрий обобщенных дифференциальных уравнений;

– приложение построенной теории и алгоритмов для класса функционально-дифференциальных уравнений.

Основная часть диссертации состоит из из введения, трех глав и приложения.

Первая глава посвящена теории формальных операторов, допускаемых обобщенными дифференциальными уравнениями n-го порядка, и применению ее для поиска симметрий обобщенных дифференциальных уравнений, в частности, функционально-дифференциальных уравнений. В п.1.1 вводятся основные понятия и формулируются необходимые определения. В следующем п.1.2 доказываются вспомогательные утверждения, касающиеся свойств оператора полной производной D_x, и используемые при доказательстве теорем пп.1.3-1.4, в которых исследуются свойства и структура пространства инвариантов допускаемого формального оператора. Доказанные теоремы позволяют в п.1.5 сформулировать и доказать принцип факторизации обобщенных дифференциальных уравнений. Так как задача поиска симметрий в общем виде не поддается решению, в последнем пункте первой главы (п.1.6) особое внимание уделяется алгоритму поиска инвариантов допускаемого оператора, а также рассматриваются наиболее перспективные, с практической точки зрения, типы операторов.

В следующих двух главах диссертации результаты первой главы переносятся на класс обобщенных дифференциальных уравнений 1-го (глава 2) и 2-го (глава 3) порядка, и конкретизируются с учетом специфической структуры уравнений этих классов (пп.2.1, 3.1), а также исследуются типы факторсистем, к которым они могут быть сведены (пп.2.2-2.3, 3.2-3.4). В последних пунктах этих глав (пп.2.4, 3.5) принцип факторизации применяется непосредственно к функционально-дифференциальным уравнениям соответственно 1-го и 2-го порядка.

Приложение представляет собой пробный параграф справочника по функционально-дифференциальным уравнениям.

Список литературы содержит 69 наименований, результаты диссертации опубликованы в 15 работах [8–14, 18, 28–30, 36–39].

Глава 1. Формальные операторы, допускаемые обобщенными дифференциальными уравнениями

В настоящей главе основные идеи теории формальных операторов распространяются на пространство трех переменных x, y, w, и на ее основе доказывается фундаментальный принцип симметрийного анализа обобщенных дифференциальных уравнений – принцип факторизации. Наличие третьей переменной вносит радикальные изменения в общую идеологию, поэтому недостаточно привести лишь основные определения и известные ранее теоремы. Все определяемые понятия хорошо известны в групповом анализе [6, 7, 45], но введение в качестве основы изложения теории формальных операторов потребовало переформулировки соответствующих определений [39].

Бóльшая часть главы посвящена исследованию структуры базиса пространства инвариантов допускаемого оператора и алгоритмам его построения, так как эти идеи позволяют распространить принцип факторизации на класс обобщенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены наиболее перспективные классы операторов, определяющие симметрии, соответствующие заданному типу факторизации.

Следуя практике, принятой при изложении группового анализа [2, 3, 15, 22, 33, 45, 46], мы не будем специально определять свойства функций, рядов и операторов, используемых в промежуточных выкладках и доказательствах теорем. Мы будем считать, если не оговорено противное, все функции достаточно гладкими (при необходимости – бесконечно-дифференцируемыми), а операторы – определенными на тех пространствах, на которых они действуют. Это вполне оправдано, если учесть, что исходными положениями и конечными результатами в групповом анализе являются точные аналитические формулы, проверяемые прямой подстановкой («решение предъявляется»).

В ходе доказательств ряды возникают лишь в качестве **представления** нелокальных (интегральных) переменных. Так как представляемый рядами объект определен и существует, исследование сходимости последнего не представляется необходимым. Так, например, переменная

$$D_x^{-1}y = \int y\,dx$$

представима (формальным) рядом [16]

$$\int y\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k)},$$

где D_x – оператор полной производной – определяется формальным рядом

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i+1)}\frac{\partial}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{\infty} w^{(i+1)}\frac{\partial}{\partial w^{(i)}}.$$

Естественно, если в выражении, на которое действует оператор D_x, порядок производных ограничен, ряд «обрывается» и становится конечной суммой.

1.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, w. Следуя Н.Х.Ибрагимову [33], введем дополнительные переменные y', w', $\ldots, y^{(n)}, w^{(n)}$, …, сохраняя дифференциальные соотношения

$$\begin{gathered} y' = \frac{dy(x)}{dx}, \quad w' = \frac{dw(x)}{dx}, \\ y^{(n+1)} = \frac{dy^{(n)}(x)}{dx}, \quad w^{(n+1)} = \frac{dw^{(n)}(x)}{dx}, \quad n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{1.1}$$

для любых функций $y = y(x)$, $w = w(x)$. Пространство переменных $\mathbf{Z}_n = \big(x, y, w, y', w', \ldots, y^{(n)}, w^{(n)}\big)$, $n \in \mathbb{N}$ называют n-ым продолжением пространства $\mathbf{Z} = (x, y, w)$ или ***продолженным пространством***, а $\mathbf{Z}_\infty = (x, y, w, y', w', y'', w'', \ldots)$ – бесконечным продолжением пространства $\mathbf{Z}$ или ***бесконечно продолженным пространством***. Можно считать, что $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$. Заметим, что элемент пространства $\mathbf{Z}_n$ является точкой в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+3}$ ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

Обобщенное дифференциальное уравнение n-го порядка ($n \in \mathbb{N}$), разрешенное относительно одной из старших производных,

$$y^{(n)} = F(x, y(x), w(x), y'(x), w'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), w^{(n-1)}(x), w^{(n)}(x)),$$

где $F\colon \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$, можно рассматривать как соотношение для переменных из продолженного пространства $\mathbf{Z}_n$

$$y^{(n)} = F(x, y, w, y', w', \ldots, y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, w^{(n)}). \tag{1.2}$$

Пусть X – линейный оператор вида

$$X = \Phi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial}{\partial y} + \Psi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{1.3}$$

где функции $\Phi, \Psi\colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ ($k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) – ***координаты*** канонического оператора. Класс операторов вида (1.3), в частности, включает операторы, описывающие классические точечные симметрии – точечные операторы в канонической форме

$$X = [\eta_1(x, y, w) - \xi(x, y, w)y']\,\frac{\partial}{\partial y} + [\eta_2(x, y, w) - \xi(x, y, w)w']\,\frac{\partial}{\partial w},$$

а также операторы, координаты которых содержат нелокальные переменные вида $\int \zeta\, dx$, $\zeta \in \mathbf{Z}_k$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (здесь и далее без особых оговорок под интегралом подразумевается полный интеграл, т.е. $\int \zeta\, dx = D_x^{-1}[\zeta]$), например, экспоненциальные нелокальные операторы (ЭНО) вида

$$X = \exp\left(\int \zeta_1\, dx\right)\frac{\partial}{\partial y} + \exp\left(\int \zeta_2\, dx\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

где ζ_1, $\zeta_2 \in \mathbf{Z}_k$ ($k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$).

Действие формального оператора (1.3) на отображение $G\colon \mathbf{Z}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, определяется с помощью формулы

$$X[G] = \Phi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial G}{\partial y} + \Psi(x, y, w, y', w', \ldots)\frac{\partial G}{\partial w}.$$

Если $G\colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, оператор (1.3) необходимо продолжить до переменных $y^{(k)}$, $w^{(k)}$, учитывая соотношения (1.1).

Определение 1. Оператор

$$\underset{k}{X} = \sum_{i=0}^{k} \left[D_x^i(\Phi) \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi) \frac{\partial}{\partial w^{(i)}} \right], \tag{1.4}$$

где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, называется k-ым ***продолжением*** оператора (1.3). ***Действие*** оператора (1.3) на отображение G: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$X[G] = \underset{k}{X}[G] = \sum_{i=0}^{k} \left[D_x^i(\Phi) \frac{\partial G}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi) \frac{\partial G}{\partial w^{(i)}} \right].$$

Определение 2. Формальный оператор (1.3) ***допускается*** уравнением (1.2), если

$$\underset{n}{X} \left[y^{(n)} - F(x, y, w, y', w', \ \ldots \ , y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, w^{(n)}) \right] \Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{1.5}$$

Символ $\Big|_{[y^{(n)}=F]}$ означает, что равенство (1.5) выполняется в силу уравнения (1.2) и всех его дифференциальных следствий $y^{(n+i)} = D_x^i[F]$ $(i \in \mathbb{N})$.

С помощью формулы продолженного оператора (1.4) соотношение (1.5) можно записать в развернутой форме

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{n} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial F}{\partial w^{(i)}} - D_x^n(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{1.6}$$

Условие (1.6) называется ***определяющим уравнением***. Оно может быть использовано как для нахождения координат допускаемого оператора по известному классу уравнений вида (1.2), так и для восстановления класса уравнений, допускающий заданный оператор (1.3).

Определение 3. Отображение J_k: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ называется ***дифференциальным инвариантом*** k-го порядка или k-ым дифференциальным инвариантом оператора (1.3), если J_k удовлетворяет уравнению

$$\underset{k}{X}[J_k] = 0 \tag{1.7}$$

и $\left|\frac{\partial J_k}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\frac{\partial J_k}{\partial w^{(k)}}\right| \neq 0$. Дифференциальный инвариант нулевого порядка J_0: $\mathbf{Z}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, называется ***универсальным инвариантом***.

Как правило, мы будем рассматривать пару $(X, y^{(n)} = F)$ – оператор (1.3) и некоторый класс уравнений вида (1.2), допускающий этот оператор. Поэтому может оказаться, что условие (1.7) выполнено в силу уравнения (1.2). Введем более широкое понятие:

Определение* 4**. Отображение $J_k\colon\ \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ называется ***дифференциальным инвариантом k-го порядка или k-ым дифференциальным инвариантом оператора (1.3) ***в силу уравнения*** (1.2), если

$$\underset{k}{X}[J_k]\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0 \tag{1.8}$$

и $\left|\frac{\partial J_k}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\frac{\partial J_k}{\partial w^{(k)}}\right| \neq 0$.

Условие (1.8) (как и (1.7)) можно рассматривать как уравнение для поиска инвариантов порядка не выше k. Также следует заметить, что левая часть уравнения (1.2) является инвариантом допускаемого оператора в силу самого уравнения (1.2). Далее без особых оговорок для краткости изложения под инвариантом мы будем понимать инвариант в смысле определения 4.

1.2 Некоторые свойства операторов полной и частной производной

Для доказательства теорем нам понадобится некоторые правила вычисления полных и частных производных, а также их суперпозиций в силу некоторого уравнения [39].

***Лемма* 1**. Пусть отображение $G\colon\ \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \{0\}\cup\mathbb{N}\cup\{\infty\})$. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(D_x[G])}{\partial y} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial y}\right], & \frac{\partial(D_x[G])}{\partial y^{(s)}} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial y^{(s)}}\right] + \frac{\partial G}{\partial y^{(s-1)}},\\
\frac{\partial(D_x[G])}{\partial w} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial w}\right], & \frac{\partial(D_x[G])}{\partial w^{(s)}} &= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial w^{(s)}}\right] + \frac{\partial G}{\partial w^{(s-1)}},
\end{aligned}$$

где $s \in \mathbb{N}$.

Доказательство осуществляется непосредственным вычислением. Покажем это на примере одного из равенств:

$$\frac{\partial(D_x[G])}{\partial y^{(s)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(s)}}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial G}{\partial y^{(i)}} + w^{(i+1)}\frac{\partial G}{\partial w^{(i)}}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial^2 G}{\partial y^{(s)}\partial y^{(i)}} + w^{(i+1)}\frac{\partial^2 G}{\partial y^{(s)}\partial w^{(i)}}\right) + \frac{\partial G}{\partial y^{(s-1)}} =$$

$$= D_x\left[\frac{\partial G}{\partial y^{(s)}}\right] + \frac{\partial G}{\partial y^{(s-1)}}.$$

Остальное доказывается аналогично ■

Следствие . Пусть отображение G: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \cup\{\infty\}$. Тогда

$$\frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial y^{(k+s)}} = \frac{\partial G}{\partial y^{(k)}}, \quad \frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial w^{(k+s)}} = \frac{\partial G}{\partial w^{(k)}},$$

где $s \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем первое равенство (второе доказывается аналогично). Применяя лемму 1 получим:

$$\frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial y^{(k+s)}} = D_x\left[\frac{\partial(D_x^{s-1}[G])}{\partial y^{(k+s)}}\right] + \frac{\partial(D_x^{s-1}[G])}{\partial y^{(k+s-1)}}$$

Выражение $D_x^{s-1}(G)$ зависит от дифференциальных переменных порядка не выше $k+s-1$. Поэтому первое слагаемое равно нулю. Значит,

$$\frac{\partial(D_x^s[G])}{\partial y^{(k+s)}} = \frac{\partial(D_x^{s-1}[G])}{\partial y^{(k+s-1)}}.$$

Применяя к правой части полученного соотношения аналогичным образом $s-1$ раз лемму 1, получаем требуемое соотношение. Таким образом, следствие доказано ■

Лемма 2. Пусть отображение G: $\mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Рассмотрим произвольное уравнение вида (1.2). Тогда для $\forall m \in \mathbb{N} \cup \cup\{0\}$ выполнено соотношение

$$D_x^m(G)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^s\big(D_x^{m-s}(G)\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\Big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad s \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ 0 \leqslant s \leqslant m.$$

Доказательство. Очевидно, что для $m = 0$ утверждение верно.

Воспользуемся далее методом математической индукции по параметру m.

Сначала проверим справедливость утверждения для $m = 1$. При этом достаточно рассмотреть случай $s = 1$, так как при $s = 0$ доказываемое соотношение преобразуется в тождество

$$D_x(G)|_{[y^{(n)}=F]} = \left(D_x(G)|_{[y^{(n)}=F]}\right)\Big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Пусть $s = 0$. Если $k < n$, то $G|_{[y^{(n)}=F]} = G$, а следовательно

$$D_x(G)|_{[y^{(n)}=F]} = D_x(G|_{[y^{(n)}=F]})\Big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Если $k \geqslant n$, то представим отображение $G = G(x, y, w, \dots y^{(k)}, w^{(k)})$ в виде

$$G = \bar{G}\left(x, y, w, \dots y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \dots, v^{(k)}, w^{(k)}\right),$$

где

$$v^{(j)} = y^{(j)} - D_x^{n-j}(F), \quad j \in \mathbb{N},\, j \geqslant n.$$

Непосредственно вычисляя, получаем

$$D_x(\bar{G})|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial y^{(i)}}\right)\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty}\left(w^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial w^{(i)}}\right)\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \sum_{i=n}^{\infty}\left[D_x^{i-n}(y^{(n)} - F)\frac{\partial \bar{G}}{\partial v^{(i)}}\right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Последняя сумма обращается в ноль, так как $D_x^{i-n}(y^{(n)} - F)|_{[y^{(n)}=F]} = 0$ $(i \geqslant n)$, поэтому

$$D_x(\bar{G})|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-1}\left(y^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial y^{(i)}}\right)\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty}\left(w^{(i+1)}\frac{\partial \bar{G}}{\partial w^{(i)}}\right)\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} \equiv D_x(\bar{G}|_{[y^{(n)}=F]})|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Таким образом, для $m = 1$ утверждение доказано.

Предположим, что для $\forall m \leqslant r$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ утверждение также верно и докажем его для случая $m = r + 1$. Используя справедливость доказуемого соотношения для $m = r$, запишем цепочку соотношений

$$D_x^{r+1}(G)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^r\big(D_x(G)\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= D_x^s\big(D_x^{r-s}(D_x(G))\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^s\big(D_x^{r+1-s}(G)\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

где $0 \leqslant s \leqslant r$. Осталось рассмотреть случай $s = r+1$. Сначала мы воспользуемся тем, что утверждение верно для $m = r$, а потом справедливостью доказуемого утверждения для $m = 1$. Получим следующие равенства:

$$D_x^{r+1}(G)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^r\big(D_x(G)\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= D_x^r\big(D_x(G)\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^r\big(D_x(G\big|_{[y^{(n)}=F]})\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= D_x^r\big(D_x(G\big|_{[y^{(n)}=F]})\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} = D_x^{r+1}\big(G\big|_{[y^{(n)}=F]}\big)\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Таким образом, мы доказали утверждение леммы ■

1.3 Свойства инвариантов формального оператора

Условие инвариантности (1.7) является однородным линейным уравнением в частных производных 1-го порядка, интегральный базис которого содержит не более чем $2k+2$ функционально независимых решений. Поэтому, если обозначить через $\mathfrak{J}_k$ пространство инвариантов оператора (1.3) порядка не выше k (в смысле определения 3), то $\dim \mathfrak{J}_k \leqslant 2k+2$. Также очевидно, что x является универсальным инвариантом и может быть включен в качестве элемента базиса $\mathfrak{J}_k$.

Условие (1.7) является достаточным, но не необходимым для выполнения соотношения (1.8), так как введение дополнительной связи $y^{(n)} = F$ может расширить множество решений уравнения (1.7), т.е. $\mathfrak{J}_k \subset \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, где $\mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ – множество инвариантов оператора (1.3) в силу условия (1.2) порядка не выше k. Например, для отображения $y^{(n)} - F$ не обязано выполняться условие (1.7), но $y^{(n)} - F \in \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

В любом случае, процесс поиска инвариантов является трудоемкой процедурой, но условие инвариантности (1.7) или (1.8) обладает специфической структурой, которая позволяет по известному инварианту построить совокупность других инвариантов (не обязательно всех), функционально независимых с данным, не решая уравнения, а используя только оператор полной производной [12].

Теорема 1 [13, 39]. Пусть $z \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда

$$D_x(z) \in \mathfrak{J}_{k+1}\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

если $\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ или $\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} \neq 0$, иначе

$$D_x(z) \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Доказательство. Рассмотрим условие инвариантности (1.8), полагая $J_k = z$, и вычислим полную производную D_x от правой и левой его части при условии $y^{(n)} = F$, т.е рассмотрим соотношение

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\big|_{[y^{(n)}=F]}\Big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

которое в силу леммы 2 эквивалентно равенству

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\Big)\Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0.$$

Преобразуем выражение, стоящее слева, используя правило вычисления суперпозиции полной и частной производной (лемма 1):

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\Big) = D_x\left\{\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}\right\} =$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^{i+1}(\Phi)\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\left[\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} - \operatorname{sign}(i)\frac{\partial z}{\partial y^{(i-1)}}\right] +$$

$$+\sum_{i=0}^{k} D_x^{i+1}(\Psi)\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\left[\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}} - \operatorname{sign}(i)\frac{\partial z}{\partial w^{(i-1)}}\right] =$$

$$D_x^{k+1}(\Phi)\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} + D_x^{k+1}(\Psi)\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} + \sum_{i=0}^{k}\left[D_x^i(\Phi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}}\right].$$

Применяя следствие из леммы 1 к полученному выражению, получим

$$D_x\Big(\underset{k}{X}[z]\Big) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1}\left[D_x^i(\Phi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}}\right], \text{ если } \left|\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}}\right| \neq 0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\left[D_x^i(\Phi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial y^{(i)}} + D_x^i(\Psi)\frac{\partial D_x(z)}{\partial w^{(i)}}\right], \text{ если } \left|\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}}\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}}\right| = 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ или $\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} \neq 0$, то отображение $D_x(z)$: $\mathbf{Z}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ и

$$\underset{k+1}{X}[D_x(z)]\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

а следовательно $D_x(z) \in \mathfrak{J}_{k+1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, т.е. $D_x(z)$ является инвариантом $(k+1)$-го порядка. Если $\partial z/\partial y^{(k)} = 0$ и $\partial z/\partial w^{(k)} = 0$, то отображение $D_x(z):\ \mathbf{Z}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ и

$$\underset{k}{X}[D_x(z)]\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

а следовательно $D_x(z) \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, т.е $D_x(z)$ является инвариантом порядка не выше k ■

Замечание 1. В доказательстве теоремы можно было бы опустить условие «в силу уравнения $y^{(n)} = F$», поэтому верно утверждение: если $z \in \mathfrak{J}_k$, то $D_x(z) \in \mathfrak{J}_{k+1}$, если $\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ или $\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}} \neq 0$, иначе $D_x(z) \in \mathfrak{J}_k$.

Замечание 2. По определению допускаемого оператора отображение $y^{(n)} - F$ является его инвариантом. Тогда $y^{(n+i)} - D_x^i(F)$ $(i \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ также являются инвариантами этого оператора.

Другой способ построения инварианта оператора по известному инварианту – рассмотрение инварианта в силу уравнения, допускающего этот оператор.

Теорема 2 [13, 39]. Пусть $z \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда

$$z\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Доказательство. Очевидно, что $z\big|_{[y^{(n)}=F]} = z$, если $k < n$, так как мы трактуем символ $\big|_{[y^{(n)}=F]}$, как замену

$$y^{(n+i)} \longrightarrow D_x^i(F) \quad (i \in \{0\} \cup \mathbb{N}).$$

Поэтому для этого случая утверждение верно.

Предположим, что $k \geqslant n$. Запишем инвариант z в виде

$$z = z(x, y, w, \ldots, y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \ldots, v^{(k)}, w^{(k)}),$$

где $v^{(i)} = y^{(i)} - D_x^{n-i}(F)$, $(i \in \mathbb{N},\, i \geqslant n)$. Тогда условие инвариантности (1.8) примет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \left[\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{r=n}^{k} \frac{\partial z}{\partial v^{(r)}} \frac{\partial \big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)}{\partial y^{(i)}} \right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$

$$+ \sum_{i=n}^{k} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \sum_{r=n}^{k} \frac{\partial z}{\partial v^{(r)}} \frac{\partial \big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)}{\partial y^{(i)}}\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \left[\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} + \sum_{r=n}^{k} \frac{\partial z}{\partial v^{(r)}} \frac{\partial \big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)}{\partial w^{(i)}} \right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0$$

или

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} +$$

$$+ \sum_{r=n}^{k} \underset{r}{X}\big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial v^{(r)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0.$$

Последняя сумма в равенстве обращается в ноль, так как

$$\underset{r}{X}\big(y^{(r)} - D_x^{r-n}(F)\big)\big|_{[y^{(n)}=F]} = 0$$

по замечанию 2 к теореме 1, поэтому

$$X\left(z|_{[y^{(n)}=F]}\right)\big|_{[y^{(n)}=F]} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(i)}} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0.$$

Таким образом, теорема доказана ■

Из доказательства теоремы следует, что по сути дела отображение $J = z|_{[y^{(n)}=F]}$ является инвариантом, не зависящим от производных $y^{(i)}$, где $i \geqslant n$, и удовлетворяет линейному однородному уравнению с частными производными 1-го порядка

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial w^{(i)}} = 0, \qquad (1.9)$$

если порядок k инварианта $z|_{[y^{(n)}=F]}$ удовлетворяет условию $k < n$, или

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial J}{\partial w^{(i)}} = 0, \qquad (1.10)$$

если $k \geqslant n$.

Будем называть множество решений уравнения (1.9) при $k < n$ (уравнения (1.10) при $k \geqslant n$) ***пространством*** инвариантов и обозначать его через $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а интегральный базис этого уравнения – ***базисом*** пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Заметим, что имеют место следующие соотношения

$$\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} = \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}, \text{ если } 0 \leqslant k < n,$$

$$\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}, \text{ если } k \geqslant n.$$

Как правило, на практике нет необходимости искать инварианты порядка выше, чем порядок уравнения (1.2). Поэтому далее мы подробнее будем рассматривать вопросы, касающиеся структуры пространств $\bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, которые образуют цепочку включений

$$\bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \bar{\mathfrak{J}}_1\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \ldots \subset \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]} \subset \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}, \qquad (1.11)$$

а также исследовать единое уравнение, которому удовлетворяют элементы z пространств $\bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, т.е инварианты порядка меньше n, а также инварианты порядка n, не зависящие от производной $y^{(n)}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{n} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0. \qquad (1.12)$$

1.4 Построение базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$

Докажем несколько теорем, позволяющих построить базис пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Во-первых, заметим, что существует не более двух функционально независимых инвариантов нулевого порядка. Это следует из структуры уравнения, определяющего инварианты нулевого порядка $z = z(x, y, w)$

$$\Psi\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial y} + \Phi\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial w} = 0,$$

которое всегда имеет ненулевое решение – универсальный инвариант x. Таким образом,

$$1 \leqslant \dim \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]} \leqslant 2.$$

С помощью следующих двух теорем можно описать структуру пространств $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(k \neq 0)$.

Теорема 3 [13, 39]. Пусть отображения

$$z_1, z_2 \in \bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

($k \in \mathbb{N}$) и выполнено одно из условий

1) $k < n$ и

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.13}$$

2) $k \geqslant n$.

Если инварианты u_i $(1 \leqslant i \leqslant r,\ r \in \mathbb{N})$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда отображения z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы.

Доказательство. Предположим, что выполнено первое условие, т.е. $k < n$ и верно соотношение (1.13). Запишем уравнения, которым удовлетворяют инварианты k-го порядка z_1 и z_2

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{1.14}$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0. \qquad (1.15)$$

Так как z_2, является инвариантом k-го порядка, то $\partial z_2/\partial y^{(k)} \neq 0$ или $\partial z_2/\partial w^{(k)} \neq 0$. Пусть для определенности $\partial z_2/\partial y^{(k)} \neq 0$. Преобразуем уравнение (1.14), добавив к нему уравнение (1.15), домноженное на $\left(\partial z_1/\partial y^{(k)}\right)/\left(\partial z_2/\partial y^{(k)}\right)$. Тогда, учитывая условие (1.13), получим соотношение

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\,\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}}\right] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\left[\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\,\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}}\right] = 0.$$

Из теории уравнений с частными производными [24, 25] известно, что для выражения

$$dz_1 - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\,dz_2 \qquad (1.16)$$

всегда существует ненулевой интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x, y, w, \ldots, y^{(k)}, w^{(k)}),$$

такой, что при домножении на него выражение (1.16) обращается в полный дифференциал некоторого отображения

$$z^* = z^*(x, y, w, \ldots, y^{(k)}, w^{(k)}),$$

т.е.

$$\mu dz_1 - \mu\frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\,dz_2 = dz^*, \qquad (1.17)$$

причем

$$\frac{\partial z^*}{\partial y^{(k)}} = 0, \quad \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k)}} = 0.$$

Это следует из выбора z^* и условия (1.13):

$$\begin{aligned}\frac{\partial z^*}{\partial y^{(k)}} &= \mu\left(\frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}}\right),\\ \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k)}} &= \mu\left(\frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} - \frac{\partial z_1/\partial y^{(k)}}{\partial z_2/\partial y^{(k)}}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, z^* удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} = 0$$

и является инвариантом порядка ниже k, а значит z^* функционально выражается через базис u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Рассмотрим теперь матрицу, составленную из частных производных отображений z_1, z_2 и u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.18)$$

Заметим, что $r \leqslant 2k$, так как размерность интегрального базиса уравнения с частными производными 1-го порядка не превышает числа переменных, от которых зависит искомая функция, уменьшенного на единицу, поэтому в матрице (1.18) размерности $(r+2)\times(2k+3)$ число строк не превышает числа столбцов. Значит, отображения z_1, z_2 и u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы, если в матрице (1.18) найдется $r+2$ столбца, образующие квадратную матрицу, определитель которой отличен от нуля, иначе эти отображения функционально зависимы.

Преобразуем первую строку матрицы, добавив к ней вторую, домноженную на $\left(-\partial z_1/\partial y^{(k)}\right)/\left(\partial z_2/\partial y^{(k)}\right)$, а потом умножим каждый элемент полученной строки на интегрирующий множитель μ. Учитывая соотношение (1.17), полученную матрицу можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} & \frac{\partial z^*}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z^*}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.19)$$

Каждый элемент первой строки выражается линейно через элементы последних r строк того же столбца, так как отображение z^* (в силу функциональной зависимости z^* и инвариантов u_i) может быть представлено в виде $z^* = G(u_1, \dots, u_r)$ с некоторым отображением G, а значит:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z^*}{\partial x} &= \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial G}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x}, \\
\frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} &= \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial G}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial y^{(i)}}, \qquad i = \overline{1, r}, \\
\frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} &= \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial G}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial w^{(i)}}, \qquad i = \overline{1, r}.
\end{aligned}
$$

Поэтому, первая строка матрицы (1.19) при вычитании из нее последних r строк, каждая l-ая из которых домножена соответственно на $\partial G/\partial u_l$, обращается в строку, состоящую из нулей. Значит, в матрице (1.19), а следовательно и в матрице (1.18), не существует определителя порядка $r+2$, отличного от нуля. Поэтому отображения z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы.

Предположение, что выполнено условие 2 теоремы 3 не вносит существенных изменений в приведенное доказательство. Заметим, что в этом случае условие (1.13) также имеет место, так как инварианты k-го порядка $(k \geqslant n)$, принадлежащие пространству $\bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, не зависят от дифференциальной переменной $y^{(k)}$. Поэтому аналогичными преобразованиями из уравнений, которым удовлетворяют инварианты z_1 и z_2:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} = 0, \\
\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0,
\end{aligned}
$$

мы можем получить соотношение

$$
\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \left[\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial w^{(k)}}{\partial z_2/\partial w^{(k)}} \frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} \right] +
$$
$$
+ \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]} \left[\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - \frac{\partial z_1/\partial w^{(k)}}{\partial z_2/\partial w^{(k)}} \frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} \right] = 0.
$$

Это соотношение преобразуется в уравнение для некоторого инварианта z^* порядка $(k-1)$, такого что

$$\mu dz_1 - \mu\frac{\partial z_1/\partial w^{(k)}}{\partial z_2/\partial w^{(k)}}\,dz_2 = dz^*$$

при некотором ненулевом интегрирующем множителе

$$\mu = \mu(x, y, w, \, \ldots \, , y^{(k)}, w^{(k)}),$$

а именно:

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} = 0.$$

Инвариант z^* функционально выражается через базис u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Далее, повторяя рассуждения для первого случая, приходим к выводу, что отображения z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы ■

Из теоремы 3 следует, что если мы будем строить базис пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n)$ с помощью базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, то для этого нам достаточно найти хотя бы один инвариант z порядка k, такой что $z \in \bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Если $0 < k < n$, то необходимо, чтобы добавляемые в базис инварианты k-го порядка были функционально независимы по старшим производным $y^{(k)}$ и $w^{(k)}$, т.е. определитель из условия (1.13) должен быть отличен от нуля. Количество инвариантов, которые мы должны добавить в этом случае для получения базиса, определяется следующей теоремой.

<u>Теорема 4</u> [13, 39]. Пусть отображения

$$z_1, z_2, z_3 \in \mathfrak{J}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \mathfrak{J}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

$(1 \leqslant k < n)$ и

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а инварианты u_i $(1 \leqslant i \leqslant r,\, r \in \mathbb{N})$ образуют базис пространства $\mathfrak{J}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда отображения z_1, z_2, z_3, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы.

Доказательство. Идея доказательства схожа с доказательством предыдущей теоремы. По определению инварианты k-го порядка z_1, z_2 и z_3 должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{1.20}$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} = 0, \tag{1.21}$$

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_3}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]} \frac{\partial z_3}{\partial w^{(i)}} = 0. \tag{1.22}$$

Рассмотрим уравнение, получающееся преобразованиями из уравнений (1.20)-(1.22), а именно, сложим уравнения (1.20)-(1.22), домножив каждое соответственно на A_{23}, $(-A_{13})$ и A_{12}:

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \left[A_{23} \frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - A_{13} \frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + A_{12} \frac{\partial z_3}{\partial y^{(i)}} \right] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]} \left[A_{23} \frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - A_{13} \frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} + A_{12} \frac{\partial z_3}{\partial w^{(i)}} \right] = 0. \tag{1.23}$$

Множители при $D_x^k(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}$ и $D_x^k(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}$, равные соответственно

$$B_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix},$$

обращаются в ноль, так как каждая матрица содержит по паре одинаковых столбцов. Поэтому уравнение (1.23) можно упростить

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\left[A_{23}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}} - A_{13}\frac{\partial z_2}{\partial y^{(i)}} + A_{12}\frac{\partial z_3}{\partial y^{(i)}}\right] + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\left[A_{23}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}} - A_{13}\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}} + A_{12}\frac{\partial z_3}{\partial w^{(i)}}\right] = 0. \quad (1.24)$$

Заметим [24, 25], что для выражения

$$A_{23}\,dz_1 - A_{13}\,dz_2 + A_{12}\,dz_3 \quad (1.25)$$

всегда существует ненулевой интегрирующий множитель

$$\mu = \mu(x, y, w, \, \ldots \, , y^{(k)}, w^{(k)}),$$

такой, что после умножения на него выражение (1.26) обращается в полный дифференциал некоторого отображения

$$z^* = z^*(x, y, w, \, \ldots \, , y^{(k)}, w^{(k)}),$$

т.е.

$$\mu A_{23}\,dz_1 - \mu A_{13}\,dz_2 + \mu A_{12}\,dz_3 = dz^*, \quad (1.26)$$

причем, так как $B_1 = 0$ и $B_2 = 0$, отображение z^* не зависит от дифференциальных переменных $y^{(k)}$ и $w^{(k)}$. Следовательно, z^* удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения (1.24) и соотношения (1.26),

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k-1} D_x^i(\Psi)|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z^*}{\partial w^{(i)}} = 0,$$

и является инвариантом порядка ниже k, и поэтому z^* функционально выражается через базис u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Для определения функциональной зависимости совокупности отображений z_1, z_2 и u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ составим матрицу из частных производных

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\
\frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & \frac{\partial z_3}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{1.27}
$$

Как мы уже отмечали в доказательстве теоремы 3, $r \leqslant 2k$, поэтому в матрице (1.27) размерности $(r+3)\times(2k+3)$ число строк не превышает числа столбцов. Тогда отображения z_1, z_2, z_3 и u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы, если в матрице (1.27) найдется $r+3$ столбца, образующие квадратную матрицу, определитель которой отличен от нуля, иначе эти отображения функционально зависимы.

Преобразуем первую строчку матрицы, согласно формуле (1.26), в которой под символом dz_i подразумевается строка с номером i. Тогда матрица (1.27) примет вид

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} & \frac{\partial z^*}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z^*}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z^*}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\
\frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & \frac{\partial z_3}{\partial w} & \dots & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_3}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_3}{\partial w^{(k)}} \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \dots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0
\end{pmatrix}. \tag{1.28}
$$

Каждый элемент первой строки выражается линейно через элементы последних r строк того же столбца в силу функциональной зависимости отображения z^* и инвариантов u_i. Далее повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 3, приходим у выводу, что первую строку матрицы (1.28) можно преобразовать в строку, состоящую из нулей. Значит, матрице (1.28), а следовательно и в матрице (1.27) не существует определителя порядка $r+3$, отличного от нуля. Поэтому отображения z_1, z_2, z_3, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально зависимы ■

Предыдущие две теоремы позволяют сформулировать принцип дополнения базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(k \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ до базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k+1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

***Теорема* 5** [13, 39]. Пусть отображения

$$z_1, z_2 \in \bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

$(k \in \mathbb{N})$, а инварианты u_i $(1 \leqslant i \leqslant r,\ r \in \mathbb{N})$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

1. Если $k \geqslant n$, то отображения z_1, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

2. Если $k < n$ и

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \dfrac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то отображения z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Доказательство. Для доказательства того, что инварианты z_1, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ в первом случае и z_1, z_2, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ во втором образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ достаточно показать, что эти отображения функционально независимы, так как то, что любой инвариант порядка не выше k выражается через данные, следует из теорем 3 и 4.

Пусть $k \geqslant n$. Очевидно, что инварианты z_1, u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы, так как $\partial z_1/\partial w^{(k)} \neq 0$, а $\partial u_i/\partial w^{(k)} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Рассмотрим случай $k < n$ и составим матрицу, содержащую частные производные инвариантов $z_1, z_2, u_i \ (1 \leqslant i \leqslant r)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_1}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k-1)}} & \frac{\partial z_2}{\partial y^{(k)}} & \frac{\partial z_2}{\partial w^{(k)}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Так как инварианты $u_i \ (1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы, то в подматрице

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_1}{\partial w^{(k-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial y} & \frac{\partial u_r}{\partial w} & \cdots & \frac{\partial u_r}{\partial y^{(k-1)}} & \frac{\partial u_r}{\partial w^{(k-1)}} \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

матрицы (1.29) существует определитель $\det U$ порядка r, отличный от нуля. Предположим для определенности, что матрицу этого определителя образуют первые r столбцов матрицы (1.30). Тогда определитель квадратной подматрицы M, составленный из первых r и последних двух столбцов матрицы (1.29) отличен от нуля, так как он может быть представлен в виде

$$\det M = \varepsilon A_{12} \det U, \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1.$$

Так как каждый из сомножителей отличен от нуля, то $\det M \neq 0$, а следовательно инварианты $z_1, z_2, u_i \ (1 \leqslant i \leqslant r)$ функционально независимы ■

В теореме 5 сформулирован принцип построения базиса пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, который заключается в последовательном «расширении» базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]}$ до базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$. На основе этого принципа и теоремы 1 можно построить алгоритм поиска базиса пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Мы ограничимся рассмотрением случая $k = n$, так как при факторизации уравнения (1.2) (как мы покажем далее) используется базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Для остальных случаев алгоритм формулируется аналогичным образом.

Рассмотрим разбиение (1.11) пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ на $n+1$ вложенных друг в друга подпространств. Как уже отмечалось ранее, универсальный инвариант $x \in \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]}$, поэтому $\dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} \geqslant 1$ $(\forall i = \overline{0,n})$.

Предположим, что существует индекс $k^* \leqslant n$, такой что

$$\dim \bar{\mathfrak{J}}_{k^*}\big|_{[y^{(n)}=F]} > 1.$$

Если такого k^* не существует, то $\dim \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} = 1$, а базис пространства $\mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ состоит из одного элемента x.

Обозначим

$$k_1 = \min\left\{ i \mid \dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} > 1 \right\}.$$

Очевидно, что $k_1 \leqslant n$.

Если $k_1 < n$, тогда из предположения следует, что найдется дифференциальный инвариант z_1 порядка k_1: $z_1 \equiv z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1} = \mathfrak{J}_{k_1}$, причем либо $\partial z_1^{(0)}/\partial y^{(k_1)} \neq 0$, либо $\partial z_1^{(0)}/\partial w^{(k_1)} \neq 0$. Согласно утверждению теоремы 1 отображения $z_1^{(i)} = D_x^i(z_1) \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1+i}\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1+i-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(0 < i < n-k_1)$. Инварианты $x, z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}$ функционально независимы, так как все они являются инвариантами различных порядков: соответственно порядка $0, k_1, k_1+1, \ldots, n-1$, а если $k_1 = 0$, то x и z_1^0 функционально независимы по выбору $z_1^{(0)}$. По теореме 1 отображение $D_x^{n-k_1}(z_1) \in \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а тогда из теоремы 2 следует, что $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Но $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]}$ не обязательно является инвариантом n-го порядка, например, если $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]}$ и отображение F не зависят от переменной $w^{(n)}$.

Таким образом, возможно 3 случая:

1) $k_1 = n$. А значит пространство $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ состоит из инвариантов n-го порядка и нулевого порядка, функционально зависимых с x. В качестве элементов базиса мы положим

$$x, z_1^{(0)},$$

а все остальные инварианты пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ выражаются через $z_1^{(0)}$ и x (по теореме 3);

2) $k_1 < n$ и $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Тогда мы можем построить элементы базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$:

$$x, z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)};$$

3) $k_1 < n$ и $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Тогда в качестве элементов базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ можно взять инварианты

$$x, z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_1^{(n-k_1)}.$$

В последних двух случаях структура подпространств $\mathfrak{J}_i\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(i < n)$ будет такова, что

$$\begin{aligned} \dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} &= 1, & k_1 &< i, \\ \dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} &\geqslant i - k_1 + 2, & k_1 &\leqslant i < n. \end{aligned}$$

Допустим, что нашелся индекс k^{**} такой, что $k_1 \leqslant k^{**} < n$ и

$$\dim \bar{\mathfrak{J}}_{k^{**}}\big|_{[y^{(n)}=F]} > k^{**} - k_1 + 2.$$

Если такого k^{**} не существует, то инварианты

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}$$

образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а $\dim \bar{\mathfrak{J}}_i\big|_{[y^{(n)}=F]} = i - k_1 + 2$ $(k_1 \leqslant i < n)$. Причем если $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, то по теореме 5 инварианты

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1)}$$

являются базисом пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$. В случае если $D_x^{n-k_1}(z_1^{(0)})\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, может существовать инвариант $z_2 \equiv$ $\equiv z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, тогда базисом пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ являются инварианты

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2^{(0)}$$

или (если $z_2^{(0)}$ не существует)

$$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда k^{**} существует. Заметим, что $k^{**} \neq 0$, так как функционально независимых инвариантов нулевого порядка не более двух. Обозначим

$$k_2 = \min \left\{ i \mid \dim \bar{\mathfrak{J}}_i \big|_{[y^{(n)}=F]} > i - k_1 + 2 \right\}.$$

Очевидно, что $\max\{k_1, 1\} \leqslant k_2 < n$. Из существования k_2 следует, что найдется инвариант $z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_2}$ порядка k_2, т.е. имеет место одно из соотношений: либо $\partial z_2^{(0)} / \partial y^{(k_2)} \neq 0$, либо $\partial z_2^{(0)} / \partial w^{(k_2)} \neq 0$, причем инварианты $x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(k_2-k_1)}, z_2^{(0)}$ будут функционально независимы. Тогда по теореме 3 и следствию из леммы 1 будет выполняться необходимое условие

$$\det A \neq 0, \tag{1.31}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1^{(0)}}{\partial y^{(k_1)}} & \dfrac{\partial z_1^{(0)}}{\partial w^{(k_1)}} \\[2ex] \dfrac{\partial z_2^{(0)}}{\partial y^{(k_2)}} & \dfrac{\partial z_2^{(0)}}{\partial w^{(k_2)}} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно построить последовательность инвариантов $z_2^{(0)}, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)}$ соответственно порядка $k_2, \ldots, n-1$, где $z_2^{(i)} = D_x^i(z_2^{(0)})$ $(0 \leqslant i \leqslant n-k_2)$. Рассмотрим совокупность инвариантов

$$\mathfrak{z}_i = \{x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(i-k_1)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_2^{(i-k_2)}\} \quad i \in \mathbb{N},\, k_2 \leqslant i < n,$$

и покажем, что $\mathfrak{z}_i$ является базисом пространства $\bar{\mathfrak{J}}_i \big|_{[y^{(n)}=F]}$. Будем рассуждать по индукции. Совокупность инвариантов $\mathfrak{z}_{k_2}$ является базисом пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k_2} \big|_{[y^{(n)}=F]}$ по выбору $z_2^{(0)}$ и теореме 5. Из условия (1.31) следует выполнение соотношения

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial y^{(k_1+1)}} & \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial w^{(k_1+1)}} \\[2ex] \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial y^{(k_2+1)}} & \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial w^{(k_2+1)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial y^{(k_1)}} & \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial w^{(k_1)}} \\[2ex] \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial y^{(k_2)}} & \dfrac{\partial z_2^{(1)}}{\partial w^{(k_2)}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по теореме 5 набор отображений $\mathfrak{z}_{k_2+1}$ образует базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{k_2+1} \big|_{[y^{(n)}=F]}$. Проводя последовательно эти рассуждения для $i = \overline{k_2, n-1}$, приходим к требуемому выводу.

В заключение заметим, что для инварианта $z_2^{(n-k_2)} = D_x^{n-k_2}(z_2^{(0)})$ выполняется одно из двух отношений

$$z_2^{(n-k_2)}\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\Big|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$$

или

$$z_2^{(n-k_2)}\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]},$$

причем инварианты $z_1^{(n-k_1)}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$ и $z_2^{(n-k_2)}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$ не могут одновременно принадлежать пространству $\bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$. Докажем это. Если предположить, что

$$z_1^{(n-k_1)}\Big|_{[y^{(n)}=F]}, z_2^{(n-k_2)}\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]},$$

то $z_1^{(n-k_1)}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$ и $z_2^{(n-k_2)}\Big|_{[y^{(n)}=F]}$ не зависят от переменной $w^{(n)}$. Это условие, с помощью следствия из леммы 1, выражается соотношениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_1^{(n-k_1)}\Big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(n)}} \;&\equiv\; \frac{\partial F}{\partial w^{(n)}}\frac{\partial z_1^{(0)}}{\partial y^{(k_1)}} + \frac{\partial z_1^{(0)}}{\partial w^{(k_1)}} \;=\; 0,\\
\frac{\partial z_2^{(n-k_2)}\Big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(n)}} \;&\equiv\; \frac{\partial F}{\partial w^{(n)}}\frac{\partial z_2^{(0)}}{\partial y^{(k_2)}} + \frac{\partial z_2^{(0)}}{\partial w^{(k_2)}} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

А значит, определитель $\det A$ обращается в ноль, что противоречит условию (1.31).

Таким образом, оказывается, что для построения базиса пространства $\bar{\mathfrak{J}}_n\Big|_{[y^{(n)}=F]}$ достаточно не более трех инвариантов

$$x,\; z_1^{(0)},\; z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\Big|_{[y^{(n)}=F]},$$

последние два из которых мы будем называть ***младшими*** инвариантами. Этот вывод отражен в результирующей таблице 1.

Таблица 1

Условие	Базис $\bar{\mathfrak{J}}_n\big\|_{[y^{(n)}=F]}$
$z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]}$	$x, z_1^{(0)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1=0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (1<k_1<n) \end{array}\right.$ $z_1^{(n-k_1)}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]}$ $\forall k=\overline{k_1, n-1}:\ \dim \bar{\mathfrak{J}}_k\big\|_{[y^{(n)}=F]} = k-k_1+2$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1=0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (1<k_1<n) \end{array}\right.$ $z_1^{(n-k_1)}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]}$ $\dim \bar{\mathfrak{J}}_n\big\|_{[y^{(n)}=F]} = n-k_1+1$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1=0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (1<k_1<n) \end{array}\right.$ $z_1^{(n-k_1)}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]}$ $\dim \bar{\mathfrak{J}}_n\big\|_{[y^{(n)}=F]} = n-k_1+2$ $z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]}$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)},$ $z_2^{(0)}$
$\left[\begin{array}{ll} z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (k_1=0) \\ z_1^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_1-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} & (1<k_1<n) \end{array}\right.$ $z_2^{(0)} \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_2}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{k_2-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \quad (0<k_2<n)$ $z_i^{(n-k_i)}\big\|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big\|_{[y^{(n)}=F]} \setminus \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big\|_{[y^{(n)}=F]}$ $(i=1$ или $i=2)$	$x, z_1^{(0)}, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)},$ $z_2^{(0)}, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)},$ $z_i^{(n-k_i)}$

1.5 Принцип факторизации

Групповой подход, заключающийся в представлении уравнения в инвариантах допускаемого оператора, оказался эффективным для редукции широких классов уравнений. Достаточно полное изложение применения принципа факторизации для анализа и решения обыкновенных дифференциальных уравнений приведено в [15, 17, 27, 45, 46]. Распространение симметрийных методов на класс обобщенных дифференциальных уравнений позволяет свести обобщенное дифференциальное уравнение (1.2) к системе «вложенных» уравнений более простой структуры, а следовательно, представить задачу анализа и интегрирования исходного уравнения в виде последовательности более простых подзадач [10, 11, 18, 38].

Рассмотрим недоопределенное обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$F\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}\right) = 0, \tag{1.32}$$

где $y_i = y_i(x)$ $(i = \overline{1, k})$.

Определение 5 [39]. Будем говорить, что уравнение (1.32) ***факторизуется*** до системы

$$\begin{cases} G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}, \ldots, z_s, z_s', \ldots, z_s^{(m_s)}\right) = 0, \\ z_1 = H_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_{11})}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(r_{1k})}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_s = H_s\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_{s1})}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(r_{sk})}\right), \end{cases} \tag{1.33}$$

если система (1.33) является следствием уравнения (1.32) (в том смысле, что если $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, k}$ удовлетворяют уравнению (1.32), то они удовлетворяют и системе (1.33)), и

$$r_{ij} \leqslant n_j \quad (\forall i \leqslant s,\ \forall j \leqslant k),$$

$$m_i \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \{n_j - r_{ij}\} \quad (\forall i \leqslant s), \tag{1.34}$$

$$s \leqslant k, \tag{1.35}$$

$$s + \max_{0 \leqslant i \leqslant s} m_i < k + \max_{0 \leqslant i \leqslant k} n_i. \tag{1.36}$$

Систему (1.33) будем называть ***факторсистемой***.

Из определения 5 следует, что факторсистема представляет собой «матрешку», в которой первое уравнение, называемое ***внешним***, может решаться независимо от остальных уравнений системы, называемых ***внутренними*** (далее термины ***внешнее*** и ***внутреннее*** уравнение мы будем применять к любым системам «вложенных» уравнений вида (1.33)). Число переменных и порядок внешнего уравнения системы (1.33) не превышают значения этих характеристик исходного уравнения (1.32). Это следует из соотношений (1.34) и (1.35), первое из которых дает соотношение для порядка уравнений

$$\max_{1\leqslant i\leqslant s} m_i \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant k} n_j.$$

Неравенство (1.36) гарантирует нам, что хотя бы одна из характеристик внешнего уравнения (число переменных или порядок) будет строго меньше соответствующей характеристики исходного уравнения, поэтому оно заведомо «проще» уравнения (1.32).

<u>Замечание 1</u>. Если подставить величины z_i $(i = \overline{1, s})$ в первое уравнение системы (1.33), то, вообще говоря, мы получим исходное уравнение с точностью до некоторого множителя

$$\mu = \mu\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(r_k)}\right),$$

где $r_j \leqslant n_j$, $j = \overline{1, k}$, и $r_j < n_j$ хотя бы для одного $j \in \{1, \ldots, k\}$. Функция μ является аналогом интегрирующего множителя; уравнение $\mu = 0$ требует дополнительного исследования – решения этого уравнения могут быть, например, особыми решениями исходного.

<u>Замечание 2</u>. Возможен случай, когда неравенство (1.36) превращается в равенство, т.е.

$$s + \max_{0\leqslant i\leqslant s} m_i = k + \max_{0\leqslant i\leqslant k} n_i, \tag{1.37}$$

но структура внешнего уравнения системы (1.33) все равно оказывается проще структуры исходного уравнения (1.31) (именно такая ситуация возникает при использовании групповых методов). Поэтому далее термины «факторизация» и «факторсистема» мы будем также использовать, если в определении 5 система (1.33) вместо условия (1.36) удовлетворяет условию (1.37).

Для обобщенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = F\left(x, y, w, y', w', \, \ldots \,, y^{(n-1)}, w^{(n-1)}, w^{(n)}\right), \tag{1.38}$$

где $y = y(x)$ и $w = w(x)$ в определении 5 можно уточнить некоторые параметры. Во-первых, число зависимых переменных y_i в исходном уравнении (1.33) равно двум – y и w, а порядок n_i относительно каждой переменной не превышает n. Количество внутренних уравнений системы (1.34) не превышает двух, порядок каждого из них относительно переменных y и w меньше либо равен порядку n исходного уравнения. Внешнее уравнение в зависимости от числа и структуры внутренних уравнений является либо обыкновенным дифференциальным уравнением порядка не выше n, либо обобщенным дифференциальным уравнением, содержащим две неизвестные функции z_1 и z_2, порядок которого строго меньше n (либо равен n с учетом замечания 2 к определению 5).

Термины «факторизация» и «факторсистема» можно распространить и на уравнение (1.38), трактуемое как соотношение (1.2) для переменных из продолженного пространства $\mathbf{Z}_n$. При этом уравнения факторсистемы (1.33) так же определяют соотношения для переменных из продолженного пространства, а следствие понимается в том смысле что, из соотношения (1.2) с помощью алгебраических операций и оператора полного дифференцирования D_x следует справедливость соответствующей факторсистемы (1.33).

Докажем несколько теорем, позволяющих на основе свойств пространства инвариантов $\bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$, полученных в предыдущих параграфах, факторизовать обобщенное дифференциальное уравнение (1.2) и тем самым упростить процесс интегрирования исходного уравнения.

Теорема 6 [11, 39]. Пусть обобщенное дифференциальное уравнение (1.2) допускает некоторый формальный оператор (1.3), имеющий только один младший инвариант

$$z = H\left(x, y, w, \, \ldots \,, y^{(k)}, w^{(k)}\right) \in \bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

порядка $k \leqslant n$.

1) Если

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]},$$

то уравнение (1.2) факторизуется до системы двух уравнений

$$\begin{cases} z = H\left(x, y, w, \ldots, y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^{(n-k)} = G\left(x, z, \ldots, z^{(n-k-1)}\right). \end{cases} \tag{1.39}$$

2) Если

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \backslash \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$$

и существует отображение $z^* = H^*\left(x, y, w, \ldots, y^{(n)}, w^{(n)}\right)$, такое что $z^* \in \mathfrak{J}_n\big|_{[y^{(n)}=F]} \backslash \mathfrak{J}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$, а отображения $x, z^{(0)}, \ldots, z^{(n-k)}$, z^* функционально независимы, то уравнение (1.2) факторизуется до системы трех уравнений

$$\begin{cases} z = H\left(x, y, w, \ldots, y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^* = H^*\left(x, y, w, \ldots, y^{(n)}, w^{(n)}\right), \\ z^* = G\left(x, z, \ldots, z^{(n-k)}\right). \end{cases} \tag{1.40}$$

Доказательство. Предположим, что выполнено условие

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Так как z – младший инвариант, то $k < n$ (при $k = n$ отображение $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]} = z$ является инвариантом n-го порядка). В предыдущем пункте 1.4 мы показали, что отображения $x, z^{(0)}, \ldots, z^{(n-k-1)}$, где $z^{(m)} = D_x^m(z)$ $(m = \overline{0, n-k-1})$, при $k < n$ образуют базис пространства $\bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$. Следовательно, присоединение к этому базису любого другого инварианта порядка не выше $n-1$ приводит к функциональной зависимости между элементами этого множества инвариантов. Поэтому существует некоторая достаточно гладкая функция G, такая что

$$z^{(n-k)}\big|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z^{(0)}, \ldots, z^{(n-k-1)}\right).$$

Это означает, что если переменные $x, y, w, \dots, y^{(n)}, w^{(n)}$ связаны соотношением (1.2), то для них верно равенство

$$z^{(n-k)} = G\left(x, z^{(0)}, \dots, z^{(n-k-1)}\right).$$

Таким образом мы получаем систему (1.39), являющуюся следствием уравнения (1.2), а точнее факторсистему исходного уравнения (1.2), внешнее равнение которой является обыкновенным дифференциальным уравнением.

Во втором случае необходимо рассмотреть базис пространства $\bar{\mathfrak{I}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$, состоящий из отображений $x, z^{(0)}, \dots, z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$. Но тогда инварианты x, $z^{(0)}$, ..., $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$, $z^*|_{[y^{(n)}=F]}$ будут функционально зависимы, а следовательно, существует достаточно гладкая функция G, такая что

$$z^* = G\left(x, z, \dots, z^{(n-k)}\right)$$

при условии (1.2). Значит, система (1.40) является следствием уравнения (1.2), и теорема доказана. ■

Замечание. Может оказаться, что инвариант $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ имеет порядок $s < n-1$. Тогда

1) если инварианты x и $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ функционально зависимы, то факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} z = H\left(x, y, w, \dots, y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^{(n-k)} = G(x). \end{cases}$$

В частности, если $G \equiv 0$, тогда H является первым интегралом уравнения (1.2);

2) если инварианты x и $z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ функционально независимы, то очевидно, что $s \geqslant k$, и совокупность инвариантов $x, z^{(0)}, \dots,$ $z^{(s-k)}, z^{(n-k)}|_{[y^{(n)}=F]}$ будет функционально зависима, поэтому уравнение (1.2) редуцируется к факторсистеме

$$\begin{cases} z = H\left(x, y, w, \dots, y^{(k)}, w^{(k)}\right), \\ z^{(n-k)} = G\left(x, z, \dots, z^{(s-k)}\right). \end{cases}$$

Теорема 7 [11, 39]. Пусть обобщенное дифференциальное уравнение (1.2) допускает некоторый формальный оператор (1.3), имеющий два младших инварианта

$$z_i = H_i \left(x, y, w, \ldots, y^{(k_i)}, w^{(k_i)}\right) \in \bar{\mathfrak{J}}_{k_i}\Big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad i = 1, 2,$$

порядка $k_i \leqslant n$. Тогда

1) если
$$D_x^{n-k_1}(z_1)\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]},$$
то уравнение (1.2) представимо в виде факторсистемы
$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_2 = H_2\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_2)}, w^{(k_2)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \ldots, z_2^{(n-k_2-1)}\right), \end{cases} \tag{1.41}$$
при $k_2 < n$,
$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}\right), \end{cases} \tag{1.42}$$
при $k_2 = n$;

2) если
$$D_x^{n-k_1}(z_1)\Big|_{[y^{(n)}=F]}, D_x^{n-k_2}(z_2)\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_n\Big|_{[y^{(n)}=F]} \backslash \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]},$$
то уравнение (1.2) факторизуется до системы
$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_2 = H_2\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_2)}, w^{(k_2)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \ldots, z_2^{(n-k_2)}\right). \end{cases} \tag{1.43}$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 6.

Рассмотрим первый случай:

$$D_x^{n-k_1}(z_1)\Big|_{[y^{(n)}=F]} \in \bar{\mathfrak{J}}_{n-1}\Big|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Так как z_1 – младший инвариант, то $k_1 < n$ (при $k_1 = n$ отображение $D_x^{n-k_1}(z_1)\big|_{[y^{(n)}=F]}= z_1$ является инвариантом n-го порядка). Базис пространства $\bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}$ образуют инварианты

$$x, z_1, \, \ldots \, , z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \, \ldots \, , z_2^{(n-k_2-1)},$$

если $k_2 < n$,

$$x, z_1, \, \ldots \, , z_1^{(n-k_1-1)},$$

если $k_2 = n$, тогда для некоторого достаточно гладкого отображения G будут верны соотношения

$$z_1^{(n-k_1)}|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z_1, \, \ldots \, , z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \, \ldots \, , z_2^{(n-k_2-1)}\right),$$

либо соответственно

$$z_1^{(n-k_1)}|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z_1, \, \ldots \, , z_1^{(n-k_1-1)}\right).$$

Значит, из уравнения (1.2) следует одна из факторсистем (1.41) или (1.42).

Во втором случае необходимо рассмотреть базис пространства $\bar{\mathfrak{I}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$, который образуют инварианты

$$x, z_1, \, \ldots \, , z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \, \ldots \, , z_2^{(n-k_2-1)}, z_2^{(n-k_2)}|_{[y^{(n)}=F]}.$$

Поэтому существует некоторое достаточно гладкое отображение G, такое что

$$z_1^{(n-k_1)}|_{[y^{(n)}=F]} = G\left(x, z_1, \, \ldots \, , z_1^{(n-k_1-1)}, z_2, \, \ldots \, , z_2^{(n-k_2-1)}, z_2^{(n-k_2)}|_{[y^{(n)}=F]}\right).$$

Таким образом, из уравнения (1.2) мы получаем следствие в виде системы (1.43) ■

Замечание 1. Одним из необходимых условий теорем 6 и 7 является обращение полной производной порядка $n-k$ младшего инварианта $z \in \bar{\mathfrak{I}}_k\big|_{[y^{(n)}=F]}$ порядка k в инвариант порядка ниже n:

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}\in \bar{\mathfrak{I}}_{n-1}\big|_{[y^{(n)}=F]}, \tag{1.44}$$

т.е. инвариант

$$D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}= \sum_{0<i<n-1} \frac{\partial\left(D_x^{n-k-1}[z]\right)}{\partial y^{(r)}} y^{(r+1)}+$$
$$+\sum_{0<i<n-1} \frac{\partial\left(D_x^{n-k-1}[z]\right)}{\partial w^{(r)}} w^{(r+1)}+\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}}F+\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}}w^{(n)} \quad (1.45)$$

не зависит от дифференциальной переменной $w^{(n)}$. Заметим, что производная $\partial z/\partial y^{(k)} \neq 0$ (иначе $\partial z/\partial w^{(k)} \neq 0$, а следовательно отображение $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}$ является инвариантом порядка n). Дифференцируя по $w^{(n)}$ соотношение (1.45) и применяя следствие из леммы 1, получим

$$\frac{\partial D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}}{\partial w^{(n)}}=\frac{\partial F}{\partial w^{(n)}}\frac{\partial z}{\partial y^{(k)}}+\frac{\partial z}{\partial w^{(k)}}.$$

Выражение справа от знака равенства обращается в ноль, если

$$\frac{\partial F}{\partial w^{(n)}}=-\frac{\partial z/\partial w^{(k)}}{\partial z/\partial y^{(k)}}.$$

Таким образом, правая часть уравнения (1.2) F должна быть **линейной** по старшей производной $w^{(n)}$.

Замечание 2. Из теоремы 6 следует, что формальный оператор, имеющий только один младший инвариант z порядка $k<n$, не всегда эффективен для факторизации уравнения (1.2), допускающего этот оператор, так как необходимо либо выполнение условия (1.44), либо нужно знать еще один инвариант z^*, удовлетворяющий условиям, сформулированным в теореме. Если уравнение (1.2) допускает формальный оператор (1.3), имеющий два младших инварианта порядка ниже n (теорема 7), то, очевидно, что для инварианта z либо выполняется условие (1.44), т.е. порядок $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}$ ниже n (теорема 7 пункт 1), либо порядок $D_x^{n-k}(z)\big|_{[y^{(n)}=F]}$ равен n (теорема 7 пункт 2), а значит уравнение (1.2) гарантированно сводится к некоторой факторсистеме.

Наличие допускаемого оператора позволяет в большинстве случаев факторизовать исходное уравнение, но тогда возникает вопрос: верно ли, что всякой факторсистеме можно поставить в соответствие некоторый формальный оператор? Если это так, то это означает, что теоретически методами группового анализа мы можем найти ***все*** типы факторсистем, к которым сводится исходное уравнение, хотя, конечно, на практике это удается сделать не всегда. Докажем обратную теорему для наиболее распространенных и практически значимых типов факторизации.

Теорема 8 [11, 39]. Пусть обобщенное дифференциальное уравнение n-го порядка (1.38)

1) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}\right)$$

с помощью подстановки

$$z_1 = H_1\left(x, y(x), w(x), \ldots, y^{(k_1)}(x), w^{(k_1)}(x)\right), \quad k_1 < n,$$

где $0 \leqslant m_1 < n - k_1$;

2) сводится к обобщенному дифференциальному уравнению

$$z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}, z_2, z_2', \ldots, z_2^{(m_2)}\right)$$

с помощью подстановки вида

$$\begin{array}{ll} z_1 = H_1\left(x, y(x), w(x), \ldots, y^{(k_1)}(x), w^{(k_1)}(x)\right), & k_1 < n, \\ z_2 = H_2\left(x, y(x), w(x), \ldots, y^{(k_2)}(x), w^{(k_2)}(x)\right), & k_2 < n, \end{array}$$

$\frac{\partial z_1}{\partial y^{k_1}} \neq 0$, $1 < m_1 < n - k_1$, $0 \leqslant m_2 \leqslant n - k_2$.

Тогда исходное уравнение допускает некоторый формальный оператор (1.3), такой что все z_i $(i = 1, 2)$ являются его инвариантами: $z_i \in$ $\in \bar{\mathfrak{J}}_{k_i}\big|_{[y^{(n)}=F]}$.

Доказательство. За исключением процедуры построения оператора, рассуждения в обоих случаях совпадают. Рассмотрим второй случай: пусть исходное уравнение (1.38) (равносильное (1.2)) сводится к факторсистеме

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = H_1\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_2 = H_2\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_2)}, w^{(k_2)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(m_1)}, z_2, \ldots, z_2^{(m_2)}\right). \end{array} \right. \qquad (1.46)$$

Найдем формальный оператор (1.3), такой, что z_1 и z_2 являются его инвариантами. Для этого запишем уравнения, которым удовлетворяют инварианты k_i-го порядка ($k_i < n$, $i = 1,2$) (в смысле определения 3)

$$\sum_{r=0}^{k_i} D_x^r(\Phi)\frac{\partial z_i}{\partial y^{(r)}} + \sum_{r=0}^{k_i} D_x^r(\Psi)\frac{\partial z_i}{\partial w^{(r)}} = 0.$$

Одно из этих уравнений можно считать линейным уравнением в полных производных относительно функции Φ. Тогда из второго уравнения, являющегося линейным уравнением в полных производных относительно Ψ, подставляя найденное выражение для Φ, можно выразить Ψ. Таким образом, всегда существует некоторый формальный оператор вида (1.3), имеющий в качестве инвариантов отображения $z_1 \in \mathfrak{J}_{k_1}$ и $z_2 \in \mathfrak{J}_{k_2}$, при этом они будут инвариантами и в смысле определения 4 для произвольного обобщенного дифференциального уравнения (1.2), т.е.

$$z_i \in \mathfrak{J}_{k_i}\big|_{[y^{(n)}=F]} \equiv \bar{\mathfrak{J}}_{k_i}\big|_{[y^{(n)}=F]}, \quad i = 1,2.$$

Покажем, что уравнение (1.2), факторизующееся до системы (1.46), допускает построенный формальный оператор. Заметим, что так как

$$z_1^{(n-k_1)} = \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i+1)}\frac{\partial z_1^{(n-k_1-1)}}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{n-1} w^{(i+1)}\frac{\partial z_1^{(n-k_1-1)}}{\partial w^{(i)}} + y^n\frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}} + w^n\frac{\partial z_1}{\partial w^{(k_1)}}$$

и выражение

$$z_1^{(n-k_1)} - G\left(x, z_1, z_1', \ldots, z_1^{(m_1)}, z_2, z_2', \ldots, z_2^{(m_2)}\right)$$

при возвращении к переменным y и w при условии, что $y^{(n)} = F$, должно обращаться в тождественный ноль, то

$$y^{(n)} - F = \left(z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}-F]}\right) : \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}}.$$

Тогда, вычисляя действие найденного оператора X на выражение $y^{(n)} - F$:

$$X\left[y^{(n)} - F\right]\Big|_{[y^{(n)}=F]} = X\left[z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\right]\Big|_{[y^{(n)}=F]} : \frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}} -$$

$$- \left(z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\right)\Big|_{[y^{(n)}=F]} X\left[\frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}}\right] : \left(\frac{\partial z_1}{\partial y^{(k_1)}}\right)^2,$$

приходим к выводу, что

$$X\Big[y^{(n)} - F\Big]\Big|_{[y^{(n)}=F]} = 0,$$

так как множители

$$X\Big[z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\Big]\Big|_{[y^{(n)}=F]} \quad \text{и} \quad \Big(z_1^{(n-k_1)} - G|_{[y^{(n)}=F]}\Big)\Big|_{[y^{(n)}=F]}$$

равны нулю. Равенство нулю второго множителя очевидно. Первый множителя обращается в ноль, так как отображения $z_1^{(n-k_1)}$ и $G|_{[y^{(n)}=F]}$ являются инвариантами в силу исходного уравнения (1.2) (по построению инвариантов $z_1^{(i)}$ и из теорем 1,2).

В первом случае, когда уравнение (1.2) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, y, w, \ldots, y^{(k_1)}, w^{(k_1)}\right), \\ z_1^{(n-k_1)} = G\left(x, z_1, \ldots, z_1^{(m_1)}\right), \end{cases}$$

процедура построения оператора, имеющего в качестве инварианта отображение z_1, проще, так как уравнение

$$\sum_{r=0}^{k_1} D_x^r(\Phi)\frac{\partial z_1}{\partial y^{(r)}} + \sum_{r=0}^{k_1} D_x^r(\Psi)\frac{\partial z_1}{\partial w^{(r)}} = 0$$

является переопределенным уравнением с двумя искомыми функциями Ψ и Φ, из которого мы можем выразить, например, Φ как решение линейного уравнения в полных производных. Дальнейшие рассуждения для построенного оператора аналогичны ■

Из теоремы 8 следует, что методами группового анализа теоретически мы можем описать все варианты факторизации обобщенного дифференциального уравнения (1.2) до обыкновенного дифференциального уравнения, а также построить все факторсистемы вида (1.46), за исключением случая, когда хотя бы одно из внутренних уравнений факторсистемы имеет порядок, равный порядку исходного уравнения n. В следующем пункте мы опишем некоторые типы операторов, для которых, как правило, удается найти инварианты и тем самым на практике реализовать идею факторизации.

1.6 Поиск инвариантов

Согласно теоремам 6 и 7, процесс факторизации уравнения включает следующие действия:

1) поиск допускаемого оператора;

2) поиск и исследование младших инвариантов допускаемого оператора порядка меньше n (их количество, выполнение свойства (1.44)).

Как правило, на практике возникает проблема: допускаемый оператор найден, но непонятно, как искать его инварианты. В этом параграфе мы рассмотрим несколько случаев, в которых процесс поиска инвариантов осуществляется с наименьшими затруднениями.

Заметим, что инварианты порядка ниже n должны удовлетворять уравнению (1.12). Исключая зависимость от переменной $w^{(n)}$, получаем уравнение

$$\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}}+\sum_{i=0}^{n-1} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}=0.$$

Для нахождения младших инвариантов мы должны последовательно исследовать на наличие решений $z=z(x,y,w,\,\ldots\,y^{(k)},w^{(k)})$, функционально независимых с x, уравнения

$$\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}}+ \\ +\sum_{i=0}^{k} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}=0,\qquad k=\overline{0,n-1}. \tag{1.47}$$

Будем считать, что из двух возможных младших инвариантов z_1 и z_2 порядок первого k_1 не превышает порядка второго инварианта k_2, тогда z_1 удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=0}^{k_1} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}}+\sum_{i=0}^{k_1} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z_1}{\partial w^{(i)}}=0,$$

причем, если $k_1 \neq 0$, интегральный базис уравнений

$$\sum_{i=0}^{l} D_x^i(\Phi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{l} D_x^i(\Psi)\big|_{[y^{(n)}=F]}\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0, \quad l = \overline{0, k_1 - 1}$$

состоит из одного элемента x. Пусть $\partial z_1/\partial y^{(k_1)} \neq 0$. Введем новые переменные:

$$y^{(k_1+r)} \to \bar{y}^{(k_1+r)} \equiv D_x^r(z_1), \quad r = \overline{0, n-1-k_1}. \tag{1.48}$$

(Если $\partial z_1/\partial y^{(k_1)} = 0$, то аналогично можно рассмотреть замену переменных $w^{(k_1+r)} \to \bar{w}^{(k_1+r)} \equiv D_x^r(z_1)$, $r = \overline{0, n-1-k_1}$.) Напомним, что только один из младших инвариантов может иметь нулевой порядок, поэтому второй младший инвариант порядка ниже n может существовать только у обобщенных дифференциальных уравнений (1.2) порядка $n > 1$. Тогда для поиска второго младшего инварианта при $n > 1$ необходимо рассмотреть уравнения (1.47), учитывая замену (1.48), где $k = \overline{\max\{1, k_1\}, n-1}$. Если интегральный базис этих уравнений состоит из одного элемента x, то второго младшего инварианта нет, иначе существует наименьший $k = k_2$ такой, что размерность интегрального базиса соответствующего уравнения (1.47) (с заменой (1.48)) больше единицы (а точнее, как мы уже отмечали, равна двум). Из этого уравнения мы и находим второй младший инвариант z_2. Чтобы оценить возможность факторизации уравнения (1.2) и ее тип, нам не обязательно искать решения уравнения (1.47), а достаточно определить значения k_1 и k_2. Для этого мы должны выполнить следующие действия:

1. Найти размерность интегрального базиса уравнения (1.47) при $k = 0$ $(\dim \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]})$. Если $\dim \bar{\mathfrak{J}}_0\big|_{[y^{(n)}=F]} > 1$, то $k_1 = 0$, иначе нужно определить минимальное значение $k = k_1 > 0$, для которого размерность интегрального базиса соответствующего уравнения (1.47) увеличивается по сравнению с размерностью интегрального базиса для уравнения (1.47) при $k = k_1 - 1$. Если такого k_1 не нашлось, то оператор не имеет младших инвариантов порядка ниже n. Если для уравнения (1.2) первого порядка мы нашли $k_1 = 0$, то второго младшего инварианта порядка ниже $n = 2$ нет.

2. Предположим, что мы определили k_1 и $n > 1$, тогда необходимо проанализировать уравнения (1.47) при $k = \overline{\max\{1, k_1\}, n-1}$ и найти минимальное значение $k = k_2$, для которого размерность интегрального базиса соответствующего уравнения (1.47) по сравнению с размерностью интегрального базиса для уравнения (1.47) при $k = k_1 - 1$ увеличивается более чем на единицу. Если такого k_2 не нашлось, то оператор имеет только один младший инвариант порядка ниже n.

Структура координат оператора (1.3) может оказаться достаточно сложной, а следовательно, в процессе определения порядка младших инвариантов или самих инвариантов мы можем столкнуться с различного рода препятствиями. Рассмотрим простейшие случаи, в которых, как правило, удается решить поставленную задачу [9].

I. Отношения

$$\mathfrak{A}_1 = \left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}_0 = \left.\frac{\Psi}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]}$$

являются отображениями ***конечномерного*** пространства (считаем для определенности, что $\Phi \neq 0$). Тогда можно записать уравнения, равносильные уравнениям (1.45):

$$\sum_{i=0}^{k} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{1.49}$$

где $\mathfrak{A}_0 = 1$, а остальные $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ задаются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_i &= D_x(\mathfrak{A}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{i-1}, \quad 1 < i < n, \\ \mathfrak{B}_i &= D_x(\mathfrak{B}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_{i-1}, \;\; 0 < i < n, \end{aligned} \tag{1.50}$$

которые легко получаются из цепочки преобразований

$$D_x\left[\left.\frac{D_x^{i-1}(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]}\right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} \overset{[\text{лемма 2}]}{=} D_x\left[\frac{D_x^{i-1}(\Psi)}{\Phi}\right]\Bigg|_{[y^{(n)}=F]} =$$
$$= \left.\frac{D_x^{i}(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} - \left.\frac{D_x^{i-1}(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \cdot \left.\frac{D_x(\Psi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \tag{1.51}$$

и аналогичной ей, если подставить вместо Ψ координату Φ. Уравнения (1.49) являются линейными уравнениями с частными производными первого порядка, коэффициенты которого являются отображениями некоторого конечномерного пространства $\mathbb{R}^{s_k}$ в $\mathbb{R}$. Последний вывод следует из рекуррентных формул (1.50), так как применяя оператор полной производной к выражению, зависящему от конечного числа переменных, мы получим снова выражение, зависящее от конечного числа переменных. Таким образом, к каждому уравнению из совокупности (1.49) можно применить классические методы решения уравнений с частными производными. Рассмотрим одно из уравнений совокупности (1.49) при некотором $k = k_0$:

$$\sum_{i=0}^{k_0} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum_{i=0}^{k_0} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}} = 0. \tag{1.52}$$

Если коэффициенты $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ зависят от переменных $x, y, w, \ldots, y^{(k_0)}$, $w^{(k_0)}$, то найти интегральный базис уравнения (1.52), состоящий из $2(k_0+1)$ инвариантов, можно из соответствующей системы в характеристиках:

$$\frac{d\,y}{\mathfrak{A}_0} = \ldots = \frac{d\,y^{(k_0)}}{\mathfrak{A}_{k_0}} = \frac{d\,w}{\mathfrak{B}_0} = \ldots = \frac{d\,w^{(k_0)}}{\mathfrak{B}_{k_0}}.$$

Если хотя бы один из коэффициентов $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ зависит от дифференциальной переменной порядка выше k_0 (будем тогда считать, что $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ зависят от переменных $x, y, w, \ldots, y^{(k_0)}, w^{(k_0)}, \ldots, y^{(k_0+n_0)}$, $w^{(k_0+n_0)}$, где $n_0 \in \mathbb{N}$), тогда уравнение (1.52) равносильно нормальной (т.к. $\mathfrak{A}_0 = 1$) системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k_0} \mathfrak{A}_i \frac{\partial z}{\partial y^{(i)}} + \sum\limits_{i=0}^{k_0} \mathfrak{B}_i \frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}, = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y^{(k_0+i)}} = 0, \quad i = \overline{1, n_0}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial w^{(k_0+i)}} = 0, \quad i = \overline{1, n_0}. \end{cases} \tag{1.53}$$

Система (1.53) может оказаться незамкнутой. Поэтому, согласно методу Якоби, ее необходимо дополнить уравнениями до равносильной якобиевой системы [25] с помощью скобок Пуассона. Мы не будем подробно излагать этот метод приведения системы к нормальной замкнутой форме, который достаточно подробно описан в классической математической литературе, например в [25]. Отметим только, что размерность интегрального базиса якобиевой системы равна разности между числом переменных и числом уравнений. Поэтому для определения размерности пространства инвариантов нам не нужно искать решения системы (1.53).

На практике чаще всего приходится рассматривать операторы (1.3), координаты которых удовлетворяют соотношениям

$$\left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{D_x(\Phi)}{\Phi} \quad \text{и} \quad \left.\frac{\Psi}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{\Psi}{\Phi}.$$

Одним из аргументов в пользу таких операторов является то, что пока не ясно, как осуществлять подстановки вида $y^{(i)} = D_x^i(F)$ в выражения, зависящие от бесконечно числа аргументов, в частности, содержащие полный интеграл. Если считать, согласно предположению, что

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{D_x(\Phi)}{\Phi} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}_0 = \frac{\Psi}{\Phi},$$

то можно восстановить класс соответствующих операторов, а именно: координаты Φ и Ψ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp\left(\int \mathfrak{A}_1\,dx\right), \\ \Psi &= \mathfrak{B}_0 \exp\left(\int \mathfrak{A}_1\,dx\right). \end{aligned}$$

II. Отношения

$$\mathfrak{A}_1 = \left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}_1 = \left.\frac{D_x(\Psi)}{\Psi}\right|_{[y^{(n)}=F]} \qquad (1.54)$$

являются отображениями ***конечномерного*** пространства ($\Phi \neq 0$, $\Psi \neq 0$), но отношение $(\Psi/\Phi)|_{[y^{(n)}=F]}$ не обладает этим свойством (иначе мы получим предыдущий случай), либо определение этого свойства оказывается затруднительным. Тогда мы можем поступить следующим образом:

Преобразуем уравнения (1.47)

$$\Phi|_{[y^{(n)}=F]}\sum_{i=0}^{k}\mathfrak{A}_i\frac{\partial z}{\partial y^{(i)}}+\Psi|_{[y^{(n)}=F]}\sum_{i=0}^{k}\mathfrak{B}_i\frac{\partial z}{\partial w^{(i)}}=0,\quad k=\overline{0,n-1},$$

где $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{B}_0=1$, а остальные $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ при $i>1$ задаются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_i &= D_x(\mathfrak{A}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]}+\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{i-1},\quad i>1,\\ \mathfrak{B}_i &= D_x(\mathfrak{B}_{i-1})|_{[y^{(n)}=F]}+\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_{i-1},\ \ i>1,\end{aligned}$$

которые получаются из цепочки преобразований (1.51), поэтому все коэффициенты $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ оказываются отображениями конечномерного пространства. Будем искать младшие инварианты z_1 и z_2 такие, что первый из них зависит только от переменных x и дифференциальных переменных $y,\ \dots,y^{(k_1)}$, а второй – от x и дифференциальных переменных $w,\ \dots,w^{(k_2)}$. Тогда они должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k_1}\mathfrak{A}_i\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}}=0,\\ \sum_{i=0}^{k_2}\mathfrak{B}_i\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}}=0.\end{aligned}$$

Таким образом, для поиска инвариантов нам необходимо исследовать уравнения

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\mathfrak{A}_i\frac{\partial z_1}{\partial y^{(i)}}=0,\quad 1<k<n,\\ \sum_{i=0}^{k}\mathfrak{B}_i\frac{\partial z_2}{\partial w^{(i)}}=0,\ \ 1<k<n.\end{aligned}$$

Метод исследования рассмотрен в предыдущем пункте I. Единственный вопрос, который может возникнуть при таком подходе – существует ли у оператора, коэффициенты которого удовлетворяют свойству (1.54), инвариант **«смешанного»** типа (т.е. он зависит как от производных переменной y, так и от производных переменной w) порядка ниже k_2, а значит, применение термина ***младший*** к инвариантам z_1 и z_2 может оказаться некорректным. Эта проблема пока остается нерешенной, но практика показывает, что уравнение, допускающее такой оператор, всегда факторизуется с помощью найденных инвариантов z_1 и z_2.

Если для координат оператора (1.3) соотношения (1.54) выполняются без условия «в силу уравнения (1.2)», т.е.

$$\left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{D_x(\Phi)}{\Phi} \quad \text{и} \quad \left.\frac{D_x(\Psi)}{\Psi}\right|_{[y^{(n)}=F]} = \frac{D_x(\Psi)}{\Psi}, \tag{1.55}$$

мы можем восстановить класс операторов, координаты которых обладают свойствами (1.54) и (1.55), а именно: координаты Φ и Ψ имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi &= \exp\left(\int \mathfrak{A}_1\, dx\right),\\ \Psi &= \exp\left(\int \mathfrak{B}_1\, dx\right).\end{aligned}$$

Заметим, что указанный подход к поиску инвариантов, не являющихся инвариантами «смешанного» типа, заключающийся в расщеплении уравнения для поиска инвариантов на систему из двух уравнений, может применяться независимо от структуры координат формального оператора (1.3).

Таким образом, в этой главе на основе теории формальных операторов на класс обобщенных дифференциальных уравнений распространен и доказан универсальный принцип факторизации, позволяющий редуцировать различные классы уравнений, сводящиеся к уравнениям этого типа, например, функционально-дифференциальные уравнения. Указанный подход не имеет ограничений по порядку и виду рассматриваемых уравнений и может использоваться для решения широкого круга задач моделирования и ряда других прикладных областей. Следующие главы посвящены подробному анализу особенностей, возникающий при факторизации обобщенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, а также применению симметрийных методов для класса функционально-дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Глава 2. Обобщенные дифференциальные уравнения 1-го порядка

2.1 Общие замечания

Как известно, методы группового анализа не позволяют найти симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Это связно в основном с тем, что при рассмотрении определяющего уравнения для поиска допускаемого оператора, единственная производная, по которой можно его расщепить, заменяется в силу исходного уравнения. Обобщенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = F(x, y, w, w'). \tag{2.1}$$

содержит «лишнюю» дифференциальную переменную, поэтому естественно предположить, что применение методов группового анализа к этому классу уравнений окажется более эффективным.

Запишем определяющее уравнение для произвольного формального оператора (1.3), допускаемого уравнением (2.1)

$$\Phi|_{[y'=F]}\frac{\partial F}{\partial y} + \Psi|_{[y'=F]}\frac{\partial F}{\partial w} + D_x(\Psi)|_{[y'=F]}\frac{\partial F}{\partial w'} - D_x(\Phi)|_{[y'=F]} = 0. \tag{2.2}$$

В общем случае задача поиска допускаемого оператора, а следовательно, построения факторсистемы с помощью инвариантов найденного оператора не поддается решению, поэтому, как правило, требуется введение дополнительных условий на вид оператора или на класс уравнений (2.1). Используя симметрийные методы, обобщенное дифференциальное уравнение 1-го порядка может быть сведено либо к обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка, либо к обобщенному дифференциальному уравнению нулевого или первого порядка (в последнем случае при сохранении типа уравнения, его структура, как правило, оказывается проще). Далее мы исследуем структуру операторов и уравнений в зависимости от типа факторизации, а также построим необходимые условия существования соответствующей факторсистемы.

2.2 Факторизация до обыкновенного дифференциального уравнения

Найдем условия, при которых уравнение (2.1) факторизуется до системы, внешнее уравнение которой является обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка. Сначала перечислим необходимые условия, следующие из результатов 1-ой главы.

1. Во-первых, допускаемый оператор (1.3) должен иметь инвариант нулевого порядка $z = z(x, y, w)$ ($z_y \neq 0$, $z_w \neq 0$), т.е. z является решением линейного однородного уравнения 1-го порядка с частными производными
$$\Phi\big|_{[y'=F]}\frac{\partial z}{\partial y} + \Psi\big|_{[y'=F]}\frac{\partial z}{\partial w} = 0,$$
причем $\Phi\big|_{[y'=F]} \neq 0$, $\Psi\big|_{[y'=F]} \neq 0$, а отношение
$$\frac{\Phi}{\Psi}\bigg|_{[y'=F]} = \eta \not\equiv 0$$
является достаточно гладкой функцией, зависящей только от переменных x, y, w, т.е. $\eta = \eta(x, y, w)$. Поэтому инвариант z удовлетворяет уравнению
$$\eta\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} = 0. \tag{2.3}$$

2. Из замечания 1 к теореме 7, следует, что необходимым условием существования искомой факторизации является линейность правой части уравнения (2.1) по производной w'. Поэтому будем рассматривать уравнения вида
$$y' = f_1 w' + f_2, \quad \text{где } f_i = f_i(x, y, w),\ i = 1, 2. \tag{2.4}$$

3. Согласно теоремам 6 и 7 о факторизации, полная производная отображения z в силу уравнения (2.1) должна быть инвариантом нулевого порядка или, иными словами, отображение $D_x(z)|_{y'=F}$ не должно зависеть от производной w'. Тогда, так как
$$\frac{\partial\left[D_x(z)|_{y'=f_1w'+f_2}\right]}{\partial w'} = \frac{\partial\left[z_x + (f_1w' + f_2)z_y + w'z_w\right]}{\partial w'} = f_1 z_y + z_w,$$

получаем из (2.3) соотношение

$$\eta = f_1, \quad f_1 \neq 0,$$

из которого следует зависимость между координатами (1.3) оператора и компонентой f_1 уравнения (2.4)

$$\Phi|_{[y'=f_1 w'+f_2]} = f_1 \Psi|_{[y'=f_1 w'+f_2]}. \tag{2.5}$$

Выясним теперь, при каких условиях уравнение (2.4) допускает оператор (1.3), координаты которого связаны соотношением (2.5). Для этого преобразуем определяющее уравнение (2.2) согласно полученным результатам

$$f_1 \Psi|_{[y'=f_1 w'+f_2]} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} w' + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + \Psi|_{[y'=f_1 w'+f_2]} \left(\frac{\partial f_1}{\partial w} w' + \frac{\partial f_2}{\partial w} \right) +$$
$$+ D_x(\Psi)|_{[y'=f_1 w'+f_2]} f_1 - D_x \left(f_1 \Psi|_{[y'=f_1 w'+f_2]} \right) |_{[y'=f_1 w'+f_2]} = 0,$$

а тогда, раскрывая скобки с применением леммы 2, и затем разделив результат на $D_x(\Psi)|_{[y'=f_1 w'+f_2]}$, получим соотношение для коэффициентов уравнения (2.2)

$$f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0 \tag{2.6}$$

Полагая в соотношении (2.6) произвольно функцию f_1, мы всегда можем построить соответствующую ей функцию f_2. Заметим, что отображение $\Psi \colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ ($k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), является произвольным, отличным от нулевого (в силу исходного уравнения) отображением. Поэтому если уравнение (2.4) представимо в виде факторсистемы, внешне уравнение которой является обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, то класс операторов, соответствующий данной симметрии, состоит из операторов вида

$$X = \Psi(f_1 \partial_y + \partial_w),$$

В частности, этот класс содержит точечный оператор

$$X = f_1 \partial_y + \partial_w.$$

Таким образом, суммируя вышеизложенное, можно сформулировать (с учетом обратной теоремы 8) следующее утверждение

***Теорема* 9**. Обобщенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (2.1) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = H(x, y, w), \\ z' = G(x, z), \end{cases}$$

если и только если уравнение (2.1) имеет вид (2.4), его коэффициенты $f_1 \neq 0$ и f_2 удовлетворяют условию (2.6). Отображение $z = H(x, y, w)$ $(z_y \neq 0,\ z_w \neq 0)$ при этом является решением линейного однородного уравнения с частными производными 1-го порядка

$$f_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} = 0 \quad \blacksquare$$

Приведем несколько примеров, построенных с помощью теоремы 9.

***Пример* 1**. Уравнение

$$y' = \alpha w' + \frac{\alpha'}{\alpha} y + G(x, y - \alpha w),$$

где $\alpha = \alpha(x) \not\equiv 0$ факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = y - \alpha w, \\ z' = \dfrac{\alpha'}{\alpha} z + G(x, z) \, \blacksquare \end{cases}$$

***Пример* 2**. Уравнение

$$\begin{aligned} y' = (\alpha y + \beta w + \gamma) w' + \frac{\alpha' \beta}{\alpha} w^2 + \alpha' y w + \\ + \frac{2\alpha'\beta + \alpha(\alpha'\gamma - \beta')}{\alpha^2} w + \frac{2\alpha'\beta + \alpha(\alpha'\gamma - \beta' - \alpha\gamma')}{\alpha^3} + \\ + e^{\alpha w} G\left(x, \frac{\alpha(\alpha y + \beta w + \gamma) + \beta}{\alpha^2} e^{-\alpha w}\right) \end{aligned}$$

где $\alpha = \alpha(x) \not\equiv 0,$ $\beta = \beta(x),$ $\gamma = \gamma(x)$ факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = \dfrac{\alpha(\alpha y + \beta w + \gamma) + \beta}{\alpha^2} e^{-\alpha w}, \\ z' = G(x, z) \, \blacksquare \end{cases}$$

Пример 3. Уравнение

$$y' = \alpha\left[w' + G\left(x, w - \int \frac{dy}{\alpha}\right)\right],$$

где $\alpha = \alpha(y) \not\equiv 0$ (здесь интеграл частный), факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = w - \displaystyle\int \frac{dy}{\alpha}, \\ z' + G(x, z) = 0 \blacksquare \end{cases}$$

2.3 Редукция до обобщенного дифференциального уравнения

Кроме факторизации обобщенного дифференциального уравнения 1-го порядка до обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка, рассмотренной в предыдущем пункте, практически значимым является случай редукции, когда уравнение (2.1) представимо в виде системы, внешнее уравнение которой также будет обобщенным дифференциальным уравнением. В зависимости от структуры внутренних уравнений можно выделить два подслучая.

1. Внутренние уравнения определяются отображениями, не являющимися инвариантами «смешанного» типа (см. п.1.6), т.е. уравнение (2.1) сводится к системе:

$$\begin{cases} z = H\left(x, w, w'\right), \\ z^* = H^*\left(x, y, y'\right), \\ z^* = G\left(x, z\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

Заметим, что если $z_{w'} = 0$, то z является младшим инвариантом, допускаемого оператора (1.3), а следовательно $\Psi = 0$. Тогда любое отображение $J = J(x, w)$ является инвариантом оператора и инвариант z в факторсистеме (2.7) может иметь любую структуру. Следовательно, мы не можем найти замены переменных, позволяющей гарантированно упростить исходное уравнение. Аналогичные рассуждения можно провести, если $z^*_{y'} = 0$. Поэтому для поиска факторсистемы вида (2.7) методы группового анализа оказываются эффективными только если

$$z_{w'} \neq 0, \quad z^*_{y'} \neq 0,$$

при этом координаты допускаемого оператора отличны от нуля

$$\Phi|_{[y'=F]}| \neq 0, \quad \Psi|_{[y'=F]}| \neq 0.$$

Далее мы будем считать, что последние два условия выполнены.

Так как $z^* \notin \bar{\mathfrak{J}}_n\big|_{[y^{(n)}=F]}$ $(z^*_{y'} \neq 0)$, то что этот тип факторсистемы получается только если

$$z^*|_{[y'=F]} = G\left(x, z\right), \tag{2.8}$$

где G – некоторая достаточно гладкая функция (см теоремы о факторизации 6 и 7). Заметим, что отображение z не обязано быть младшим инвариантом.

Найдем необходимые условия, при которых уравнение (2.1) редуцируется до системы (2.7). Инварианты z и z^* по определению 4 должны удовлетворять уравнениям

$$\Psi|_{[y'=F]} z_w + D_x(\Psi)|_{[y'=F]} z_{w'} = 0, \tag{2.9}$$

$$\Phi|_{[y'=F]} z^*_y|_{[y'=F]} + D_x(\Phi)|_{[y'=F]} z^*_{y'}|_{[y'=F]} = 0, \tag{2.10}$$

где Φ и Ψ – координаты оператора (1.3), допускаемого уравнением (2.1), т.е.

$$\Phi|_{[y'=F]} F_y + \Psi|_{[y'=F]} F_w + D_x(\Psi)|_{[y'=F]} F_{w'} - D_x(\Phi)|_{[y'=F]} = 0. \tag{2.11}$$

Из условия (2.8) следует, что

$$\frac{\partial z^*|_{[y'=F]}}{\partial y} = 0,$$

поэтому

$$\left(z^*|_{[y'=F]}\right)_y \equiv z^*_y|_{[y'=F]} + z^*_{y'}|_{[y'=F]} F_y = 0.$$

Выражая из полученного соотношения $z^*_y|_{[y'=F]}$ и подставляя найденное значение в равенство (2.10), получим

$$\Phi|_{[y'=F]} F_y - D_x(\Phi)|_{[y'=F]} = 0, \tag{2.12}$$

так как $z^*_{y'}|_{[y'=F]} \neq 0$ (см. (2.10)), а следовательно, учитывая (2.11),

$$\Psi|_{[y'=F]}F_w + D_x(\Psi)|_{[y'=F]}F_{w'} = 0, \qquad (2.13)$$

Таким образом, для нахождения оператора, допускаемого уравнением (2.1), инварианты которого определяют искомую редукцию, мы должны расщепить определяющее уравнение (2.11) на систему двух уравнений (2.12), (2.13), как мы уже указывали в п.1.6.

Заметим также, что из соотношения (2.9) следует, что

$$D_x(\Psi)|_{[y'=F]} = \eta_2\Psi|_{[y'=F]},$$

при некотором отображении $\eta_2 = \eta_2(x, w, w')$. Предположим, что уравнение (2.1) можно разрешить относительно w или w'. Пусть для определенности уравнение (2.1) представимо в виде

$$w' = \bar{F}(x, y, w, y'). \qquad (2.14)$$

Тогда соотношение (2.10) можно рассматривать в силу условия (2.14):

$$\Phi|_{[w'=\bar{F}]}z^*_y + D_x(\Phi)|_{[w'=\bar{F}]}z^*_{y'} = 0,$$

Значит, координата Φ оператора (1.3) должна удовлетворять соотношению

$$D_x(\Phi)|_{[w'=\bar{F}]} = \eta_1\Phi|_{[w'=\bar{F}]},$$

при некотором отображении $\eta_1 = \eta_1(x, y, y')$ Таким образом, можно сформулировать утверждение

***Теорема* 10**. Для того чтобы обобщенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (2.1), допускающее формальный оператор (1.3) ($\Phi|_{[y'=F]} \neq 0$, $\Psi|_{[y'=F]} \neq 0$), было представимо через инварианты допускаемого оператора в виде системы (2.7), необходимо чтобы определяющее уравнение расщеплялось на систему двух уравнений

$$\begin{cases} \Phi|_{[y'=F]}F_y - D_x(\Phi)|_{[y'=F]} = 0, \\ \Psi|_{[y'=F]}F_w + D_x(\Psi)|_{[y'=F]}F_{w'} = 0, \end{cases} \qquad (2.15)$$

при этом координаты оператора удовлетворяют условиям

$$\left.\frac{D_x(\Phi)}{\Phi}\right|_{[y'=F]} = \eta_1, \quad \left.\frac{D_x(\Psi)}{\Psi}\right|_{[y'=F]} = \eta_2$$

при некоторых отображениях $\eta_1 = \eta_1(x, y, F)$, $\eta_2 = \eta_2(x, w, w')$ ■

Очевидно, что если уравнение (2.1) допускает формальный оператор

$$X_1 = \Phi_1 \partial_y + \Psi_1 \partial_w,$$

координаты которого удовлетворяют условиям теоремы 10, а определяющая система имеет вид (2.15), то уравнение допускает любой оператор вида

$$X_2 = \Phi_2 \partial_y + \Psi_2 \partial_w,$$

$\Phi_2\big|_{[y'=F]} \neq 0$, $\Psi_2\big|_{[y'=F]} \neq 0$, координаты которого связаны с координатами оператора X_1 соотношениями

$$\left.\frac{D_x(\Phi_1)}{\Phi_1}\right|_{y'=F} = \left.\frac{D_x(\Phi_2)}{\Phi_2}\right|_{y'=F} \equiv \eta_1(x, y, F),$$

и

$$\left.\frac{D_x(\Psi_1)}{\Psi_1}\right|_{y'=F} = \left.\frac{D_x(\Psi_2)}{\Psi_2}\right|_{y'=F} \equiv \eta_2(x, w, w').$$

Также очевидно, что любой инвариант оператора X_1, не являющийся инвариантом «смешанного» типа, является инвариантом оператора X_2 и наоборот, поэтому в нашем случае для исследования возможности представления уравнения (2.1) в виде системы (2.7), достаточно рассмотреть наиболее простой класс операторов – класс экспоненциальных нелокальных операторов

$$X = \exp\left(\int \eta_1\, dx\right) \partial_y + \exp\left(\int \eta_2\, dx\right) \partial_w, \tag{2.16}$$

где $\eta_1 = \eta_1(x, y, y')$ или $\eta_1 = \eta_1(x, y, F)$, $\eta_2 = \eta_2(x, w, w')$, определяющая система (2.15) для которого имеет вид

$$\begin{cases} (F_y - \eta_1)\,\big|_{[y'=F]} = 0, \\ (F_w + \eta_2 F_{w'})\,\big|_{[y'=F]} = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Так как неизвестная функция η_1 зависит от y', а зависимость отображения F_y от переменной w', как правило, известна, то, очевидно, что если из уравнения (2.1) можно выразить переменную w' (уравнение (2.14)), в первом уравнении системы (2.17) можно производить замену не $y^{(i)} \to D_x^{i-1}(F)$, а $w^{(i)} \to D_x^{i-1}(\bar{F})$ ($i \in \mathbb{N}$).

Пример 4. Рассмотрим уравнение (2.4), линейное по производным y' и w'. Считаем, что $f_1 \neq 0$. Будем искать формальный оператор (2.16), допускаемый этим уравнением при

$$\eta_1 = \eta_1(x, y, y'), \quad \eta_2 = \eta_2(x, w, w').$$

Определяющая система (2.17) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{y' - f_2}{f_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} - \eta_1 = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial w}w' + \dfrac{\partial f_2}{\partial w} + f_1\eta_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы мы сразу же можем выписать выражения для компонент η_1 и η_2 оператора (2.16)

$$\eta_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{y'}{f_1} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{f_2}{f_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\eta_2 = -\frac{1}{f_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial w}w' + \frac{\partial f_2}{\partial w}\right),$$

а учитывая, что

$$\frac{\partial\left(f_{1y}f_1{}^{-1}\right)}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial\left(f_{2y} - f_{1y}f_1{}^{-1}f_2\right)}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial\left(f_{1w}f_1{}^{-1}\right)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\left(f_{2w}f_1{}^{-1}\right)}{\partial y} = 0$$

($\eta_{1w} = 0$, $\eta_{1w'}$, $\eta_{2y} = 0$, $\eta_{2y'} = 0$), находим вид коэффициентов f_1, f_2 уравнения (2.4)

$$f_1 = \alpha_1\beta_1, \quad f_2 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2, \tag{2.18}$$

где $\alpha_i = \alpha_i(x, y)$, $\beta_i = \beta_i(x, w)$ $(i = 1, 2)$, $\alpha_1\beta_1 \neq 0$. При этих условиях уравнения для поиска инвариантов z^* и z примут вид

$$\frac{\partial z^*}{\partial y} + \left(\alpha_{1y}\alpha_1{}^{-1}y' - \alpha_{1y}\alpha_1{}^{-1}\alpha_2 + \alpha_{2y}\right)\frac{\partial z^*}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} - \beta_1{}^{-1}\left(\beta_{1y}w' + \beta_{2y}\right)\frac{\partial z}{\partial w'} = 0.$$

Поэтому в качестве инвариантов можно взять отображения

$$\begin{aligned} z^* &= \alpha_1^{-1}(y' - \alpha_2), \\ z &= \beta_1 w' - \beta_2. \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение

$$y' = \alpha_1\beta_1 w' + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2$$

можно привести к системе

$$\begin{cases} z^* &= \alpha_1^{-1}(y' - \alpha_2), \\ z &= \beta_1 w' - \beta_2, \\ z^* &= z. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Заметим, что в качестве инвариантов мы могли бы взять отображения $g_1(x, \alpha_1^{-1}(y' - \alpha_2))$ и $g_2(x, \beta_1 w' - \beta_2)$ при произвольных функциях g_1 и g_2, а тогда внешнее уравнение системы имело бы другой вид. Возможность варьировать вид инвариантов имеет большое значение при рассмотрении функционально-дифференциальных уравнений, когда необходимо, чтобы инварианты удовлетворяли некоторому наперед заданному свойству ■

Учитывая полученные в этой главе выводы, можно построить обобщенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (2.1), которое можно свести к двум существенно различным «системам», т.е. внешнее уравнение одной из систем будет обыкновенным дифференциальным уравнением, а внешнее уравнение второй системы – обобщенным дифференциальным уравнением нулевого порядка. Очевидно, что уравнения, обладающие этим свойством, принадлежат классу (2.4) обобщенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, линейных по производным y' и w'. Будем считать, что $f_1 \neq 0$. Объединим результат примера 4 и теоремы 9. Потребуем, чтобы коэффициенты (2.18) уравнения (2.4) удовлетворяли условию (2.9):

$$\frac{\alpha_1\alpha_{2y} - \alpha_{1y}\alpha_2 - \alpha_{1x}}{\alpha_1} = \frac{\beta_{1x} - \beta_{2w}}{\beta_1}.$$

Так как слева от знака равенства стоит выражение, зависящее только от переменных x, y, а справа – выражение, зависящее только от x, w, то очевидно, что каждое из этих выражений должно равняться некоторой функции γ_1, зависящей только от одной переменной $\gamma_1 = \gamma_1(x)$.

Поэтому мы можем найти выражение для α_2 и β_2:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 \int \frac{\alpha_{1x} + \gamma_1 \alpha_1}{{\alpha_1}^2}\, dy + \gamma_2 \alpha_1, \\ \beta_2 &= \int (\beta_{1x} - \gamma_1 \beta_1)\, dw + \gamma_3, \end{aligned}$$

где $\gamma_2 = \gamma_2(x)$, $\gamma_3 = \gamma_3(x)$, а интегралы – частные. Таким образом, уравнение

$$y' = \alpha_1 \beta_1 w' + \alpha_1 \left[\int (\beta_{1x} - \gamma_1 \beta_1)\, dw + \gamma_3 \right] + \alpha_1 \int \frac{\alpha_{1x} + \gamma_1 \alpha_1}{{\alpha_1}^2}\, dy + \gamma_2 \alpha_1$$

с одной стороны, сводится к системе (2.19)

$$\begin{cases} z^* = \alpha_1^{-1} \left[y' - \alpha_1 \int \frac{\alpha_{1x} + \gamma_1 \alpha_1}{{\alpha_1}^2}\, dy - \gamma_2 \alpha_1 \right], \\ z = \beta_1 w' - \int (\beta_{1x} - \gamma_1 \beta_1)\, dw - \gamma_3, \\ z^* = z, \end{cases}$$

а с другой стороны, с помощью инварианта оператора

$$X = \alpha_1 \beta_1 \partial_y + \partial_w$$

по теореме 9 оно факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = \int \frac{dy}{\alpha_1} - \int \beta_1\, dw, \\ z' = \gamma_1 z + \gamma_2 + \gamma_3, \end{cases}$$

(интегралы – частные).

Как правило, уравнение (2.1) можно свести к системе (2.7), не используя методы группового анализа. Для этого достаточно привести исходное уравнение к уравнению, левая часть которого содержит только переменные x, y, y', а правая – x, w, w'. Но заметим, что нахождение наиболее простого вида отображения z, с помощью которого представима правая часть полученного уравнения, может оказаться затруднительным. Поэтому задача поиска допускаемого оператора и его инвариантов остается актуальной. Покажем это на простом примере.

***Пример* 5**. Рассмотрим уравнение

$$y' - 2x^2y^3 - y^2 - \alpha y = (w')^2 - 2(w+x)(1+w^2)w' + \\ + (w^2+xw+1)(w^3+xw^2+w+2x)w, \quad (2.20)$$

$\alpha = \alpha(x)$, которое можно, обозначая правую и левую часть через z и z^*, привести к системе (2.7). Найдем экспоненциальный нелокальный оператор (2.16) при

$$\eta_1 = \eta_1(x, y, y'), \quad \eta_2 = \eta_2(x, w, w'),$$

допускаемый уравнением (2.20), определяющая система для которого представима в виде (2.15), т.е.

$$\begin{cases} 6x^2y^2 + 2y + \alpha - \eta_1 = 0, \\ 2xw + 3w^2 + 1 - \eta_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим координаты η_1 и η_2 допускаемого оператора. Тогда получаем, что уравнение (2.20) допускает оператор

$$X = \exp\left[\int (6x^2y^2 + 2y + \alpha)\,dx\right]\partial_y + \exp\left[\int (2xw + 3w^2 + 1)\,dx\right]\partial_w,$$

инвариантами которого являются отображения

$$\begin{aligned} z &= w' - (w^2 + xw + 1)w, \\ z^* &= y' - (2x^2y^2 + y + \alpha)y, \end{aligned}$$

с помощью которых уравнение (2.20) представимо в виде

$$z^* = z^2 - 2xz \blacksquare$$

2. Внутренние уравнения определяются отображениями, являющимися инвариантами «смешанного» типа. Заметим, что один из инвариантов, с помощью которых редуцируется исходное уравнение, может иметь нулевой порядок, поэтому внешнее уравнение может быть также обобщенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, но, как правило, с более простой структурой. В этом случае, так как нет никаких дополнительных условий на вид инвариантов, мы не можем уточнить алгоритм поиска инвариантов и построения системы, к которой редуцируется уравнение (2.1) (см. п.1.5 (теоремы 7,8)). Приведем лишь пример уравнения, которое можно свести к системе такого вида.

Пример 6. Рассмотрим класс уравнений

$$y' = g_1(w')^2 + g_2 w' + h, \tag{2.21}$$

где $g_1 = g_1(x) \not\equiv 0$, $g_2 = g_2(x)$, $h = h(x, y, w)$. Найдем точечные операторы (с ненулевыми координатами) вида

$$X = \eta_1 \partial_y + \eta_2 \partial_w,$$

где $\eta_1 = \eta_1(x, y)$, $\eta_2 = \eta_2(x, w)$, допускаемые уравнениями класса (2.21). Для этого достаточно построить определяющее уравнение

$$g_1 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - 2\frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) (w')^2 + \left[g_2 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial w} \right) - 2g_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right] w' - \\ - \eta_1 \frac{\partial h}{\partial y} - \eta_2 \frac{\partial h}{\partial w} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} h + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - g_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0,$$

расщепляя которое по независимым переменным, получаем условия на коэффициенты класса уравнений (2.21) и координаты допускаемого оператора. Результат можно сформулировать в виде двух случаев:

1) если уравнение имеет вид

$$y' = g_1(w')^2 + g_2 w' + \frac{\alpha'}{\alpha} y + H(x, Cy - \alpha w), \tag{2.22}$$

то оно допускает оператор

$$X = \alpha \partial_y + C \partial_w,$$

$\alpha \not\equiv 0$;

2) если уравнение имеет вид

$$y' = g_1(w')^2 - 2\frac{\beta' g_1}{C} w' + \frac{2(\beta')^2 g_1 - C\alpha'}{2C^2} - \\ - (2Cy + \alpha) H \left(x, \frac{Cw + \beta}{C\sqrt{-2Cy - \alpha}} \right), \tag{2.23}$$

то оно допускает оператор

$$X = (2Cy + \alpha)\partial_y + (Cw + \beta)\partial_w,$$

где $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, H – произвольная функция. Каждый из допускаемых операторов имеет один универсальный инвариант и один дифференциальный инвариант, зависящий только от переменных x, w, w', которые позволяют свести уравнение (2.22) к системе

$$\begin{cases} z_1 &= Cy - w\alpha, \\ z_2 &= w', \\ {z_1}' &= \dfrac{\alpha'}{\alpha} z_1 + (Cg_1 z_2 - \alpha + Cg_2) z_2 + CH(x, z_1). \end{cases}$$

а уравнение (2.23) представить в виде

$$\begin{cases} z_1 &= \dfrac{Cw + \beta}{C\sqrt{-2Cy - \alpha}}, \\ z_2 &= \dfrac{Cw' + \beta'}{C(Cw + \beta)}, \\ {z_1}' &= Cz_1 \left[C^2 g_1 z_1^2 z_2^2 + z_2 + H(x, z_1)\right] \blacksquare \end{cases}$$

Факторизация обобщенного дифференциального уравнения до системы, внешнее уравнение которой является обыкновенным дифференциальным уравнением, может существенно упростить исходное уравнение, если мы можем решить внешнее уравнение. Может показаться, что сведение обобщенного дифференциального уравнения 1-го порядка к обобщенному дифференциальному уравнению не позволит упростить исходное уравнение, так как внешнее уравнение является недоопределенным. Но если зависимые переменные во внешнем уравнении имеют дополнительную связь (например, если исходное уравнение является функционально-дифференциальным, а новые переменные связаны тем же соотношением, что и зависимые переменные в исходном уравнении), то свойство недоопределенности внешнего уравнения исчезает.

2.4 Факторизация функционально-дифференциальных уравнений 1-го порядка

Как мы отмечали во введении, функционально-дифференциальные уравнения можно рассматривать как обобщенные дифференциальные уравнения, искомые функции в которых связаны некоторым функциональным (функционально-дифференциальным) соотношением.

В предыдущих двух параграфах были рассмотрены два основных типа систем, к которым можно редуцировать обобщенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, а именно: факторсистема, внешнее уравнение которой является обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, и факторсистема, внешнее уравнение которой принадлежит к классу обобщенных дифференциальных уравнений нулевого или первого порядка.

В первом случае наличие дополнительной связи между искомыми функциями не влияет на вид факторсистемы и, решив внешнее уравнение, мы сведем исходное уравнение к функциональному уравнению [8, 14, 18, 28, 29].

Пример 7. Полагая в примере 2

$$G = \frac{\alpha(\alpha y + \beta w + \gamma) + \beta}{\alpha^2} e^{-\alpha w},$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} y' = (\alpha y + \beta w + \gamma) w' + \frac{\alpha'}{\alpha}(\alpha y + \beta w) w + \\ + \frac{\alpha'(2\beta + \alpha\gamma) + \alpha(\beta - \beta')}{\alpha^2} w + y + \\ + \frac{\alpha'(2\beta + \alpha\gamma) + \alpha^2(\gamma - \gamma') + \alpha(\beta - \beta')}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

которое факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = \dfrac{\alpha(\alpha y + \beta w + \gamma) + \beta}{\alpha^2} e^{-\alpha w}, \\ z' = z. \end{cases}$$

Таким образом, решая внешнее уравнение факторсистемы, понижаем порядок исходного уравнения

$$y=-\frac{\alpha\beta w+\beta+\alpha\gamma}{\alpha^2}+Ce^{\alpha w+x}, \tag{2.24}$$

где $C\in\mathbb{R}$. Функции y и w могут иметь дополнительную функциональную связь, в частности, $w(x)=y(x-\tau)$, где $\tau\in\mathbb{R}$, $\tau>0$, а тогда, например, для решения уравнения (2.24) мы можем применить метод шагов ■

Наличие дополнительной связи между искомыми функциями в случае, если внешнее уравнение факторсистемы является обобщенным дифференциальным уравнением, может также существенно упростить систему, к которой редуцируется исходное уравнение, а именно: мы можем потребовать, чтобы внешнее уравнение, как и исходное, было функциональным или функционально-дифференциальным уравнением. Для этого достаточно, чтобы в системе (2.7) отображения z^* и z наследовали функциональное (функционально-дифференциальное) соотношение существующее между y и w.

Пример 8. Как мы показали в примере 4, уравнение

$$y'=\alpha_1\beta_1w'+\alpha_1\beta_2+\alpha_2$$

редуцируется к системе

$$\begin{cases} z^* &= \alpha_1^{-1}(y'-\alpha_2),\\ z &= \beta_1w'-\beta_2,\\ z^* &= z.\end{cases}$$

Предположим, что $w(x)=y\left(h(x)\right)$. Если $z(x)=z^*\left(h(x)\right)$, т.е.

$$\beta_1(x)=\frac{1}{\alpha_1\left(h(x)\right)h'(x)},\quad \beta_2(x)=\frac{\alpha_2\left(h(x)\right)}{\alpha_1(h(x))},$$

то исходное уравнение можно представить в виде системы

$$\begin{cases} z^*(x) &= \left[\alpha_1(x)\right]^{-1}\left(y'-\alpha_2(x)\right),\\ z^*(x) &= z^*\left(h(x)\right),\end{cases}$$

внешнее уравнение которой является функциональным уравнением. В общем случае между отображениями z^* и z имеется соотношение

$$z(x)=Az^*(h(x))+B,$$

где

$$A = \alpha_1(h(x))\beta_1(x)h'(x), \quad B = \alpha_2(h(x))\beta_1(x)h'(x) - \beta_2(x),$$

а тогда исходное уравнение представимо в виде системы

$$\begin{cases} z^*(x) = [\alpha_1(x)]^{-1}\left(y' - \alpha_2(x)\right), \\ z^*(x) = Az^*\left(h(x)\right) + B \blacksquare \end{cases}$$

Таким образом, в отличие от факторсистемы в случае, когда внешнее уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением, и функциональная зависимость между искомыми функциями не влияет на способ его решения, наличие той или иной функциональной связи и ее вид в случае, когда внешнее уравнение является обобщенным дифференциальным, могут оказаться существенными.

В заключение этой главы приведем пример уравнения, к которому не применим метод Шарковского, основанный на дискретных симметриях множества аргументов $[40, 49, 50]$, содержание которого кратко приведено во введении.

Пример 9. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$y'(x) + y'(-x) + f(x)y(x) + f(-x)y(-x) + h(x) = 0, \qquad (2.25)$$

которое при четной функции $h(x)$ инвариантно относительно замены $x \to -x$. Аргументы $(x, -x)$ образуют конечную дискретную группу $\mathfrak{C}_2$. Однако метод Шарковского в данном случае не применим, так как он эффективен, только если исходное уравнение не инвариантно относительно замены $x \to -x$.

Заметим, что обобщенное дифференциальное уравнение

$$y' - w' + f(x)y + g(x)w + h(x) = 0, \qquad (2.26)$$

$g(x) = f(-x)$, соответствующее уравнению (2.25), допускает формальный оператор

$$X = \exp\left(-\int f(x)\,dx\right)\partial_y + \exp\left(\int g(x)\,dx\right)\partial_w,$$

имеющий инварианты

$$\begin{aligned} z &= -w' + g(x)w, \\ z^* &= y' + f(x)y, \end{aligned}$$

которые в силу уравнения (2.26) связаны соотношением

$$z + z^* + h(x) = 0.$$

Учитывая, что $g(x) = f(-x)$, получаем, что уравнение (2.26) редуцируется к системе

$$\begin{cases} z^* = y'(x) + f(x)y(x). \\ z^*(x) + z^*(-x) + h(x) = 0 \blacksquare \end{cases}$$

Этот простой пример показывает, что групповой метод поиска симметрий для представления уравнения в виде системы в ряде случае оказывается более общим, так как соотношение, которым связаны зависимые переменные, учитывается не сразу, а только после того, как найдены инварианты допускаемого оператора.

Глава 3. Обобщенные дифференциальные уравнения 2-го порядка

3.1 Общие замечания

В этой главе мы рассмотрим приложения групповых методов поиска симметрий к классу обобщенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$y'' = F(x, y, w, y', w', w''). \tag{3.1}$$

Повышение порядка уравнения, с одной стороны, приводит к усложнению определяющего уравнения, которое теперь имеет вид

$$\Phi|_{[y''=F]}\frac{\partial F}{\partial y} + \Psi|_{[y''=F]}\frac{\partial F}{\partial w} + D_x(\Phi)|_{[y''=F]}\frac{\partial F}{\partial y'} + D_x(\Psi)|_{[y''=F]}\frac{\partial F}{\partial w'} + \\ + D_x^2(\Psi)|_{[y''=F]}\frac{\partial F}{\partial w''} - D_x^2(\Phi)|_{[y''=F]} = 0. \tag{3.2}$$

С другой стороны, в ряде случаев задача поиска допускаемого оператора решается проще, так как исходное уравнение (3.1) содержит по сравнению с уравнением 1-го порядка на две независимые переменные больше, а следовательно, при расщеплении определяющего уравнения до системы при сохранении двух неизвестных отображений – координат формального оператора – число уравнений будет больше.

Заметим, что для обобщенных дифференциальных уравнений 2-го порядка увеличивается также и число типов систем, к которым можно редуцировать исходное уравнение методами группового анализа, так как внешнее уравнение системы может быть либо обобщенным дифференциальным уравнением нулевого или 1-го порядка, либо обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го или 2-го порядка. Далее мы подробнее рассмотрим каждый тип факторизации и найдем необходимые условия ее существования [36, 37].

3.2 Факторизация до обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

Сначала перечислим необходимые условия факторизации обобщенного дифференциального уравнения 2-го порядка до обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, следующие из результатов, полученных во 1-ой главе.

1. Формальный оператор, допускаемый уравнением, должен обладать инвариантом $z = z(x, y, w)$ нулевого порядка, причем $z_y \neq 0$, $z_w \neq 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы координаты допускаемого оператора (1.3) были отличны от нуля в силу исходного уравнения, а их отношение в силу уравнения (3.1)

   $$\frac{\Phi}{\Psi}\bigg|_{[y''=f_1 w''+f_2]} = \eta$$

   было достаточно гладкой функцией, отличной от тождественного нуля, зависящей только от переменных x, y, w, т.е. $\eta = \eta(x, y, w)$. Тогда инвариант z удовлетворяет уравнению

   $$\eta \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} = 0. \tag{3.3}$$

2. Согласно замечанию 1 к теореме 7, правая часть уравнения (3.1) должна быть линейной функцией по переменной w''. Поэтому мы будем рассматривать класс уравнений

   $$y'' = f_1 w'' + f_2, \quad \text{где } f_i = f_i(x, y, w, y', w'),\ i = 1, 2. \tag{3.4}$$

3. По теоремам о факторизации 6 и 7 необходимо, чтобы отображение

   $$D_x^2(z)\big|_{[y''=f_1 w''+f_2]}$$

   являлось инвариантом нулевого или первого порядка, а следовательно, оно не зависит от переменной w''. Повторяя рассуждения замечания 1 к теореме 7, получаем зависимость

   $$f_1 = -\frac{\partial z/\partial w}{\partial z/\partial y},$$

которая вместе с соотношением (3.3) дает связь между координатами допускаемого оператора (1.3) и компонентой уравнения (3.4)

$$\Phi|_{[y''=f_1w''+f_2]} = f_1\Psi|_{[y''=f_1w''+f_2]}, \tag{3.5}$$

где $f_1 = f_1(x, y, w)$. Поэтому базис универсальных инвариантов, определяемый как интегральный базис уравнения (3.3), в котором $\eta = f_1$, не зависит от структуры отображения Ψ.

Таким образом, на основе проведенных рассуждений, а также теорем о факторизации 6-8, можно сформулировать необходимый и достаточный признак существования искомой факторизации.

***Теорема* 11**. Обобщенное дифференциальное уравнение 2-го порядка (3.1) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = H(x, y, w), \\ z'' = G(x, z, z'), \end{cases} \tag{3.7}$$

если и только если уравнение (3.1) имеет вид

$$y'' = f_1w'' + f_2, \tag{3.8}$$

где $f_1 = f_1(x, y, w)$, $f_1 \not\equiv 0$, $f_2 = f_2(x, y, w, y', w')$, а отображение $z = H(x, y, w)$ $(z_y \neq 0,\ z_w \neq 0)$ являющееся решением линейного однородного уравнения с частными производными 1-го порядка

$$f_1\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} = 0, \tag{3.9}$$

и его производные $z' = D_x(z)$, $z'' = D_x^2(z)$ связаны соотношением

$$z''|_{[y''=f_1w''+f_2]} = G(x, z, z') \quad \blacksquare \tag{3.10}$$

Таким образом, для выяснения существования искомой факторизации и построения факторсистемы нет необходимости искать оператор, допускаемый уравнением. Но в ряде случаев необходимо знать, какие операторы соответствуют симметриям, позволяющим факторизовать уравнение. Чтобы найти операторы, инварианты которых позволяют свести обобщенное дифференциальное уравнение 2-го порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка, преобразуем определяющее уравнение (3.2) с помощью условия (3.5), учитывая структуру уравнения (3.8).

Предварительно заметим, что необходимым условием представления уравнения (3.8) в виде факторсистемы (3.7) является выполнение соотношения

$$f_1\frac{\partial f_2}{\partial y'}+\frac{\partial f_2}{\partial w'}-2\frac{\partial f_1}{\partial y}y'-2\frac{\partial f_1}{\partial w}w'-2\frac{\partial f_1}{\partial x}=0, \tag{3.11}$$

из которого можно выразить отображение f_2

$$f_2=\left[2f_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\left(f_1\frac{\partial f_1}{\partial y}-2\frac{\partial f_1}{\partial w}\right)y'+2f_1\frac{\partial f_1}{\partial w}w'\right]\frac{y'}{f_1^2}+$$
$$+R(x,y,w,y'-f_1w').$$

где R – произвольная, достаточно гладкая функция. Этот факт легко проверить, если представить внешнее уравнение факторсистемы, подставив $z=H(x,y,w)$, в виде

$$y''=F_1w''+F_2,$$

где

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{\partial H}{\partial w}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^{-1},\\
F_2 &= -\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}y'+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial w}w'+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial w}y'w'+\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}(w')^2-G\left(x,H,\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}y'+\frac{\partial H}{\partial w}w'\right)\right]\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $f_1=F_1$, $f_2=F_2$. Тогда непосредственной подстановкой в соотношение (3.11) мы можем убедиться в его справедливости.

Тогда определяющее уравнение, с помощью соотношения (3.11), примет вид

$$\left\{-f_1\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial w}-\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}y'+\frac{\partial f_1}{\partial w}w'\right)\frac{\partial f_2}{\partial y'}+\right.$$
$$+\frac{\partial f_1}{\partial y}f_2+\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(y')^2+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial w}y'w'+\frac{\partial^2 f_1}{\partial w^2}(w')^2+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}y'+$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial w}w'+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right\}\Psi|_{[y''=f_1w''+f_2]}=0.$$

Так как по предположению $\Psi|_{[y''=f_1w''+f_2]} \neq 0$, то выражение в фигурных скобках, по определению допускаемого оператора, обращается в ноль. Следовательно, если уравнение (3.8) представимо в виде системы (3.7), то класс операторов, соответствующий данной симметрии, состоит из операторов вида

$$X = \Psi(f_1\partial_y + \partial_w),$$

где отображение $\Psi\colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ ($k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), является произвольным (отличным от нулевого в силу исходного уравнения) отображением. В частности, оно может быть тождественным отображением, а тогда оператор будет точечным и иметь вид

$$X = f_1\partial_y + \partial_w.$$

В заключение этого пункта приведем несколько примеров.

***Пример* 10**. Рассмотрим обобщенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = ww'' + [1 + f(x)w^2](w')^2 - f(x)(y' - 2ww')y', \quad f(x) \not\equiv 0.$$

Отображение $z = 2y - w^2$ является частным решением уравнения (3.9) при $f_1 = w$. Легко убедиться, что условие (3.10) выполнено, поэтому уравнение представимо в виде факторсистемы

$$\begin{cases} z = 2y - w^2, \\ z'' = \dfrac{1}{2}f(x)(z')^2, \end{cases}$$

Общим решением внешнего уравнения будет

$$z = -2\int \frac{dx}{\int f(x)\,dx - C_1} + C_2,$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Поэтому мы можем понизить порядок исходного уравнения, записав его в виде обобщенного дифференциального уравнения нулевого порядка

$$y = \frac{1}{2}w^2 - \int \frac{dx}{\int f(x)\,dx - C_1} + C_2.$$

Заметим, что класс оператор, соответствующий данной симметрии состоит из операторов вида

$$X = \Psi(w\partial_y + \partial_w),$$

где $\Psi\colon \mathbf{Z}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ ($k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) является произвольным ненулевым (в силу исходного уравнения) отображением ■

***Пример* 11**. Исследуем симметрии обобщенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' = Cyw'' + C^2y(w')^2 - 2Cy'w' + \frac{2}{y}(y')^2 - \\ - A(x)y' + CA(x)yw' + B(x)y, \quad (3.12)$$

$C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Это уравнение допускает точечный оператор

$$X = Cy\partial_y + \partial_w,$$

обладающий инвариантом $z = e^{Cw}y^{-1}$. Легко проверить, что в силу исходного уравнения (3.12) выполнено соотношение

$$z'' + A(x)z' + B(x)z = 0,$$

поэтому уравнение (3.12) представимо в виде факторсистемы

$$\begin{cases} z = e^{Cw}y^{-1}, \\ z'' + A(x)z' + B(x)z = 0 \quad ■ \end{cases}$$

Далее мы рассмотрим случай факторизации до обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка.

3.3 Факторизация до обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

Обобщенные дифференциальные уравнения 2-го порядка, в отличии от обобщенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, обладают бо́льшим разнообразием симметрий, поэтому редукция этих уравнений до обыкновенных дифференциальных уравнений не исчерпывается факторизацией, рассмотренной в предыдущем пункте 3.2. Внешнее уравнение факторсистемы может оказаться обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, а внутреннее уравнение тогда должно задавать дифференциальный инвариант 1-го порядка оператора, допускаемого исходным уравнением, т.е. факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} z = H(x, y, w, y', w'), \\ z' = G(x, z). \end{cases} \tag{3.13}$$

Сначала сделаем несколько общих замечаний, касающихся этого типа факторизации, следующих как из общих результатов 1-ой главы, так и из специфических особенностей рассматриваемого класса уравнений (3.1).

1. Формальный оператор (1.3), допускаемый уравнением (3.1), должен обладать дифференциальным инвариантом 1-го порядка

$$z = z(x, y, w, y', w'),$$

являющийся решением уравнения

$$\Phi|_{[y''=F]}\frac{\partial z}{\partial y}+\Psi|_{[y''=F]}\frac{\partial z}{\partial w}+D(\Phi)|_{[y''=F]}\frac{\partial z}{\partial y'}+D(\Psi)|_{[y''=F]}\frac{\partial z}{\partial w'} = 0, \tag{3.14}$$

где Φ и Ψ координаты допускаемого оператора, при этом $z_{y'} \neq 0$ и $|z_w| + |z_{w'}| \neq 0$.

2. Согласно замечанию 1 к теореме 7, правая часть уравнения (3.1) должна быть линейной функцией по переменной w''. Поэтому мы будем рассматривать класс уравнений

$$y'' = f_1 w'' + f_2, \quad \text{где } f_i = f_i(x, y, w, y', w'),\ i = 1, 2. \tag{3.15}$$

3. По теоремам о факторизации 6 и 7 необходимо, чтобы отображение

$$D_x(z)|_{[y''=f_1w''+f_2]}$$

являлось инвариантом не выше первого порядка, а следовательно, оно не зависит от переменной w''. Аналогично рассуждениям в замечании 2 к теореме 7, получаем соотношение

$$f_1 \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\partial z}{\partial w'} = 0. \tag{3.16}$$

Но выполнения этого свойства не достаточно для существования искомой факторизации, так как оно не гарантирует, что внешнее уравнение факторсистемы будет обыкновенным дифференциальным уравнением. Достаточным условием является существование некоторого достаточно гладкого отображения G, такого что

$$D_x(z)|_{[y''=f_1 w''+f_2]} = G(x, z). \tag{3.17}$$

Последнее соотношение всегда имеет место, если порядок младших инвариантов допускаемого оператора больше нуля.

Следует отметить, что в общем случае задача поиска допускаемого оператора, обладающего инвариантом, для которого выполнены свойства (3.16) и (3.17), не поддается решению, поэтому необходимо сузить класс операторов. Как в предыдущих случаях, мы не можем указать, рассмотрения какого типа операторов достаточно, для выяснения существования факторизации вида (3.13) (так, например, для построения факторсистемы (3.7) достаточно исследовать точечные симметрии исходного уравнения). В данном случае приходится отдельно решать эту задачу для различных (наиболее перспективных) классов операторов – например, точечных, экспоненциальных нелокальных. При этом мы не можем гарантировать нахождение всех симметрий, которыми обладает исходное уравнение. После того, как задан класс операторов, удобно использовать следующий алгоритм:

1. Составить определяющее уравнение (3.2). Расщепляя его по независимым переменным и решая получающиеся дифференциальные уравнения, находим структуру допускаемого оператора.

2. Находим общее решение уравнения (3.14), которому удовлетворяют инварианты допускаемого оператора. При этом необходимо выполнение условия (3.16).

3. Составляем соотношение (3.17) для произвольного отображения G и инварианта z, общий вид которого найден на предыдущем этапе. Вводя интегральный базис решения, построенного в предыдущем пункте, в качестве новых переменных, находим структуру инварианта и отображения G.

***Замечание* 1**. Если на каком-то из этапов мы получаем, что уравнение не допускает операторов данного класса (кроме нулевого), или инварианта, удовлетворяющего перечисленным условиям не существует, а следовательно, этот класс операторов оказался не эффективным для построения искомой факторизации, можно попытаться проделать те же рассуждения относительно другого класса операторов.

***Замечание* 2**. Если можно доказать, что порядок младшего инварианта допускаемого оператора больше нуля, и для него выполнено условие (3.16), то соотношение (3.17) выполнено всегда (при некотором отображении G), и искомую факторсистему можно построить, заменив в исходном уравнении переменные

$$y \longrightarrow z, \quad y' \longrightarrow D_x(z).$$

Реализацию этого алгоритма покажем на примере.

***Пример* 12**. Исследуем точечные симметрии, соответствующие операторам вида

$$X = \eta_1(x,y,w)\partial_y + \eta_2(x,y,w)\partial_w,$$

обобщенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' = (\alpha y' + \beta y)w' + \gamma y' + \delta y, \tag{3.18}$$

где коэффициенты $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$, $\delta = \delta(x)$ отличны от тождественного нуля. Следуя алгоритму поиска допускаемого оператора, идея которого, как уже отмечалось, заключается в расщеплении определяющего уравнения по степеням независимых переменных и решении получающихся дифференциальных уравнений, находим структуру допускаемого оператора

$$X = \left[C_1 y + C_2 \exp\left(-\int \frac{\beta}{\alpha}\,dx\right)\right]\partial_y + C_3\partial_w,$$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, а также необходимое условие для коэффициентов уравнения (3.18)

$$\delta = \frac{\beta(\alpha' - \beta' + \alpha\gamma + \beta)}{\alpha^2}.$$

Далее будем считать, что $|C_1| + |C_2| \neq 0$ и $C_3 \neq 0$. Тогда можно положить $C_3 = 1$, а в качестве базиса инвариантов порядка не выше первого можно взять отображения

$$x, u_0, u_1 = D_x(u), w',$$

где

$$u_0 = \begin{cases} w - \dfrac{1}{C_1} \ln \left[C_1 y \exp\left(\displaystyle\int \frac{\beta}{\alpha}\, dx \right) + C_2 \right], & \text{при } C_1 \neq 0 \\ C_2 w - y \exp\left(\displaystyle\int \frac{\beta}{\alpha}\, dx \right), & \text{при } C_1 = 0. \end{cases}$$

Из условия (3.16) следует, так как $f_1 = 0$, то инвариант

$$z = Z(x, u_0, u_1, w')$$

не зависит от w', т.е.

$$\frac{\partial u_1}{\partial w'} \frac{\partial z}{\partial u_1} + \frac{\partial z}{\partial w'} = 0,$$

или, если подставить выражение для $\partial u_1 / \partial w'$,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial u_1} + \frac{\partial z}{\partial w'} = 0, && \text{при } C_1 \neq 0 \\ &C_2 \frac{\partial z}{\partial u_1} + \frac{\partial z}{\partial w'} = 0, && \text{при } C_1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, после реализации первых двух пунктов описанного алгоритма получаем структуру инварианта z

$$z = Z(x, u_0, v),$$

где

$$v = \begin{cases} u_1 - w', & \text{при } C_1 \neq 0, \\ u_1 - C_2 w', & \text{при } C_1 = 0. \end{cases}$$

Сначала закончим рассуждения для случая $C_1 \neq 0$. Если составить соотношение (3.17) и ввести новые переменные

$$y \longrightarrow u_0, \quad y' \longrightarrow v,$$

то получим уравнение

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial x}\alpha + \alpha v\frac{\partial Z}{\partial u_0} + v(C_1\alpha v + \alpha\gamma + 2\beta)\frac{\partial Z}{\partial v}\right]\frac{1}{\alpha} + \\ + \left(\alpha v\frac{\partial Z}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u_0}\right)w' = G(x, Z(x, u_0, v)). \quad (3.19)$$

В этом уравнении осталась «лишняя» переменная w', поэтому коэффициент при ней должен быть равен нулю. Следовательно, инвариант z должен иметь структуру

$$z = Z(x,t), \quad t = ve^{-\alpha u_0},$$

а уравнение (3.18) примет вид

$$\frac{\partial Z}{\partial x}\alpha + \frac{1}{\alpha}t\left[te^{\alpha u_0}\alpha(C_1 - \alpha) + 2\beta + \alpha\gamma\right]\frac{\partial Z}{\partial t} = G(x, Z).$$

Поэтому $\alpha = C_1$, а следовательно, упростив последнее уравнение, получим

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{1}{C_1}t(2\beta + C_1\gamma)\frac{\partial Z}{\partial t} = G(x, Z),$$

где

$$t = -\frac{1}{C_1}(C_1 y' + \beta y)e^{-C_1 w}\exp\left(\frac{1}{C_1}\int \beta\, dx\right),$$

или

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = G(x, Z), \quad Z = Z(x, r), \quad (3.20)$$

где

$$r = -\frac{1}{C_1}\exp\left[C_1 w - \frac{1}{C_1}\int(\beta + C_1\gamma)\, dx\right](C_1 y' + \beta y).$$

Уравнение (3.20) является недоопределенным, так как содержит две неизвестные функции G и Z. Задавая структуру отображения G, мы можем построить соответствующий инвариант $z = Z(x, r)$. В частности, полагая $G \equiv 0$, получаем факторсистему

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{C_1}\exp\left[C_1 w - \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int(\beta + C_1\gamma)\, dx\right](C_1 y' + \beta y), \\ z' = 0, \end{cases}$$

внутреннее уравнение которой задает первый интеграл уравнения

$$y'' = (\alpha y' + \beta y)w' + \gamma y' + \frac{\beta(\beta - \beta' + C_1\gamma)}{C_1^2}y. \quad (3.21)$$

Если $G = AZ + B$ $(A, B \in \mathbb{R},\ A \neq 0)$, то решая уравнение (3.20), относительно Z, находим инвариант, с помощью которого уравнение (3.21) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = -\dfrac{B}{A} + \dfrac{1}{C_1}\exp\left[C_1 w - Ax - \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int(\beta + C_1\gamma)\,dx\right](C_1 y' + \beta y), \\ z' = Az + B. \end{cases}$$

Возвращаясь к случаю $C_1 = 0$ и проводя аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что $\alpha \equiv 0$. Это противоречит структуре рассматриваемого класса уравнений (3.18) ■

Заметим, что в процессе построения факторсистемы (для обобщенных дифференциальных уравнений произвольного порядка) инварианты, которые задают внутренние уравнения системы, могут определяться неоднозначно, поэтому внешнее уравнение может иметь произвольную структуру. Алгоритм построения факторсистемы, показанный в примере 12, можно использовать, чтобы редуцировать исходное уравнение к уравнению с заранее заданной структурой. Например, найти первый интеграл исходного уравнения.

3.4 Редукция до обобщенного дифференциального уравнения

Аналогично тому, как это сделано во 2-ой главе, можно рассмотреть случай редукции обобщенного дифференциального уравнения 2-го порядка (3.1) до обобщенного дифференциального уравнения. Но в отличие от обобщенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, внешнее уравнение системы может иметь порядок от нуля до двух.

Если отсутствуют ограничения на структуру инвариантов при рассмотрении формальных операторов в их общем виде (1.3), мы не можем указать дополнительные условия существования системы, к которой редуцируется уравнение (3.1), кроме тех, что приведены в формулировке теорем о факторизации 6 и 7. Поэтому мы можем воспользоваться общим алгоритмом, заключающимся в поиске допускаемого оператора (как правило, из некоторого класса операторов), поиске его инвариантов и исследовании возможности представления уравнения через инварианты допускаемого оператора. Ранее были приведены примеры уравнений, симметрии которых определялись либо точечными операторами, либо экспоненциальными нелокальными операторами. В некоторых случаях рассмотрения этих классов операторов было достаточно для построения искомого типа редукции. Следующее уравнение было факторизовано с помощью оператора, нелокальная переменная в котором содержится как множитель, а не под знаком экспоненты.

***Пример* 13**. Исследуем симметрии обобщенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$yy'' + w'' + (y')^2 + (w')^2 + (yy' + w)w' = 0,$$

соответствующие операторам вида

$$X = \zeta \int \left[\xi_2 (y')^2 + \xi_1 y' + \xi_0\right] dx \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial w},$$

где $\eta = \eta(x, y, w)$, $\zeta = \zeta(x, y, w)$, $\xi_j = \xi_j(x, y, w, w')$ $(j = 1, 2, 3)$. Построив определяющую систему (3.2) и считая

$$\int \left[\xi_2 (y')^2 + \xi_1 y' + \xi_0\right] dx$$

независимой переменной, находим

$$\begin{aligned}
\zeta &= y^{-1},\\
\xi_2 &= C_1 y^2 e^w,\\
\xi_1 &= -\eta_y - y\eta + 2C_1 y e^w (w' + w - 1),\\
\xi_0 &= -(\eta_w + \eta)w' - \eta w - \eta_x + C_1 e^w (w' + w - 1)^2 + C_2 e^{-w},
\end{aligned}$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Тогда инвариант z допускаемого оператора, порядок которого не выше единицы, должен удовлетворять системе

$$\begin{cases}
\zeta \dfrac{\partial z}{\partial y} + D_x(\zeta) \dfrac{\partial z}{\partial y'} = 0,\\
\eta \dfrac{\partial z}{\partial w} + \zeta \left[\xi_2 (y')^2 + \xi_1 y' + \xi_0\right] \dfrac{\partial z}{\partial y'} + D_x(\eta) \dfrac{\partial z}{\partial w'} = 0.
\end{cases}$$

полученной расщеплением условия инвариантности (1.8) по нелокальной переменной. На следующем этапе мы должны воспользоваться методом Якоби [25] и дополнить полученную систему с помощью скобок Пуассона уравнениями до замкнутой нормальной системы. В результате этой процедуры получаем дополнительные условия на координаты допускаемого оператора

$$\eta_y = 0,$$

если считать, что ни одна из координат оператора не является нулевой. При этом оказывается, что исходная системы была якобиевой, и так как она содержит два уравнения, ее интегральный базис имеет размерность равную трем, следовательно, допускаемый оператор имеет два младших инварианта z_1 и z_2, порядок которых не выше единицы (третий инвариант – универсальный инвариант x). Значит, каждый оператор построенного класса операторов соответствует некоторой симметрии, позволяющей факторизовать искомое уравнение (замечание 2 к теореме 7). Например, положим

$$\eta = e^{-w}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -1,$$

т.е. оператор примет вид

$$X = e^{-w}\frac{\partial}{\partial w} - y^{-1}\int e^{-w}(yy' + w + 1)dx\frac{\partial}{\partial y}.$$

Далее находим инварианты допускаемого оператора, и получаем, что исходное уравнение факторизуется до системы

$$\begin{cases} z_1 = e^w w', \\ z_2 = (yy' + w)e^w, \\ z_1' + z_2' - z_1 = 0. \end{cases}$$

Если

$$\eta = 1, \quad C_1 = 0,$$

то оператор преобразуется к виду

$$X = \frac{\partial}{\partial w} - y^{-1}\int \left(yy' + w' + w - C_2 e^{-w}\right) dx\frac{\partial}{\partial y},$$

а факторсистема, после вычисления инвариантов будет иметь структуру

$$\begin{cases} z_1 = w', \\ z_2 = e^w(yy' + w' + w - 1) - C_2 w, \\ z_2' + C_2 z_1 = 0. \end{cases}$$

Однократным интегрированием последнего уравнения факторсистемы мы находим первый интеграл исходного уравнения

$$e^w(yy' + w' + w - 1) = C,$$

где $C \in \mathbb{R}$ ■

Стоит еще раз отметить, что мы не всегда можем искать оператор в самом общем его виде (1.4), поэтому приходится рассматривать некоторый подкласс операторов. Но при этом не стоит ограничиваться классом точечных или экспоненциальных нелокальных операторов. В предыдущем примере был найден оператор, одна из координат которого линейна по нелокальной переменной. В следующем примере допускаемый оператор имеет более сложную структуру.

***Пример* 14**. Обобщенное дифференциальное уравнение

$$y'' + y'(aw + b + 1) + (ay - 1)w' + b(y - w) = 0,$$

$a, b \in \mathbb{R}$, допускает нелокальный оператор

$$X = (\Psi - e^{-bx})\partial_y + \Psi\partial_w,$$

где

$$\Psi = e^{-bx} \exp\left[-a\int(y+w)dx\right]\int aw\exp\left[a\int(y+w)dx\right]dx,$$

обладающий двумя младшими инвариантами 1-го порядка

$$\begin{aligned} u &= y' + ayw + by, \\ v &= w' + ayw + bw. \end{aligned}$$

Согласно теореме 7, исходное уравнение можно представить в виде факторсистемы, которая может быть записана в виде

$$\begin{cases} u = y' + ayw + by, \\ v = w' + ayw + bw, \\ u' + u = v, \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к обобщенному дифференциальному уравнению 1-го порядка. ■

Одним из практически значимых случаев является редукция до системы, внутренние уравнения которой определяются отображениями, не являющимися инвариантами «смешанного» типа (см. п.1.6), т.е система имеет вид

$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, w, w', w''\right), \\ z_2 = H_2\left(x, y, y'\right), \\ {z_2}' = G\left(x, z_1, {z_1}', z_2\right), \end{cases} \tag{3.22}$$

$z_{2y'} \neq 0$, либо

$$\begin{cases} z_1 = H_1\left(x, w, w', w''\right), \\ z_2 = H_2\left(x, y, y', y''\right), \\ z_2 = G\left(x, z_1, {z_1}'\right), \end{cases} \tag{3.23}$$

$z_{2y''} \neq 0$, причем в обоих случаях

$$\frac{\partial G}{\partial {z_1}'} = 0,$$

если $z_{1w''} \neq 0$. Заметим, что если внешнее уравнение имеет тот же порядок, равный двум, что и исходное уравнение, то метод поиска симметрий с помощью формальных операторов вида (1.3) оказывается неэффективным (см. пояснение для обобщенных дифференциальных уравнений 1-го порядка). Необходимое условие существования представления уравнения (3.1) в виде системы (3.22) или (3.23), можно сформулировать в виде теоремы, аналогичной теореме 10.

***Теорема* 11**. Для того чтобы обобщенное дифференциальное уравнение 2-го порядка (3.1), допускающее (ненулевой) формальный оператор (1.3), было представимо через инварианты допускаемого оператора в виде системы (3.22) или (3.23), необходимо, чтобы определяющее уравнение расщеплялось на систему двух уравнений

$$\begin{cases} \Phi|_{[y''=F]}F_y + D_x(\Phi)|_{[y''=F]}F_{y'} - D_x^2(\Phi)|_{[y''=F]} = 0, \\ \Psi|_{[y''=F]}F_w + D_x(\Psi)|_{[y''=F]}F_{w'} + D_x^2(\Psi)|_{[y''=F]}F_{w''} = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Доказательство. Это утверждение легко проверить, если выразить из внешнего уравнения систем (3.22) и (3.23) дифференциальную переменную y'':

$$y'' = GY, \tag{3.25}$$

где $Y = Y(x, y, y')$. По теоремам о факторизации соотношение (3.25) является алгебраическим тождеством в силу исходного уравнения (3.1), поэтому

$$F = GY.$$

Подставляя во второе уравнение системы (3.24) $F = GY$, убеждаемся что F удовлетворяет этому уравнению

$$Y\Bigg[\Phi|_{[y''=F]}\left(\frac{\partial G}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial z_1'}\frac{\partial z_1'}{\partial w}\right) + D_x(\Phi)|_{[y''=F]}\Bigg(\frac{\partial G}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial w'} + \\ + \frac{\partial G}{\partial z_1'}\frac{\partial z_1'}{\partial w'}\Bigg) + D_x^2(\Phi)|_{[y''=F]}\left(\frac{\partial G}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial w''} + \frac{\partial G}{\partial z_1'}\frac{\partial z_1'}{\partial w''}\right)\Bigg] = 0,$$

так как z_1 и $z_1{}'$ удовлетворяют тому же уравнению. Первое соотношение системы (3.24) получается из определяющего уравнения (3.2) и второго уравнения системы (3.24):

$$\Phi|_{[y''=F]}F_y + D_x(\Phi)|_{[y''=F]}F_{y'} - D_x^2(\Phi)|_{[y''=F]} = \\ = \Psi|_{[y''=F]}F_w + D(\Psi)|_{[y''=F]}F_{w'} + D_x^2(\Psi)|_{[y''=F]}F_{w''} = 0.$$

Таким образом, теорема доказана ■

***Пример* 15**. Используя метод поиска допускаемого оператора с помощью определяющей системы (3.24), находим, что класс обобщенных дифференциальных уравнений

$$y'' = C(w')^2 + (\psi_1 y + \psi_2 w + \psi_3)y' + (\varphi_1 y + \varphi_2 w + \varphi_3)w' + h,$$

где $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – достаточно гладкие функции переменной x, $C \in \mathbb{R}$, $h = h(x, y, w)$, допускает экспоненциальный нелокальный оператор вида

$$X = \exp\left[\int \eta_1(x, y, y')\right]\partial_y + \exp\left[\int \eta_2(x, w, w')\right]\partial_w,$$

если

$$
\begin{aligned}
\psi_2 &= 0, \\
\varphi_1 &= 0, \\
h &= \tfrac{1}{2}({\psi_1}' + \psi_1\alpha - \psi_1\psi_3)y^2 + (\alpha' + \alpha^2 - \psi_3\alpha)y + g(x,w), \\
&|C| + |\varphi_2| + |\varphi_3| \neq 0,
\end{aligned}
$$

где $\alpha = \alpha(x)$, а

$$
\begin{aligned}
\eta_1(x,y,y') &= \psi_1 y + \alpha, \\
\eta_2(x,w,w') &= -\frac{\varphi_2 w' + g_w}{2Cw' + \varphi_2 w + \varphi_3}.
\end{aligned}
$$

Этот оператор имеет два младших инварианта z_1 и z_2 первого порядка. По замечанию 2 к теореме 7 мы всегда можем представить исходное уравнение в инвариантах допускаемого оператора, если оператор имеет ровно два младших инварианта. Эта система в данном случае будет иметь вид

$$
\begin{cases}
z_1 = C(w')^2 + \varphi_2 w w' + \varphi_3 w' + g(x,w), \\
z_2 = y' - \frac{1}{2}\psi_1 y^2 - \alpha y, \\
{z_2}' = (\psi_3 - \alpha)z_2 + z_1.
\end{cases}
$$

Полученную систему в ряде случаев удается упростить, если известна дополнительная связь между неизвестными функциями y и w. В частности, это удается осуществить, если исходное уравнение является функционально-дифференциальным уравнением ■

3.5 Редукция функционально-дифференциальных уравнений 2-го порядка

Обобщенные дифференциальные уравнения 2-го порядка в отличие от обобщенных дифференциальных уравнений 1-го порядка обладают бо́льшим числом симметрий, поэтому структура систем, к которым можно свести соответствующие функционально-дифференциальные уравнения 2-го порядка, более разнообразна [8, 14, 29]. Основное различие состоит в том, что внешнее уравнение системы, может оказаться обобщенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, которое в свою очередь можно подвергнуть симметрийному анализу. Если внешнее уравнение оказалось обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка, то, решив его, мы сводим исходное уравнение к функционально-дифференциальному уравнению 1-го порядка. Сопоставив ему обобщенное дифференциальное уравнение, можно исследовать его структуру групповыми методами, и тем самым попытаться свести его к обобщенному дифференциальному уравнению нулевого порядка, которому, в частности, может соответствовать функциональное уравнение. Таким образом, в процессе поиска симметрий функционально-дифференциальных уравнений 2-го порядка алгоритм поиска допускаемого оператора и исследования его инвариантов может быть применен дважды. Последовательно понижая порядок исходного уравнения, мы сводим его к функционально-дифференциальному уравнению, решение которого либо известно, либо может быть получено другими методами (например, методом шагов). Конечно, может оказаться, что мы найдем симметрию, позволяющую сразу понизить порядок уравнения на 2 единицы и свести его к функциональному уравнению.

Необходимые условие существования факторсистемы, внешнее уравнение которой является обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го или 2-го порядка, а также алгоритм ее построения рассмотрены в п.3.2 и п.3.3. Следует заметить, что естественным является требование максимальной простоты структуры внешнего уравнения факторсистемы. Возможность варьирования вида внешнего уравнения факторсистемы обеспечивается тем, что условия (3.10) и (3.17) являются недоопределенными: нам известны только структурные компоненты инварианта z – отображения, являющиеся базисом инвариантов. Задавая структуру отображения G, мы всегда можем найти соответствующий этой факторизации инвариант z (см. пример 12). Наиболее простой вид внешнее уравнение факторсистемы имеет при $G \equiv 0$, поэтому на практике следует сначала рассмотреть этот тип редукции.

***Пример* 16**. Функционально-дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$(x-\tau)xy''(x)-\tau^{-1}(2x^2-4\tau x+\tau^2)[y'(x)-b]-$$
$$-axy'(x-\tau)+a\tau^{-1}(2x-\tau)y(x-\tau)=0,$$

$a, b, \tau \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \tau \neq 0$, которое заменой

$$w(x)=y(x-\tau)$$

сводится к обобщенному дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$(x-\tau)xy''-\tau^{-1}(2x^2-4\tau x+\tau^2)(y'-b)-axw'+a\tau^{-1}(2x-\tau)w=0. \quad (3.26)$$

Поиск допускаемого оператора в классе точечных операторов приводит к следующему результату

$$X=(C_1y+\alpha_1)\partial_y+(C_1w+\alpha_2)\partial_w, \quad (3.27)$$

где $C_1 \in \mathbb{R},\ \alpha_1=\alpha_1(x),\ \alpha_2=\alpha_2(x)$, и выполнено соотношение

$$\tau x(x-\tau){\alpha_1}''-(2x^2-4\tau x+\tau^2)({\alpha_1}'+C_1b)-a\tau x{\alpha_2}'+a(2x-\tau)\alpha_2=0.$$

Пусть $C_1=0$. Тогда можно положить $\alpha_2=1$ (мы рассматриваем операторы с ненулевыми координатами). Базис инвариантов 1-го порядка оператора (3.27) образуют отображения

$$\begin{aligned} u_0 &= x, \\ u_1 &= y-\alpha_1 w, \\ u_2 &= \alpha_1 y'-{\alpha_1}'y, \\ u_3 &= w', \end{aligned}$$

Так как оператор имеет 2 младших инварианта (например, u_1 и u_2), то, согласно замечанию 2 к теореме 7, исходное уравнение (3.26) редуцируется к некоторому обобщенному дифференциальному уравнению. Потребуем, чтобы уравнение (3.26) факторизовалось до обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка. Для этого достаточно найти инвариант допускаемого оператора, который удовлетворяет условиям (3.16) и (3.17) (см. п.3.3), причем пусть $G=0$, т.е факторсистема имеет вид

$$\begin{cases} z = H(x, u_1, u_2), \\ z' = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что условие (3.17)

$$D_x(z)|_{(3.26)} = 0$$

является алгебраическим тождеством, находим

$$\alpha_1 = a\ln(x-\tau) + C_2$$

$C_2 \in \mathbb{R}$, а

$$z = H\left(x\left[(x-\tau)(y'-b) - aw\right]e^{-2\tau^{-1}x}\right).$$

Поэтому уравнение (3.26) факторизуется до системы

$$\begin{cases} z = x\left[(x-\tau)(y'-b) - aw\right]e^{-2\tau^{-1}x}, \\ z' = 0. \end{cases}$$

Решая внешнее уравнение факторсистемы, понижаем порядок исходного уравнения

$$y' - a(x-\tau)^{-1}w - b = \frac{C}{x}e^{2\tau^{-1}x},$$

$C \in \mathbb{R}$, или

$$y'(x) - \frac{a}{x-\tau}y(x-\tau) - b = \frac{C}{x}e^{2\tau^{-1}x}.$$

Это уравнение можно решать методом шагов. Его частное решение при $C=0$ приведено в [4] ■

В следующем примере найдена симметрия, позволяющая сразу же свести функционально-дифференциального уравнении к функциональному уравнению.

***Пример* 17**. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$ay''(x) + by''(x-\tau) + f(x)[ay'(x) + by'(x-\tau)] + g(x)[ay(x) + b(x-\tau)] = 0,$$

$a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Очевидно, что соответствующее обобщенное дифференциальное уравнение

$$ay'' + bw'' + f(x)(ay' + bw') + g(x)(ay + bw) = 0, \qquad (3.28)$$

$w(x) = y(x - \tau)$, допускает точечный оператор

$$X = b\partial_y - a\partial_w,$$

инвариант которого

$$z = ay + bw$$

позволяет свести исходное уравнение к линейному однородному дифференциальному уравнению 2-го порядка общего вида

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0.$$

Используя возможность варьирования внешнего уравнения факторсистемы, потребуем, чтобы структура факторсистемы имела наиболее простой вид

$$\begin{cases} u = H(x, z), \\ u'' = 0. \end{cases}$$

Для этого достаточно положить в условии (3.10) $G = 0$, т.е.

$$D_x^2(u)|_{(3.28)} = 0.$$

Это алгебраическое тождество будет верным, если

$$g(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{4}f(x)^2, \tag{3.29}$$

а

$$u = C_1(ay + bw)\exp\left[\frac{1}{2}\int f(x)dx\right] + C_2x + C_3,$$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},\ C_1 \neq 0$. Поэтому при условии (3.29) уравнение (3.28) редуцируется к обобщенному дифференциальному уравнению нулевого порядка

$$ay + bw + (\bar{C}_1x + \bar{C}_2)\exp\left[-\frac{1}{2}\int f(x)dx\right] = 0,$$

$\bar{C}_1, \bar{C}_2 \in \mathbb{R}$, а исходное уравнение к функциональному уравнению

$$ay(x) + by(x - \tau) + (\bar{C}_1x + \bar{C}_2)\exp\left[-\frac{1}{2}\int f(x)dx\right] = 0,$$

общее решение которого построено в [40] ■

Рассмотрим теперь второй тип редукции – представление обобщенного дифференциального уравнения в виде системы, внешнее уравнение которой также является обобщенным дифференциальным уравнением. Так как внешнее уравнение по сути дела является недоопределенным, его дальнейший анализ может быть затруднительным. Исключение составляет случай, когда в функционально-дифференциальном уравнении, которому сопоставлено обобщенное дифференциальное уравнение, функциональное отклонение представляет собой преобразование аргумента, образующее циклическую группу порядка 2. Если инварианты допускаемого оператора, задающие внутренние уравнения факторсистемы, связаны тем же преобразованием аргумента, то внешнее уравнение будет функционально-дифференциальным (или функциональным) уравнением.

***Пример* 18**. Исследование симметрий функционально-дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y''(x) + ay(-x)y'(x) - [ay(x) - c]y'(-x) + acy(x)y(-x) + b = 0$$

при произвольных значениях параметров $a, b \in \mathbb{R},\ c \neq 0$, путем поиска допускаемого оператора для соответствующего обобщенного дифференциального уравнения

$$y'' + awy' + (ay - c)w' + acyw + b = 0 \tag{3.30}$$

в классе точечных операторов не приводят к сколько-нибудь значимому результату, так как либо хотя бы одна координата оператора оказывается нулевой, либо появляются ограничения на структуру рассматриваемого уравнения. В общем случае уравнение (3.30) допускает экспоненциальный нелокальный оператор

$$X = \exp\left[a\int(y-w)dx\right]\partial_y - \exp\left[a\int(y-w)dx\right]\partial_w.$$

Инварианты этого оператора

$$\begin{aligned} u &= y' + ayw + bc^{-1}, \\ v &= -w' + ayw + bc^{-1} \end{aligned}$$

так же как и отображения $y(x)$ и $w(x)$ связаны соотношением

$$v(x) = u(-x).$$

Согласно теореме 7, уравнение (3.30) можно представить в виде факторсистемы, которая с учетом структуры инвариантов может быть записана в виде

$$\begin{cases} u(x) = y'(x) + ay(x)w(x) + bc^{-1}, \\ u'(x) + cu(-x) = 0. \end{cases}$$

решением внешнего функционально-дифференциального уравнения является отображение

$$u = C[\sin(cx) - \cos(cx)]$$

$C \in \mathbb{R}$ [40]. Таким образом, задачу поиска решения исходного уравнения можно свести к интегрированию функционально-дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y'(x) + ay(x)y(-x) + bc^{-1} = C[\sin(cx) - \cos(cx)].$$

Замечание. Уравнение более сложной структуры

$$y''(x) + [a_1y(-x) + a_2]y'(x) - [a_1y(x) + a_3]y'(-x) + \\ + b_1[a_1y(-x) + a_2]y(x) + b_1(a_3 + b_1)y(-x) + b_2 = 0$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in \mathbb{R},\ b_1 \neq 0$, может быть сведено к системе аналогичного типа

$$\begin{cases} u(x) = y'(x) + a_1y(-x)y(x) + a_2y(x) + (a_3 + b_1)y(-x) + b_2{b_1}^{-1}, \\ u'(x) + b_1u(-x) = 0. \end{cases}$$

Поэтому исходное уравнение редуцируется к функционально-дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$y'(x) + a_1y(-x)y(x) + a_2y(x) + (a_3 + b_1)y(-x) + \\ + b_2{b_1}^{-1} = C[\sin(b_1x) - \cos(b_1x)],$$

$C \in \mathbb{R}$ ■

Случай наследования внутренними уравнениями факторсистемы преобразования, связывающего зависимые функции в исходном уравнении, возникает также для функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента.

***Пример* 19**. В примере 14 ($a = 0$) для обобщенного дифференциального уравнения, соответствующего функциональному дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$y''(x) + (b+1)y'(x) - y'(x-\tau) + b[y(x) - y(x-\tau)] = 0, \tag{3.31}$$

была построена факторсистема. Поэтому уравнение (3.31) редуцируется до системы

$$\begin{cases} u(x) = y'(x) + by(x), \\ v(x) = y'(x-\tau) + by(x-\tau), \\ u'(x) + u(x) = v(x). \end{cases}$$

Очевидно, что $v(x) = u(x-\tau)$, поэтому факторсистему можно записать в виде

$$\begin{cases} u(x) = y'(x) + by(x), \\ u'(x) + u(x) = u(x-\tau), \end{cases}$$

Таким образом, поиск решений уравнения (3.31) мы свели к исследованию функционально-дифференциального уравнения 1-го порядка и обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка. ■

Построенные примеры показывают, что изложенный в диссертационной работе симметрийный подход исследования и интегрирования функционально-дифференциальных уравнений является универсальным, так как представление функционально-дифференциального уравнения в виде обобщенного дифференциального уравнения позволяет рассматривать уравнения, в которых отклонение аргумента может быть произвольным, в частности, можно рассмотреть случай зависимости от неизвестной функции и ее производных.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

– построены теоретический основы группового анализа обобщенных дифференциальных уравнений, в частности, функционально-дифференциальных уравнений, базирующегося на теории формальных операторов;

– на основе предложенного подхода сформулированы и доказаны теоремы о факторизации обобщенных дифференциальных уравнений;

– разработан регулярный алгоритм поиска симметрий обобщенных дифференциальных уравнений и функционально-диференциальных уравнений;

– многочисленные примеры, приведенные в диссертационной работе, а также приложение являются предпосылкой создания справочника по функционально-дифференциальных уравнениям.

Приложение

Раздел к справочнику по функционально-дифференциальным уравнениям

В качестве примера ниже приводятся уравнения, для которых удалось либо найти факторсистему, либо построить точные решения с помощью теоретических положений основной части диссертационной работы. Все параметры в уравнениях – константы. Материал структурирован в соответствии с оформлением, принятым в современных справочниках, например [31].

2. Уравнения второго порядка.

2.1. Уравнения содержащие полиномиальные функции.

2.1.1. Уравнения вида $\boldsymbol{y''+[b_1y(x)+b_2y(-x-\tau)+b_3]y'(-x-\tau)+}$ $\boldsymbol{+[c_1y(x)+c_2y(-x-\tau)+c_3]y'(-x-\tau)+d_1y(x)+d_2y(-x-\tau)+d_3=0.}$

Обозначения: $y=y(x),\ y_\tau=y(-x-\tau),\ y'=y'(x),\ y'_\tau=y'(-x-\tau),\ y''=y''(x).$

1. $\boldsymbol{y''+by'+c^2y+bcy_\tau+d=0}$.

Решение удовлетворяет уравнению первого порядка

$$y'+cy_\tau=u(x), \tag{1}$$

где

$$u(x)=\begin{cases} Cx+\frac{Cb\tau-C-d}{2b}, & \text{при } c=b,\\ bdx^2+d(b\tau-1)x+C, & \text{при } c=-b,\\ C(b-A)e^{A(x+\tau)}-Cce^{-Ax}-\frac{d}{b+c}, & \text{при } c\neq\pm b,\end{cases}$$

$A=\sqrt{(b+c)(b-c)}$.

Уравнение (1) может быть решено в замкнутой форме. Его решение будет приведено в предполагаемой первой главе справочника, посвященной функционально-дифференциальным уравнениям первого порядка.

2. $\boldsymbol{y''+b_1y'+b_2y'_\tau+(c_1^2-c_2^2-c_1b_2+c_2b_1)y+(c_1b_1-c_2b_2)y_\tau+d=0,}$ $\boldsymbol{c_1+c_2\neq0}$.

Решение удовлетворяет уравнению первого порядка

$$y'+(b_1-c_2)y+(c_1-b_2)y_\tau=u(x), \tag{2}$$

где

$$u(x) = \begin{cases} Ce^{-c_2 x} - \frac{d}{c_2}, & \text{при } c_1 = 0, \\ Cc_1 e^{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}x} - C(\sqrt{c_2^2 - c_1^2} + c_2)e^{-\sqrt{c_2^2-c_1^2}(x+\tau)} - \frac{d}{c_1+c_2}, & \text{при } c_1 \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение (2) может быть решено в замкнутой форме. Его решение будет приведено в предполагаемой первой главе справочника, посвященной функционально-дифференциальным уравнениям первого порядка.

3. $\boldsymbol{y''+(2b_1y+b_2)y'+(2b_1y_\tau+b_3)y'_\tau+c(b_2-b_3)(y+y_\tau)+d=0,\ \ c\neq 0}$.

Решение удовлетворяет уравнению первого порядка

$$y' + b_1(y^2 - y_\tau^2) + (b_2 - c)y + (c - b_3)y_\tau + Cx + \frac{(c\tau - 1)C + d}{2c} = 0.$$

4. $\boldsymbol{y''+(2b_1y+b_2y_\tau+b_3)y'+(-b_2y+2b_4y_\tau+b_5)y'_\tau+d=0}$.

Решение удовлетворяет уравнению первого порядка

$$y' + b_1y^2 - b_4y_\tau^2 + b_2yy_\tau + b_3y - b_5y_\tau + dx + C = 0.$$

5. $\boldsymbol{y''+(2b_1y+b_2y_\tau+b_3)y'-(b_2y+2b_1y_\tau+b_4)y'_\tau+}$
$\boldsymbol{+c(b_3-b_4)(y-y_\tau)+d=0,\ \ c\neq 0}$.

Решение удовлетворяет уравнению первого порядка

$$y' + b_1(y^2 + y_\tau^2) + b_2yy_\tau + (b_3 - c)y + (b_4 - c)y_\tau = cdx^2 + d(c\tau - 1)x + C.$$

2.1.2. Уравнения вида $\boldsymbol{y''+[b_1y(x)+b_2y(x-\tau)+b_3]y'(x-\tau)+}$ $\boldsymbol{+[c_1y(x)+c_2y(x-\tau)+c_3]y'(x-\tau)+d_1y(x)+d_2y(x-\tau)+d_3=0}$.

Обозначения: $y = y(x),\ y_\tau = y(x-\tau),\ y' = y'(x),\ y'_\tau = y'(x-\tau),\ y'' = y''(x)$.

1. $\boldsymbol{y''+(2b_1y+b_2y_\tau+b_3)y'+(b_2y+2c_1y_\tau+c_2)y'_\tau+d_1y+d_2y_\tau+d_3=0}$.

Уравнение факторизуется к системе

$$\begin{cases} u = y' + b_1y^2 + b_2yy_\tau + c_1y_\tau^2 + (-\alpha + b_3)y + (c_2 - \beta)y_\tau + C, \\ v = \beta y_\tau{}' - \alpha(b_1y^2 + b_2yy_\tau + c_1y_\tau) + [d_1 - \alpha(-\alpha + b_3)]y + \\ \qquad\qquad + [d_2 - \alpha(c_2 - \beta)]y_\tau + d_3 - \gamma - C\alpha, \\ u' + \alpha u + v + \gamma = 0. \end{cases}$$

2. $\boldsymbol{y''+(2b_1y+b_2y_\tau+b_3)y'+(b_2y+2b_4y_\tau+b_5)y'_\tau+d=0}$.

Решение удовлетворяет уравнению первого порядка

$$y' + b_1y^2 + b_2yy_\tau + b_4y_\tau^2 + b_3y + b_5y_\tau + dx + C = 0.$$

3. $\boldsymbol{y'' + b_1 y' + b_2 y'_\tau + c(b_1 - c)y + (b_1 - c)b_2 y_\tau + d = 0, \quad b_1 \neq c}$.

Общее решение:

$$y = e^{(c-b_1)x}\left(\int e^{(b_1-c)x}u(x)\,dx + C_2\right) + \frac{C_1}{b_1 - c},$$

где $u = u(x)$ удовлетворяет уравнению первого порядка

$$u'(x) + cu(x) + b_2 u(x-\tau) + (c + b_2)C_1 + d = 0.$$

4. $\boldsymbol{y'' + b_1 y' + b_2 y'_\tau + d = 0}$.

1^0 Общее решение:

$$y = \int u(x)\,dx + C_1 x + C_2,$$

где $u = u(x)$ удовлетворяет уравнению первого порядка

$$u'(x) + b_1 u(x) + b_2 u(x-\tau) + (b_1 + b_2)C_1 + d = 0.$$

2^0 Решение удовлетворяет уравнению первого порядка

$$y' + b_1 y + b_2 y_\tau + dx + C = 0.$$

Литература

[1] Anderson I.M., Kamran M., Olver P.J. Internal, External and Generalized Symmetries. – Preprint, 9/4/90, 51 pp.

[2] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity methods for differential equations. – Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1974. – 332 pp.

[3] Hill J.M. Solution of differential equations by means of one-parameter groups // Res. Notes Math. – №63, 1982. – P. 1-170.

[4] Kamke E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. – Chelsea, New York, 1948.

[5] Lehenkyi V. The Integrability of some Underdetermined Systems // Proceedings of the 3-d International Conference «Symmetry in nonlinear mathematical physics»– Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2000, V.30, part 1, pp. 157-164.

[6] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen / Bearbeitet und herausgegben von Dr. G.Scheffers. – Leipzig: B.G.Teubner, 1981.

[7] Lie S. Gesammelte Abhandlungen. – Leipzig: B.G.Teubner – Oslo: H.Aschehoug & Co.: Bd.1. – 1934; Bd.2 (Teil 1). – 1935; Bd.2 (Teil 2). – 1937; Bd.3 – 1922; Bd.4 – 1929; Bd.5 – 1924; Bd.6 – 1927.

[8] Linchuk L.V. Factorization of functional differential equations // Electronic journal «Differential equations and control processes» – №4, 2001. – P.15-25. (http://www.neva.ru/journal)

[9] Linchuk L.V. Local and nonlocal symmetries of functional differential equations // Abstracts of III International Conference «Differential equations and applications». – Spb: SpbSTU, 2000. – P.65.

[10] Linchuk L.V. On group analysis of functional differential equations // Abstracts of the International Conference MOGRAN 2000 «Modern group analysis fo the new millennium». – Ufa: USATU, 2000. – P.48.

[11] Linchuk L.V. On group analysis of functional differential equations // Proceedings of the International Conference MOGRAN 2000

«Modern group analysis fo the new millennium». – Ufa: USATU, 2001. – P. 111-115.

[12] Linchuk L.V. On invariants of formal operators // Abstracts of III International Conference «Tools for mathematical modelling». – Spb: SpbSTU, 2001. – P.31.

[13] Linchuk L.V. On invariants of formal operators // Proceedings of III International Conference «Tools for mathematical modelling». – Spb: SpbSTU, 2001. – P.43-48.

[14] Linchuk L.V. Symmetry analysis of functional-differentional equations // Proceedings of III International Conference «Differential equations and applications». – Spb: SpbSTU, 2000. – P.93-99.

[15] Stephani H. Differentialgleichungen. Symmetrien und Lösungsmethoden. – Heidelberg - Berlin - Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1994. – 320 pp.

[16] Zaitsev V.F. On the substantiation of the theory of formal operators // Abstracts of III International Conference «Tools for mathematical modelling». – Spb: SpbSTU, 2001. – P.61.

[17] Zaitsev V.F. Universal description of symmetries on a basis of the formal operators // Math. Research, vol.7. «Theory and practice of differential equations». – St.Petersburg: SPbSTU, 2000, pp.39-45.

[18] Zaitsev V.F., Linchuk L.V. On some problems of modern group analysis of differential equations // Proceedings of II International Science Conference «Computer algebra in fundamental and applied research and education ». – Minsk: Belarusian St. Univ., 1999. – P.76-81.

[19] Азбелев Н.В. Пермский семинар и развитие теории функционально-дифференциальных уравнений // Функционально-дифференциальные уравнения – Пермь, 1985. – С.3-12.

[20] Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. – М.: «Наука», 1964. – 360 с.

[21] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М., 1967.

[22] Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. – М.: Изд-во «Факториал», 1997. – 464 с.

[23] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М., 1976.

[24] Гребенча М.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Учпедгиз, 1937. – 280 с.

[25] Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – ОНТИ, ГТТИ, 1934. – 360 с.

[26] Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем: Дифференциально-геометрический подход. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 317 с.

[27] Зайцев В.Ф. О современном групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды II Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». - СПб: Изд.СПбГТУ, 1998. – С.137-151.

[28] Зайцев В.Ф., Линчук Л.В. О групповом анализе обобщенных дифференциальных уравнений // Тезисы докладов II Международной конференции «Средства математического моделирования». – СПб: Изд.СПбГТУ, 1999. – С.177-178.

[29] Зайцев В.Ф., Линчук Л.В. О факторизации обобщенных дифференциальных уравнений // Труды IX Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»(МДОЗМФ-2000). – Орел: ОГУ, 2000. – С.222-226.

[30] Зайцев В.Ф., Линчук Л.В. Об алгоритме группового анализа обобщенных дифференциальных уравнений // Тезисы докладов II Международной конференции «Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании». – Минск: БГУ, 1999. – С.51.

[31] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник: обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: «Физматлит», 2001. – 576 с.

[32] Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи математических наук, т. 47, вып. 4(286), 1992. – С.84-144.

[33] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: «Наука», 1983. – 280 с.

[34] Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: «Наука», 1966. – 260 с.

[35] Кирьянен А.И. Устойчивость систем с последействием и их приложения. – СПб.: Изд. СПбГУ, 1994. – 240 с.

[36] Линчук Л.В. О групповом анализе обобщенных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды II Международной конференции «Средства математического моделирования». – СПб: Изд.СПбГТУ, 1999. – С.194-199.

[37] Линчук Л.В. Об инвариантах операторов, допускаемых обобщенными дифференциальными уравнениями 2-го порядка // Труды IX Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»(МДОЗМФ-2000). – Орел: ОГУ, 2000. – С.275-278.

[38] Линчук Л.В. Факторизация функционально-дифференциальных уравнений // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского, т.11. Проблемы современной математики – Казань: Изд. «УНИПРЕСС», 2001. – С.175-178.

[39] Линчук Л.В. Формальные операторы, допускаемые обобщенными дифференциальными уравнениями и принцип факторизации // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления»– №1, 2001. – С.71-115. (http://www.neva.ru/journal)

[40] Майстренко Ю.Л., Шарковский А.Н. О понижении числа преобразований аргумента в функциональных и функционально-дифференциальных уравнениях // Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: Изд-е Института математики АН УССР, 1977. – С.57-70.

[41] Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. – Киев:«Вища школа», 1979. – 248 с.

[42] Митропольский Ю.А., Шарковский А.Н. Развитие теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в институте математики АН УССР // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. – Киев: Наукова думка, 1977. – С.215-221.

[43] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М., 1972. – 352 с.

[44] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М.: «Наука», 1965. – 356 с.

[45] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: «Наука», 1978. – 400 с.

[46] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: «Мир», 1989.

[47] Павловский Ю.Н. Геометрическая теория декомпозиции и теоретико-групповой анализ // Симметрия и дифференциальные уравнения. – Красноярск, 2000. – С.170-172.

[48] Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н. Группы, допускаемые динамическими системами // Методы оптимизации и их приложения. – Новосибирск: «Наука», 1982. – С.155-189.

[49] Пелюх Г.П., Шарковский А.Н. Введение в теорию функци- ональных уравнений. - Киев: «Наукова думка», 1974. – 119 с.

[50] Пелюх Г.П., Шарковский А.Н. О линейных разностных уравнениях с периодическими коэффициентами // Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: Изд-е Института математики АН УССР, 1977. – С.91-100.

[51] Петухов В.Р. Геометрический дискретно-групповой анализ функциональных и дифференциальных уравнений. Препринт №39. – М: ИТЭФ, 1980. – 12 с.

[52] Петухов В.Р. Групповой анализ динамических систем. Некоторые задачи. Препринт №94. – М: ИТЭФ, 1983. – 24 с.

[53] Петухов В.Р. Групповой анализ динамических систем с трансформацией инвариантных групп. Препринт №34. – М: ИТЭФ, 1984. – 12 с.

[54] Петухов В.Р. Групповой анализ дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Препринт №155. – М: ИТЭФ, 1983. – 16 с.

[55] Петухов В.Р. Динамические системы и инвариантные многопараметрические группы. Приложение к теории физических структур. Препринт №172. – М: ИТЭФ, 1984. – 20 с.

[56] Петухов В.Р. Некоторые аналитические результаты группового анализа динамических систем. Препринт №68. – М: ИТЭФ, 1984. – 16 с.

[57] Петухов В.Р. О случаях интегрируемости некоторых дифференциально-функциональных уравнений // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, т.3. – М., 1965. – С. 133-145.

[58] Петухов В.Р. Расширение групп преобразований с отклоняющимся аргументом. Препринт №99. – М: ИТЭФ, 1985. – 8 с.

[59] Петухов В.Р. Теоретико-групповой анализ функциональных уравнений и его применения. Препринт №26. – М: ИТЭФ, 1979. – 10 с.

[60] Петухов В.Р. Функциональные уравнения и динамические системы. Препринт №102. – М: ИТЭФ, 1979. – 6 с.

[61] Пинни Э. Обыкновенные дифференциально разностные уравнения. – М.: Изд-во ин. лит., 1961. – 246 с.

[62] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М., 1978.

[63] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., 1984.

[64] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: «Наука», 1964. – 128 с.

[65] Эльсгольц Л.Э. Основные направления развития теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, т.1. – М., 1962. – С.3-20.

[66] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1971.

[67] Яковенко Г.Н. Нестационарные симметрии в системах с управлением // Современный групповой анализ. Методы и приложения. – Баку: Элм, 1989. – С.258-265.

[68] Яковенко Г.Н. Решение задачи управляемости с использованием симметрии // Прикладная механика и процессы управления. – М.: МФТИ, 1991. – С. 17-31.

[69] Яковенко Г.Н. Симметрии по состоянию в системах с управлением // Прикладная механика и математика: Межвед. сб. науч. тр. – М.: МФТИ, 1992. – С.155-176.

ОГЛАВЛЕНИЕ