

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. Баумана**

---

---

На правах рукописи

**Морева Виктория Сергеевна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЕЙ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВЫХ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ  
МЕТОДА ВИХРЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент И.К. Марчевский

Москва — 2013

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Метод вихревых элементов для моделирования течений вязкой несжимаемой среды . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1. Математическая постановка задачи . . . . .	17
1.2. Восстановление поля скоростей по известному распределению завихренности и расчет аэродинамических нагрузок	21
1.3. Моделирование распределения завихренности с помощью вихревых элементов . . . . .	25
1.4. Расчет движения вихревых элементов и вычисление аэродинамических нагрузок . . . . .	26
1.5. Метод второго порядка точности . . . . .	30
1.6. Верификация метода Рунге — Кутты второго порядка точности . . . . .	33
1.6.1. Математическое моделирование диффузии круглого вихря . . . . .	34
1.6.2. Математическое моделирование обтекания кругового профиля при различных значениях числа Рейнольдса . . . . .	36
1.7. Результаты главы 1 . . . . .	37
<b>Глава 2. Расчетные схемы метода вихревых элементов . . .</b>	<b>39</b>
2.1. Подходы к моделированию генерации завихренности на обтекаемом профиле . . . . .	39
2.1.1. Равенство нулю нормальной компоненты скорости на профиле . . . . .	41
2.1.2. Равенство нулю касательной компоненты скорости на профиле . . . . .	45
2.2. Классическая расчетная схема на обтекаемом профиле . .	47

	Стр.
2.3. Новые расчетные схемы метода вихревых элементов . . . . .	50
2.4. Коэффициенты расчетных схем метода вихревых элементов	53
2.4.1. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$ и $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$ . . . . .	56
2.4.2. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$ и $\mathcal{T}_{vort}^{aver}$ . . . . .	57
2.4.3. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$ и $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$ . . . . .	59
2.4.4. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$ и $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ . . . . .	61
2.5. Определение циркуляций вихревых элементов, сходящих в поток . . . . .	64
2.6. Верификация расчетных схем метода вихревых элементов	65
2.6.1. Математическое моделирование стационарного обте- кания эллиптического профиля и профиля Жуков- ского . . . . .	67
2.6.2. Математическое моделирование стационарного обте- кания профиля с тремя угловыми точками . . . . .	71
2.6.3. Математическое моделирование обтекания кругово- го профиля с изолированным вихрем . . . . .	75
2.7. Результаты главы 2 . . . . .	77
<b>Глава 3. Программный комплекс POLARA . . . . .</b>	<b>79</b>
3.1. Структура программного комплекса POLARA . . . . .	79
3.2. Оценка эффективности использования параллельных ал- горитмов . . . . .	87
3.2.1. Оценка эффективности внутреннего распараллели- вания . . . . .	88
3.2.2. Оценка эффективности внешнего распараллеливания	90
3.2.3. Исследование возможности применения различных моделей параллельного программирования . . . . .	93
3.3. Быстрый метод расчета парных взаимодействий вихревых элементов . . . . .	94
3.3.1. Описание метода и оценка его эффективности . . . . .	94

	Стр.
3.3.2. Оценка оптимальной глубины дерева в быстром методе	99
3.3.3. Параллельная реализация быстрого метода . . . . .	103
3.4. Использование программного комплекса POLARA для проведения методических исследований параметров расчетных схем метода вихревых элементов . . . . .	105
3.5. Верификация программного комплекса POLARA . . . . .	108
3.5.1. Моделирование обтекания профиля при использовании расчетных схем $N_{vort}^{coll}$ и $T_{layer}^{aver}$ . . . . .	108
3.5.2. Моделирование обтекания кругового профиля при $Re = 10^3$ . . . . .	110
3.5.3. Задача Блазиуса . . . . .	113
3.5.4. Моделирование обтекания профиля в форме полукруга	117
3.5.5. Моделирование обтекания квадратного профиля . .	118
3.6. Результаты главы 3 . . . . .	119
<b>Основные результаты и выводы . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>121</b>



## ***Введение***

**Актуальность темы.** Проблема математического моделирования обтекания элементов конструкций потоком жидкости или газа возникает при решении многих прикладных задач в авиации, промышленной аэродинамике, механике помещенных в жидкость конструкций. Для правильного выбора проектных параметров конструкций, находящихся в потоке, необходимо знание аэрогидродинамических нагрузок.

Основным способом исследования обтекания тел и определения действующих на них со стороны потока нагрузок долгое время являлся эксперимент. К настоящему времени накоплен значительный объем экспериментальных данных, позволяющих определять аэрогидродинамические характеристики тел часто встречающихся на практике форм, но в ряде случаев эти данные могут быть недостаточными, особенно при решении задач проектирования и оптимизации конструкций.

Во многих практически важных приложениях исследуемые тела имеют большое удлинение, поэтому их обтекание можно приближенно считать плоскопараллельным, сводя пространственную задачу о моделировании трехмерного течения к плоской задаче о расчете обтекания профиля. Существуют специализированные атласы аэродинамических характеристик профилей [2, 4, 22, 48], однако экспериментальное исследование новых профилей является достаточно трудоемким и дорогостоящим мероприятием.

Первые систематические исследования в области математического моделирования обтекания профилей и вычисления действующих на них нагрузок были проведены в начале XX века Н. Е. Жуковским [17]. С использованием аппарата теории функций комплексного переменного им было получено решение стационарной задачи о расчете безотрывного обтекания профилей простых форм (для которых удастся построить конформное отображение внешности профиля на внешность круга) неогра-

ническим потоком идеальной несжимаемой среды. Именно Н. Е. Жуковским установлена возможность моделирования профиля в потоке при помощи вихревого слоя, расположенного на профиле. Им же в 1904 г. была получена известная формула, в соответствии с которой подъемная сила крыла пропорциональна циркуляции поля скоростей вдоль профиля. Аналитически величину циркуляции удастся вычислить для крыловых профилей в предположении, что поток сходит с острой кромки; данное предположение положено в основу гипотезы Чаплыгина — Жуковского, которая впоследствии была обобщена и в настоящее время более известна как гипотеза Чаплыгина — Жуковского — Кутты. В отечественной литературе исследования в данном направлении получили значительное развитие в трудах М. В. Келдыша, Л. И. Седова, М. А. Лаврентьева [23, 28, 63] и др.

С развитием вычислительной техники во второй половине XX века появилась возможность проведения вычислительного эксперимента, что позволило использовать более сложные модели среды и моделировать обтекание более широкого класса профилей, а впоследствии — и пространственных тел. Применяемые численные методы анализа математических моделей течения жидкостей и газов можно разделить на два класса: сеточные и бессеточные (вихревые). Сеточные методы к настоящему времени хорошо развиты, позволяют решать широкий класс задач аэрогидродинамики. К их недостаткам можно отнести сравнительно большие затраты машинного времени на проведение расчета, а также существенные сложности при решении задач аэрогидроупругости, когда обтекаемое тело движется либо деформируется и форма расчетной области может сильно меняться в процессе расчета. Еще одна трудность связана с моделированием внешнего обтекания, когда область течения является безграничной: требуется каким-либо образом перейти к ограниченной расчетной области и задать граничные условия специального вида. Альтернативой сеточным являются бессеточные лагранжевы вих-

ревые методы, позволяющие моделировать течения несжимаемой среды, решать широкий класс задач аэрогидродинамики и аэрогидроупругости с приемлемой точностью и требующие меньших затрат вычислительных ресурсов. В основе вихревых методов лежит переход к завихренности как к первичной расчетной величине; непрерывное поле завихренности в области течения в расчете заменяется большим количеством вихревых элементов, движущихся по определенному закону в результате их парного взаимодействия. Вычислительные ресурсы таким образом сосредоточены в той части области течения, в которой завихренность отличается от нуля; эта область обычно имеет сравнительно небольшие размеры. Значительный вклад в развитие вихревых методов внесли научные школы С. М. Белоцерковского [66], А. Леонарда [78], Г. Винкельманса [91], Г. Котте [76], К. Камемото [90], Л. Барбы [72] и др. Среди работ по обоснованию вихревых методов можно выделить исследования И. К. Лифанова [5], А. В. Сетухи [24], Дж. Биля и А. Майды [74]. Достаточно полный обзор вихревых методов имеется в работах Т. Сарпкайи и А. Леонарда [60, 78].

Метод дискретных вихрей [30, 57, 66] позволяет моделировать отрывное обтекание профиля, имеющего угловые точки, потоком идеальной несжимаемой среды. Вычислительная трудоемкость метода достаточно низкая, что способствовало широкому применению метода и позволило решить многие практически важные задачи, используя весьма скромную по современным меркам вычислительную технику 70-х–80-х годов XX века. Метод дискретных вихрей оказался исключительно эффективным при моделировании обтекания элементов конструкций летательных аппаратов. К недостаткам классического метода дискретных вихрей следует отнести невозможность моделирования обтекания гладких профилей, точка отрыва потока с которых неизвестна, а также отрыва потока с гладких участков профилей, например, крыловых, при больших углах атаки. Известны попытки преодоления этих ограничений метода

дискретных вихрей: точки отрыва потока предлагалось находить путем построения приближенного решения уравнений пограничного слоя [47] или используя некоторые вариационные принципы [9]. Данные подходы в силу их сложности и неуниверсальности широкого распространения не получили. Также важно отметить, что в рамках метода дискретных вихрей можно моделировать только течения идеальной среды, тогда как на практике возникает необходимость расчета течений вязкой среды, характеризующихся умеренными значениями числа Рейнольдса, когда вязкие эффекты оказывают значительное влияние на структуру течения и аэродинамические нагрузки.

Попытки преодоления отмеченных недостатков метода дискретных вихрей при моделировании двумерных (плоских и осесимметричных) течений привели к разработке модификаций вихревых методов, позволяющих приближенно моделировать отрывное обтекание гладких профилей — этому вопросу посвящены работы А. Чорина [75], а также Г. А. Павловца и А. С. Петрова [54, 55]. Вычислительные ресурсы ЭВМ 70-х годов, однако, не позволили развить эти подходы. Эти идеи, в частности, были положены в основу модификации метода дискретных вихрей, разработанной Г. А. Щегловым и И. К. Марчевским [37, 46].

Также были созданы вихревые лагранжевы методы расчета вязких течений, описываемых уравнениями Навье — Стокса. Известно несколько подходов к учету влияния вязкости, наибольшее распространение получили метод случайных блужданий, предложенный А. Чориным [75] и развитый другими исследователями (достаточно подробный обзор работ в этом направлении содержится в диссертации [88]) и метод диффузионный скорости, предложенный И. Огами и Т. Акаматсу [84] и значительно развитый Г. Я. Дынниковой [13, 15, 16]. В работах [1, 12] описан разработанный сотрудниками Института механики МГУ им. М. В. Ломоносова метод вязких вихревых доменов, а также эффективные способы определения нагрузок, действующих на обтекаемые профили, являющи-

еся обобщениями интеграла Коши — Лагранжа на случай вихревого движения вязкой несжимаемой среды.

В отличие от классического метода дискретных вихрей, реализация метода вязких вихревых доменов требует существенно бóльших вычислительных ресурсов. Количество вихревых элементов, моделирующих вихревой след за профилем, на практике может достигать десятков и сотен тысяч, поэтому непосредственный расчет их парных взаимодействий, даже на современных ЭВМ, приводит к недопустимо большим затратам машинного времени: расчет нестационарного обтекания профиля до выхода на установившийся режим на персональных ЭВМ может продолжаться несколько суток и даже недель. Поэтому актуальным вопросом является разработка алгоритмов, позволяющих сократить затраты времени на проведение расчетов. Значительный эффект дает использование параллельных вычислительных технологий, поскольку наиболее затратная часть алгоритма — расчет парных взаимодействий вихревых элементов — хорошо распараллеливается. Однако в известных работах по распараллеливанию метода вихревых элементов авторами не уделялось внимание распараллеливанию других этапов алгоритма. В частности, в работе [71] получено практически линейное ускорение на этапе расчета парных взаимодействий, однако если задействовать в расчете более, чем 4–8 вычислительных ядер, то эффективность распараллеливания при решении задачи в целом резко снижается.

Иной подход к ускорению вычислений предполагает использование приближенных методов расчета парных взаимодействий вихревых элементов, вычислительная трудоемкость которых составляет  $O(N \log N)$  против  $O(N^2)$  при «прямом» расчете. К ним относятся методы мультипольных разложений, например, аналогичные методу Барнса — Хата быстрого решения «задачи  $N$  тел» [73], методы скелетонных разложений [67], а также некоторые другие подходы, обзор которых можно найти в диссертации [89].

Наиболее рациональным представляется совместное использование приближенных быстрых методов и параллельных алгоритмов; кроме того, при решении практических задач часто возникает потребность в определении аэродинамических характеристик профиля при его различном положении относительно набегающего потока — построении поляры профиля. Это требует решения большой серии однотипных и независимых задач по расчету обтекания профиля, установленного под различными углами атаки. Эту процедуру желательно автоматизировать, по возможности оптимизировав использование доступных вычислительных ресурсов (многопроцессорного вычислительного комплекса).

*Таким образом, разработка вычислительного алгоритма метода вихревых элементов и его программная реализация, основанные на применении быстрого метода расчета парных взаимодействий и допускающие использование большого числа (десятков или даже сотен) вычислительных ядер при сохранении высокой эффективности распараллеливания, является актуальной задачей.*

Использование эффективных программных реализаций позволяет при сохранении приемлемыми временных затрат существенно увеличивать количество вихревых элементов, моделирующих обтекаемый профиль и вихревой след. Однако, как показывают систематические расчеты, с ростом количества вихревых элементов точность моделирования возрастает далеко не всегда. Это особенно актуально при расчете обтекания профилей, имеющих острую кромку: вблизи кромки интенсивность вихревого слоя на профиле определяется со значительной погрешностью, и эта погрешность возрастает с увеличением количества вихревых элементов, моделирующих профиль. О данной проблеме упоминается, в частности, в [30], там же показано, что при выполнении определенных условий к гладкости профиля и поля скоростей среды численное решение задачи, получаемое методом, который традиционно используется в классическом методе дискретных вихрей, сходится к точному решению

в некоторой интегральной норме. Последний факт является принципиальным для метода дискретных вихрей, что позволяет использовать его для моделирования обтекания профилей с острой кромкой, которая и является точкой отрыва. Однако в методе вихревых элементов, который может использоваться для расчета отрывного обтекания гладких профилей, когда положение точек отрыва неизвестно, локальная погрешность в определении интенсивности вихревого слоя на профиле приводит к существенной погрешности в решении задачи в целом: неверно моделируется вихревой след, это влечет за собой ошибку в поле скоростей среды, что в свою очередь приводит к получению неверных значений аэродинамических нагрузок, действующих на профиль. Отметим, что указанная проблема актуальна не только для профилей с острой кромкой. При расчете обтекания гладких профилей наличие вблизи них вихревых элементов также приводит к возникновению погрешности в определении интенсивности вихревого слоя при использовании традиционного подхода, использовавшегося в методе дискретных вихрей. Причиной возникновения такой погрешности является особенность самой математической модели, представляющей собой сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта, и используемый численный метод — квадратурная формула, позволяющая выделять главное значение этого интеграла в смысле Коши [30].

Путь решения этой проблемы лежит в пересмотре подхода к построению расчетной схемы на профиле и получению математической модели, включающей в себя интегральное уравнение с ограниченным (по крайней мере, для гладкого профиля) ядром. О возможности использования подобного метода упоминается в [76], а в отчете [77] говорится о его эффективности по сравнению с классическим подходом. Однако в указанных работах не содержится описаний алгоритмов построения соответствующих расчетных схем и не приведены используемые расчетные формулы. Систематические исследования другими авторами в данном направлении ранее, по видимому, не проводились.

Следовательно, *разработка модифицированных расчетных схем метода вихревых элементов и получение соответствующих расчетных формул, использование которых позволит повысить точность определения интенсивности вихревого слоя на профиле, является важнейшей задачей, решение которой позволит существенно повысить точность решения задач аэрогидродинамики вихревыми методами.*

Отметим, что точность моделирования обтекания зависит не только от точности определения интенсивности вихревого слоя на профиле, но и от правильности моделирования эволюции вихревого следа, который образуется вблизи профиля и позади него. В вихревых методах след моделируется вихревыми элементами, движение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В силу большого количества уравнений в системе (число уравнений равно удвоенному количеству вихревых элементов) в большинстве работ по вихревым методам для ее численного решения используется явный метод Эйлера первого порядка точности. В то же время в [53, 55] указывается на возможность применения методов более высокого порядка. Однако эти идеи широкого распространения не получили: авторы работы [55] в начале 70-х годов располагали весьма скромными вычислительными ресурсами, а основным объектом исследования в [53] являются спутные следы за самолетами, для моделирования которых точности метода Эйлера достаточно. Эффективность использования численных методов второго и четвертого порядка точности для моделировании эволюции вихревых структур при отсутствии обтекаемого профиля показана в работе [45]; а авторами работ [10, 11] проведено тщательное исследование влияния эффектов схемной и физической вязкости на результат решения задачи методом вихревых элементов.

Таким образом, *повышение точности моделирования движения вихревого следа за счет применения численных методов второго или более высокого порядка точности также является актуальным направлением исследований.*



**Цель исследования.** Целью настоящей работы является повышение точности математического моделирования обтекания профилей произвольной формы потоком вязкой несжимаемой среды и определения их аэродинамических характеристик путем разработки новых расчетных схем метода вихревых элементов и их реализация в виде программного комплекса, позволяющего проводить серии расчетов с использованием различных вычислительных комплексов, включая современные многопроцессорные системы кластерного типа.

Для достижения поставленной цели потребовалось решение **следующих основных задач:**

1. Реализация метода второго порядка точности для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение вихревых элементов.
2. Реализация нового подхода к обеспечению выполнения граничного условия прилипания, основанного на обращении в нуль касательной компоненты скорости на профиле.
3. Разработка иерархии расчетных схем метода вихревых элементов, основанных на различных подходах к аппроксимации граничного условия на профиле, и получение аналитических формул для вычисления коэффициентов матриц и правых частей возникающих при этом систем линейных алгебраических уравнений.
4. Оценка точности, обеспечиваемой разработанными расчетными схемами при решении различных модельных задач.
5. Разработка и верификация параллельного программного комплекса для моделирования обтекания профилей и вычисления их аэродинамических характеристик.
6. Реализация в рамках программного комплекса приближенного быстрого метода расчета вихревого влияния и теоретическая оценка его трудоемкости.

**Методы исследования.** При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные классы математических методов: бессеточных лагранжевых методов вычислительной гидродинамики, теории интегральных уравнений, вычислительной математики и параллельных вычислений.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов гарантируется строгостью используемого математического аппарата и подтверждается сравнением результатов расчетов с известными аналитическими решениями, экспериментальными данными, а также результатами, полученными ранее другими авторами.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту.

1. Реализация метода второго порядка точности для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение вихревых элементов.
2. Реализация нового подхода к обеспечению выполнения граничного условия прилипания, основанного на равенстве нулю касательной компоненты скорости на профиле.
3. Иерархия расчетных схем метода вихревых элементов, основанных на различных подходах к обеспечению выполнения граничного условия на профиле, с соответствующими расчетными формулами.
4. Параллельный программный комплекс POLARA для расчета обтекания профилей методом вихревых элементов и вычисления действующих на них аэрогидродинамических нагрузок.
5. Уточненная теоретическая оценка трудоемкости приближенного быстрого метода расчета парных взаимодействий вихревых элементов.

**Практическая значимость** диссертационной работы связана с ее методологической и прикладной направленностью и состоит в возможности повышения точности математического моделирования обтекания профилей методом вихревых элементов за счет использования новых расчетных схем для определения циркуляций генерируемых вихревых элементов и метода второго порядка точности для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение вихревых элементов.

Разработан и зарегистрирован программный комплекс «POLARA — Моделирование обтекания профилей и определение их аэродинамических нагрузок методом вихревых элементов» (свидетельство о государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ № 2013617462 от 14.08.2013 г.).

**Апробация результатов работы.** Результаты диссертационной работы апробированы на VII Международной научной конференции студентов и молодых ученых (г. Киев, 2007), IX Международной конференции по математическому моделированию (г. Феодосия, 2008), XIV, XV и XVI Международных симпозиумах «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (г. Херсон, 2009, 2011 и 2013), V Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 2009), Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (г. Уфа, 2010 и г. Новосибирск, 2012), Всероссийской молодежной школе по параллельному программированию «Суперкомпьютерные технологии и высокопроизводительные вычисления в образовании, науке и промышленности» (г. Москва, 2010), V Международной конференции «International Conference on Vortex Flows and Vortex Models (ICVFM)» (г. Казерта, Италия, 2010), X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Нижний Новгород, 2011), XXXVIII Международной молодежной научной конференции «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2012),

Международной конференции «International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD-2012)» (г. Париж, Франция, 2012), VI Международном конгрессе «Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS-2012)» (г. Вена, Австрия, 2012), Международной летней школе-конференции «Advanced Problems in Mechanics (APM-2013)» (г. Санкт-Петербург, 2013). Результаты исследований обсуждались также на Международном авиационно-космическом научно-гуманитарном семинаре имени С. М. Белоцерковского (ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского, ВВИА им. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, 2010, 2012).

Диссертация является составной частью фундаментальных исследований, проводимых в рамках гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-255.2012.8) и гранта Президента РФ по государственной поддержке молодых российских ученых — кандидатов наук (грант МК-6482.2012.8).

**Публикации.** Основные научные результаты диссертации отражены в 11 научных статьях [19, 21, 32, 35, 41, 43, 44, 49, 52, 80, 83], в том числе в 6 статьях в научных журналах и изданиях, которые включены в Перечень российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций [21, 32, 35, 44, 49, 52], а также 10 тезисах и докладах международных и всероссийских конференций [18, 36, 38, 39, 40, 42, 50, 51, 81, 82].

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, проведены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю, заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Диссертационная работа изложена на 130 страницах, содержит 42 иллюстрации и 13 таблиц. Библиография включает 92 наименования.

# 1. Метод вихревых элементов для моделирования течений вязкой несжимаемой среды

В данной главе рассмотрена задача о математическом моделировании обтекания профиля потоком вязкой несжимаемой среды и описан численный метод ее решения — метод вихревых элементов. Исследована возможность повышения точности расчетов, проводимых с использованием данного метода за счет реализации метода второго порядка точности для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение вихревых элементов. На примере задачи о моделировании диффузии круглого вихря в вязкой среде показана целесообразность использования данного подхода для моделирования эволюции вихревых структур в отсутствие обтекаемого профиля. На примере задачи о моделировании обтекания кругового профиля показано, что данный подход может приводить к повышению точности расчетов, но лишь в ограниченном диапазоне значений числа Рейнольдса.

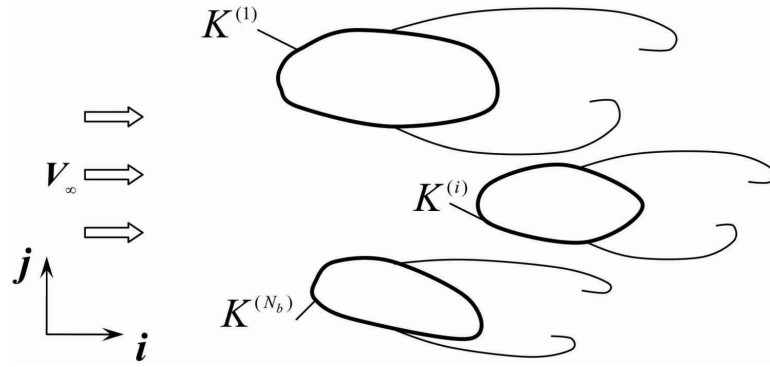
## 1.1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим плоскопараллельное обтекание неподвижных недеформируемых профилей потоком вязкой несжимаемой среды. Скорость набегающего потока будем считать постоянной,

$$\mathbf{V}_\infty = V_{\infty x} \mathbf{i} + V_{\infty y} \mathbf{j},$$

(здесь  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  — орты прямоугольной системы координат на плоскости  $OXY$ ), а среду — безграничной и возмущаемой только профилями. Обтекаемые профили в плоскости  $OXY$  задаются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми  $K^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N_b$ , где  $N_b$  — число профилей (рис. 1.1). В дальнейшем совокупность всех профилей  $K^{(i)}$  будем обозначать через  $K$ , т. е.

$$K = \bigcup_{i=1}^{N_b} K^{(i)}.$$



**Рис. 1.1.** Схема обтекания профилей

Движение вязкой несжимаемой среды [31] описывается уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (1.1)$$

и уравнением Навье – Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nu \Delta \mathbf{V} - \frac{\nabla p}{\rho}, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = V_x(x, y, t)\mathbf{i} + V_y(x, y, t)\mathbf{j}$  — скорость среды в точке  $\mathbf{r}(x, y)$  в момент времени  $t$ ;  $p = p(\mathbf{r}, t)$  — давление;  $\rho$  — плотность среды, которую будем считать постоянной ( $\rho = \text{const}$ );  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $\nabla$  — оператор Гамильтона;  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $S$  — область, занятая средой (область течения).

Граничные условия на бесконечности имеют вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{V}_\infty, \quad p(\mathbf{r}, t) \rightarrow p_\infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{V}_\infty$  и  $p_\infty$  — постоянные скорость и давление в набегающем потоке; на профилях выполняется условие прилипания

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \in K. \quad (1.4)$$

Задача (1.1)–(1.2) с граничными условиями (1.3)–(1.4) дополняется начальным условием: поле скоростей среды в начальный момент времени  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, 0)$  считается известным.

Исключим из постановки задачи давление  $p$ , используя величину

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$$

— поле завихренности.

Запишем уравнение Навье — Стокса (1.2) в форме Громеки — Лэмба [26]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \nu \Delta \mathbf{V} - \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right)$$

и применим операцию взятия ротора к обеим частям данного уравнения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.5)$$

Воспользуемся тем, что для любого гладкого векторного поля справедливо соотношение [25]

$$\Delta \boldsymbol{\Omega} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}), \quad (1.6)$$

тогда уравнение (1.5) с учетом условия  $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$  можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times ((\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) + \nu(\nabla \times \boldsymbol{\Omega})) = 0. \quad (1.7)$$

В случае плоского течения среды, когда  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} = 0$ , справедлива формула [1]

$$\nabla \times \boldsymbol{\Omega} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times ((\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega})}{|\boldsymbol{\Omega}|^2},$$

тогда можно ввести вектор диффузионной скорости, вызванной влиянием вязкости,

$$\mathbf{W} = \nu \frac{(\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega}}{|\boldsymbol{\Omega}|^2} \quad (1.8)$$

и преобразовать уравнение (1.7) к виду

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$ .

Учитывая, что в случае плоского течения  $\boldsymbol{\Omega} = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \Omega \mathbf{k}$ , получаем

$$(\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} & -\frac{\partial \Omega}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega \end{vmatrix} = -\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial x} \mathbf{i} - \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial y} \mathbf{j} = -\Omega (\nabla \Omega).$$

В итоге выражение (1.8) принимает более удобный для вычислений вид:

$$\mathbf{W} = \nu \frac{-\Omega(\nabla\Omega)}{\Omega^2} = -\nu \frac{\nabla\Omega}{\Omega}. \quad (1.10)$$

Отметим, что далее, если не оговорено особо, под завихренностью будем понимать скалярную величину  $\Omega = \Omega(\mathbf{r}, t)$ .

Таким образом, задачу для дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2) с неизвестным векторным полем скоростей  $\mathbf{V}$  и скалярным полем давления  $p$  можно свести к задаче для дифференциального уравнения (1.9) с одним неизвестным векторным полем завихренности  $\mathbf{\Omega}$ , имеющим одну ненулевую компоненту, т. е. фактически к одному дифференциальному уравнению для скалярного поля  $\Omega$ .

Для уравнения (1.9) справедлив аналог теоремы Томсона для вязкой среды [1]: циркуляция вектора скорости, вычисленная по контуру, каждая точка которого движется по векторным линиям поля  $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{W}$ , сохраняется. Это означает, что генерации новой завихренности в области течения  $S$  не происходит, а осуществляется только движение существующей завихренности вдоль векторных линий поля  $\mathbf{U}$ ; в то время как новая завихренность генерируется только на границе области течения — на профилях  $K$ .

Таким образом, в плоском случае решение задачи о моделировании течения вязкой несжимаемой среды можно свести к моделированию процесса генерации завихренности на профилях и движения имеющейся завихренности в области течения.

Отметим, что использование модели несжимаемой среды для моделирования внешних течений реальных жидкостей и газов при малых дозвуковых скоростях (соответствующих числам Маха, не превышающим 0,30...0,45) вполне оправдано и не вносит существенных погрешностей [70].



## 1.2. Восстановление поля скоростей по известному распределению завихренности и расчет аэродинамических нагрузок

Зная распределение завихренности  $\Omega(\mathbf{r}, t)$  в области течения, можно восстановить по нему поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , а также вычислить диффузионную скорость  $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t)$ . Приведем выражения для этих величин [1, 31].

Согласно теореме Гельмгольца о разложении векторных полей [26], если дивергенция и ротор произвольного векторного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  определены в каждой точке области, то всюду в этой области векторное поле может быть представлено в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_\Phi(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}, t), \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{V}_\Phi(\mathbf{r}, t) = \nabla\Phi$ ;  $\mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \Psi$  ( $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$  — скалярный потенциал,  $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$  — векторный потенциал). В дальнейшем везде считается, что все характеристики течения зависят от  $\mathbf{r}$  и  $t$ , однако в явном виде зависимость от этих переменных не указывается.

В качестве скалярного потенциала  $\Phi$  можно взять величину  $\Phi_{V_\infty} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{r}$ , тогда для векторного потенциала получаем соотношение

$$\nabla \times (\nabla \times \Psi) = \Omega,$$

или, с учетом формулы (1.6),

$$-\Delta\Psi + \nabla(\nabla \cdot \Psi) = \Omega. \quad (1.12)$$

Поскольку векторный потенциал определен с точностью до градиента скалярной функции, выберем  $\Psi$  так, что  $\nabla \cdot \Psi = 0$ . Тогда выражение (1.12) примет вид уравнения Пуассона:

$$\Delta\Psi = -\Omega. \quad (1.13)$$

Будем считать, что поле завихренности  $\Omega$  локализовано в области  $S$  (области течения), за пределами которой она отсутствует или экспоненциально убывает, и нормальная компонента  $\Omega$  обращается в нуль на

границе области:  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$  при  $\mathbf{r} \in K$ , что всегда верно в случае плоского течения. Решением уравнения (1.13) является функция [6]

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \ln \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|} \right) dS_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Тогда в силу определения  $\mathbf{V}_{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{\Psi}$  получим

$$\mathbf{V}_{\Omega} = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times \nabla_r \left( \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|} \right) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \iint_S \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Здесь и далее запись  $\nabla_r$  означает, что дифференцирование ведется по координатам точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , а запись  $dS_{\boldsymbol{\xi}}$  — что при интегрировании по площади  $S$  переменными являются координаты точки с радиус-вектором  $\boldsymbol{\xi}$ .

Таким образом, получаем

$$\mathbf{V}_{\Omega} = \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) представляет собой закон Био — Савара, позволяющий определить  $\mathbf{V}_{\Omega}(\mathbf{r}, t)$  по известному распределению завихренности.

В итоге для восстановления полей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  с учетом (1.8), (1.11) и (1.14) получаем соотношения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\Phi} + \mathbf{V}_{\Omega} = \mathbf{V}_{\infty} + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_{\Phi} + \mathbf{V}_{\Omega} + \mathbf{W} = \mathbf{V}_{\infty} + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} - \nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}. \quad (1.16)$$

Отметим, что поле скоростей, вычисляемое по (1.15), удовлетворяет уравнению неразрывности (1.1) автоматически.

Для вычисления диффузионной скорости (1.10) будем использовать формулы, полученные в монографии [1], которые основаны на интегральных представлениях  $\Omega$  и  $\nabla \Omega$ .

Если рассмотреть величины

$$I_1(\mathbf{r}) = \iint_S \Omega(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi, \quad (1.17)$$

$$I_0(\mathbf{r}) = \iint_S \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi, \quad \varepsilon^* = \text{const}, \quad (1.18)$$

и найти их градиенты

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}) = \nabla I_1(\mathbf{r}) = - \iint_S \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \varepsilon^*} \Omega(\boldsymbol{\xi}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{r}) = \nabla I_0(\mathbf{r}) = - \iint_S \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \varepsilon^*} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi, \quad (1.20)$$

то завихренность  $\Omega$  представляется в виде

$$\Omega(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \frac{I_1}{I_0},$$

а ее градиент имеет вид

$$\nabla \Omega = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left( \frac{\nabla I_1}{I_0} - \frac{I_1 \nabla I_0}{I_0^2} \right) = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{I}_2}{I_0} - \frac{I_1 \mathbf{I}_3}{I_0^2} \right).$$

Данные представления справедливы для любой непрерывно-дифференцируемой в области  $S$  скалярной функции  $\Omega$ . Согласно формуле (1.10), получаем

$$\mathbf{W} = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega} = -\nu \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\mathbf{I}_2}{I_0} - \frac{I_1 \mathbf{I}_3}{I_0^2} \right) / \frac{I_1}{I_0} \right] = \nu \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left( -\frac{\mathbf{I}_2}{I_1} + \frac{\mathbf{I}_3}{I_0} \right). \quad (1.21)$$

Как указано в [1], выражения (1.18) и (1.20) можно привести к контурным интегралам:

$$I_0(\mathbf{r}) = 2\pi\varepsilon^{*2} - \oint_K \varepsilon^* \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{r}'(|\mathbf{r}'| + \varepsilon^*)}{|\mathbf{r}'|^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}'|}{\varepsilon^*}\right) \right) dl_\xi, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{r}) = - \oint_K \mathbf{n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}'|}{\varepsilon^*}\right) dl_\xi, \quad (1.23)$$

где  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}$ , нормаль  $\mathbf{n}$  направлена от жидкости к телу. В практических расчетах  $\varepsilon^*$  полагается малой, но конечной величиной; методика определения значения этого параметра будет описана в разделе 1.4.

Зная распределение завихренности  $\Omega$  в области течения, по формулам, приведенным в [1] и являющимся обобщениями интегралов Бернулли и Коши — Лагранжа на случай течений вязкой жидкости, можно вычислить главный вектор сил, действующих на обтекаемый профиль:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_p(t) + \mathbf{F}_t(t). \quad (1.24)$$

Здесь  $\mathbf{F}_p(t)$  — аэродинамическая сила, равная интегралу от давления по профилю, взятому с обратным знаком, которая может быть найдена по формуле

$$\mathbf{F}_p(t) = \rho \frac{d}{dt} \oint_K (\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{r}) dl_r, \quad (1.25)$$

где  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}, t) = \gamma(\mathbf{r}, t)\mathbf{k}$  — интенсивность вихревого слоя на профиле;  $\mathbf{F}_t(t)$  — сила вязкого трения, действующая на профиль в вязкой среде и вычисляемая по формуле

$$\mathbf{F}_t(t) = \rho\nu \oint_K (\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)) dl_r. \quad (1.26)$$

Аналогично в [1] представлены формулы, которые могут использоваться для вычисления главного момента аэродинамических сил  $\mathbf{M}(t)$ .

Проекции главного вектора сил  $\mathbf{F}$  на оси правой системы координат называют силой лобового сопротивления  $F_{xa}$  и подъемной силой  $F_{ya}$ . Под аэродинамическим моментом  $M$  понимается взятая с обратным знаком проекция вектора  $\mathbf{M}$  на ось аппликат [3].

На практике обычно работают с безразмерными коэффициентами лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента, которые соответственно вычисляются по формулам

$$C_{xa}(t) = \frac{2F_{xa}(t)}{\rho b V_\infty^2}, \quad C_{ya}(t) = \frac{2F_{ya}(t)}{\rho b V_\infty^2}, \quad C_m(t) = \frac{2M(t)}{\rho b^2 V_\infty^2}, \quad (1.27)$$

где  $b$  — характерный размер (хорда) профиля.

Для получения значений стационарных аэродинамических коэффициентов  $C_{xa}$ ,  $C_{ya}$  и  $C_m$  проводится усреднение по большому промежутку времени, когда течение можно считать близким к установившемуся.

### 1.3. Моделирование распределения завихренности с помощью вихревых элементов

При решении задач методом вихревых элементов [12, 47, 76, 90], непрерывное распределение завихренности  $\Omega(\mathbf{r})$  моделируется набором из  $N$  вихревых элементов — вихревых нитей, перпендикулярных области течения. Каждый вихревой элемент характеризуется положением в потоке  $\mathbf{r}_i$  и циркуляцией  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.28)$$

где  $\delta(\mathbf{r})$  — двумерная дельта-функция Дирака. При этом выражение для скорости среды  $\mathbf{V}$  (2.1) в фиксированный момент времени примет вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}_i) \Gamma_i, \quad (1.29)$$

тогда поле скоростей  $\mathbf{U}$ , учитывающее диффузионную скорость и вычисляемое по формуле (1.16), запишется в виде

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}_i) \Gamma_i + \mathbf{W}(\mathbf{r}). \quad (1.30)$$

Для описания движения вихревых элементов требуется вычисление скоростей  $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}(\mathbf{r}_i)$  в точках их расположения:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j) \Gamma_j + \mathbf{W}(\mathbf{r}_i). \quad (1.31)$$

Величина  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j)$  — скорость в точке  $\mathbf{r}_i$ , индуцируемая расположенной в точке  $\boldsymbol{\xi}_j$  вихревой нитью единичной циркуляции, и вычисляемая согласно (1.14) по формуле

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j)}{|\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j|^2}.$$

Чтобы предотвратить неограниченный рост скоростей при приближении к точкам расположения вихревых элементов, вычисление  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j)$  следует проводить по модифицированной формуле

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j)}{\max\{|\mathbf{r}_i - \boldsymbol{\xi}_j|^2, \varepsilon^2\}}, \quad (1.32)$$

где  $\varepsilon$  — радиус вихревого элемента, который выбирается достаточно малым. Такое задание поля скоростей соответствует модели круглого вихря Рэнкина [31]. Таким образом при проведении расчетов *вихревой элемент* — это круглый вихрь Рэнкина постоянного радиуса, характеризуемый положением и циркуляцией.

#### 1.4. Расчет движения вихревых элементов и вычисление аэродинамических нагрузок

Из формулы (1.9) следует, что завихренность в области течения перемещается по векторным линиям поля  $\mathbf{U}$ , представляющего собой сумму поля скоростей среды  $\mathbf{V}$  и поля диффузионных скоростей  $\mathbf{W}$ . Следовательно, вихревые элементы сохраняют свои циркуляции,  $\Gamma_i = \text{const}$ , а их движение описывается решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{U}_i, \quad \mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{i0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.33)$$

С учетом выражения (1.31) для поля  $\mathbf{U}_i$ , можно записать

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \Gamma_j + \mathbf{W}(\mathbf{r}_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.34)$$

Рассмотрим выражение для диффузионной скорости  $\mathbf{W}$  (1.21) в дискретном случае [1]. Если поле завихренности моделируется при помощи  $N$  вихревых элементов, расположенных в точках  $\mathbf{r}_i$  и имеющих циркуляции  $\Gamma_i$ , то при вычислении в точке  $\mathbf{r}_j$  величин (1.17) и (1.19)

интегралы заменяют конечными суммами с учетом выражения для завихренности (1.28):

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{r}_j) = - \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| \varepsilon^*} \Gamma_i \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}{\varepsilon^*}\right), \quad (1.35)$$

$$I_1(\mathbf{r}_j) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}{\varepsilon^*}\right). \quad (1.36)$$

В качестве  $\varepsilon^*$  выбирается малая длина, которая, с одной стороны, должна быть меньше расстояния, на котором происходит существенное изменение значения  $\Omega$ , а с другой стороны должна превышать характерное расстояние между вихревыми элементами [1]. В формулах (1.35) и (1.36) величина  $\varepsilon^*$  не зависит от индекса суммирования  $i$ , но зависит от той точки, в которой вычисляется диффузионная скорость. Поскольку ее необходимо вычислять лишь в точках расположения вихревых элементов  $\mathbf{r}_j$ , т. е. фактически  $\varepsilon^* = \varepsilon_j^*$ ; в расчетах используется следующий алгоритм, аналогичный описанному в [1]: для выбора значения  $\varepsilon^*$  в точке  $\mathbf{r}_j$  находятся квадраты расстояний до трех ближайших к этой точке вихревых элементов, а затем извлекается квадратный корень из их среднего арифметического.

Область течения в общем случае представляет собой внешность обтекаемого профиля (или системы обтекаемых профилей), который в расчетах аппроксимируется ломаной, состоящей из  $N_p$  звеньев, которые будем называть *панелями*. Тогда интеграл (1.23) приближенно представляется суммой по отрезкам-панелям [1]

$$\mathbf{I}_3(\mathbf{r}_j) \approx - \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{n}_k \exp(-|\boldsymbol{\eta}_k|) \Delta l_k, \quad (1.37)$$

где

$$\boldsymbol{\eta}_k = \frac{\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k}{\varepsilon^*}, \quad \hat{\mathbf{r}}_k = \frac{\mathbf{r}_k^b + \mathbf{r}_k^e}{2}, \quad (1.38)$$

$\mathbf{r}_k^b$  и  $\mathbf{r}_k^e$  — радиус-векторы начала и конца  $k$ -й панели,  $\Delta l_k$  — длина  $k$ -й панели,  $\mathbf{n}_k$  — единичная нормаль к  $k$ -й панели, направленная от жидкости к профилю.

Аналогично выражение для величины  $I_0$  можно приближенно представить в виде:

$$I_0(\mathbf{r}_j) \approx 2\pi\varepsilon^{*2} - \varepsilon^* \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\boldsymbol{\eta}_k \cdot \mathbf{n}_k}{\eta_k^2} (|\boldsymbol{\eta}_k| + 1) \exp(-|\boldsymbol{\eta}_k|) \Delta l_k. \quad (1.39)$$

Если вихрь расположен близко к панели, то вклад этой панели в значения величин  $\mathbf{I}_3$  и  $I_0$  по формулам (1.37)–(1.39) будет вычисляться с большой погрешностью, поэтому влияние этих панелей учитывается следующими способами.

1. Если расстояние  $|\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k|$  порядка длины панели  $\Delta l_k$ , то ее следует разбить на более мелкие части и просуммировать выражения (1.37) и (1.39) по частям панели.
2. Если  $|\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k| \ll \Delta l_k$ , т. е. вихрь расположен практически на панели, вычислять влияние от нее следует по приближенным аналитическим формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_3(\mathbf{r}_j) &\approx \mathbf{n}_k \Delta l_k \int_{-0.5}^{0.5} \exp\left(-\left|\frac{\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k - \alpha \Delta l_k \boldsymbol{\tau}_k}{\varepsilon^*}\right|\right) d\alpha = \\ &= 2\mathbf{n}_k \varepsilon^* \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta l_k}{2\varepsilon^*}\right)\right), \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\tau}_k$  — единичный вектор касательной к  $k$ -й панели, и аналогично

$$I_0(\mathbf{r}_j) = \pi\varepsilon^{*2}.$$

3. Если  $|\mathbf{r}_j - \hat{\mathbf{r}}_k| \gg \Delta l_k$ , то влияние данной панели на рассматриваемый вихрь не учитывается.

Показано [1], что при устремлении  $N$  и  $N_p$  к бесконечности и стремлении  $\varepsilon^*$  к нулю выражения (1.35)–(1.39) стремятся к значениям, вычисляемым по формулам (1.17)–(1.20) для исходного гладкого поля завихренности  $\Omega$ .



Расчет скоростей движения вихревых элементов является самым трудоемким этапом решения задачи и требует наибольших затрат вычислительных ресурсов, поэтому для сокращения времени счета используются параллельные вычислительные алгоритмы [7], что подробнее будет описано в третьей главе.

При движении вихревых элементов в силу погрешности вычислений возможно попадание некоторых из них внутрь обтекаемого профиля. Поэтому в вычислительном алгоритме предусматривается проверка на возникновение таких ситуаций: в случае обнаружения вихревых элементов, прошедших внутрь профиля, запоминаются список циркуляций элементов  $\Gamma_j^{(d)}$ , и номеров панелей, которые они пересекают. Сами вихревые элементы при этом удаляются из расчета с последующим внесением поправки в суммарную циркуляцию в области течения [1].

По известным положениям и интенсивностям вихревых элементов с помощью дискретных аналогов формул (1.24)–(1.26) могут быть вычислены аэродинамические нагрузки. Главный вектор сил давления находится по формуле [1]:

$$\mathbf{F}_p(t) = \rho \left( \sum_{i=1}^{N_p} \Gamma_i^{(b)} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i^{(b)}}{\Delta t} - \sum_j \Gamma_j^{(d)} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}_j^{(d)}}{\Delta t} \right), \quad (1.40)$$

где  $\rho$  — постоянная плотность среды;  $\mathbf{r}_i^{(b)}$  — радиус-вектор центра  $i$ -й панели;  $\Gamma_i^{(b)}$  — суммарная циркуляция вихревого слоя, образовавшегося на данном шаге расчета на  $i$ -й панели; суммирование по индексу  $j$  производится по вихревым элементам, удаленным из расчета при прохождении границы профиля  $K$  на данном шаге; вектор  $\mathbf{r}_j^{(d)}$  определяет положение вихревого элемента в момент его удаления при пересечении профиля;  $\Delta t$  — шаг расчета по времени.

Сила вязкого трения  $\mathbf{F}_{vis}$  (1.26) вычисляется по формуле [1]

$$\mathbf{F}_{vis}(t) = -\rho\nu \sum_{i=1}^N \left( \Gamma_i \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{n}_k}{I_0(\mathbf{r}_k^{(b)})} \exp(-|\boldsymbol{\eta}_k|) \Delta l_k \right), \quad (1.41)$$

где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $I_0$  определяется по формуле (1.39); вектор  $\boldsymbol{\eta}_k$  находится по формуле (1.38).

Также возможно вычислить момент сил относительно точки  $\mathbf{r}_c$ :

$$\mathbf{M}(t) = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)^2 \frac{\Gamma_i^{(b)}}{\Delta t} \mathbf{k} - \frac{\rho}{2} \sum_{j=1} \Gamma_j^{(d)} \frac{\Gamma_j^{(d)}}{\Delta t} \mathbf{k} + \mathbf{M}_{vis}, \quad (1.42)$$

где вектор  $\mathbf{M}_{vis}$  — момент сил трения, вычисляемый по формуле:

$$\mathbf{M}_{vis}(t) = -\rho\nu \sum_{i=1}^N \Gamma_i \left( \sum_{k=1}^{N_p} \frac{(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r}_c) \cdot \mathbf{n}_k}{I_0(\mathbf{r}_k)} \exp(-|\boldsymbol{\eta}_k|) \Delta l_k \right) \mathbf{k}. \quad (1.43)$$

Отметим, что на следующем шаге расчета также требуется учесть, что некоторые вихревые элементы были удалены. Это осуществляется заданием суммарной циркуляции генерируемых на профиле вихревых элементов, равной  $\sum_j \Gamma_j^{(d)}$ .

## 1.5. Метод второго порядка точности

При проведении расчетов вихревыми методами для повышения точности результата традиционно применяют процедуру измельчения шага по времени и увеличения количества панелей на профиле. Это приводит к более тщательной аппроксимации поля завихренности вихревыми элементами и более точному выполнению граничных условий на профиле. Данный подход успешно применяется, в частности, при проведении расчетов течений идеальной среды методом дискретных вихрей [30, 47]. Вычислительные затраты на проведение расчета при этом повышаются, однако время проведения расчета остается приемлемым ввиду малого количества вихревых элементов в области течения, поскольку предполагается, что сход завихренности в поток происходит лишь с отдельных точек (кромки) профиля. Существенно иная ситуация наблюдается при моделировании течений вязкой среды, когда источником завихренности в потоке является весь профиль. В этом случае на каждом шаге расчета в поток сходит вихревой элемент с каждой панели, поэтому при

измельчении панелей и уменьшении шага по времени количество вихрей в потоке резко возрастает. Это, в свою очередь ведет к квадратичному росту временных затрат на расчет скоростей вихревых элементов на каждом шаге расчета и многократному увеличению времени решения всей задачи. Несмотря на то, что в реальности в силу ряда причин вычислительная трудоемкость оказывается несколько меньше, чем в этой простой оценке, измельчать размеры панелей и уменьшать шаг по времени можно лишь в ограниченном диапазоне значений.

В связи с этим необходимо искать иные пути повышения точности расчета. Наиболее очевидным представляется повышение точности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.33) на каждом шаге расчета. Как правило, для ее численного решения используется явный метод Эйлера, имеющий первый порядок точности, согласно которому новые положения вихревых элементов  $\mathbf{r}_i(t_{k+1})$  в момент времени  $t_{k+1}$  определяются по формуле:

$$\mathbf{r}_i(t_{k+1}) = \mathbf{r}_i(t_k) + \mathbf{U}(\mathbf{r}_i, t_k)\Delta t, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.44)$$

Возможность использования для интегрирования системы (1.33) численных методов более высокого порядка точности упоминалась в работах [55, 53], однако систематические исследования в этом направлении до недавнего времени, по-видимому, не проводились.

Рассмотрим особенность использования метода Рунге — Кутты второго порядка точности [59], в соответствии с которым новые положения вихревых элементов в момент времени  $t_{k+1}$  определяются по формуле

$$\mathbf{r}_i(t_{k+1}) = \mathbf{r}_i(t_k) + \mathbf{U}^*(\mathbf{r}_i^*, t_{k+1/2})\Delta t, \quad (1.45)$$

где

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i(t_k) + \mathbf{U}(\mathbf{r}_i, t_k)\frac{\Delta t}{2}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.46)$$

Здесь  $\mathbf{U}^* = \mathbf{V}^* + \mathbf{W}^*$  — поле скоростей среды и поле диффузионных скоростей, вычисляемые в момент времени  $t = t_{k+1/2} = t_k + \Delta t/2$ .

Особенностью реализации данного метода является необходимость обеспечения в «промежуточный» момент времени  $t_{k+1/2}$  выполнения граничного условия, т. е. поле скоростей  $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t_{k+1/2})$  должно удовлетворять граничному условию на профилях. Поле скоростей  $\mathbf{V}$  определяется набегающим потоком, положениями вихревых элементов и их циркуляциями по закону Био — Савара, поэтому даже если поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_k)$  в момент времени  $t_k$  удовлетворяло граничному условию, после перемещения всех вихревых элементов «на полшага» по формуле (1.46) потребуется его коррекция. Ее можно осуществить, если учесть влияние завихренности, генерируемой на профиле за эту половину шага. Для этого в момент времени  $t_{k+1/2}$  на профиле генерируются  $N_p$  новых «фиктивных» вихревых элементов, циркуляции которых находятся тем же путем, что и циркуляции вихрей, сбрасываемых в пелену на каждом шаге расчета. Эти вихревые элементы оказывают влияние на поле  $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*(\mathbf{r}_i^*, t_{k+1/2}) = \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t_{k+1/2}) + \mathbf{W}^*(\mathbf{r}, t_{k+1/2})$ , окончательно вычисляемое по формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^*(\mathbf{r}_i^*, t_{k+1/2}) = & \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_j^*) \Gamma_j + \mathbf{W}(\mathbf{r}_i^*, t_{k+1/2}) + \\ & + \sum_{q=1}^{N_p} \mathbf{Q}(\mathbf{r}_i^* - \mathbf{c}_q) \Gamma_q^{(fict)}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Здесь  $\Gamma_q^{(fict)}$  — циркуляция  $q$ -го «фиктивного» вихревого элемента, сгенерированного в «промежуточный» момент времени  $t_{k+1/2}$ ,  $\mathbf{c}_q$  — радиус-вектор точки рождения  $q$ -го вихревого элемента.

После выполнения коррекции поля скоростей «фиктивные» вихревые элементы далее в расчете не используются и удаляются из расчетной схемы, и вычисление  $\mathbf{r}_i(t_{k+1})$  ведется для вихрей в пелене с номерами  $i = 1, \dots, N$ , т. е. для тех, которые присутствовали на  $k$ -м шаге. Таким образом, алгоритм решения задачи с помощью метода Рунге — Кутты состоит из следующих этапов:

- 1) определение в момент времени  $t_{k+1/2}$  положений вихревых элементов, находившимися в момент времени  $t_k$  в точках  $\mathbf{r}_i$ , по формуле (1.46),  $i = 1, \dots, N$ ;
- 2) расчет циркуляций  $N_p$  образованных на профиле «фиктивных» вихревых элементов;
- 3) вычисление скоростей  $\mathbf{U}^*(\mathbf{r}_i^*, t_{k+1/2})$  по формуле (1.47),  $i = 1, \dots, N$ ;
- 4) нахождение новых положений вихревых элементов  $\mathbf{r}_i(t_{k+1})$ , по формуле (1.45),  $i = 1, \dots, N$ .

Таким образом, использование предложенного алгоритма реализации метода Рунге — Кутты для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.33) может повысить точность расчетов, без изменения параметров расчетной схемы. Отметим, что аналогичный подход может быть использован и для реализации методов Рунге — Кутты более высокого порядка точности.

Следует отметить, что реализация метода Рунге — Кутты второго порядка точности существенно упрощается, если рассматривается задача моделирования динамики вихревых структур в отсутствие обтекаемых профилей. В этом случае, очевидно, нет необходимости обеспечения граничных условий на профиле, а следовательно — и генерации «фиктивных» вихревых элементов.

### **1.6. Верификация метода Рунге — Кутты второго порядка точности**

Проведем верификацию предложенного алгоритма и оценим его влияние на точность решения двух различных задач: задачи о диффузии круглого вихря [31] и задачи определения стационарного коэффициента лобового сопротивления кругового профиля в вязкой среде.

### 1.6.1. Математическое моделирование диффузии круглого вихря

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  в вязкую несжимаемую жидкость введена бесконечная вихревая нить, которой в перпендикулярной к ней плоскости соответствует точечный вихрь с циркуляцией  $\Gamma$ . Данная задача имеет точное решение [31], и распределение завихренности в момент времени  $t$  имеет вид

$$\Omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad (1.48)$$

где  $r$  — расстояние до оси вихря.

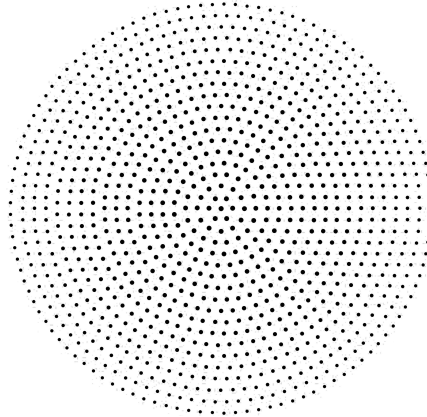
Рассмотрим окружность некоторого радиуса  $R$  и найдем суммарную завихренность внутри этой окружности в момент времени  $t$ :

$$\Gamma_R(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) r dr = \Gamma \left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4\nu t}\right)\right). \quad (1.49)$$

Будем теперь считать, что начальное распределение завихренности  $\Omega_0$  соответствует распределению (1.49) в момент времени  $t_0$ . Необходимо смоделировать дальнейшее поведение вихря в идеальной и вязкой среде при  $t > t_0$  методом вихревых элементов, решая численно задачу Коши (1.33). Полученное численное решение сравним с аналитическим решением (1.49), вычислив суммарную завихренность в круге заданного радиуса. Отметим, что в данном случае количество вихревых элементов остается неизменным во времени.

Далее все параметры расчетных схем считаются безразмерными. Будем считать, что циркуляция исходной вихревой нити  $\Gamma = 1,0$ , коэффициент кинематической вязкости среды  $\nu = 1/(2000\pi) \approx 0,00016$ , начальный момент времени  $t_0 = 2000\pi \approx 6283$ . Пользуясь формулой (1.49), легко установить, что при  $t = t_0$  более 99,8% всей завихренности сосредоточено внутри круга радиуса  $R = 5,0$ . Распределение завихренности внутри этого круга далее моделируется при помощи  $N = 1066$  вихревых элементов, интенсивности которых выбираются равными интегралу

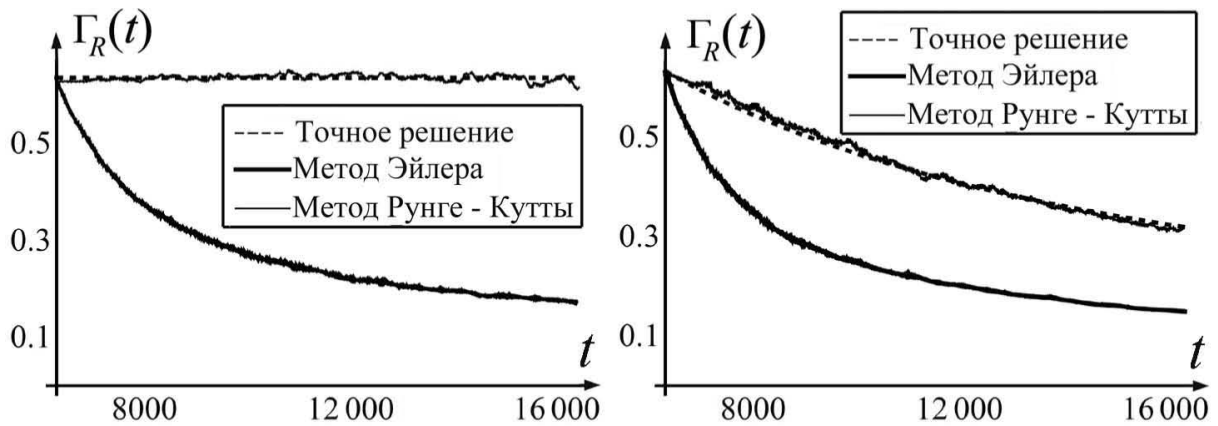
от точного решения (1.48) по соответствующей площади (рис. 1.2). Шаг расчета по времени выбирался равным  $\Delta t = 1,0$ .



**Рис. 1.2.** Вихревые элементы, моделирующие распределение завихренности в круглом вихре. Размеры точек, обозначающих вихревые элементы, пропорциональны их циркуляциям

Сначала производился расчет эволюции указанного выше распределения завихренности (круглого вихря) в идеальной среде. Искомой величиной являлась суммарная завихренность в круге радиуса  $R = 2,0$  при  $t > t_0$ . Поскольку в идеальной жидкости диффузии завихренности не происходит, суммарная завихренность в круге любого радиуса должна сохранять постоянное значение. На рис. 1.3, а приведен график зависимости данной величины от времени. Затем расчет производился для случая вязкой среды с указанным выше коэффициентом кинематической вязкости, равным (рис. 1.3, б), и результат сравнивался с аналитическим решением (1.49).

Из рисунков видно, что численное решение, найденное при использовании метода Эйлера первого порядка точности, в обоих случаях дает большое отклонение от точного решения, в отличие от результата, полученного с применением метода Рунге — Кутты второго порядка точности. Более того, судя по рисунку, «схемная вязкость» метода Эйлера оказывается существенно больше, чем то влияние, которое оказывает на решение физическая вязкость. Отметим, что вопросу исследования эффектов типа схемной вязкости в вихревых методах посвящены работы [10, 11].



**Рис. 1.3.** Эволюция вихря в идеальной (а) и вязкой среде (б), рассчитанная методом Эйлера и методом Рунге — Кутты второго порядка точности

Таким образом, использование численных методов второго порядка точности представляется целесообразным при математическом моделировании эволюции вихревых структур.

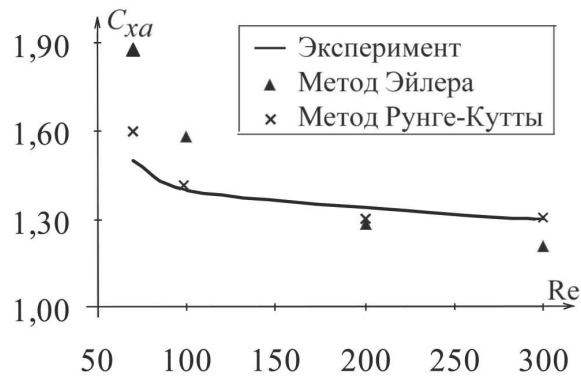
### 1.6.2. Математическое моделирование обтекания кругового профиля при различных значениях числа Рейнольдса

Существенно больший интерес представляют задачи, в которых имеется обтекаемый профиль, а одной из целей математического моделирования его обтекания является определение аэродинамических характеристик.

Рассмотрим модельную задачу о математическом моделировании обтекания кругового профиля при различных значениях числа Рейнольдса. При проведении расчетов использовались следующие безразмерные параметры: диаметр профиля  $D = 1,0$ ; скорость набегающего потока  $V_\infty = 1,0$ ; число панелей на профиле  $N_p = 200$ ; шаг расчета по времени  $\Delta t = 0,03$ ; радиус вихревого элемента  $\varepsilon = 0,008$ .

На рис. 1.4 показана зависимость безразмерного стационарного коэффициента лобового сопротивления от значения числа Рейнольдса, полученная как при использовании метода Эйлера, так и метода Рунге — Кутты второго порядка точности.





**Рис. 1.4.** Вычисленный коэффициент лобового сопротивления круга

Сопоставление с экспериментальными данными [92] показывает, что использование метода Рунге — Кутты второго порядка точности при значениях числа Рейнольдса  $Re = 70$ ,  $Re = 100$ ,  $Re = 200$  и  $Re = 300$  позволяет, как и предполагалось, получать более точные результаты по сравнению с методом Эйлера. Однако для более высоких значений числа Рейнольдса получить существенного повышения точности расчета за счет использования метода второго порядка точности не удастся.

Как показывают систематические расчеты, повысить их точность для более высоких значений числа Рейнольдса не удастся и за счет измельчения панелей на профиле и уменьшения шага по времени. Это говорит о том, что в алгоритме метода вихревых элементов имеются другие источники погрешности, связанные с погрешностью определения интенсивности вихревого слоя на профиле, требующие тщательного исследования.

## 1.7. Результаты главы 1

Рассмотрена задача о математическом моделировании нестационарного обтекания профилей потоком вязкой несжимаемой среды и определении аэродинамических нагрузок, действующих на них. Описан алгоритм решения задачи — бессеточный лагранжев метод вихревых элементов.

Для интегрирования системы уравнений движения вихревых элементов предложена реализация метода Рунге — Кутты второго поряд-

ка точности, позволяющая повысить точность моделирования эволюции в области течения. Целесообразность применения метода Рунге — Кутты при математическом моделировании эволюции вихревых структур показана на примере решения задачи о диффузии вихря. На примере задачи о математическом моделировании обтекания кругового профиля показано, что данный подход позволяет повысить точность вычисления аэродинамических нагрузок только при значениях числа Рейнольдса порядка сотни. Таким образом, при наличии профиля в потоке требуется исследование других подходов повышения точности расчетов методом вихревых элементов.

Описание предложенной в главе 1 реализации метода Рунге — Кутты второго порядка точности и результаты решения тестовых модельных задачи опубликованы в работах [42, 44, 51].

## **2. Расчетные схемы метода вихревых элементов**

Важнейшим этапом алгоритма моделирования обтекания профиля методом вихревых элементов является генерация завихренности на профиле. Именно генерацией завихренности на профиле обеспечивается выполнение граничного условия, точность удовлетворения которого определяет правильность решения задачи в целом.

В данной главе рассмотрены два возможных подхода к построению математической модели генерации завихренности на профиле и восемь возможных расчетных схем, которые могут построены на их основе. Одна из этих схем — «классическая», традиционно используемая при проведении расчетов вихревыми методами. Для всех расчетных схем получены необходимые расчетные формулы, которые могут быть включены в соответствующие компьютерные программы. На примере модельных задач с известным аналитическим решением проведено сравнение точности, обеспечиваемой данными схемами.

### **2.1. Подходы к моделированию генерации завихренности на обтекаемом профиле**

В основе вихревых методов моделирования обтекания профиля лежит идея Н. Е. Жуковского о замене профиля вихревым слоем определенной интенсивности [17]. Принципиальным отличием метода вихревых элементов, связанным с необходимостью моделирования течений вязкой среды, является то, что данный вихревой слой не является присоединенным (связанным с профилем), а полностью сходит в поток. Интенсивность вихревого слоя на профиле  $\gamma = \gamma(\mathbf{r}, t)$  может быть найдена исходя из необходимости удовлетворения граничного условия на нем.

Вектор скорости среды  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  по аналогии с формулой (1.15) в фиксированный момент времени может быть найден в любой внутренней

точке течения:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\gamma(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus C. \quad (2.1)$$

Здесь  $C$  — область, занятая профилем,  $K = \partial C$ ;  $\mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r})$  — скорость среды, индуцируемая по закону Био — Савара (1.14) ненулевой завихренностью  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ , в области течения,

$$\mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}) = \iint_S \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dS_\xi = \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi; \quad (2.2)$$

$\mathbf{V}_\gamma(\mathbf{r})$  — аналогичное выражение для скорости среды, индуцируемой вихревым слоем с неизвестной интенсивностью  $\gamma = \gamma \mathbf{k}$ , расположенным на профиле:

$$\mathbf{V}_\gamma(\mathbf{r}) = \oint_K \frac{\gamma(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_\xi = \oint_K \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi. \quad (2.3)$$

Если теперь рассматривать поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ , определенное по формуле (2.1), не только в области  $S = \mathbb{R}^2 \setminus C$ , а на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , то на профиле  $K = \partial C$  оно будет иметь разрыв (конечный скачок) касательной компоненты. Предельные значения вектора скорости среды на профиле  $K$  имеют вид

$$\mathbf{V}_\pm(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \pm \left( \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \pm \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  — скорость, вычисляемая по формуле (2.1) при непосредственной подстановке в нее координат точки на профиле, при этом скорость  $\mathbf{V}_\gamma(\mathbf{r})$  находится как главное значение в смысле Коши соответствующего сингулярного интеграла [30];  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — вектор единичной внешней нормали к профилю;  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$  — единичный вектор касательной в точке  $\mathbf{r}$  на профиле; его направление выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}. \quad (2.5)$$

Значение  $\mathbf{V}_-(\mathbf{r})$  соответствует предельному значению скорости со стороны профиля, значение  $\mathbf{V}_+(\mathbf{r})$  — предельному значению скорости со стороны потока.

Для нахождения неизвестной интенсивности вихревого слоя  $\gamma(\mathbf{r})$  используется условие равенства нулю вектора скорости  $\mathbf{V}_-(\mathbf{r})$  на профиле  $K$  — условие прилипания. Ниже будет показано, что если вся генерируемая завихренность становится свободной (напомним, что рассматривается только случай неподвижного недеформируемого профиля), то это условие обеспечивается равенством нулю либо нормальной, либо касательной компоненты вектора  $\mathbf{V}_-(\mathbf{r})$  на профиле:

$$\mathbf{V}_-(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in K, \quad (2.6)$$

или

$$\mathbf{V}_-(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in K. \quad (2.7)$$

Далее рассмотрим оба этих подхода более подробно.

### 2.1.1. Равенство нулю нормальной компоненты скорости на профиле

Традиционно алгоритмы решения задач математического моделирования течений несжимаемой среды вихревыми методами основаны на обеспечении равенства нулю нормальной компоненты скорости на профиле (2.6). Отметим, что это условие может быть записано в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in K, \quad (2.8)$$

поскольку нормальная компонента поля скоростей  $\mathbf{V}$  непрерывна на профиле.

Покажем, следуя [30], что равенства нулю нормальной компоненты скорости на профиле достаточно для выполнения условия  $\mathbf{V}_-(\mathbf{r}) = 0$ . Действительно, поле скоростей среды  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  определено вне профиля, выражается через интенсивность вихревого слоя  $\gamma(\mathbf{r})$  с помощью формул (2.1)–(2.3) и, как было упомянуто выше (см. формулу (1.15)), удовлетворяет условию

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} \in S;$$

Внутри области  $C$  поле скоростей  $\mathbf{V}$  также будет бездивергентным, кроме того,

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} \in C.$$

Поскольку область  $C$  является односвязной, то течение в ней потенциально и  $\mathbf{V} = \nabla \tilde{\Phi}$ ,  $\mathbf{r} \in C$ , где  $\tilde{\Phi}$  — потенциал течения. Тогда условие  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  приводит к уравнению Лапласа для потенциала внутри профиля, а условие  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_K = 0$  — к граничному условию для нормальной производной потенциала; таким образом, получаем однородную внутреннюю задачу Неймана для функции  $\tilde{\Phi}$ :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\Phi} = 0, & \mathbf{r} \in C, \\ \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right|_K = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Известно, что все решения внутренней задачи Неймана отличаются на константу. Так как тождественный нуль в области  $C$ , очевидно, удовлетворяет системе (2.9), то выражение  $\tilde{\Phi} = \text{const}$  описывает все множество решений. Отсюда следует равенство нулю поля скоростей внутри области  $C$ :

$$\mathbf{V} = \nabla \tilde{\Phi} = 0.$$

Таким образом, предельное значение скорости со стороны профиля  $\mathbf{V}_-(\mathbf{r})$  равно нулю, что и требовалось показать.

Пусть  $\Omega(\mathbf{r})$  — известное распределение завихренности в области течения  $S$ ,  $\gamma(\xi)$  — неизвестная интенсивность вихревого слоя на профиле  $K$ . Тогда скорость  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  на профиле с учетом формул (2.1)–(2.4) можно представить в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_\gamma(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K. \quad (2.10)$$

Слагаемое  $\mathbf{V}_\Omega(\mathbf{r})$  является известной функцией и вычисляется по формуле (2.2), слагаемое  $\mathbf{V}_\gamma(\mathbf{r})$  содержит неизвестную функцию  $\gamma = \gamma(\xi)$ ,  $\xi \in K$ , и выражается по формуле (2.3).

Подставив выражение (2.10) в условие (2.8) с учетом формул (2.2)–(2.3) и (2.5) после переноса известных величин в правую часть получим интегральное уравнение, описывающее генерацию завихренности на профиле на основе классического подхода:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \oint_K \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\mathbf{l}_\xi = -\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left( \mathbf{V}_\infty + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi \right),$$

или

$$\oint_K \frac{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\mathbf{l}_\xi = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left( \mathbf{V}_\infty + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi \right). \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) является сингулярным интегральным уравнением первого рода. Его ядро является неограниченным и имеет неинтегрируемую особенность вида  $\frac{1}{r}$  при  $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$ , соответствующий интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши [30, 56].

Для существования решения уравнения (2.11) необходимо выполнение условия

$$\oint_K f(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = 0,$$

где  $f(\mathbf{r})$  — правая часть уравнения (2.11). Покажем, что в рассматриваемом случае оно всегда выполнено. Действительно, согласно формуле Остроградского — Гаусса для гладкого векторного поля в плоском случае справедливо равенство

$$\oint_K (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) d\mathbf{l} = \iint_C (\nabla \cdot \mathbf{F}) dS.$$

Тогда при  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_\infty + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi$  в силу свойств поля скоростей, индуцируемого завихренностью по закону Био — Савара (1.14), получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \left( \mathbf{V}_\infty + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_\xi \right) = 0.$$

Таким образом, решение уравнения (2.11) существует, но не является единственным. Оно определено с точностью до произвольной константы. Одним из способов выделения единственного решения является использование дополнительного условия в виде задания значения суммарной генерируемой на профиле завихренности [30]

$$\oint_K \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = G.$$

Данный интеграл имеет физический смысл и выражает собой циркуляцию поля скоростей вдоль обтекаемого контура.

Отметим, что при моделировании обтекания системы, состоящей из  $N_b$  профилей, вид интегрального уравнения (2.11) не изменяется, однако его решение зависит от  $N_b$  произвольных констант, для определения которых требуется  $N_b$  дополнительных условий в виде задания значений суммарной генерируемой на профилях завихренности, или, что то же самое, циркуляции поля скоростей вдоль каждого из контуров:

$$\oint_{K^{(i)}} \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = G_i, \quad i = 1, \dots, N_b.$$

Для задания значения  $G$  (или значений  $G_i$  для системы профилей) используется аналог теоремы Томсона для вязкой жидкости [1], из которой следует, что суммарная завихренность в области течения сохраняется. Тогда если в начальный момент времени суммарная завихренность была равна нулю, то дополнительное условие для одного профиля задается в виде

$$\oint_K \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = 0, \quad (2.12)$$

а для системы профилей задаются  $N_b$  дополнительных условий

$$\oint_{K^{(i)}} \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_\xi = 0, \quad i = 1, \dots, N_b. \quad (2.13)$$

Для определения интенсивности генерируемой на профилях завихренности уравнения (2.11) и (2.12) или (2.11) и (2.13) следует решать совместно.



### 2.1.2. Равенство нулю касательной компоненты скорости на профиле

Альтернативным подходом к решению задач моделирования течений вихревыми методами является обеспечение равенства нулю касательной компоненты скорости на профиле (2.7). О возможности использования подобного метода упоминается в [76], а в работе [77] приведено его обоснование и указано на бóльшую точность такого подхода по сравнению с классическим. Однако систематические исследования в данном направлении ранее, по-видимому, не проводились.

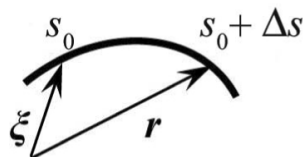
Подставив теперь выражение (2.4) в условие (2.7) с учетом формул (2.2)–(2.3) и (2.5), получим интегральное уравнение, описывающее генерацию завихренности на профиле на основе предложенного подхода:

$$\tau(\mathbf{r}) \cdot \oint_K \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} = -\tau(\mathbf{r}) \cdot \left( \mathbf{v}_{\infty} + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} \right),$$

или

$$\begin{aligned} \oint_K \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} = \\ = -\tau(\mathbf{r}) \cdot \left( \mathbf{v}_{\infty} + \iint_S \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \Omega(\boldsymbol{\xi}) dS_{\boldsymbol{\xi}} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Интегральное уравнение (2.14) является уравнением Фредгольма второго рода относительно функции  $\gamma(\boldsymbol{\xi})$  при условии гладкости профиля. Покажем, что ядро данного уравнения ограничено значением  $\varkappa^*/4\pi$ , где  $\varkappa^*$  — наибольшая кривизна профиля, введя на кривой  $K$  натуральный параметр  $s$ , такой, что его значение  $s_0$  соответствует концу радиус-вектора  $\boldsymbol{\xi}$ , а значение  $(s_0 + \Delta s)$  — концу радиус-вектора  $\mathbf{r}$  (рис. 2.1).



**Рис. 2.1.** Фрагмент профиля и радиус-векторы точек на нем

В доказательстве используем формулы Френе [25], в которых дифференцирование производится по длине дуги:

$$\mathbf{r}'(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \quad \text{и} \quad \mathbf{r}''(s) = \varkappa \mathbf{n}(s).$$

Здесь  $\varkappa$  — кривизна кривой в точке  $s$ . Тогда при  $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$  или, что то же самое,  $\Delta s \rightarrow 0$ , производя разложение ядра уравнения (2.14) по формуле Тейлора в окрестности точки  $s_0$ , получим

$$\begin{aligned} \max |K(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})| &= \max \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \mathbf{r}(s_0))}{2\pi |\mathbf{r}(s_0 + \Delta s) - \boldsymbol{\xi}(s_0)|^2} \right| = \\ &= \max \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}(s_0) + \mathbf{r}'(s_0)\Delta s + \frac{\mathbf{r}''(s_0)}{2}\Delta s^2 + o(\Delta s^2) - \mathbf{r}(s_0))}{2\pi |\mathbf{r}(s_0) + \mathbf{r}'(s_0)\Delta s + o(\Delta s) - \mathbf{r}(s_0)|^2} \right| = \\ &= \max \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{r}''(s_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) + \frac{o(\Delta s^2)}{\Delta s^2}}{4\pi |\mathbf{r}'(s_0)|^2 + \frac{o(\Delta s^2)}{\Delta s^2}} \right| = \max \left| \frac{\varkappa \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{4\pi} \right| = \frac{\varkappa^*}{4\pi}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.14) также не является единственным: для выделения единственного решения используются условия (2.12) или (2.13), как и в предыдущем случае.

Отметим, что математические модели, основанные на подходах (2.6) и (2.7) эквивалентны, однако они приводят к необходимости численного решения интегральных уравнений (2.11) и (2.14), которые описывают генерацию завихренности на профилях, однако имеют различный тип.

Дальнейший алгоритм моделирования течения среды при использовании обоих подходов одинаков: завихренность с интенсивностью, найденной из решения интегральных уравнений (2.11) или (2.14) с соответствующими дополнительными условиями, сходит в поток и движется по линиям поля  $\mathbf{U}$  согласно уравнению (1.9), образуя вихревой след.

## 2.2. Классическая расчетная схема на обтекаемом профиле

Традиционно при решении задач вихревыми методами на обтекаемом профиле строится либо точно такая же расчетная схема, как в методе дискретных вихрей [30, 47], либо используются ее незначительные модификации [12, 76, 79]. Приведем краткое описание этой схемы, считая, что рассматривается наиболее общий вариант задачи о моделировании обтекания системы профилей.

Каждый из обтекаемых профилей  $K^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, N_b$ , аппроксимируется ломаной, состоящей из отрезков (панелей) длиной  $\Delta l_i^{(s)}$ ,  $i = 1, \dots, N_p^{(s)}$ . На панелях выбираются контрольные точки с радиус-векторами  $\mathbf{k}_i^{(s)}$ , в которых обеспечивается выполнение граничного условия на профиле, определяются единичные векторы внешних нормалей  $\mathbf{n}_i^{(s)}$  и задаются радиус-векторы точек рождения вихревых элементов  $\mathbf{c}_i^{(s)}$ ,  $i = 1, \dots, N_p^{(s)}$  (рис. 2.2). Отметим, что точки рождения вихревых элементов обычно выбираются отстоящими от панелей на некоторое малое расстояние, выбираемое для упрощения численной реализации алгоритма [12] либо иных соображений [37]. Каждый вихревой элемент в потоке характеризуется своим радиус-вектором  $\mathbf{r}_i$  и циркуляцией  $\Gamma_i$ . Обозначим общее число панелей на всех профилях за  $N_p$ , т. е.

$$N_p = \sum_{s=1}^{N_b} N_p^{(s)}.$$

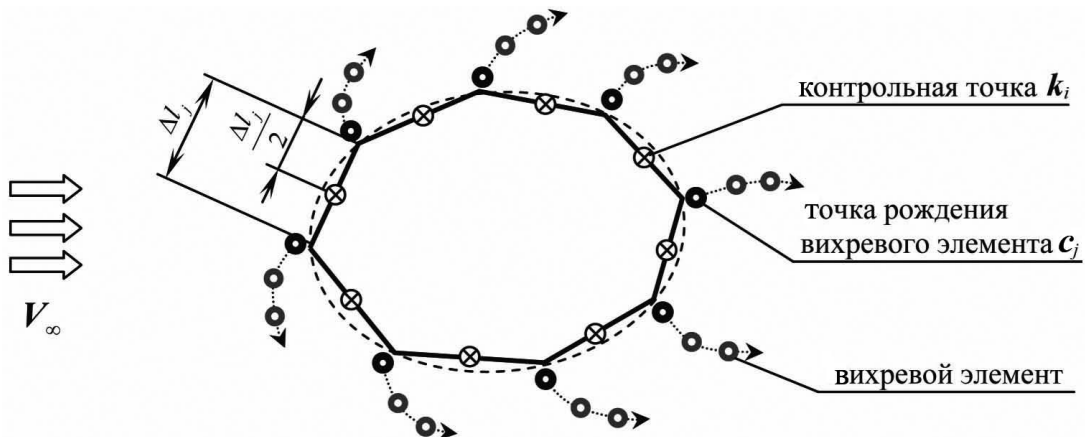


Рис. 2.2. Расчетная схема МВЭ на профиле

Для вычисления интенсивности вихревых элементов, генерируемых на обтекаемых профилях на каждом шаге расчета, используется граничное условие равенства нулю нормальной компоненты скорости на профилях, приводящее к необходимости решения сингулярного интегрального уравнения (2.11). Численный метод, основанный на этом подходе, будем в дальнейшем сокращено называть **НМВЭ** — метод вихревых элементов с нулевой нормальной компонентой скорости. Дискретные аналоги интегрального уравнения (2.11) с дополнительными условиями (2.13) для описанной расчетной схемы будут иметь следующий вид [30]:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i^{(s)} \cdot \sum_{q=1}^{N_b} \left[ \sum_{j=1}^{N_p^{(q)}} \mathbf{Q}(\mathbf{k}_i^{(s)} - \mathbf{c}_j^{(q)}) \Gamma_j^{(q)} \right] + R^{(s)} = \\ = -\mathbf{n}_i^{(s)} \cdot \left( \mathbf{v}_\infty + \sum_{m=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{k}_i^{(s)} - \mathbf{r}_m) \Gamma_m \right), \quad i = 1 \dots, N_p^{(s)}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N_p^{(s)}} \Gamma_j^{(s)} = 0, \quad s = 1, \dots, N_b. \quad (2.16)$$

Здесь неизвестными величинами являются  $\Gamma_j^{(q)}$  — циркуляции вихревых элементов, которые помещаются в точки рождения вихрей  $\mathbf{c}_j^{(q)}$ , становятся частью вихревого следа и в дальнейшем движутся по векторным линиям поля скоростей  $\mathbf{U}$ ;  $R^{(s)}$  — регуляризирующая переменная, соответствующая  $s$ -му профилю. Показано [30], что значения регуляризирующих переменных  $R^{(s)}$  стремятся к нулю при уменьшении длин панелей  $\Delta l_j^{(s)}$ .

Зная циркуляции генерируемых вихревых элементов  $\Gamma_j^{(q)}$ , можно определить средние значения интенсивности вихревого слоя на панелях профилей:  $\gamma_j^{(q)} = \Gamma_j^{(q)} / \Delta l_j^{(q)}$ .

Такой подход к построению дискретного аналога интегрального уравнения (2.11) использован в работе [30], где обоснована корректность использования соответствующей квадратурной формулы для выделения глав-

ного значения сингулярного интеграла в смысле Коши. Там же указано, что при увеличении числа панелей на профиле имеется интегральная сходимость к точному решению, тогда как сходимости для значений интенсивности вихревого слоя  $\gamma_j^{(q)}$ , вообще говоря, может не наблюдаться. Отметим, что разработка квадратурных формул повышенной точности для приближенного численного решения уравнения (2.11) представляет собой нетривиальную задачу в силу особенностей его ядра.

Таким образом, интегральные уравнения (2.11), (2.13) аппроксимируются системой, состоящей из  $(N_p + N_b)$  линейных алгебраических уравнений (2.15)–(2.16) с неизвестными циркуляциями  $\Gamma_i^{(s)}$ ,  $i = 1, \dots, N_p^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, N_b$ , вихревых элементов, образующихся над панелями, и регуляризирующими переменными  $R = (R^{(1)}, \dots, R^{(N_b)})^T$ . Данную систему можно записать в виде следующего матричного уравнения:

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \dots & A_1^{(j)} & \dots & A_1^{(N_b)} & L_1 \\ \hline A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \dots & A_2^{(j)} & \dots & A_2^{(N_b)} & L_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \hline A_i^{(1)} & A_i^{(2)} & & A_i^{(j)} & & A_i^{(N_b)} & L_i \\ \hline \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline A_{N_b}^{(1)} & A_{N_b}^{(2)} & \dots & A_{N_b}^{(j)} & \dots & A_{N_b}^{(N_b)} & L_{N_b} \\ \hline \hline M^{(1)} & M^{(2)} & \dots & M^{(j)} & \dots & M^{(N_b)} & O \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} G^{(1)} \\ \hline G^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline G^{(j)} \\ \hline \vdots \\ \hline G^{(N_b)} \\ \hline \hline R \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline \vdots \\ \hline B_i \\ \hline \vdots \\ \hline B_{N_b} \\ \hline \hline B_0 \end{array} \right).$$

Каждый из блоков  $A_i^{(j)}$  матрицы учитывает влияние вихревых элементов, расположенных в точках рождения  $\mathbf{c}_\beta^{(j)}$   $j$ -го профиля, на контрольные точки  $\mathbf{k}_\alpha^{(i)}$   $i$ -го профиля,  $i, j = 1, \dots, N_b$ ,  $\alpha = 1, \dots, N_p^{(i)}$ ,  $\beta = 1, \dots, N_p^{(j)}$ :

$$A_i^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(i,j)} & \dots & a_{1,N_p^{(j)}}^{(i,j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_p^{(i)},1}^{(i,j)} & \dots & a_{N_p^{(i)},N_p^{(j)}}^{(i,j)} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $A_i^{(j)}$  с учетом (2.15) имеют вид:

$$a_{\alpha,\beta}^{(i,j)} = \mathbf{n}_\alpha^{(i)} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{k}_\alpha^{(i)} - \mathbf{c}_\beta^{(j)}), \quad \alpha = 1, \dots, N_p^{(i)}, \quad \beta = 1, \dots, N_p^{(j)}.$$

Каждый элемент столбца неизвестных  $G^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, N_b$ , содержит искомые циркуляции вихревых элементов, генерируемых на  $j$ -м профиле:

$$G^{(j)} = \left( \Gamma_1^{(j)}, \dots, \Gamma_{N_p^{(j)}}^{(j)} \right)^T.$$

Аналогично, элементы столбца правых частей имеют вид

$$B_i = \left( b_1^{(i)}, \dots, b_{N_p^{(i)}}^{(i)} \right)^T, \quad i = 1 \dots N_p^{(i)},$$

$$b_l^{(i)} = -\mathbf{n}_l^{(i)} \cdot \left( \mathbf{v}_\infty + \sum_{m=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{k}_l^{(i)} - \mathbf{r}_m) \Gamma_m \right), \quad l = 1 \dots N_p^{(i)}.$$

Условие (2.16) учитывается с помощью матриц  $L_i$  и  $M^{(j)}$ . Все элементы матриц  $(L_i)_{N_p^{(i)} \times N_b}$ ,  $i = 1, \dots, N_b$ , являются нулевыми, кроме элементов  $i$ -го столбца, который состоит из единиц. В матрицах  $(M^{(j)})_{N_b \times N_p^{(j)}}$ ,  $j = 1, \dots, N_b$ , в  $j$ -х строках содержатся единицы, остальные элементы равны нулю. Матрицы  $(O)_{N_b \times N_b}$ ,  $(B_0)_{N_b \times 1}$  — нулевые.

Решение полученной системы производится методом Гаусса, причем в условиях данной задачи (недеформируемый профиль) на каждом шаге расчета матрица  $A$  остается постоянной, поэтому целесообразно провести один раз процедуру ее обращения, что значительно сокращает затраты вычислительных ресурсов на проведение расчета в целом.

### 2.3. Новые расчетные схемы метода вихревых элементов

Систематические расчеты показывают, что при использовании расчетной схемы НМВЭ с решением системы (2.15)–(2.16) в ряде случаев циркуляции вихревых элементов, а следовательно, и интенсивность вихревого слоя на профиле, определяются со значительной погрешностью (см. раздел 2.6), которая может стать причиной получения качественно неверного результата при решении задачи о математическом моделировании обтекания профиля в целом и расчете действующих на него аэрогидродинамических нагрузок.

В качестве пути повышения точности определения циркуляций генерируемых на профиле вихревых элементов в работе [77] предлагается использовать модифицированный подход, основанный на обеспечении равенства нулю касательной компоненты скорости на профиле и сводящийся, по сути, к решению интегрального уравнения (2.14). Основанный на нем метод будем называть **КМВЭ** — метод вихревых элементов с нулевой касательной компонентой скорости на профиле.

Отметим, что дальнейшие рассуждения ведутся для случая математического моделирования обтекания одного профиля; математическое моделирование обтекания системы профилей проводится по аналогии с разделом 2.2.

На основе подходов НМВЭ и КМВЭ могут быть разработаны различные расчетные схемы метода вихревых элементов. Во всех случаях аппроксимация профиля ломаной (панелями) осуществляется одинаково, однако подходы к построению дискретных аналогов интегральных уравнений (2.11) и (2.14) могут различаться. В частности, вихревой слой может рассматриваться как распределенным по панелям, так и «стянутым» в отдельные вихревые элементы. Соответственно, неизвестными величинами в первом случае будут интенсивности вихревого слоя  $\gamma$  на панелях, а во втором случае — циркуляции вихревых элементов  $\Gamma$ , помещаемых в точки рождения вихрей.

Для схем с распределенной завихренностью будем считать, что интенсивность вихревого слоя является кусочно-постоянной вдоль профиля. Это предположение не является критичным (в [76] упомянуто о возможности построения расчетных схем с кусочно-линейным распределением интенсивности вихревого слоя по профилю, результаты проведения тестовых расчетов с такими схемами обсуждались в работе [41]), но позволяет существенно упростить процедуру получения аналитических выражений для коэффициентов системы линейных уравнений, аппроксимирующей соответствующие интегральные уравнения. Соглашение о кусочно-постоянной интенсивности вихревого слоя на профиле поз-

воляет приближенно найти ее значение по известным циркуляциям вихревых элементов и наоборот.

Также известны различные подходы к обеспечению выполнения граничного условия на профиле: возможно его удовлетворение в отдельных контрольных точках на панелях (точках коллокации), как это делается в классическом методе дискретных вихрей [30, 47], а возможно — в среднем на каждой панели, о чем упоминается в [12, 76].

Таким образом, для решения задачи методом вихревых элементов могут быть использованы восемь расчетных схем, которые получаются различными комбинациями перечисленных подходов:

- используется метод НМВЭ или КМВЭ;
- граничное условие (ГУ) выполняется в контрольных точках (точках коллокации) или в среднем на панелях профиля;
- завихренность на каждой панели стягивается в вихревой элемент (ВЭ) или распределяется по панелям.

Обозначения описанных расчетных схем представлены в табл. 1.

Таблица 1. Обозначения расчетных схем МВЭ

НМВЭ ( $\mathcal{N}$ ) / КМВЭ ( $\mathcal{T}$ ) подходы	ГУ в точках коллокации ( $coll$ )	ГУ в среднем на панели ( $aver$ )
Вихревые элементы ( $vort$ )	$\mathcal{N}_{vort}^{coll} / \mathcal{T}_{vort}^{coll}$	$\mathcal{N}_{vort}^{aver} / \mathcal{T}_{vort}^{aver}$
Вихревой слой ( $layer$ )	$\mathcal{N}_{layer}^{coll} / \mathcal{T}_{layer}^{coll}$	$\mathcal{N}_{layer}^{aver} / \mathcal{T}_{layer}^{aver}$

Во всех случаях аппроксимация граничного условия на профиле, выражаемого интегральным уравнением (2.11) или (2.14) с дополнительным условием (2.12), приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N_p} \left( A_{ij} - D_i \left( \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \right) q_j + L_i R = -B_i, \quad i = 1, \dots, N_p, \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^{N_p} M_j q_j = 0. \quad (2.18)$$



Конкретный вид коэффициентов  $A_{ij}$ ,  $D_i$ ,  $\delta_{ij}$ ,  $L_i$ ,  $B_i$ ,  $M_j$  и смысл неизвестных  $q_j$  определяются в зависимости от выбранной расчетной схемы. Важно лишь отметить, что при программной реализации метода вихревых элементов нет принципиальной разницы, какую схему использовать в расчетах: общий вид системы линейных алгебраических уравнений и метод ее решения остаются неизменными; меняются лишь алгоритмы вычисления коэффициентов и интерпретация ее решения.

#### 2.4. Коэффициенты расчетных схем метода вихревых элементов

Ниже приведены расчетные формулы для вычисления коэффициентов всех восьми предложенных в предыдущем разделе расчетных схем метода вихревых элементов.

Величины, входящие в систему линейных алгебраических уравнений (2.17)–(2.18), имеют следующий смысл.

$A_{ij}$  — коэффициент матрицы, учитывающий влияние завихренности с  $j$ -й панели на  $i$ -ю панель: для подхода НМВЭ необходимо вычислять все коэффициенты  $A_{ij}$ , для подхода КМВЭ вычисляются только внедиагональные коэффициенты  $A_{ij}$ ,  $i \neq j$ , а диагональные полагаются равными нулю,  $A_{ii} = 0$ ;

$D_i$  — диагональные элементы матрицы для расчетных схем, соответствующих подходу КМВЭ:  $D_i = 1$  для схем  $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ ,  $D_i = 1/\Delta l_i$  для схем  $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{vort}^{aver}$ , где  $\Delta l_i$  — длина  $i$ -й панели; для всех схем НМВЭ эти коэффициенты полагаются равными нулю,  $D_i = 0$ ;

$\delta_{ij}$  — символ Кронеккера,  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ;

$L_i$  — коэффициенты при регуляризирующей переменной: для схем, соответствующих подходу НМВЭ,  $L_i$  полагаются равными длинам соответствующих панелей,  $L_i = \Delta l_i$ ; для схем, соответствующих подходу КМВЭ, все  $L_i$  полагаются равными единице,  $L_i = 1$ ;

$M_j$  — коэффициенты уравнения (2.18), аппроксимирующего условие (2.12) равенства нулю суммарной циркуляции завихренности: для всех схем, в которых завихренность с панелей стягивается в вихревые элементы, этот коэффициент равен единице,  $M_j = 1$ ; для схем с распределенной по панелям завихренностью значение  $M_j$  выражается через длины соответствующих панелей, как показано в табл. 2.

$B_i$  — проекции суммарной скорости набегающего потока и влияния вихревого следа, вычисляемых по формуле (1.29), на соответствующее направление  $i$ -й панели: на нормаль для схем подхода НМВЭ и на касательную для подхода КМВЭ.

Неизвестными величинами в системе (2.17)–(2.18) являются:

$q_j$  — циркуляции вихревых элементов, в которые стягивается завихренность с панелей для расчетных схем с сосредоточенной завихренностью, и значения кусочно-постоянной интенсивности вихревого слоя для схем с распределенной завихренностью;

$R$  — регуляризирующая переменная [30].

Вид коэффициентов  $A_{ij}$ , так же как и смысл неизвестных  $q_j$  существенным образом зависят от используемой расчетной схемы, правила их вычисления будут приведены ниже. Значения остальных коэффициентов для наглядности сведены в табл. 2.

Отметим, что параметр  $\varepsilon_p$  в выражении для коэффициента  $M_j$  в табл. 2 схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$  представляет собой малую положительную величину (необходимость его введения будет пояснена ниже), а влияние вихревого следа в выражении для  $B_i$  для разных схем вычисляется как сумма влияний отдельных вихревых элементов, образующих вихревой след; при этом величины  $\mathbf{v}_{i\omega}^\Omega$  для разных схем будут рассчитываться по-разному, о чем также будет подробно сказано ниже.

Таблица 2. Коэффициенты  $D_i$ ,  $L_i$ ,  $M_j$ ,  $B_i$  расчетных схем МВЭ

Схема	$D_i$	$L_i$	$M_j$	$B_i$
$\mathcal{N}_{vort}^{coll}$	0	$\Delta l_i$	1	$\mathbf{n}_i \cdot \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{\omega=1}^N \Gamma_\omega \mathbf{v}_{i\omega}^{(\Omega)} \right)$
$\mathcal{N}_{vort}^{aver}$				
$\mathcal{N}_{layer}^{coll}$			$\frac{\Delta l_j + \Delta l_{j-1}}{2} - 2\varepsilon_p$	
$\mathcal{N}_{layer}^{aver}$			$\frac{\Delta l_j + \Delta l_{j-1}}{2}$	
$\mathcal{T}_{vort}^{coll}$	$\frac{1}{\Delta l_i}$	1	1	$\boldsymbol{\tau}_i \cdot \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{\omega=1}^N \Gamma_\omega \mathbf{v}_{i\omega}^{(\Omega)} \right)$
$\mathcal{T}_{vort}^{aver}$				
$\mathcal{T}_{layer}^{coll}$	1		$\Delta l_j$	
$\mathcal{T}_{layer}^{aver}$				

На рис. 2.3 изображена в наиболее общем виде расчетная схема на профиле, на которой введены следующие обозначения:

$C_i$  — начало  $i$ -й панели, его радиус-вектор  $\mathbf{c}_i$ ;

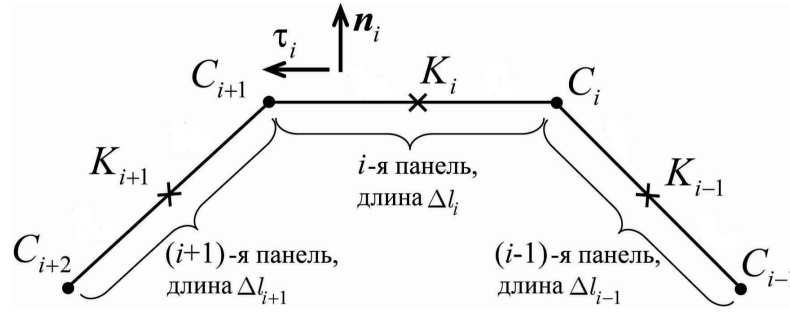
$K_i$  — середина  $i$ -й панели, ее радиус-вектор  $\mathbf{k}_i$ ;

$\Delta l_i$  — длина  $i$ -й панели;

$\mathbf{n}_i$  — единичный вектор внешней нормали к  $i$ -й панели;

$\boldsymbol{\tau}_i$  — единичный вектор касательной к  $i$ -й панели ( $\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{k}$ ).

Далее для простоты записи соответствующих формул будем считать, что формально  $C_{N_p+1} = C_1$ ,  $K_0 = K_{N_p}$ ,  $\Delta l_0 = \Delta l_{N_p}$ .



**Рис. 2.3.** Расчетная схема на профиле

Прежде, чем привести выражения для матричного коэффициента  $A_{ij}$ , заметим, что значение этого коэффициента представляет собой среднюю нормальную (для подхода НМВЭ) или среднюю касательную (для подхода КМВЭ) скорость в центре  $i$ -й панели либо на  $i$ -й панели, индуцируемую  $j$ -м вихревым элементом либо вихревым слоем с соответствующих панелей в предположении, что  $\Gamma_j = 1$  или  $\gamma_j = 1$ . Таким образом, коэффициент матрицы  $A_{ij}$  во всех случаях вычисляется по формуле

$$A_{ij} = \mathbf{v}_{ij} \cdot \boldsymbol{\xi}_i, \quad (2.19)$$

где  $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{n}_i$  для подхода НМВЭ и  $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\tau}_i$  для подхода КМВЭ.

Далее представлены формулы для расчета векторных коэффициентов  $\mathbf{v}_{ij}$ , через которые находятся коэффициенты матрицы  $A_{ij}$ , и выражений для  $\mathbf{v}_{iw}^{(\Omega)}$ , входящих в правые части  $B_i$  для всех расчетных схем.

#### 2.4.1. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$ и $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$

При использовании данных расчетных схем завихренность, генерируемая на  $i$ -й панели, концентрируется в одном вихревом элементе, помещаемом в точку  $C_i$  либо  $K_i$ . Решение системы (2.17)–(2.18) в этом случае определяет циркуляции указанных вихревых элементов.

Заметим, что схема  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  фактически представляет собой классическую расчетную схему, рассмотренную выше в разделе 2.2.

Интегралы из уравнений (2.11) или (2.14) преобразуются в этом случае в суммы, и выражение для векторного коэффициента  $\mathbf{v}_{ij}$  принимает вид

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k}_i - \mathbf{p}_j)}{2\pi |\mathbf{k}_i - \mathbf{p}_j|^2},$$

где  $\mathbf{p}_j = \mathbf{c}_j$  для схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$ ,  $\mathbf{p}_j = \mathbf{k}_j$  для схемы  $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$ .

Выражение для  $\mathbf{v}_{i\omega}^{\Omega}$  с учетом (1.29) и (1.32) имеет вид

$$\mathbf{v}_{i\omega}^{(\Omega)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k}_i - \boldsymbol{\xi}_{\omega})}{|\mathbf{k}_i - \boldsymbol{\xi}_{\omega}|^2}, \quad (2.20)$$

где  $\boldsymbol{\xi}_{\omega}$  — радиус-вектор  $\omega$ -го вихревого элемента следа.

#### 2.4.2. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$ и $\mathcal{T}_{vort}^{aver}$

Как и ранее, в этих схемах завихренность, генерируемая на  $i$ -й панели, концентрируется в одном вихревом элементе, помещаемом в точку  $C_i$  либо  $K_i$  соответственно. Решение системы (2.17)–(2.18) снова определяет циркуляции этих вихревых элементов.

Поскольку граничное условие здесь выполняется в среднем по панели, то

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{1}{\Delta l_i} \int_{C_i}^{C_{i+1}} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}_j)}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{p}_j|^2} dl_r, \quad (2.21)$$

где  $\mathbf{p}_j = \mathbf{c}_j$  для схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$ ,  $\mathbf{p}_j = \mathbf{k}_j$  для схемы  $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$ .

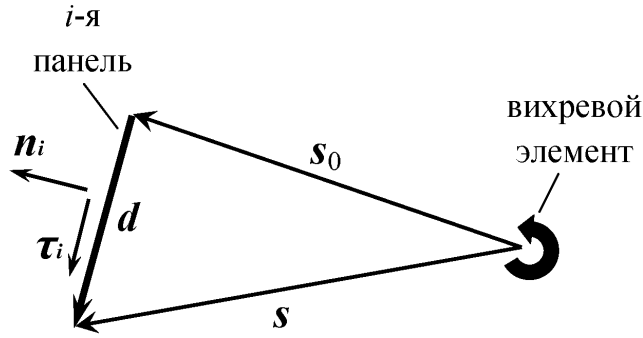
В расчетной схеме  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$  для каждого значения  $j$  при интегрировании по панелям  $C_{j-1}C_j$  и  $C_jC_{j+1}$  (при приближении к концам которых  $|\mathbf{r} - \mathbf{c}_j| \rightarrow 0$ ) пределы меняются таким образом, чтобы интегрирование проводилось по частям панелей  $C_{j-1}C_j$  и  $C_jC_{j+1}$  соответственно, отстоящим от точки  $C_j$  на расстояние  $\varepsilon_p$ . Отметим, что это же значение  $\varepsilon_p$  используется в других схемах, а также для вычисления коэффициентов  $M_j$  схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$ .

Выражение для  $\mathbf{v}_{i\omega}^{(\Omega)}$  в данном случае имеет вид

$$\mathbf{v}_{i\omega}^{(\Omega)} = \frac{1}{\Delta l_i} \int_{C_i}^{C_{i+1}} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}_\omega)}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}_\omega|^2} dl_r, \quad (2.22)$$

где  $\boldsymbol{\xi}_\omega$  — радиус-вектор  $\omega$ -го вихревого элемента следа.

Для вычисления интеграла в выражениях (2.21) и (2.22) введем некоторые вспомогательные векторы (рис. 2.4): вектор  $\mathbf{d}$  направлен из начала в конец  $i$ -й панели, векторы  $\mathbf{s}_0$  и  $\mathbf{s}$  соединяют вихревой элемент, расположенный в некоторой точке (не важно — на одной из панелей профиля или в вихревом следе), с началом и концом вектора  $\mathbf{d}$ .



**Рис. 2.4.** Вспомогательные векторы для схем  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$  и  $\mathcal{T}_{vort}^{aver}$

Тогда функция скорости  $\mathbf{v}$  — средняя скорость, индуцируемая на  $i$ -й панели вихревым элементом единичной интенсивности, расположенным в точке  $\boldsymbol{\xi}$ , — будет зависеть от координат векторов  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{s}_0$  (любой из них при этом может быть выражен через два других), однако для наглядности будем формально писать, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi}$  — радиус-вектор вихревого элемента:

$$\mathbf{v}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathbf{d}|} \int_{C_i}^{C_{i+1}} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} dl_r = \frac{1}{2\pi|\mathbf{d}|^2} \left( \alpha \mathbf{d} + \beta (\mathbf{k} \times \mathbf{d}) \right). \quad (2.23)$$

Выражения для скалярных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  имеют вид

$$\alpha = \arctg \frac{\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{d}}{z_0} - \arctg \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}}{z_0}, \quad \beta = \ln \frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{s}_0|}, \quad (2.24)$$

где  $z_0 = (\mathbf{d} \times \mathbf{s}_0)_z$  — третья компонента соответствующего векторного произведения.

В результате для коэффициента  $v_{ij}$  матрицы системы имеем

$$v_{ij} = v(\mathbf{d}, \mathbf{p}_j), \quad \mathbf{d} = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-1},$$

причем, как отмечалось выше, для схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$  при  $j = i$  вместо вектора  $\mathbf{s}_0$  следует использовать вектор  $\left(\mathbf{s}_0 + \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \varepsilon_p\right)$ , а при  $j = i+1$  вместо вектора  $\mathbf{s}$  — вектор  $\left(\mathbf{s} - \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \varepsilon_p\right)$ ; в этих случаях также требуется соответствующим образом скорректировать вектор  $\mathbf{d}$ .

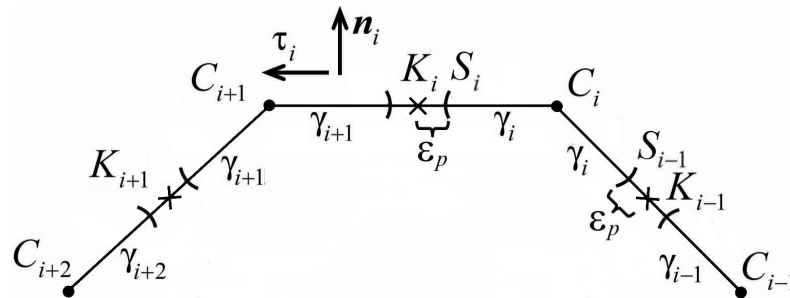
Влияние вихревого следа на  $i$ -ю панель учитывается при помощи введенной выше функции скорости (2.23):

$$v_{iw}^{(\Omega)} = v(\mathbf{d}, \boldsymbol{\xi}_w), \quad \mathbf{d} = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-1}. \quad (2.25)$$

Для схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$  при вычислении влияния на  $i$ -ю панель  $\omega$ -го вихревого элемента, находящегося вблизи панели, необходимо учитывать радиус вихря  $\varepsilon$ , введенный в формуле (1.32).

### 2.4.3. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$ и $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$

В данных схемах искомой величиной является интенсивность вихревого слоя. Для схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$  решение системы (2.17)–(2.18) — это значения интенсивности вихревого слоя на панелях. В схеме  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$  каждая панель делится пополам, тогда  $i$ -я компонента решения системы (2.17)–(2.18) определяет интенсивность вихревого слоя на участке  $S_{i-1}C_i$  ( $i-1$ )-й панели и интенсивность вихревого слоя на участке  $C_iS_i$   $i$ -й панели, где точки  $S_{i-1}$  и  $S_i$  отстоят от точек  $K_{i-1}$  и  $K_i$  соответственно на малое расстояние  $\varepsilon_p$  (рис. 2.5).



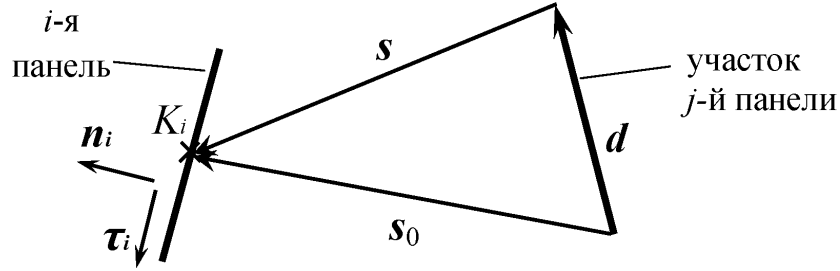
**Рис. 2.5.** Кусочно-постоянные интенсивности вихревого слоя на панелях профиля для схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$

Векторный коэффициент  $\mathbf{v}_{ij}$  для данных схем вычисляется по формуле

$$\mathbf{v}_{ij} = \int_{Q_j}^{Q_{j+1}} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k}_i - \mathbf{r})}{2\pi|\mathbf{k}_i - \mathbf{r}|^2} dl_r, \quad (2.26)$$

где в качестве отрезка интегрирования  $Q_j Q_{j+1}$  для схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$  выбирается  $j$ -я панель (т. е. отрезок  $C_j C_{j+1}$ ), а для схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$  интегрирование производится по участкам  $(j-1)$ -й и  $j$ -й панелей: по отрезкам  $S_{j-1} C_j$  и  $C_j S_j$ .

Для вычисления интеграла в (2.26) так же, как и в предыдущем случае, введем несколько вспомогательных векторов (рис. 2.6): вектор  $\mathbf{d}$  соединяет начало и конец прямолинейного участка  $j$ -й панели, для которого вычисляется среднее вихревое влияние; векторы  $\mathbf{s}_0$  и  $\mathbf{s}$  соединяют начало и конец вектора  $\mathbf{d}$  с точкой коллокации  $i$ -й панели.



**Рис. 2.6.** Вспомогательные векторы для схем  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$

Функция скорости  $\mathbf{v}$  в этом случае — скорость, индуцируемая в контрольной точке  $K_i$   $i$ -й панели вихревым слоем единичной интенсивности, расположенным на векторе  $\mathbf{d}$ , — снова будет зависеть от координат векторов  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{s}_0$ , однако для наглядности опять будем формально писать, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{k}_i, \mathbf{d})$ , где  $\mathbf{k}_i$  — радиус-вектор контрольной точки  $K_i$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}_i, \mathbf{d}) = \int_{Q_j}^{Q_{j+1}} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{k}_i - \mathbf{r})}{2\pi|\mathbf{k}_i - \mathbf{r}|^2} dl_r = -\frac{1}{2\pi|\mathbf{d}|} (\alpha \mathbf{d} + \beta (\mathbf{k} \times \mathbf{d})).$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — скалярные параметры, вычисляемые по тем же формулам (2.24), что и в предыдущем случае.



Окончательно для схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$  получаем

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}(\mathbf{k}_i, \mathbf{d}), \quad \mathbf{d} = \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{j-1},$$

а для схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$  —

$$\mathbf{v}_{ij} = \sum_{p=1}^2 \mathbf{v}(\mathbf{k}_i, \mathbf{d}_p),$$

где

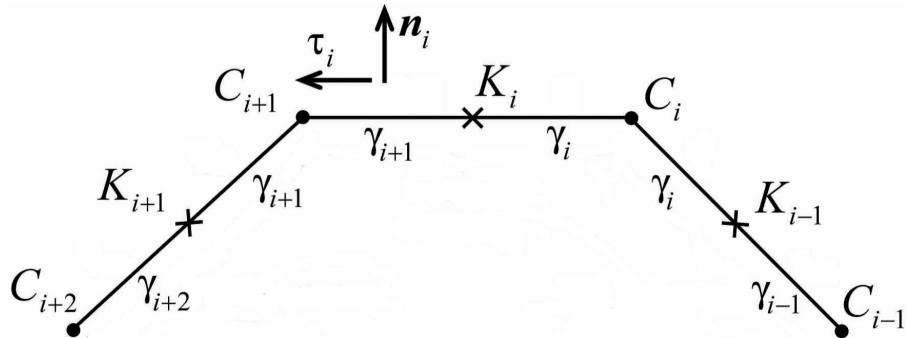
$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{c}_j - \left( \mathbf{k}_{j-1} + \frac{\mathbf{c}_j - \mathbf{k}_{j-1}}{|\mathbf{c}_j - \mathbf{k}_{j-1}|} \varepsilon_p \right),$$

$$\mathbf{d}_2 = \left( \mathbf{k}_j - \frac{\mathbf{k}_j - \mathbf{c}_j}{|\mathbf{k}_j - \mathbf{c}_j|} \varepsilon_p \right) - \mathbf{c}_j.$$

Влияние вихревого следа  $\mathbf{v}_{iw}^\Omega$  для рассматриваемых расчетных схем вычисляется по формуле (2.20).

#### 2.4.4. Расчетные схемы $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$ и $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$

Аналогично предыдущему случаю, искомой величиной при использовании данных схем является интенсивность вихревого слоя: в схеме  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$   $i$ -я компонента решения системы уравнений (2.17)–(2.18) определяет интенсивность вихревого слоя на  $i$ -й панели, т. е. на отрезке  $C_i C_{i+1}$ , а в схеме  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  каждая панель делится пополам и  $i$ -я компонента решения определяет интенсивность вихревого слоя на участках  $(i-1)$ -й и  $i$ -й панелей — на отрезках  $K_{i-1} C_i$  и  $C_i K_i$  (рис. 2.7).



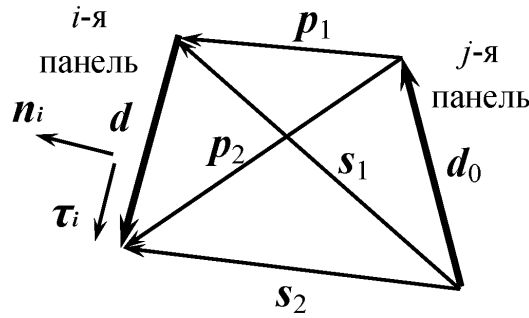
**Рис. 2.7.** Кусочно-постоянные интенсивности вихревого слоя на панелях профиля для схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$

Для этих схем векторный коэффициент  $\mathbf{v}_{ij}$  вычисляется по формуле

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{1}{\Delta l_i} \int_{C_i}^{C_{i+1}} dl_r \int_{Q_j}^{Q_{j+1}} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2} dl_\rho, \quad (2.27)$$

где в качестве отрезка интегрирования  $Q_j Q_{j+1}$  для схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  выбирается  $j$ -я панель (т. е. отрезок  $C_j C_{j+1}$ ), а для схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  интегрирование производится по участкам  $(j-1)$ -й и  $j$ -й панелей: по отрезкам  $K_{j-1} C_j$  и  $C_j K_j$ .

Для вычисления интегралов в (2.27) на рис. 2.8 введено несколько вспомогательных векторов: векторы  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{d}_0$  соединяют начала и концы  $i$ -й и  $j$ -й панелей, имеющих длины  $\Delta l_i$  и  $\Delta l_j$  соответственно; векторы  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  соединяют начало  $j$ -й панели с началом и концом  $i$ -й панели; векторы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  соединяют конец  $j$ -й панели с началом и концом  $i$ -й панели.



**Рис. 2.8.** Вспомогательные векторы для схем  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$

Функция скорости  $\mathbf{v}$  в этом случае — скорость, индуцируемая в среднем на панели, соответствующей вектору  $\mathbf{d}$ , вихревым слоем, расположенным на векторе  $\mathbf{d}_0$ , — будет зависеть от координат векторов  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}_0$ ,  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$ ,  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  (два из которых выражаются через остальные), однако для наглядности будем формально писать, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{d}, \mathbf{d}_0)$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{d}, \mathbf{d}_0) = \frac{1}{2\pi|\mathbf{d}_0||\mathbf{d}|^2} \left[ q_1^{(1)} \mathbf{c}_1 + q_2^{(1)} \mathbf{c}_2 + q_3^{(1)} \mathbf{c}_3 + \left( q_1^{(2)} \mathbf{c}_1 + q_2^{(2)} \mathbf{c}_2 + q_3^{(2)} \mathbf{c}_3 \right) \times \mathbf{k} \right]. \quad (2.28)$$

В формуле (2.28) введены следующие обозначения:

$$q_1^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{p}_1}{z_1} - \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{p}_2}{z_1},$$

$$q_2^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{s}_2}{z_2} - \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{s}_1}{z_2},$$

$$q_3^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{p}_2}{z_3} - \operatorname{arctg} \frac{\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{s}_2}{z_3};$$

$$z_1 = (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)_z, \quad z_2 = (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)_z, \quad z_3 = (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{p}_2)_z;$$

$$q_1^{(2)} = \ln \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1|}, \quad q_2^{(2)} = \ln \frac{|\mathbf{s}_1|}{|\mathbf{s}_2|}, \quad q_3^{(2)} = \ln \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{s}_2|};$$

$$\mathbf{c}_1 = (\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{p}_1)\mathbf{d} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{s}_1)\mathbf{d}_0 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_0)\mathbf{s}_1,$$

$$\mathbf{c}_2 = (\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{s}_1)\mathbf{d} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{s}_1)\mathbf{d}_0 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_0)\mathbf{s}_1 = \mathbf{c}_1 + (\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{d}_0)\mathbf{d},$$

$$\mathbf{c}_3 = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d}_0.$$

Для соседних панелей (когда  $j = i - 1$ )  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,  $\mathbf{s}_2 \neq 0$ , при этом коэффициенты  $q_1^{(1)}$  и  $q_1^{(2)}$  следует положить равными нулю. Для соседних панелей при  $\mathbf{s}_2 = 0$  (когда  $j = i + 1$ ) векторы  $\mathbf{d}_0$  и  $\mathbf{d}$  следует заменить на  $(-\mathbf{d}_0)$  и  $(-\mathbf{d})$  соответственно; тогда получим предыдущий случай при  $\mathbf{p}_1 = 0$ ,  $\mathbf{s}_2 \neq 0$ .

В результате для схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  получаем

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}(\mathbf{d}, \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{d} = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-1}, \quad \mathbf{d}_0 = \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{j-1},$$

а для схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  —

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^2 \sum_{s=1}^2 \mathbf{v}(\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_{0p}),$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{k}_i - \mathbf{c}_i, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{d}_{01} = \mathbf{c}_j - \mathbf{k}_{j-1}, \quad \mathbf{d}_{02} = \mathbf{k}_j - \mathbf{c}_j.$$

Влияние вихревого следа на  $i$ -ю панель учитывается, как и в схемах  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$ , при помощи формулы (2.25). Для схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  вычисление влияния от вихревых элементов, находящихся вблизи панели, осуществляется так же, как и для схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$ , с учетом радиуса вихревого элемента  $\varepsilon$ .

## 2.5. Определение циркуляций вихревых элементов, сходящих в поток

Вне зависимости от выбора расчетной схемы, используемой для моделирования процесса генерации завихренности на профиле, общий алгоритм метода вихревых элементов предполагает, что завихренность сходит с профиля в поток в виде вихревых элементов. В качестве точек схода вихрей примем начала панелей — точки  $C_i$  (рис. 2.3); циркуляции сходящих вихрей определяются в зависимости от применяемой расчетной схемы.

В случае использования расчетных схем  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$  циркуляции вихревых элементов определяются непосредственно как решение соответствующей линейной системы.

Для расчетных схем  $\mathcal{T}_{layer}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  распределенный по  $i$ -й панели вихревой слой с вычисленной интенсивностью  $\gamma_i$  следует стянуть в вихревые элементы, помещаемые в точки  $C_i$ , тогда их циркуляции будут равны

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}(\gamma_i \Delta l_i + \gamma_{i-1} \Delta l_{i-1}).$$

Для схем  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}$  и  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  вихревой слой найденной интенсивности  $\gamma_i$  с участков  $i$ -й и  $(i-1)$ -й панелей, примыкающих к точке  $C_i$ , стягивается в вихревой элемент, имеющий циркуляцию

$$\Gamma_i = \frac{\gamma_i}{2}(\Delta l_i + \Delta l_{i-1}).$$

Для схем  $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{vort}^{aver}$  также требуется пересчет циркуляций вихревых элементов, генерируемых в центрах панелей (их циркуляции обозначим  $\tilde{\Gamma}_i$ ) в циркуляции вихревых элементов на концах панелей:

$$\Gamma_i = \frac{\tilde{\Gamma}_i + \tilde{\Gamma}_{i-1}}{2}.$$

Далее  $i$ -й вихревой элемент с определенной выше циркуляцией  $\Gamma_i$  сходит в поток и движется в вихревом следе по векторным линиям поля скорости  $\mathbf{U}$ .

## 2.6. Верификация расчетных схем метода вихревых элементов

В данном разделе на примере задач, имеющих точное аналитическое решение для интенсивности вихревого слоя на профиле, проведем сравнение разработанных расчетных схем, которые могут использоваться при моделировании генерации завихренности на профиле.

Если в расчетах используются схемы, в которых неизвестными являются циркуляции вихревых элементов (схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}/\mathcal{T}_{vort}^{coll}$ ,  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}/\mathcal{T}_{vort}^{aver}$ ), для сравнения с аналитическим решением предварительно требуется найти соответствующие им интенсивности вихревых слоев. Для схем  $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{vort}^{aver}$  определяется средняя интенсивность вихревого слоя на панелях

$$\gamma_i = \frac{\Gamma_i}{\Delta l_i},$$

где  $\Gamma_i$  — циркуляция вихревого элемента, расположенного в точке  $K_i$  на  $i$ -й панели ( $i$ -я компонента решения системы (2.15)–(2.16)),  $\Delta l_i$  — длина  $i$ -й панели.

Для схем  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{N}_{vort}^{aver}$  в результате решения системы (2.15)–(2.16) находятся циркуляции вихревых элементов, расположенных в началах панелей — в точках  $C_i$ , поэтому в этих схемах будет вычисляться средняя интенсивность вихревого слоя на участках  $i$ -й и  $(i - 1)$ -й панелей, примыкающих к точке  $C_i$ :

$$\gamma_i = \frac{2\Gamma_i}{\Delta l_i + \Delta l_{i-1}}.$$

В тех схемах, где неизвестными являются средние интенсивности вихревого слоя (схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{coll}/\mathcal{T}_{layer}^{coll}$ ,  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}/\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ ), дополнительный пересчет производить не требуется, при этом под величиной  $\gamma_i$  будет, как и выше, пониматься интенсивность вихревого слоя на  $i$ -й панели либо на участках  $i$ -й и  $(i - 1)$ -й панелей для подходов КМВЭ и НМВЭ соответственно.

Отметим, что погрешность определения интенсивности вихревого слоя на профиле, вообще говоря, не является критичной, поскольку при

проведении расчетов вихревыми методами определяются циркуляции вихревых элементов, сходящих с профиля в соответствующих точках и образующих вихревой след. Ясно, что погрешность решения задачи будет определяться не только ошибкой в определении интенсивности вихревого слоя, но и тщательностью дискретизации профиля, т. е. количеством панелей, аппроксимирующих профиль. Разбиение профиля на панели в ряде случаев целесообразно делать неравномерным, поэтому длины панелей могут различаться. В связи с этим при оценке точности расчетных схем для выбранной (фиксированной) дискретизации профиля будем производить сравнение величин циркуляций вихревых элементов, которые в конечном итоге будут сходиться в поток. Тогда погрешности схем, основанных на подходе НМВЭ и КМВЭ, будут вычисляться соответственно по формулам

$$\|\Delta\Gamma\|_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2} \max_i [(|\gamma_i^0 - \gamma_i|)(\Delta l_{i-1} + \Delta l_i)], \quad \Delta l_0 \equiv \Delta l_n, \quad (2.29)$$

$$\|\Delta\Gamma\|_{\mathcal{T}} = \max_i [(|\gamma_i^0 - \gamma_i|)\Delta l_i], \quad i = 1, \dots, N_p, \quad (2.30)$$

где  $\gamma_i$  — найденное в расчетах среднее значение интенсивности вихревого слоя,  $\gamma_i^0$  — среднее значение точной величины интенсивности на рассматриваемом элементе,  $\Delta l_i$  — длина  $i$ -й панели.

Величина погрешности показывает максимальную ошибку в определении циркуляции вихревого элемента, который генерируется на данном шаге расчета и затем сходится в поток, становясь частью вихревого следа.

Отметим, что результаты расчетов, представленных в данной главе, получены в ходе проведения вычислений в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

### 2.6.1. Математическое моделирование стационарного обтекания эллиптического профиля и профиля Жуковского

Рассмотрим тестовые стационарные задачи по математическому моделированию обтекания эллиптического профиля и профиля Жуковского потоком идеальной несжимаемой среды. С помощью методов теории функций комплексного переменного [29, 61] точное решение для интенсивности вихревого слоя на профиле может быть найдено как величина касательной компоненты скорости на профиле. Комплексное значение скорости среды можно найти, используя формулу [34]:

$$V^* = \frac{R|\mathbf{V}_\infty| \sin(\varphi + \alpha - p) + \Gamma/2\pi}{\frac{iRe^{i(p-\varphi)}}{2} \left(1 - \frac{a^2}{(Re^{i(p-\varphi)} + H)^2}\right)}. \quad (2.31)$$

Здесь  $V^*$  — комплексно сопряженное значение скорости  $V$ , параметр  $p \in [0, 2\pi)$  определяет точку на поверхности профиля,  $\alpha$  — угол атаки профиля. Для эллиптического профиля следует положить

$$a = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}, \quad R = a_1 + b_1, \quad \varphi = 0, \quad H = 0,$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — большая и малая полуоси эллипса; а для профиля Жуковского

$$R = \sqrt{(a + d \cos \varphi)^2 + (h + d \sin \varphi)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{h}{a}, \quad H = ih - de^{-i\varphi},$$

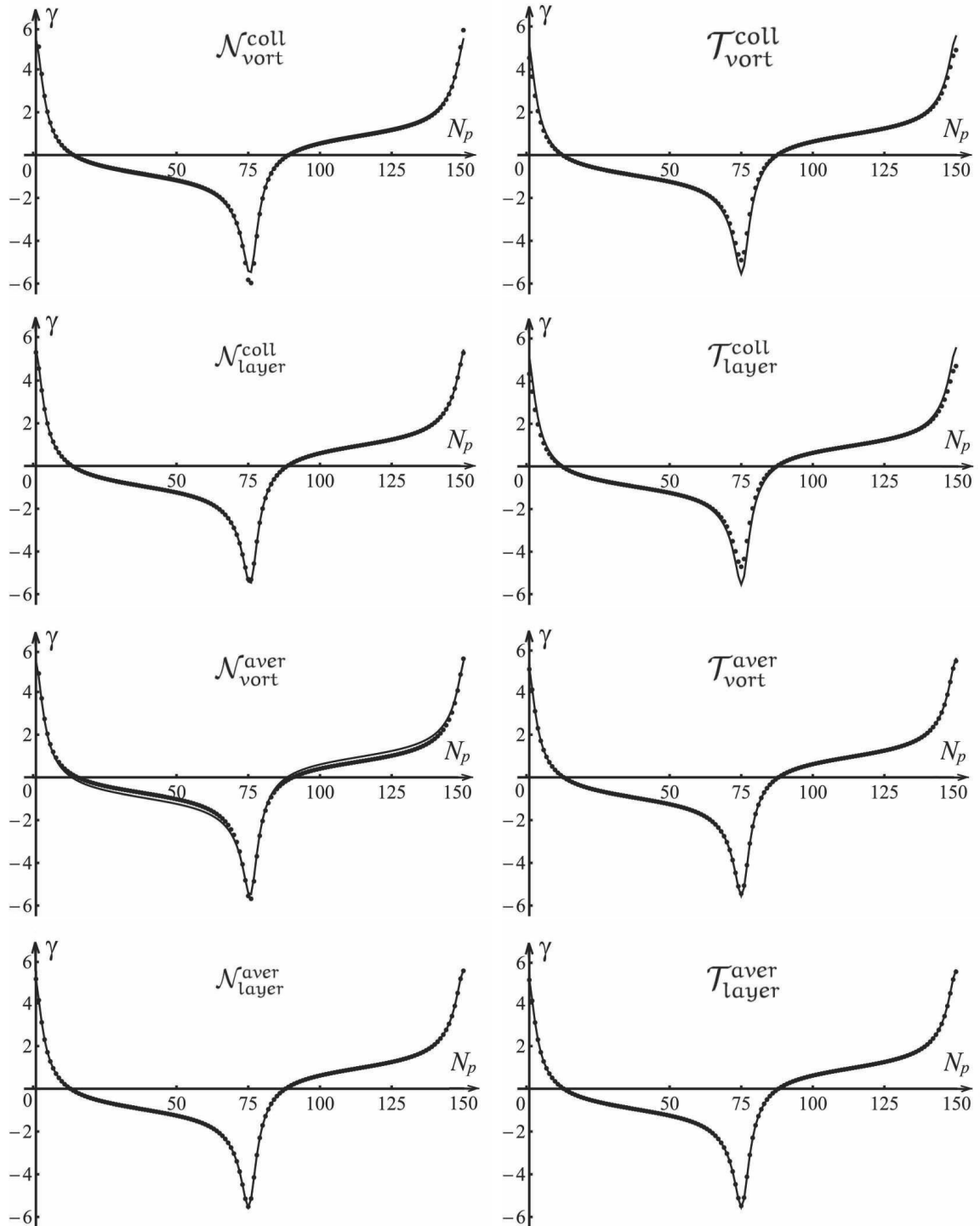
где  $a$ ,  $d$  и  $h$  определяют длину, толщину и кривизну профиля.

Циркуляция скорости среды  $\Gamma$  для эллиптического профиля может быть выбрана произвольно (с математической точки зрения), в данной модельной задаче положим  $\Gamma = 0$ , независимо от угла атаки, в то время как для профиля Жуковского эта величина пропорциональна скорости набегающего потока, зависит от формы профиля и его угла атаки:

$$\Gamma = -2\pi|\mathbf{V}_\infty| \sin(\alpha + \varphi) \left( \sqrt{h^2 + a^2} + d \right).$$

С помощью формулы (2.31) можно получить точное решение для интенсивности вихревого слоя, используемое далее для сравнения с ним результатов расчетов методом вихревых элементов.

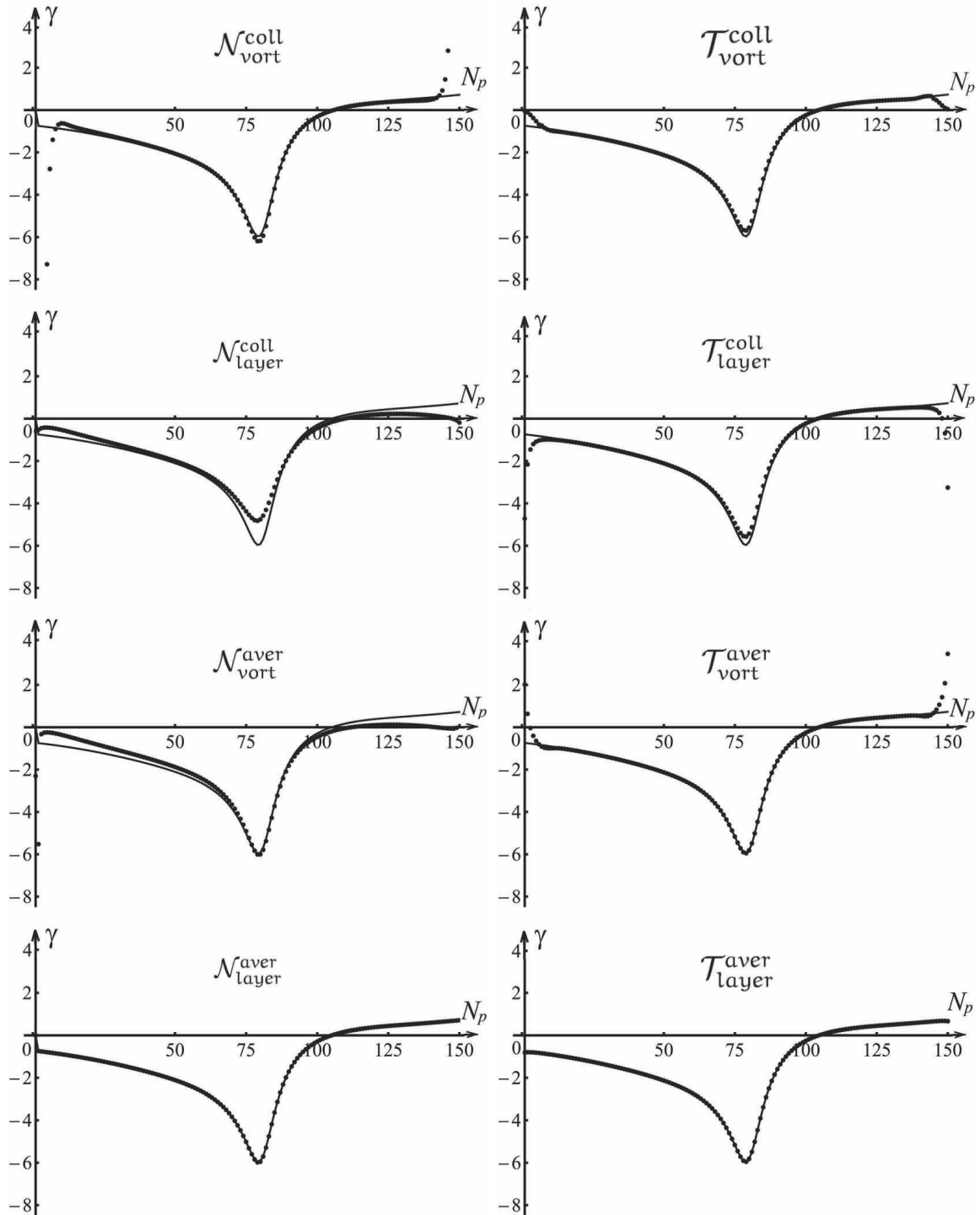
Во всех расчетах число панелей на профилях было выбрано равным  $N_p = 150$ ; эллиптический профиль имел полуоси  $a_1 = 1,0$ ,  $b_1 = 0,1$ ; профиль Жуковского с относительной толщиной 20% характеризовался параметрами  $a = 3,5$ ,  $d = 0,4$ ,  $h = 0,3$ . Оба профиля устанавливались под углом атаки  $\alpha = \pi/6$ .



**Рис. 2.9.** Интенсивность вихревого слоя на эллиптическом профиле



Результаты вычислений средних значений интенсивности вихревого слоя по панелям профиля для всех разработанных расчетных схем для случая моделирования обтекания эллиптического профиля представлены на рис. 2.9, а для профиля Жуковского — на рис. 2.10.



**Рис. 2.10.** Интенсивность вихревого слоя на профиле Жуковского

Для сравнения точности разработанных численных схем по формулам (2.29)–(2.30) были вычислены ошибки приближенных решений. Результаты, представленные в табл. 3, показывают, что точность различных схем может различаться на несколько порядков, при этом результаты отличаются для профилей различных типов.

Таблица 3. Погрешности расчета

$\ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{N}} / \ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{T}}$	Эллиптический профиль	Профиль Жуковского
$\mathcal{N}_{vort}^{coll} / \mathcal{T}_{vort}^{coll}$	0,0058 / 0,0055	4,0815 / 0,0108
$\mathcal{N}_{layer}^{coll} / \mathcal{T}_{layer}^{coll}$	0,0013 / 0,0071	0,0398 / 0,0163
$\mathcal{N}_{vort}^{aver} / \mathcal{T}_{vort}^{aver}$	0,0182 / 0,0009	0,0544 / 0,0158
$\mathcal{N}_{layer}^{aver} / \mathcal{T}_{layer}^{aver}$	0,0008 / 0,0006	0,0011 / 0,0004

Сравним числа обусловленности систем линейных алгебраических уравнений, решаемых при использовании «классической» расчетной схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  и схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ , обеспечивающей наибольшую точность. В табл. 4 представлены значения числа обусловленности  $\text{Cond } A$  при решении задач, аналогичных рассмотренным выше. При этом рассмотрены три варианта задания числа панелей на профиле:  $N_p = 50$ ,  $N_p = 200$  и  $N_p = 500$ , два различных эллиптических профиля и два профиля Жуковского.

Таблица 4. Число обусловленности матрицы

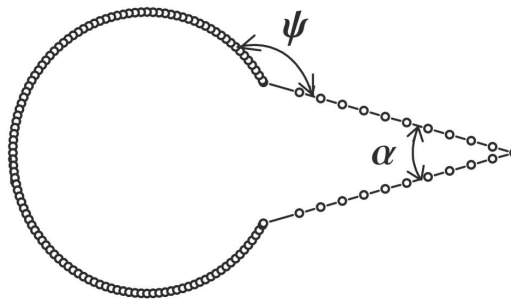
	$N_p = 50$		$N_p = 200$		$N_p = 500$	
	$\mathcal{N}_{vort}^{coll}$	$\mathcal{T}_{layer}^{aver}$	$\mathcal{N}_{vort}^{coll}$	$\mathcal{T}_{layer}^{aver}$	$\mathcal{N}_{vort}^{coll}$	$\mathcal{T}_{layer}^{aver}$
Эллиптический профиль $a_1/b_1 = 10$						
Cond A	26	115	107	242	258	384
Эллиптический профиль $a_1/b_1 = 20$						
Cond A	88	265	172	633	364	1012
Симметричный профиль Жуковского						
Cond A	$1.1 \cdot 10^4$	$3.0 \cdot 10^2$	$3.4 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^3$	$3.4 \cdot 10^6$	$7.0 \cdot 10^3$
Несимметричный профиль Жуковского						
Cond A	$1.5 \cdot 10^4$	$2.9 \cdot 10^2$	$4.9 \cdot 10^5$	$1.9 \cdot 10^3$	$4.6 \cdot 10^6$	$6.9 \cdot 10^3$

Видно, что для гладких профилей числа обусловленности матриц, получаемых при решении задачи с помощью схем  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ , близки, при этом матрицы хорошо обусловлены. Однако при моделировании обтекания профилей с острой кромкой линейная система для расчетной схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  обусловлена существенно лучше по сравнению со схемой  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$ .

Таким образом, расчетные схемы подходов НМВЭ и КМВЭ позволяют получить результаты, согласующиеся с точным решением на гладких профилях. При наличии на профиле острой кромки наименьшую погрешность определения циркуляций вихревых элементов, сходящих с профиля в поток, обеспечивают расчеты схемы  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ . Предпочтительным представляется использование расчетной схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ , поскольку соответствующая ей линейная система лучше обусловлена.

### 2.6.2. Математическое моделирование стационарного обтекания профиля с тремя угловыми точками

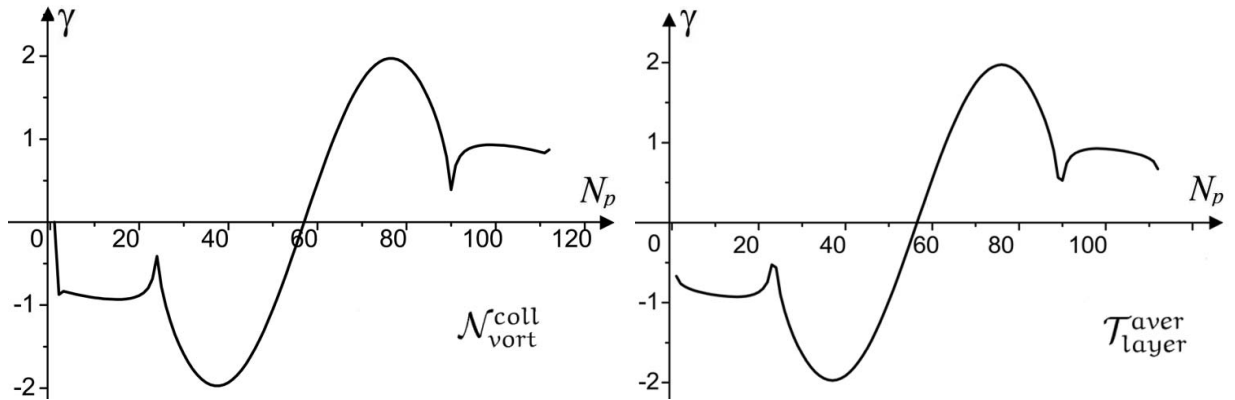
Рассмотрим математическое моделирование обтекания профиля с тремя угловыми точками (рис. 2.11), для которого  $\alpha = \pi/6$ ,  $\psi = 3\pi/4$  [33].



**Рис. 2.11.** Профиль с угловыми точками (неравномерное разбиение)

Выполним расчет для профиля, равномерно разбитого (т. е. когда все панели, в том числе примыкающие к угловой точке, имеют близкую длину) на  $N_p = 112$  панелей, стоящего под нулевым углом атаки. Известно [30], что интенсивность вихревого слоя должна стремиться к нулю в угловых точках. При равномерном разбиении обтекаемого профиля ре-

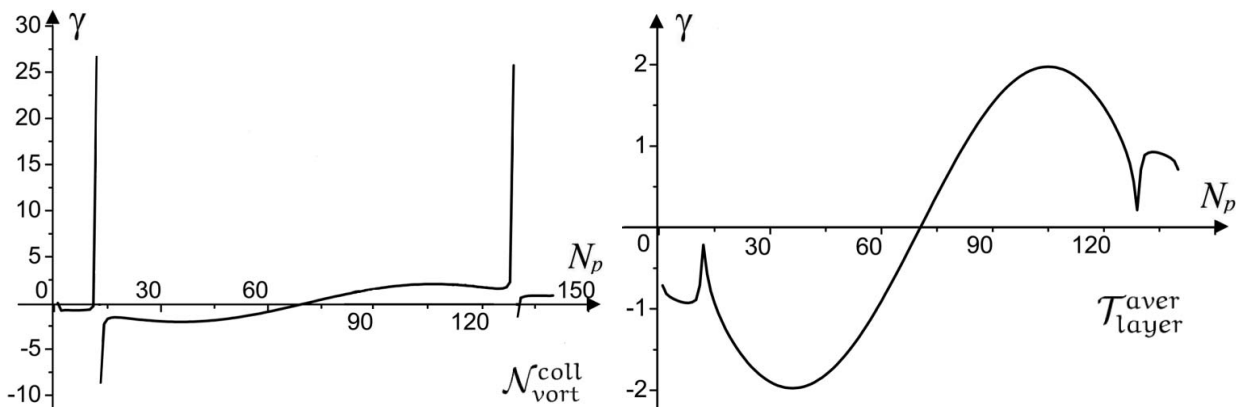
зультаты, полученные при использовании обеих расчетных схем, практически совпадают (рис. 2.12).



**Рис. 2.12.** Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками (равномерное разбиение)

Рассмотрим случай неравномерного разбиения профиля: примем, что панели на полукруглой и прямолинейных частях профиля существенно отличаются по длине (рис. 2.11). Общее количество панелей  $N_p = 140$ .

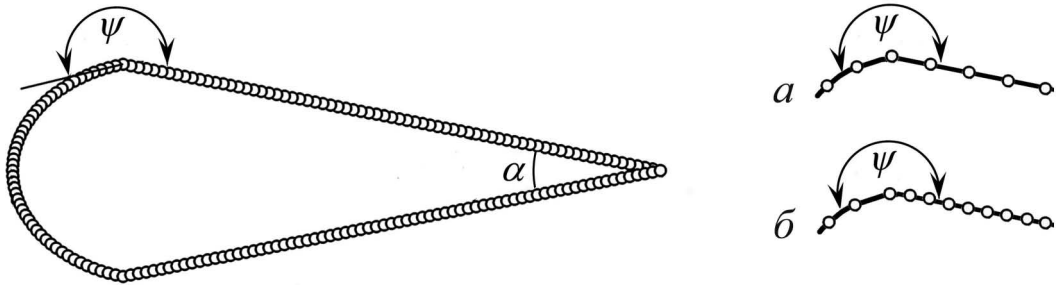
На рис. 2.13 показаны результаты расчета обтекания данного профиля. Видно, что вблизи них решение, полученное с помощью расчетной схемы  $T_{layer}^{aver}$ , качественно лучше решения, полученного с использованием схемы  $N_{vort}^{coll}$ .



**Рис. 2.13.** Интенсивность вихревого слоя при обтекании профиля с угловыми точками (неравномерное разбиение)

Таким образом, с помощью классической расчетной схемы можно найти искомое решение лишь при равномерном разбиении профиля на панели, а использование расчетной схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  позволяет определить качественно и количественно правильное решение как при равномерном, так и при существенно неравномерном разбиении профиля.

Рассмотрим обтекание аналогичного профиля с тремя угловыми точками при  $\psi = 7\pi/6$ ,  $\alpha = \pi/6$  при его равномерном и неравномерном разбиениях на панели (рис. 2.14).



**Рис. 2.14.** Профиль с угловыми точками ( $\psi = 7\pi/6$ ,  $\alpha = \pi/6$ ), равномерное разбиение (а), неравномерное разбиение (б)

Согласно работе [30], на прямолинейном участке профиля при приближении к угловой точке с внешним углом  $\psi > \pi$  решение имеет особенность вида  $\frac{1}{\hat{\rho}^{1-\pi/\psi}}$ , где  $\hat{\rho}$  — расстояние до угловой точки профиля. На рис. 2.15 и рис. 2.16 представлены средние значения интенсивности вихревого слоя на ближайших к угловой точке панелях, полученные в результате расчета (отмечены точками) и в результате интегрирования указанной асимптотики по панели (соединены сплошной линией).

Анализ полученных численных решений показывает, что результаты расчетов при использовании схем  $\mathcal{N}_{layer}^{aver}$  и  $\mathcal{T}_{vort}^{coll}$  хорошо согласуются с асимптотическим решением при равномерном разбиении профиля (рис. 2.15). Для случая неравномерного разбиения решение, полученное с помощью схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  с высокой точностью совпадает с приведенной асимптотикой, в то время как схема  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  приводит к существенной ошибке (рис. 2.16).

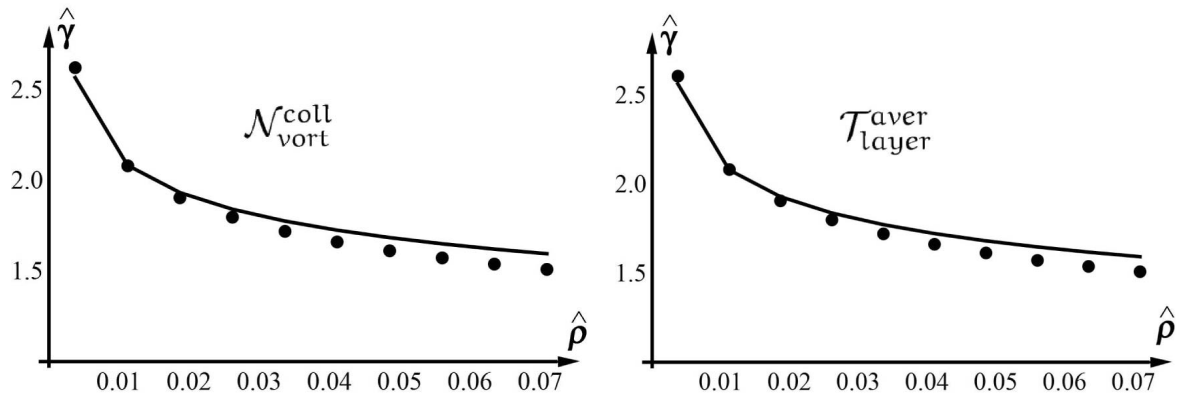


Рис. 2.15. Асимптотика (равномерное разбиение)

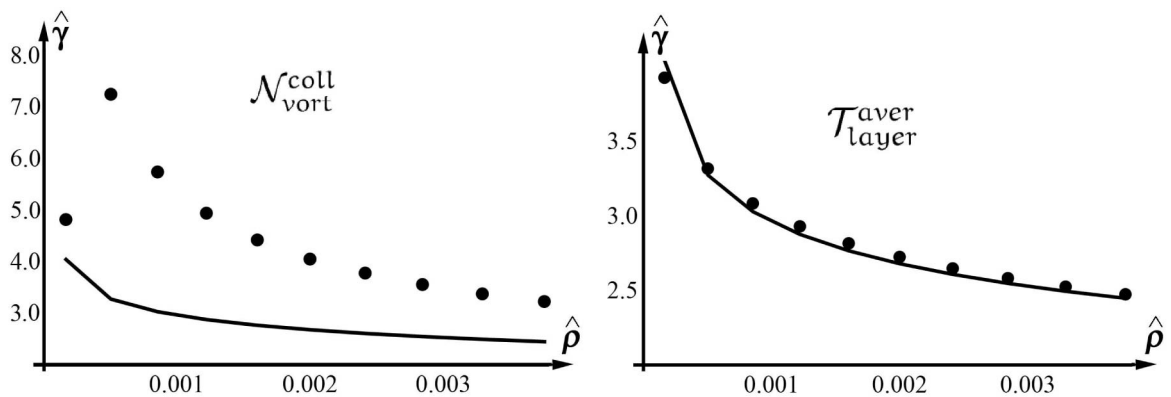


Рис. 2.16. Асимптотика (неравномерное разбиение)

Отметим, что при использовании схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  при неравномерном разбиении профиля решение вблизи угловой точки находится качественно неверно (завышается в 2–3 раза по сравнению с асимптотическим решением).

Величины среднеквадратичных отклонений средних интенсивностей вихревого слоя на панелях, рассчитанные по четырем панелям, ближайшим к угловой точке, от указанной выше асимптотики для рассмотренных расчетных схем представлены в табл. 5.

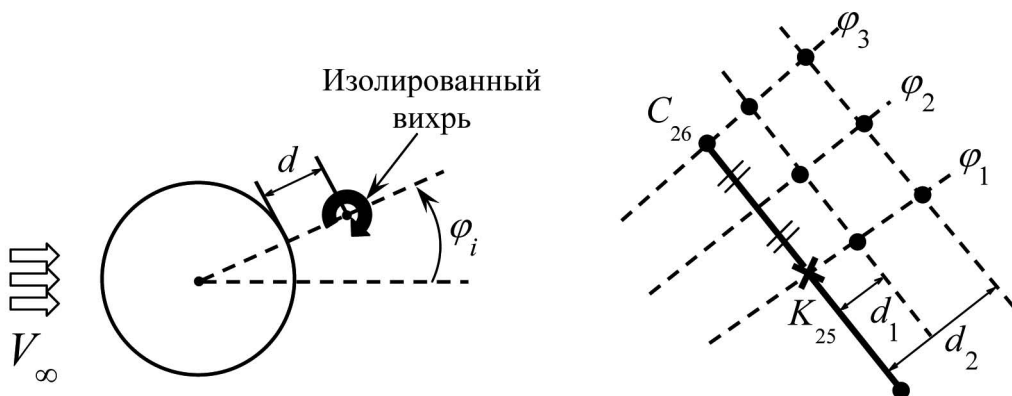
Таблица 5. Среднеквадратичные отклонения

Подход	Равномерное разбиение	Неравномерное разбиение
$\mathcal{N}_{vort}^{coll}$	0,038	2,616
$\mathcal{T}_{layer}^{aver}$	0,032	0,072

Таким образом применение расчетной схемы  $T_{layer}^{aver}$  позволяет получать качественно и количественно верное решение как при равномерном, так и при неравномерном разбиении профиля на панели и при расчете обтекания профилей с внешними угловыми точками, когда точное решение задачи имеет слабую особенность.

### 2.6.3. Математическое моделирование обтекания кругового профиля с изолированным вихрем

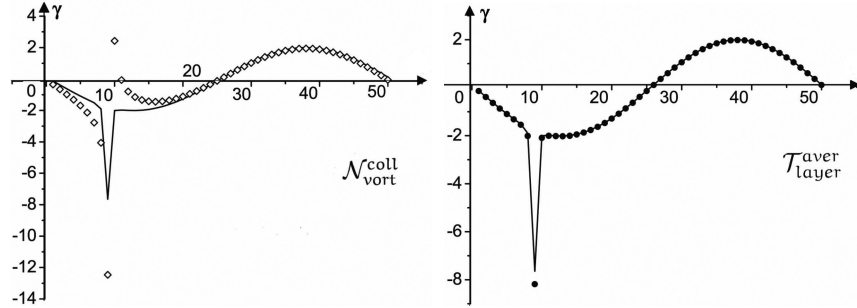
Рассмотрим задачу о расчете обтекания кругового профиля единичного диаметра с изолированным вихрем циркуляции  $\Gamma = 1,0$  вблизи его панели. В расчете профиль моделировался 150 панелями, длина каждой панели  $\Delta l \approx 0,021$ . Изолированный вихрь располагался на лучах  $\varphi_1 = 98\pi/300$ ,  $\varphi_2 = 99\pi/300$  и  $\varphi_3 = 100\pi/300$ , которые пересекают 25-ю панель профиля в ее центре, посередине между центром и концом и в конце панели соответственно; при этом рассматривались два случая, когда расстояние от вихря до панели составляло  $d_1 = 0,01$  и  $d_2 = 0,05$  (рис. 2.17).



**Рис. 2.17.** Круговой профиль с изолированным вихрем вблизи панели

Для кругового профиля с расположенным вблизи него точечным вихрем при помощи аппарата теории функций комплексного переменного, используя метод отражений, можно построить точное решение для интенсивности вихревого слоя на профиле [33].

На рис. 2.18 показаны результаты расчета при  $d_1 = 0,01$ , полученные с помощью расчетных схем  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  метода вихревых элементов в сравнении с точным решением.



**Рис. 2.18.** Средние интенсивности вихревого слоя на панелях (сплошная линия — точное решение, точки — результаты расчетов)

В табл. 6–8 приведены погрешности вычислений, рассчитанные по формулам (2.29) и (2.30) при различном расположении вихря относительно панели, получаемые с помощью разработанных расчетных схем.

Из таблиц видно, что в данной задаче наибольшая точность вычислений получена при использовании расчетной схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ . Отметим, что подобная задача с учетом принципа суперпозиции возникает при расчете нестационарного обтекания профилей, когда на каждом шаге расчета необходимо вычислить правую часть соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, соответствующую влиянию на профиль вихревых элементов с известными положениям и циркуляциями, находящихся в вихревом следе.

Таблица 6. Погрешности расчета при  $\varphi_1 = 98\pi/300$

$\ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{N}}/\ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{T}}$	$d_1 = 0,01$	$d_2 = 0,05$
$\mathcal{N}_{vort}^{coll} / \mathcal{T}_{vort}^{coll}$	0,0364 / 0,5808	0,0045 / 0,0116
$\mathcal{N}_{layer}^{coll} / \mathcal{T}_{layer}^{coll}$	0,0642 / 0,5805	0,0247 / 0,0112
$\mathcal{N}_{vort}^{aver} / \mathcal{T}_{vort}^{aver}$	0,1311 / 0,0043	0,0505 / 0,0009
$\mathcal{N}_{layer}^{aver} / \mathcal{T}_{layer}^{aver}$	0,1842 / 0,0095	0,0042 / 0,0008



Таблица 7. Погрешности расчета при  $\varphi_2 = 99\pi/300$ 

$\ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{N}}/\ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{T}}$	$d_1 = 0,01$	$d_2 = 0,05$
$\mathcal{N}_{vort}^{coll} / \mathcal{T}_{vort}^{coll}$	0,2286 / 0,0585	0,0109 / 0,0086
$\mathcal{N}_{layer}^{coll} / \mathcal{T}_{layer}^{coll}$	0,1522 / 0,0593	0,0253 / 0,0081
$\mathcal{N}_{vort}^{aver} / \mathcal{T}_{vort}^{aver}$	0,2481 / 0,0038	0,0604 / 0,0008
$\mathcal{N}_{layer}^{aver} / \mathcal{T}_{layer}^{aver}$	0,0539 / 0,0037	0,0140 / 0,0007

Таблица 8. Погрешности расчета при  $\varphi_3 = 100\pi/300$ 

$\ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{N}}/\ \Delta\Gamma\ _{\mathcal{T}}$	$d_1 = 0,01$	$d_2 = 0,05$
$\mathcal{N}_{vort}^{coll} / \mathcal{T}_{vort}^{coll}$	0,1251 / 0,1754	0,0136 / 0,0046
$\mathcal{N}_{layer}^{coll} / \mathcal{T}_{layer}^{coll}$	0,0326 / 0,1758	0,0250 / 0,0051
$\mathcal{N}_{vort}^{aver} / \mathcal{T}_{vort}^{aver}$	0,2178 / 0,0017	0,0642 / 0,0007
$\mathcal{N}_{layer}^{aver} / \mathcal{T}_{layer}^{aver}$	0,1842 / 0,0016	0,0158 / 0,0006

## 2.7. Результаты главы 2

В данной главе с целью повышения точности расчетов на этапе генерации завихренности на профилях разработана иерархия расчетных схем метода вихревых элементов, основанных на классическом и модифицированном подходах к выполнению граничного условия на профиле. Получены аналитические формулы, позволяющие вычислить коэффициенты матрицы, аппроксимирующей интегральное уравнение, к которому сводится решение задачи.

Проведена верификация разработанных расчетных схем на примере решения модельных стационарных задач с известным точным решением для интенсивности вихревого слоя на профиле. Результаты расчетов для гладких профилей близки друг к другу, однако при наличии на профиле острой кромки классическая расчетная схема дает значительную погрешность, в то время, как расчетные схемы с распределенной завих-

ренностью на панели и с выполнением граничного условия в среднем на панели хорошо согласуется с точным решением задачи. На примере решения задач с неравномерным разбиением профиля на панели или при наличии изолированного вихря вблизи профиля показано, что наибольший эффект в повышении точности математического моделирования из этих двух схем позволяет получить расчетная схема метода вихревых элементов с нулевой касательной компонентой скорости. Таким образом, предложенная модификация метода вихревых элементов позволяет повысить точность расчетов без увеличения числа панелей на профиле.

Описания предложенных в главе 2 расчетных схем метода вихревых элементов и результаты их верификации опубликованы в работах [35, 36, 49, 80, 81, 83].

### **3. Программный комплекс POLARA**

В настоящей главе описан разработанный программный комплекс POLARA, позволяющий решать нестационарные задачи математического моделирования обтекания профилей потоком вязкой несжимаемой среды и определять действующие на них аэрогидродинамические нагрузки. В его основу положены алгоритм метода вихревых элементов, описанный в главе 1, с расчетными схемами, представленными в главе 2. В целях сокращения затрат машинного времени на проведение расчетов в программном комплексе реализованы параллельные вычислительные алгоритмы, что позволяет эффективно его использовать при проведении расчетов на различных вычислительных комплексах кластерного типа. Также для ускорения расчетов использован быстрый метод приближенного расчета парных взаимодействий вихревых элементов. Представлены оценки эффективности указанных подходов к ускорению вычислений.

#### **3.1. Структура программного комплекса POLARA**

В ряде практических приложений возникает необходимость моделирования поведения элементов конструкций, взаимодействующих с потоком среды. Во многих случаях можно ограничиться рассмотрением двумерной задачи обтекания соответствующего профиля плоскопараллельным потоком, воздействие которого приближенно учитывается при помощи безразмерных стационарных аэродинамических коэффициентов  $C_{xa}$ ,  $C_{ya}$  и  $C_m$  (коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента соответственно). Обычно предполагается, что в определенном диапазоне условий обтекания аэродинамические коэффициенты зависят только от угла атаки профиля. Таким образом, для решения задачи о математическом моделировании движения профиля в потоке требуется знание зависимостей аэродинамических коэффициентов от угла атаки.

Для получения значений  $C_{xa}$ ,  $C_{ya}$  и  $C_m$  при фиксированном угле атаки требуется решить нестационарную задачу о математическом моделировании обтекания неподвижного профиля, установленного под данным углом, а затем осреднить полученные нестационарные нагрузки по большому промежутку времени. Расчеты обтекания для разных углов атаки осуществляются независимо друг от друга; для получения достаточно точных зависимостей может потребоваться значительное число расчетов. Скорость решения задачи становится особенно важной, когда требуется провести анализ большого количества возможных вариантов, например, при решении задачи оптимизации, поиска оптимальной формы профиля или подбора параметров расчетной схемы численного метода.

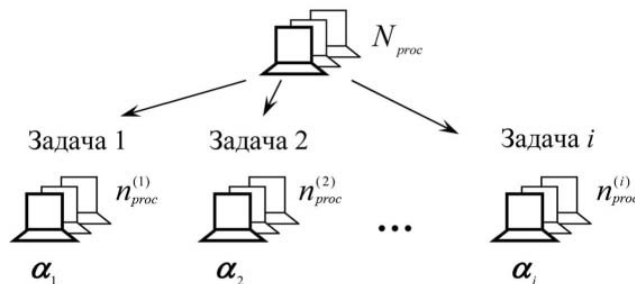
В каждой из задач с помощью алгоритма метода вихревых элементов, описанного в главах 1 и 2, производится расчет обтекания профиля под фиксированным углом атаки. В силу их полной независимости они могут решаться одновременно, если расчет будет производиться на многопроцессорных (многоядерных) вычислительных комплексах. Время выполнения расчетов, соответствующих разным значениям угла атаки профиля, может существенно различаться, поэтому целесообразно разработать такую архитектуру программного комплекса, при которой первоначально формируется очередь задач, процедуры решения которых запускаются на имеющихся в распоряжении вычислительных ядрах. По мере завершения одних расчетов и освобождения соответствующих вычислительных ядер на них запускается процесс решения следующих задач.

Также нужно иметь в виду, что процедура решения каждой задачи может быть весьма трудоемка, следовательно, полезно предусмотреть возможность распараллеливания решения каждой задачи путем разработки параллельных алгоритмов выполнения наиболее трудоемких операций метода вихревых элементов. В частном случае все доступные вычислительные ядра могут быть задействованы для решения единственной, достаточно сложной с вычислительной точки зрения задачи математического моделирования обтекания профиля.

Одновременное решение нескольких задач будем называть внешним распараллеливанием, в то время как распараллеливание вычислений внутри каждой задачи — внутренним распараллеливанием. Разработанный программный комплекс POLARA позволяет использовать оба типа параллелизма одновременно, причем число вычислительных ядер для решения каждой из задач может выбираться независимо.

Для разработки программного комплекса POLARA использован язык программирования C++, для организации межпроцессорного обмена данными и синхронизации работы различных ветвей программы — библиотека параллельных алгоритмов MPI [7]. Это позволило сделать программный комплекс переносимым и способным работать на различных типах вычислительных систем — от персональных компьютеров (объединенных в локальную сеть) с операционной системой MS Windows или Linux до высокопроизводительных вычислительных кластеров и суперкомпьютерных систем на базе Linux. Использование технологии MPI не предполагает работы с общей памятью — каждое процессорное ядро фактически работает как независимый процессор, поэтому в дальнейшем понятия вычислительного ядра и процессора будем отождествлять.

Рассмотрим основные этапы алгоритма решения серии задач о математическом моделировании обтекания профилей и вычислении действующих на них аэродинамических нагрузок в заданном интервале углов атаки. Для этого требуется решить серию из  $N_{task}$  задач, каждая из которых соответствует обтеканию профиля под определенным углом атаки. Пусть общее число процессоров, предназначенных для счета, равно  $N_{proc}$ , а для решения  $i$ -й задачи требуется  $n_{proc}^{(i)}$  процессоров (рис. 3.1).



**Рис. 3.1.** Схема распараллеливания при решении серии задач

Следует отметить, что число процессоров, необходимых для решения разных задач (для разных углов атаки) может быть различным и устанавливается пользователем перед началом расчета.

*Этап 1.* На этапе запуска расчета из  $N_{proc}$  задействованных в расчете процессоров выделяется головной процессор, на который загружается список углов атаки  $\alpha_i$  с указанием значений  $n_{proc}^{(i)}$  числа процессоров, необходимых для моделирования обтекания при соответствующем угле атаки. Данная информация считывается из текстового файла. Таким образом, глобальный головной процессор имеет все сведения об очереди задач. Этот процессор также загружает из соответствующих файлов некоторые общие параметры расчетной схемы (параметры набегающего потока, шаг расчета по времени, радиус вихревого элемента и др.), геометрию исследуемого профиля и значение «кванта времени»  $t_q$ , которое используется для синхронизации работы ветвей программы. Параметр  $t_q$  — это время, через которое происходит контроль загрузки процессоров и обновление очереди задач. Если в каких-то из запущенных задач выполнен критерий прекращения счета, то вместо них запускается процесс решения следующих задач.

Отметим, что файл с геометрическими параметрами обтекаемого профиля формируется с помощью отдельно разработанного приложения, в функции которого входит разбиение сторон многоугольника, аппроксимирующего профиль и заданный координатами его вершин, на панели в соответствии с задаваемой пользователем характерной длиной панелей. Для каждой панели определяется ее положение, длина, направления нормали и касательной, координаты контрольной точки и точки рождения вихревого элемента и некоторые другие параметры, необходимые для проведения расчета.

Глобальный головной процессор контролирует решение всей серии задач и осуществляет пересылки необходимых параметров между другими процессорами.

*Этап 2.* Этот этап осуществляется циклически, пока не будут решены все задачи из очереди. Перед запуском каждой следующей задачи анализируется состояние очереди и число свободных процессоров. Если их достаточно для запуска следующих задач из очереди, формируются подгруппы из  $n_{proc}^{(i)}$  ядер и в каждой подгруппе выделяется локальный головной процессор.

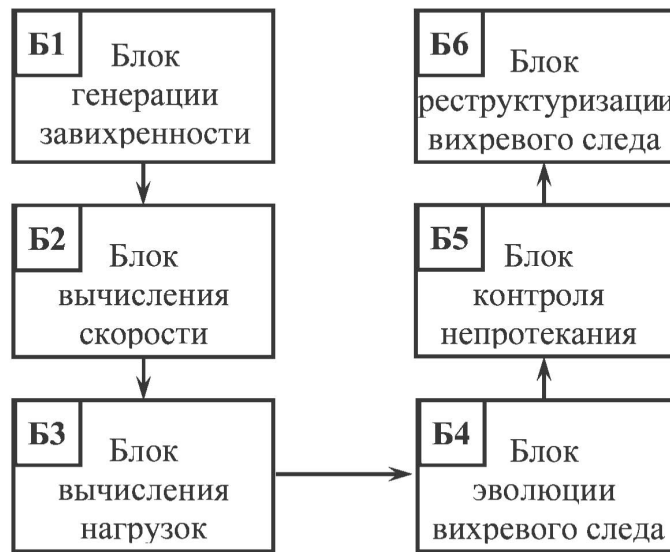
На данном этапе на основе общих исходных данных осуществляется подготовка необходимых параметров для решения конкретной задачи — происходит поворот профиля на необходимый угол атаки, при этом соответствующим образом пересчитываются все геометрические параметры профиля. Также на данном этапе в зависимости от выбранной расчетной схемы метода вихревых элементов вычисляются коэффициенты матрицы (2.19) системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующее соответствующее интегральное уравнение, которое описывает процесс генерации завихренности на профиле. Данная матрица в случае недеформируемого профиля остается постоянной на протяжении всего расчета, поэтому целесообразно здесь же произвести ее обращение и в дальнейшем хранить в памяти обратную матрицу.

Локальный головной процессор управляет ходом расчета нестационарного обтекания профиля на данном угле атаки и обеспечивает необходимые пересылки данных внутри своей подгруппы.

Головные процессоры всех подгрупп обмениваются данными с глобальным головным процессором, передавая ему информацию о необходимости продолжения расчета в данной задаче в течение следующего «кванта времени»  $t_q$  или о выполнении критерия прекращения счета.

*Этап 3.* На данном уровне непосредственно выполняются шаги расчета нестационарного обтекания профиля с помощью метода вихревых элементов. Расчет повторяется до тех пор, пока не закончится «квант времени»  $t_q$  или выполнится критерий прекращения счета.

Рассмотрим подробнее схему работы программного комплекса на одном шаге расчета обтекания профиля (рис. 3.2).



**Рис. 3.2.** Схема выполнения шага расчета методом вихревых элементов

Кратко опишем основные функции представленных блоков.

### **Б 1. Блок генерации завихренности**

В этом блоке определяются циркуляции вихревых элементов либо средние интенсивности вихревого слоя на панелях (в зависимости от выбранной расчетной схемы метода вихревых элементов). Для этого вычисляются элементы правой части  $b_i$  системы линейных алгебраических уравнений (2.15)–(2.16) и осуществляется ее умножение на обратную матрицу  $A^{-1}$ , вычисленную перед началом цикла по шагам.

Далее при необходимости с использованием формул, приведенных в разделе 2.5, производится пересчет найденных величин в циркуляции вихревых элементов, сходящих в поток с концов панелей. Данные вихревые элементы передаются в структуру данных вихревого следа.

### **Б 2. Блок вычисления скоростей вихревых элементов**

В данном блоке определяются конвективная и диффузионная скорости вихревых элементов, как описано в разделе 1.4. Эта операция алгоритма метода вихревых элементов является наиболее вычислительно-



трудоемкой, если вихревой след состоит из большого числа вихревых элементов, поэтому в целях сокращения затрат времени на проведение расчета в программном комплексе реализованы возможности по распараллеливанию этой операции (внутреннее распараллеливание) и использованию быстрого метода, оценки эффективности которых будут представлены ниже.

### **Б 3. Блок вычисления нагрузок**

Основной задачей блока вычисления нагрузок является вычисление сил, действующих со стороны потока на профиль. Определение главного вектора аэродинамических сил и аэродинамического момента осуществляется по формулам (1.40)–(1.41) и (1.42)–(1.43). При необходимости здесь же может вычисляться распределение давления по профилю; соответствующие расчетные формулы приведены в [1]. Именно исходя из этой возможности данный блок занимает место сразу после процедуры вычисления скоростей вихревых элементов, поскольку они необходимы для расчета давления.

Если осуществляется вычисление давления на панелях, то эта процедура также является достаточно трудоемкой, поэтому при ее реализации следует предусмотреть возможность распараллеливания вычислений.

### **Б 4. Блок эволюции вихревого следа**

Задачей блока является численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.33) с помощью метода Эйлера (1.44) или метода Рунге — Кутты (1.45)–(1.46). В результате находятся новые положения вихревых элементов на следующем шаге расчета по времени.

Отметим, что при использовании метода Рунге — Кутты второго порядка (1.45)–(1.46) на «промежуточном» шаге требуется генерация «фиктивных» вихревых элементов и повторное определение скоростей всех вихрей, о чем подробно говорилось в разделе 1.5. В этом случае внутри этого блока дополнительно вызываются блоки Б 1 и Б 2.

### **Б 5. Блок контроля непротекания**

В силу дискретности расчетной схемы в результате численного интегрирования уравнений движения вихревых элементов некоторые из них могут попадать внутрь профиля. Такие проникновения определяются программно, а вихревые элементы, проникающие внутрь по некоторому правилу могут возвращаться в область течения или удаляться из расчета с внесением необходимых корректировок, как было описано в разделе 1.4.

### **Б 6. Блок реструктуризации вихревого следа**

Реструктуризация вихревой пелены состоит из процедуры объединения вихревых элементов и процедуры удаления вихревых элементов, удалившихся от профиля на достаточно большое расстояние. Процедура коллапса происходит по следующему правилу: сначала определяются пары вихревых элементов, расстояние между которыми не превышает некоторого значения так называемого радиуса коллапса  $\varepsilon_{col}$ , которое в расчетах обычно принималось в диапазоне  $0,2 \leq \varepsilon_{col}/\varepsilon \leq 1,0$ . Если эти вихревые элементы имеют разные знаки циркуляций, то они объединяются в один вихрь суммарной циркуляции, который помещается на место того из двух исходных вихрей, который имел большую по модулю циркуляцию. Если оба вихря имели циркуляции одного знака, то суммарный вихрь помещается в их центр завихренности. При этом запрещается появление вихревых элементов, циркуляции которых (по модулю) превышают некоторое заданное «пороговое» значение  $\Gamma_*$ . Если такой вихрь образуется в результате объединения пары близких вихревых элементов одного знака, то процедура их коллапса не выполняется. Возможен режим работы алгоритма, когда значение параметра  $\varepsilon_{col}$  увеличивается по мере удаления от профиля. Это позволяет несколько снизить количество вихревых элементов в следе и за счет этого повысить скорость счета.

Данная процедура объединения близкорасположенных вихрей выполняется несколько раз: сначала 2–3 раза — только для вихревых элементов противоположных знаков, а затем еще 2–3 раза — для любых сочетаний знаков циркуляций.

В результате коллапса вихревых элементов, находящихся вблизи профиля, возможно попадание вновь образующихся вихрей внутрь профиля. Для исключения таких ситуаций внутри данного блока вызываются отдельные процедуры блока Б. 5.

Вихревые элементы, находящиеся от профиля на расстоянии, большем, чем значение параметра  $L_{far}$  (как правило,  $10 \leq L_{far}/b \leq 20$ , где  $b$  — характерный размер профиля), удаляются из расчета, так как их вклад в вычисление нагрузок незначителен, а уменьшение числа вихрей в расчете позволяет сократить размерность системы уравнений движения вихревых элементов (1.33).

Также из расчета удаляются вихревые элементы, циркуляция которых по модулю не превышает некоторого малого значения  $\Gamma_{min}$ ; они также не оказывают влияния на характеристики течения.

Отметим, что блок реструктуризации вихревого следа также имеет значительную вычислительную сложность, поэтому при его реализации следует предусматривать возможности ускорения расчетов за счет использования параллельных алгоритмов, а также быстрого метода.

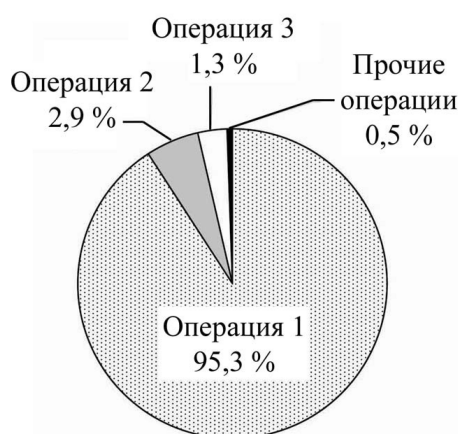
Далее исследуем эффективность подходов, позволяющих сократить временные затраты при проведении расчетов: параллельных алгоритмов и быстрого метода приближенного расчета парных взаимодействий вихревых элементов.

### **3.2. Оценка эффективности использования параллельных алгоритмов**

Исследуем, насколько может быть уменьшено время вычислений при проведении расчетов на многопроцессорных вычислительных комплексах. Поскольку параллельные алгоритмы используются в программном комплексе POLARA на двух уровнях (внутреннее и внешнее распараллеливание), исследуем их эффективность сначала по отдельности, а затем — при совместном использовании.

### 3.2.1. Оценка эффективности внутреннего распараллеливания

В методе вихревых элементов разные операции алгоритма имеют различную трудоемкость. На рис. 3.3 представлены характерные оценки трудоемкостей основных операций последовательного алгоритма метода вихревых элементов при решении одной задачи моделирования обтекания профиля потоком.



**Рис. 3.3.** Трудоемкость операций в методе вихревых элементов

*Операция 1.* Вычисление скоростей вихревых элементов как результата их влияния друг на друга.

*Операция 2.* Реструктуризация вихревой пелены, приводящая к уменьшению числа вихревых элементов за счет объединения близкорасположенных вихрей или исключения из расчетной схемы вихрей, удалившихся от обтекаемого профиля на значительное расстояние.

*Операция 3.* Вычисление нагрузок, которые действуют на профиль со стороны потока, по рассчитанному полю скоростей и известному распределению завихренности (в данном расчете производилось вычисление распределения давления по профилю).

Видно, что наибольшую трудоемкость имеют три операции (в порядке уменьшения их доли в общем времени расчета). Затратами машинного времени на выполнение других операций (например, определение циркуляций генерируемых вихревых элементов) можно пренебречь.

Согласно закону Амдала [7], для системы из  $S$  вычислительных ядер максимально возможное ускорение компьютерной программы с долей  $P$  параллельного кода и  $(1 - P)$  последовательного кода равно

$$\alpha = \frac{1}{\frac{P}{S} + (1 - P)}$$

С помощью этой формулы вычислено максимальное ускорение, которого теоретически можно достичь при распараллеливании только операции 1, операций 1, 2 или операций 1, 2, 3 алгоритма, например, для вычислительных систем с 4, 16 и 64 ядрами (табл. 9).

Таблица 9. Максимальное ускорение параллельного кода

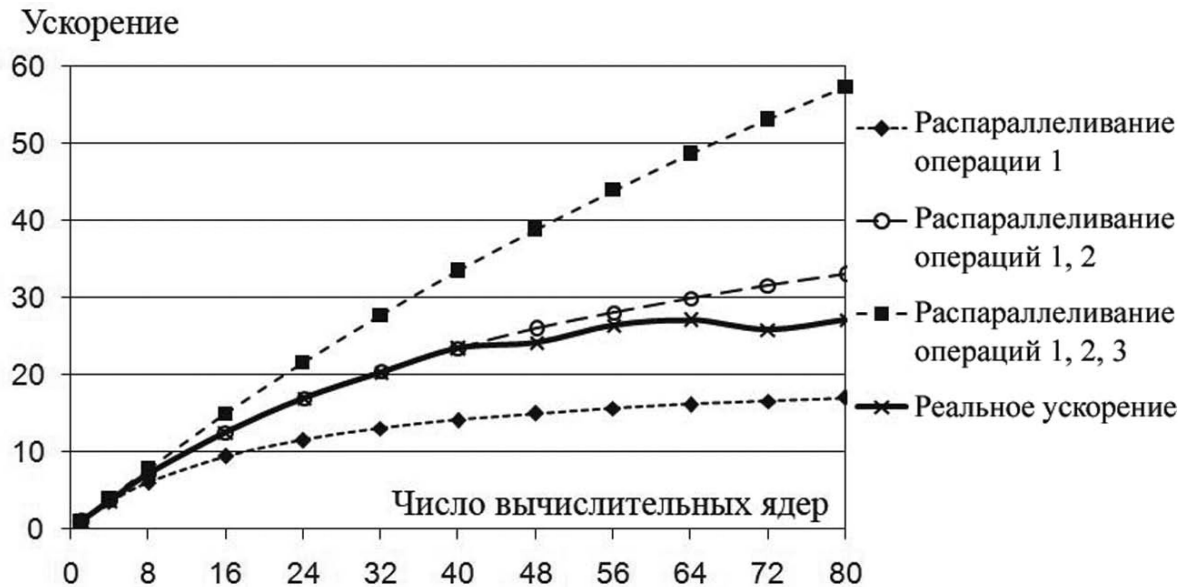
Распараллеливаемые операции	Доля параллельного кода	Максимальное ускорение		
		4 ядра	16 ядер	64 ядра
<b>1</b>	95,3 %	3,5	9,4	16,2
<b>1, 2</b>	98,2 %	3,8	12,6	30,0
<b>1, 2, 3</b>	99,5 %	3,9	14,9	48,7

Видно, что при использовании в расчетах небольшого числа ядер максимальные значения ускорений близки. Но при использовании системы с десятками вычислительных ядер распараллеливание операций 2 и 3 метода вихревых элементов дает значительный вклад в ускорение, несмотря на то, что эти операции составляют вместе лишь малую долю от операции 1 (приблизительно 4,5 %).

Естественно, реальное ускорение оказывается меньше, чем предсказывает закон Амдала, так как оценки по этому закону получены для идеального (линейного) распараллеливания, т. е. когда параллельный код выполняется в  $S$  раз быстрее на вычислительной системе с  $S$  ядрами.

На рис. 3.4 для программного комплекса POLARA представлена зависимость ускорения от числа вычислительных ядер при распараллеливании операций 1, 2 и 3 алгоритма. Для сравнения показаны мак-

симальные значения ускорения для случаев распараллеливания только операции 1, операций 1, 2 и операций 1, 2, 3.



**Рис. 3.4.** Реальное ускорение и оценки по закону Амдала

Полученные в расчетах значения ускорения при распараллеливании операций 1, 2, 3 близки к оценке по закону Амдала при распараллеливании операций 1, 2. Это связано с возникновением временных затрат на синхронизацию и обмен данными при проведении расчета, поэтому распараллеливание операции 3 важно для достижения высокой эффективности, хотя его доля от общей трудоемкости алгоритма крайне мала.

### 3.2.2. Оценка эффективности внешнего распараллеливания

При решении серии задач по расчету обтекания профиля под различными углами атаки временные затраты на решение отдельных задач могут отличаться в несколько раз, поэтому «конвейерная» обработка очереди задач позволяет оптимизировать загрузку вычислительных ядер. Это достигается за счет асинхронности запуска расчетов для разных углов атаки — каждый следующий расчет запускается как только освободится необходимое для него число ядер.

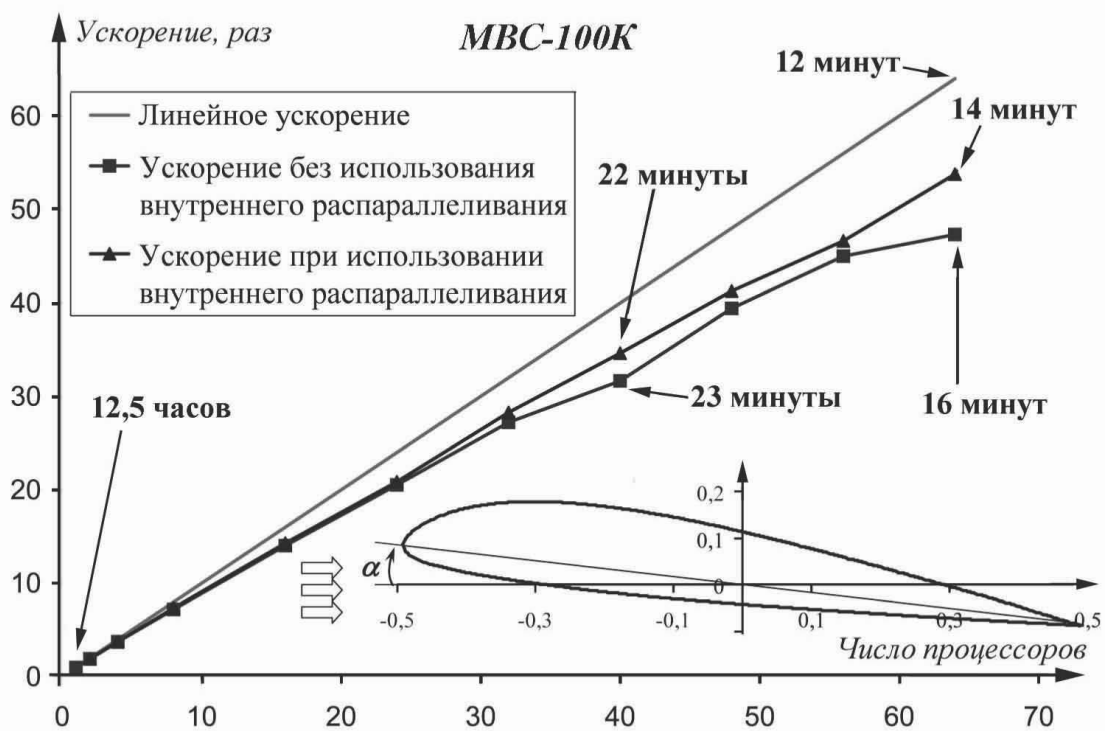
В качестве тестового примера рассмотрена серия из 91 задачи по моделированию обтекания профиля крыла ЦАГИ Р2-18 [2] при использовании 1–64 вычислительных ядер суперкомпьютера МВС-100К МСЦ РАН. Время решения всей серии в последовательном режиме на одном ядре составило около 12,5 часов. В табл. 10 представлены значения ускорения расчета, полученные в двух режимах работы программы: без использования внутреннего распараллеливания (1 ядро на каждую задачу) и с его использованием (2 ядра на задачу).

Таблица 10. Ускорение при решении серии задач

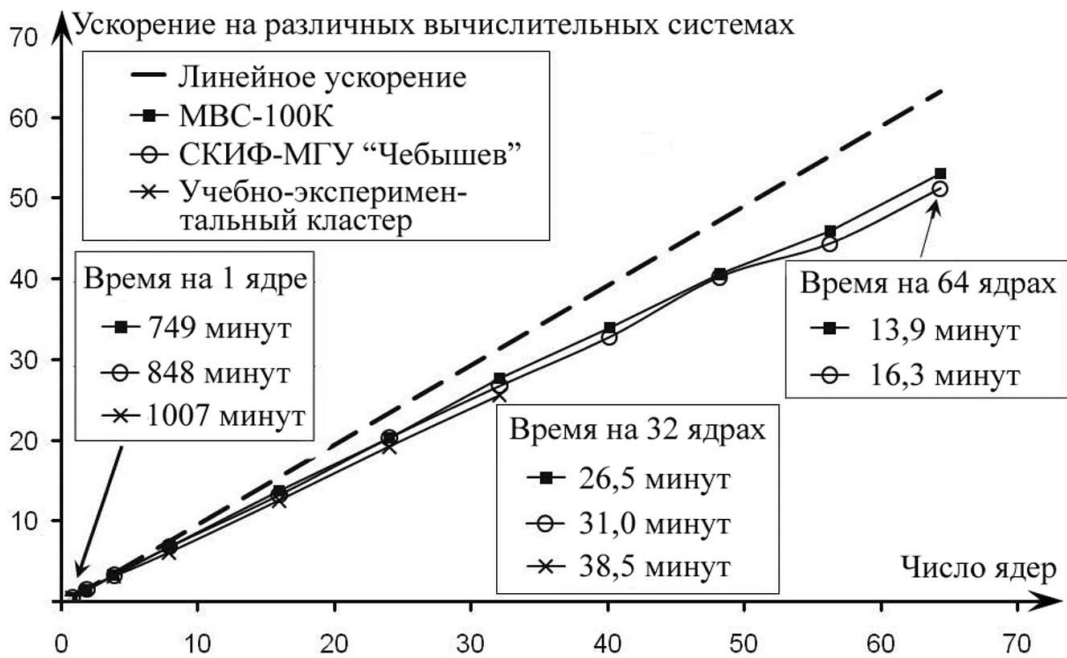
Число ядер	1	2	4	8	16	32	48	64
Ускорение, раз (1 ядро/расчет)	1,00	1,93	3,76	7,21	14,04	27,22	39,43	47,33
Ускорение, раз (2 ядра/расчет)	—	1,92	3,74	7,37	14,30	28,28	41,28	53,79

Видно, что при проведении расчета на многопроцессорном вычислительном комплексе с бóльшим числом ядер в случае использования внутреннего распараллеливания достигаются несколько бóльшие значения ускорения, что объясняется оптимизацией загрузки вычислительных ядер и уменьшением времени их простоя (рис. 3.5).

В силу использования стандартной библиотеки параллельных вычислений MPI программный комплекс POLARA является переносимым. На рис. 3.6 представлено ускорение, достигаемое при проведении расчетов на следующих вычислительных комплексах: суперкомпьютеры МВС-100К (МСЦ РАН) и СКИФ МГУ «Чебышев» (НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова), учебно-исследовательский вычислительный кластер (Кафедра «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана) [32], в сравнении с линейным ускорением, которое равно числу задействованных в расчете вычислительных ядер.



**Рис. 3.5.** Ускорение при использовании внешнего и внутреннего распараллеливания



**Рис. 3.6.** Ускорение на различных вычислительных системах

Хорошая распараллеливаемость алгоритма на всех системах и наблюдаемое близкое к линейному ускорение объясняется полной независимостью решаемых задач и относительно редкими синхронизациями.



### **3.2.3. Исследование возможности применения различных моделей параллельного программирования**

В программном комплексе POLARA как для внешнего, так и для внутреннего распараллеливания используется технология MPI. Целесообразность ее применения для внешнего распараллеливания, т. е. для одновременного решения нескольких полностью независимых задач, не вызывает сомнений ввиду практически отсутствующего межпроцессорного обмена данными. В то же время при распараллеливании решения каждой задачи (внутреннем) интенсивность обменов данными между задействованными в расчете ядрами становится существенной, поэтому для повышения эффективности работы программного комплекса была исследована возможность применения для этих целей технологии OpenMP [20]. С ее помощью были распараллелены те же 3 наиболее трудозатратные операции, что и при использовании MPI.

При проведении расчетов на вычислительных машинах с общей памятью на 2–8 вычислительных ядрах (тех же, что были перечислены выше) было установлено, что выигрыш по времени, достигаемый за счет использования OpenMP, не превышает 2–4 процентов по сравнению с применением MPI. В связи с этим данная возможность практически не использовалась, поскольку применение MPI позволяет сделать программу универсальной — она может работать как на системах с общей, так и с распределенной памятью (кластерах). При этом для целей внутреннего распараллеливания может использоваться произвольное число вычислительных ядер, которые могут находиться на различных узлах кластера. В последнем случае эффективность распараллеливания, очевидно, снизится, но такая возможность необходима для решения вычислительно-сложных задач, когда в расчетной схеме присутствуют десятки-сотни тысяч вихревых элементов.

### 3.3. Быстрый метод расчета парных взаимодействий вихревых элементов

В программном комплексе POLARA предусмотрена возможность использования так называемого быстрого метода расчета парных взаимодействий, аналогичного известному приближенному быстрому методу решения гравитационной «задачи  $N$  тел», описанному в [73]. Адаптация указанного алгоритма применительно к методу вихревых элементов описана в работе [14]. Его использование позволяет существенно сократить временные затраты на выполнение расчета, когда количество вихревых элементов, моделирующих обтекаемое тело и вихревой след составляет десятки-сотни тысяч. Далее приведем краткое описание этого алгоритма, следуя работе [14].

#### 3.3.1. Описание метода и оценка его эффективности

Задача типа гравитационной задачи  $N$  тел в методе вихревых элементов возникает при вычислении скоростей движения вихревых элементов, индуцируемых другими вихревыми элементами. Быстрые методы ее решения основаны на том, что при расчете влияния дальних вихрей они объединяются в группы и их коллективное воздействие рассчитывается приближенно. Для расчета влияния дальней области  $S$  на скорости точек в области  $S_0$  вычисляются интегралы положительной и отрицательной завихренности  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  в области  $S$  и их центры завихренности  $\mathbf{r}_+$ ,  $\mathbf{r}_-$

$$\Gamma_{\pm} = \int_s \Omega_{\pm} ds = \sum \Gamma_{k\pm}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_{\pm} = \frac{1}{\Gamma_{\pm}} \int_s \mathbf{r} \Omega_{\pm} ds \approx \frac{1}{\Gamma_{\pm}} \sum \mathbf{r}_{k\pm} \Gamma_{k\pm}, \quad (3.2)$$

где  $\Gamma_{k\pm}$ ,  $\mathbf{r}_{k\pm}$  — циркуляции и радиус-векторы вихревых элементов с положительной и отрицательной циркуляцией.

Вклад  $\mathbf{V}_i(\mathbf{S})$  вихревых элементов области  $\mathbf{S}$  в вектор скорости  $i$ -й точки области  $\mathbf{S}_0$  выражается формулами

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{S}) \approx \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix}, \quad \Delta x_i = x_i - x_c, \quad \Delta y_i = y_i - y_c, \quad (3.3)$$

$$a = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_+ y'_+}{r'_+{}^2} + \frac{\Gamma_- y'_-}{r'_-{}^2} \right), \quad b = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_+ x'_+}{r'_+{}^2} + \frac{\Gamma_- x'_-}{r'_-{}^2} \right),$$

$$c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Gamma_+ x'_+ y'_+}{r'_+{}^4} + \frac{\Gamma_- x'_- y'_-}{r'_-{}^4} \right), \quad d = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_+ (y'_+{}^2 - x'_+{}^2)}{r'_+{}^4} + \frac{\Gamma_- (y'_-{}^2 - x'_-{}^2)}{r'_-{}^4} \right).$$

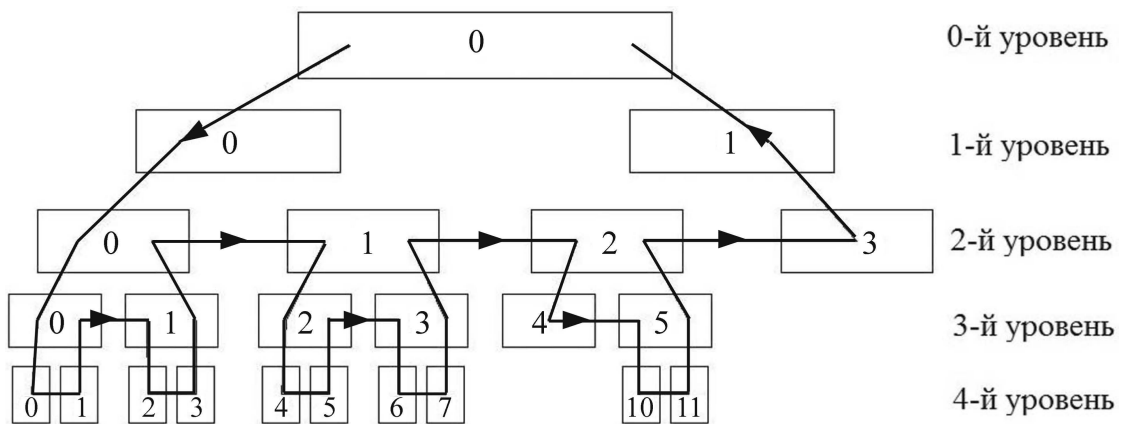
Здесь  $x_c, y_c$  — координаты некоторой выделенной точки  $\mathbf{R}_c$  области  $\mathbf{S}_0$ ;  $x'_\pm, y'_\pm$  — координаты векторов  $\mathbf{r}'_\pm = \mathbf{R}_c - \mathbf{r}_\pm$ .

Формула (3.3) позволяет вычислять вклад в вектор скорости всех вихревых элементов области наблюдения  $\mathbf{S}_0$  от вихревых элементов области  $\mathbf{S}$ , если размеры областей достаточно малы по сравнению с расстоянием между ними. При этом не требуется производить перебор всех элементов области  $\mathbf{S}_0$  — достаточно однократного вычисления коэффициентов  $a, b, c$  и  $d$ . Отметим, что точность вычисления скоростей вихревых элементов с помощью быстрого метода зависит от выбора предельного значения отношения размеров данных областей к расстоянию между ними, ниже которого расчет влияния производится по приближенным формулам.

Алгоритм решения вихревой «задачи  $N$  тел» состоит из трех этапов:

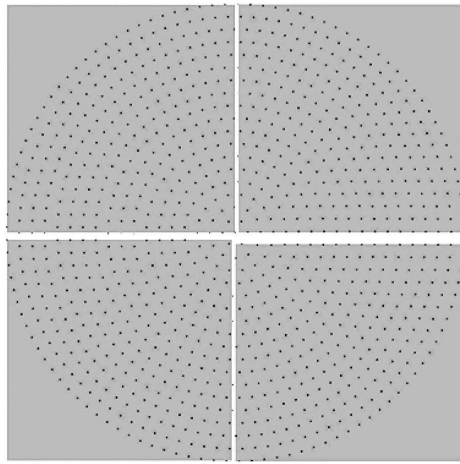
- 1) построение иерархической структуры (дерева);
- 2) вычисление суммарных циркуляций и центров завихренности положительных и отрицательных вихревых элементов в каждой области;
- 3) вычисление скоростей вихревых элементов.

Для построения дерева строится структура прямоугольных областей (рис. 3.7). Прямоугольник нулевого уровня содержит все вихревые элементы. Он делится по длинной стороне на два одинаковых прямоугольника первого уровня. Путем перебора вихревых элементов определяется их принадлежность к одному из них. После этого каждый прямоугольник «обрезается» по горизонтали и по вертикали, чтобы исключить из него области, не содержащие ни одного вихря. Заметим, что такая процедура позволяет, с одной стороны, существенно повысить эффективность метода, а с другой — упростить алгоритм. Далее аналогичным образом прямоугольники делятся, образуя области второго уровня и т. д. Отметим, что «обрезание» всех прямоугольников обеспечивает непустоту областей следующего уровня. Нумерацию ячеек на каждом уровне удобно делать «сплошной», как это показано на рис. 3.7, при этом если некоторые ячейки отсутствуют, то их номера пропускаются. Пример ячеек дерева различных уровней в задаче о моделировании движения круглого вихря показан на рис. 3.8

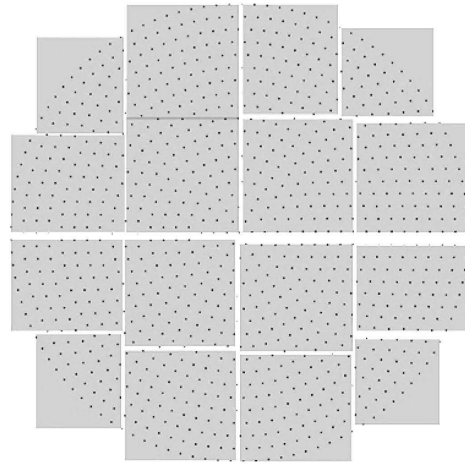


**Рис. 3.7.** Дерево и направление его обхода

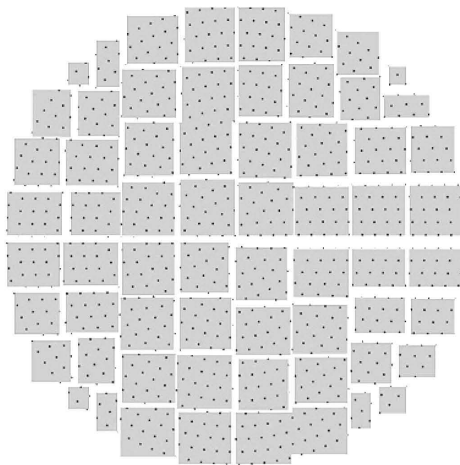
Деление прекращается при выполнении заданного критерия по размеру прямоугольника, числу вихревых элементов в нем и (или) номеру уровня. Области, на которых процесс деления завершился, называются нижними прямоугольниками.



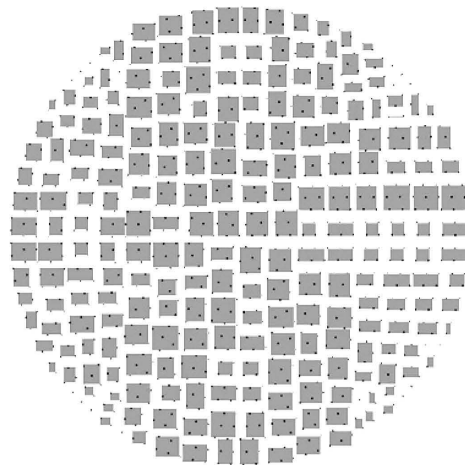
2-й уровень



4-й уровень



6-й уровень



8-й уровень

**Рис. 3.8.** Прямоугольники-ячейки соответствующих уровней дерева

Вычисление суммарных циркуляций  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$  и центров завихренности  $\mathbf{r}_+$ ,  $\mathbf{r}_-$  положительных и отрицательных вихревых элементов в каждой области ведется по формулам (3.1)–(3.2). Для нижних прямоугольников это делается непосредственно путем перебора всех входящих в них вихревых элементов, для областей более высокого уровня указанные характеристики вычисляются по параметрам дочерних областей.

При вычислении скоростей вихревых элементов последовательно рассматриваются нижние прямоугольники. Для каждого из них проводится обход дерева с целью выявления областей, достаточно удаленных от него по сравнению с характерным размером  $h$ , равным сумме линейных измерений (по горизонтали и по вертикали) обоих прямоугольни-

ков. Если данный критерий выполняется, то вычисляются коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  по формуле (3.3). Эти коэффициенты при дальнейшем обходе суммируются с аналогичными коэффициентами от других прямоугольников, удовлетворяющих критерию дальности. Если критерий дальности не выполняется, то осуществляется переход вниз по дереву (схема обхода дерева представлена на рис. 3.7). Если при обходе достигается нижний прямоугольник, но критерий дальности не выполняется, его номер запоминается и вклад от него вычисляется непосредственно с использованием закона Био — Савара. Таким образом, после обхода дерева оказываются вычисленными величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , представляющие собой суммы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  для областей, удовлетворяющих заданному критерию, а также имеется список номеров прямоугольников, вклад от которых вычисляется путем перебора вихревых элементов по закону Био — Савара. После этого скорости всех вихревых элементов рассматриваемого нижнего прямоугольника вычисляются по формуле

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ D & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} + \sum_j \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{w}_i, \quad (3.4)$$

где суммирование по  $j$  осуществляется по вихревым элементам, принадлежащим рассматриваемому нижнему прямоугольнику и нижним прямоугольникам из списка,  $\mathbf{w}_i$  — диффузионная скорость. Затем процедура повторяется для следующего нижнего прямоугольника. Для вычисления диффузионных скоростей  $\mathbf{w}_i$  используется то же самое дерево; при этом учитывается влияние вихревых элементов только из тех прямоугольников, которые находятся достаточно близко к рассматриваемому.

Отметим, что при проведении расчетов с использованием алгоритма быстрого метода меняются алгоритмы выполнения других операций метода вихревых элементов. Использование дерева позволяет реализовать приближенный быстрый метод расчета распределения давления по профилю, а также существенно ускорить процедуру реструктуризации вихревого следа. Отметим, что время построения дерева обычно состав-

ляет доли процента от времени выполнения шага расчета, поэтому представляется целесообразным и при расчете «прямым» методом осуществлять построение дерева с целью сокращения затрат времени на реструктуризацию пелены.

Оценка вычислительной трудоемкости различных операций алгоритма метода вихревых элементов при использовании быстрого метода представлена на рис. 3.9. При получении этой оценки решалась та же модельная задача, что и ранее при проведении расчетов «прямым» методом на одном вычислительном ядре (см. рис. 3.3).



**Рис. 3.9.** Трудоемкость операций алгоритма метода вихревых элементов при проведении расчетов быстрым методом

Из сравнения с предыдущими оценками следует, что доля затрат на вычисление скоростей вихревых элементов сократилась, хотя и осталась доминирующей. Использование быстрого метода позволило сократить общее время счета в рассмотренной тестовой задаче в 6 раз, поэтому его внедрение является целесообразным при решении вычислительно-сложных задач с достаточно большим числом вихревых элементов.

### 3.3.2. Оценка оптимальной глубины дерева в быстром методе

Актуальной задачей является выбор максимальной глубины построения дерева, при которой вычисление скоростей всех вихревых элементов может быть выполнено максимально быстро. Для решения этой за-

дачи оценим число арифметических операций (умножения и деления), выполняемых при вычислении конвективных скоростей вихревых элементов. Подобная оценка построена в работе [8], однако она получена для одного фиксированного значения параметра  $\theta$  (в обозначениях, принятых в данной работе, для  $\theta = 4$ ). Но, как показывают результаты расчетов, такая величина  $\theta$  приводит к слишком низкой точности решения, поэтому на практике значение данного параметра следует выбирать из промежутка  $0 < \theta < 1$  (обычно в расчетах быстрым методом принималось  $\theta = 0,2$ ).

Рассмотрим  $N$  вихревых элементов, равномерно распределенных в круге радиуса  $a/2$ , тогда ячейка нулевого уровня — это квадрат со стороной  $a$ . Приближенно будем считать, что все ячейки всех уровней являются квадратными, тогда на  $k$ -м уровне имеется  $N_k = (\pi/4) \cdot 2^k = \pi \cdot 2^{k-2}$  ячеек — квадратов со стороной  $a_k = a/(\sqrt{2})^k$  (учитываются только ячейки, попадающие внутрь круга).

Пусть построено дерево глубиной  $k$  уровней; рассмотрим одну его ячейку и рассчитаем число ячеек этого же уровня, попадающих в ближнюю зону (т. е. тех ячеек, влияние вихревых элементов из которых будет учитываться непосредственно по закону Био — Савара). Под ближней зоной будем понимать круг с центром в центре данного квадрата и радиусом  $\Delta = h/\theta$ , где  $h$  — сумма измерений ячеек во горизонтали и вертикали (в данном случае  $h = 4a/(\sqrt{2})^k = a/(\sqrt{2})^{k-4}$ );  $0 < \theta \leq 4$  — параметр, определяющий критерий дальности. Число ячеек  $k$ -го уровня дерева, попадающих в этот круг, составляет

$$N_{\text{ближ}} = \frac{2^4 \pi}{\theta^2}.$$

Пусть  $j = m_{ks}$  — расстояние, выражаемое в длинах стороны квадрата  $k$ -го уровня, при котором квадрат  $s$ -го уровня попадает в дальнюю зону (т. е. относится к ячейкам, влияние вихревых элементов из которых вычисляется приближенно по быстрому методу)

$$j = m_{ks} = \frac{2}{\theta} (1 + (\sqrt{2})^{k-s}),$$



тогда на расстоянии  $j = m_{ks}$  ячеек  $k$ -го уровня к дальней зоне будут относиться ячейки уровня

$$s = k + 2 - 2 \log_2(\theta_j - 2).$$

Радиусы ближней области и всей исходной области, выраженные в длинах стороны квадрата  $k$ -го уровня, равны соответственно  $p_k = 4/\theta$  и  $P_k = (\sqrt{2})^{k-2}$ , тогда приближенно количество ячеек максимально высокого уровня, находящихся в дальней зоне, можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{\text{дал}} &= \sum_{j=p_k+1}^{P_k} \frac{(2\pi a_k \cdot j) a_k}{a_s^2} = 8\pi \sum_{j=\frac{4}{\theta}+1}^{(\sqrt{2})^{k-2}} \frac{j}{(\theta j - 2)^2} \approx \\ &\approx 8\pi \int_{\frac{4}{\theta}}^{(\sqrt{2})^{k-2}} \frac{y}{(\theta y - 2)^2} dy = \frac{8\pi}{\theta^2} \left[ \ln \left( \theta(\sqrt{2})^{k-4} - 1 \right) - \left( \theta(\sqrt{2})^{k-4} - 1 \right)^{-1} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Вычисление четырех коэффициентов влияния от каждой ячейки дальней зоны в соответствии с формулами (3.3) требует 28 арифметических операций, таким образом, общее число операций равно

$$Q_1 = 28 \cdot N_{\text{дал}} \cdot \pi 2^{k-2} = \frac{56\pi^2 2^k}{\theta^2} \left[ \ln \left( \theta(\sqrt{2})^{k-4} - 1 \right) - \left( \theta(\sqrt{2})^{k-4} - 1 \right)^{-1} + 1 \right].$$

Вычисление скоростей вихревых элементов, находящихся внутри ячеек нижнего уровня, через рассчитанные коэффициенты требует

$$Q_2 = 4 \cdot \frac{N}{\pi \cdot 2^{k-2}} \cdot \pi \cdot 2^{k-2} = 4N$$

арифметических операций.

Влияние вихревых элементов ближней зоны, рассчитываемое напрямую по закону Био — Савара, требует выполнения

$$Q_3 = 6 \cdot N_{\text{ближ}} \cdot \left( \frac{N}{\pi \cdot 2^{k-2}} \right)^2 \cdot \pi \cdot 2^{k-2} = \frac{3N^2}{\theta^2 \cdot 2^{k-7}}$$

арифметических операций с учетом того, что для расчета влияния одного вихревого элемента на другой требуется 6 операций.

Итого, общее число операций, необходимое для вычисления конвективных скоростей на одном шаге расчета, составляет

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{896\pi^2 p^2}{\theta^4} \left[ \ln(p-1) - \frac{1}{p-1} + 1 \right] + 4N + \frac{24N^2}{p^2},$$

где  $p = \theta \cdot (\sqrt{2})^{k-4}$ .

Для поиска значения  $p$ , при котором число арифметических операций минимально, следует приравнять к нулю производную  $Q'(p)$ . В результате получается алгебраическое уравнение

$$p^4 \left( 2 \ln(p-1) + 3 + \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \frac{3N^2\theta^4}{56\pi^2}, \quad (3.5)$$

левая часть которого при  $p > 1,5$  является возрастающей функцией; следовательно, оно имеет единственное решение  $p = p^*$ , которое может быть найдено численно. Поскольку оптимальное значение глубины дерева  $k^*$  — это натуральное число, оно вычисляется по формуле

$$k^* = \left[ 4 + 2 \log_2 \frac{p^*}{\theta} \right], \quad (3.6)$$

в которой квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Для проверки полученной оценки были проведены расчеты при  $N = 30\,000; 60\,000; 120\,000$  ( $N$  — количество вихревых элементов). В табл. 11 приведено время выполнения алгоритма быстрого метода расчета конвективных скоростей вихревых элементов при различной максимальной глубине дерева, при этом время счета для оптимальной глубины дерева, найденное по формулам (3.5)–(3.6), принято за единицу.

Таблица 11. Оптимальное число уровней дерева

Число уровней дерева	Время счета $t_k/t_{k^*}$		
	$N = 30\,000$ $k^* = 13$	$N = 60\,000$ $k^* = 14$	$N = 120\,000$ $k^* = 15$
11	2,20	4,01	7,12
12	1,18	2,04	3,55
13	1,00	1,30	2,07
14	1,27	1,00	1,11
15	1,88	1,38	1,00
16	2,04	2,04	1,34

Видно, что полученная оценка оптимального числа уровней дерева  $k^*$  верна, и именно при данной глубине дерева время счета является минимальным. Следует отметить, что при фиксированном значении  $\theta$  время выполнения расчета существенно зависит от максимального числа уровней дерева; отклонение на 2–3 уровня от оптимального значения приводит к существенному росту затрат времени.

По аналогии с быстрым методом решения гравитационной задачи  $N$  тел [73] можно показать, что при оптимальном выборе максимальной глубины дерева данный алгоритм имеет асимптотическую сложность  $O(N \log N)$  против  $O(N^2)$  для «прямого» метода. Данная оценка трудоемкости подтверждается результатами вычислительных экспериментов.

Построенная выше оценка используется в дальнейшем при проведении расчетов методом вихревых элементов.

### 3.3.3. Параллельная реализация быстрого метода

При использовании прямого метода расчета парных взаимодействий вихревых элементов идея распараллеливания операции вычисления вихревого влияния сводилась к разделению всего множества вихревых эле-

ментов на равные блоки по числу задействованных вычислительных ядер и последующему независимому вычислению скоростей вихрей в соответствующих блоках. При этом, очевидно, перед каждым шагом требуется рассылка на все вычислительные узлы полной информации о всех вихревых элементах.

Распараллеливание вычислений при использовании быстрого метода расчета вихревого влияния основано на сходной идее, однако по вычислительным узлам распределяются не отдельные вихревые элементы, а нижние прямоугольники, т. е. те вершины дерева, которые не имеют потомков. При этом после рассылки на все вычислительные ядра в начале каждого шага полной информации о всех вихревых элементах на них выполняются процедуры построения дерева. В случае неудачно выбранного критерия окончания деления прямоугольников в алгоритме построения дерева, а также при сильной неоднородности распределения вихревых элементов в области течения, предлагаемый метод разделения задачи на «подобласти» может приводить к существенному снижению равномерности загрузки вычислительных ядер, однако в практически интересных случаях получаемое ускорение оказывается довольно высоким. Значения ускорения расчета при использовании быстрого метода вычисления вихревого влияния (при  $\theta = 0,2$ ) для задачи с достаточно большим количеством вихревых элементов в следе за обтекаемым профилем ( $N \sim 100\,000$ ) представлены в табл. 12.

*Таблица 12.* Ускорение при параллельной реализации быстрого метода

Число ядер	1	2	4	8	16
Ускорение, раз	1,00	1,58	2,65	4,31	5,97

### 3.4. Использование программного комплекса POLARA для проведения методических исследований параметров расчетных схем метода вихревых элементов

При создании программных комплексов для решения инженерных задач по моделированию обтекания профилей с использованием метода вихревых элементов, а также при создании новых и модификации существующих расчетных схем метода возникает задача верификации разработанных моделей и оптимального подбора параметров, входящих в расчетную схему метода вихревых элементов.

Расчетная схема метода вихревых элементов содержит ряд задаваемых расчетчиком параметров; некоторые из них представлены в табл. 13.

Таблица 13. Варьируемые параметры расчетной схемы

$\Delta t$	шаг расчета по времени
$\varepsilon$	радиус вихревого элемента
$\varepsilon_{col}$	радиус коллапса вихревого элемента
tik_type	метод контроля условия непротекания

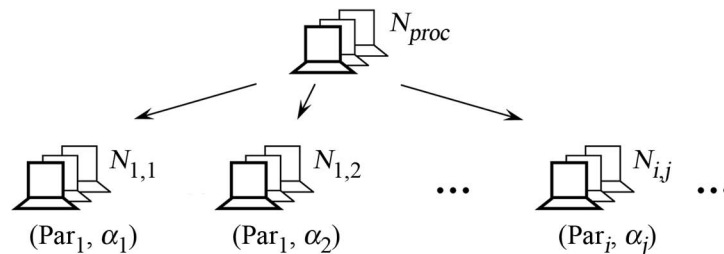
Для верификации расчетной схемы и метода в целом необходимо проведение серии методических экспериментов. Опыт показывает, что при расчете обтекания существенно различных профилей (например, кругового профиля или профиля крыла) параметры расчетной схемы следует выбирать по-разному. Для их подбора обычно решается задача о расчете обтекания «эталонного» профиля с заранее известными характеристиками. Параметры расчетной схемы выбираются таким образом, чтобы согласовать результаты расчета с ними. Далее с этими же параметрами можно проводить исследование характеристик целого класса профилей, близких к «эталонному» по форме, относительной толщине и т. п. Результаты расчетов показывают, что в этом случае характеристики исследуемых профилей удастся вычислять достаточно точно. Проведение

методических экспериментов требует выполнения большого числа расчетов, но в силу однотипности и независимости задач их выполнение можно оптимизировать путем автоматизации серии вычислений.

При подборе параметров расчетной схемы метода вихревых элементов нельзя ограничиться проведением серии вышеуказанных расчетов для одного фиксированного угла атаки; для каждого исследуемого набора параметров требуется проводить исследование в достаточно широком диапазоне углов. Это связано с тем, что режим обтекания профиля может существенно зависеть от угла атаки, и при некотором наборе параметров расчетной схемы результаты моделирования будут приемлемыми для одних углов и существенно неверными для других. Ясно, что для решения описанной задачи может использоваться несколько модифицированная версия описанного выше программного комплекса POLARA.

Пусть необходимо провести серию расчетов при различных наборах параметров  $\text{Par}_1, \text{Par}_2, \dots, \text{Par}_Q$  расчетной схемы метода вихревых элементов. Как и в исходном варианте программного комплекса POLARA для профиля задается список углов атаки  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ , для которых будет производиться вычисление аэродинамических характеристик. Трудоемкость каждого расчета может существенно зависеть от угла атаки профиля (особенно это касается профилей с малой относительной толщиной). Поэтому целесообразно в явном виде указывать значения  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ , которые определяют число процессоров для расчетов обтекания профиля под соответствующим углом атаки. Выбор параметров расчетной схемы метода вихревых элементов также влияет на трудоемкость расчетов, однако это влияние часто оказывается примерно одинаковым для всех углов атаки, поэтому для каждого набора параметров может задаваться коэффициент  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, Q$  (по умолчанию все они полагаются равными единице). В результате число вычислительных ядер, на которых выполняется расчет с параметрами  $\text{Par}_i$  для угла атаки  $\alpha_j$ , равно  $n_{proc}^{(i,j)} = p_i k_j$ . При этом, очевидно, должно выполняться условие  $1 \leq n_{proc}^{(i,j)} \leq N_{proc}$ .

Общая идеология работы программного комплекса при этом принципиально не изменяется: на этапе запуска расчета из  $N_{proc}$  процессоров выделяется глобальный головной процессор, на который загружается список параметров  $\{Par_i\}_{i=1}^Q$  и список углов атаки  $\{\alpha_j\}_{j=1}^M$ . На этот процессор также загружаются общие для всех задач параметры расчетной схемы, геометрия исследуемого профиля (или нескольких профилей), а также значение «кванта времени»  $t_q$ . Глобальный головной процессор контролирует решение серии задач и управляет пересылкой необходимых параметров между другими процессорами (рис. 3.10).



**Рис. 3.10.** Схема распараллеливания в расширенном варианте программного комплекса POLARA

Перед запуском каждой последующей задачи анализируется состояние очереди и число свободных ядер. Для решения каждой конкретной задачи  $(Par_i, \alpha_j)$  формируется группа из  $n_{proc}^{(i,j)}$  ядер, в ней выделяется локальный головной процессор, который управляет ходом моделирования обтекания профиля на данном угле атаки и обеспечивает необходимые пересылки информации внутри своей подгруппы. Алгоритм выполнения расчета обтекания при этом не изменяется.

Набор варьируемых параметров расчетной схемы может быть изменен и дополнен в зависимости от текущих потребностей; это требует лишь незначительной модификации исходного кода.

Отметим, что данная возможность программного комплекса POLARA активно использовалась перед выполнением основных расчетов; в результате были установлены подходящие соотношения между указанными выше параметрами.

### 3.5. Верификация программного комплекса POLARA

В данном разделе представлены некоторые результаты математического моделирования обтекания профилей потоком вязкой несжимаемой среды, выполненного с помощью метода вихревых элементов в программном комплексе POLARA.

#### 3.5.1. Моделирование обтекания профиля при использовании расчетных схем $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$ и $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$

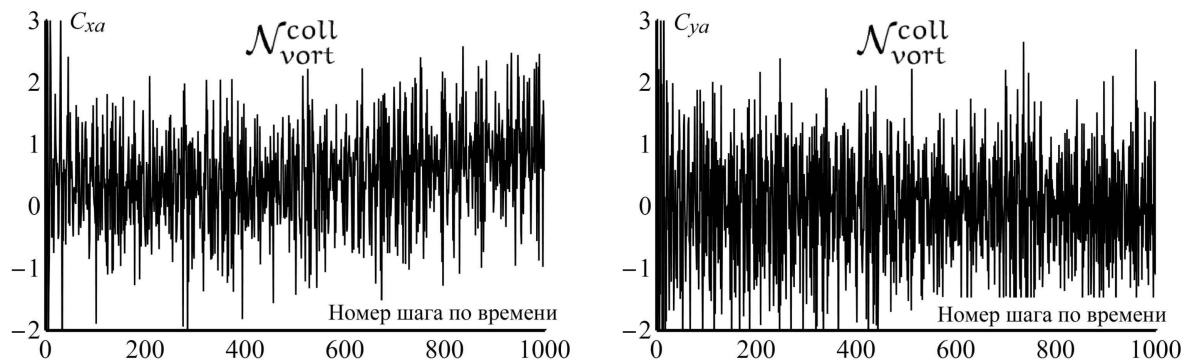
Использование различных расчетных схем на профиле, рассмотренных подробно в главе 2, может приводить к существенно различающимся результатам вычислений. В разделе 2.6.1 на примере профиля Жуковского было наглядно показано, что при расчете обтекания профилей с острой кромкой использование схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  приводит к значительной ошибке в определении циркуляций вихревых элементов сходящих с профиля в окрестности острой кромки. Тот же результат продемонстрирован в разделе 2.6.2 для профиля с внешним углом. Схема  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  в указанных случаях позволяла получить существенно более точные результаты. В то же время для случая гладких профилей (эллипсы) обе схемы приводили к близким по точности результатам.

Тем не менее, при проведении расчета нестационарного обтекания профиля (не важно — гладкого или с угловыми точками) вязкой средой вблизи его поверхности образуется пограничный слой — достаточно тонкая область, в которой происходит резкое изменение скорости среды. Область пограничного слоя моделируется большим количеством вихревых элементов, которые располагаются близко к профилю. Из раздела 2.6.3 видно, что в случае использования схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  при этом будут возникать существенно большие погрешности определения циркуляций сходящих в поток вихрей по сравнению со схемой  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ .

Расчеты показывают, что, к примеру, при расчете обтекания кругового профиля, когда число панелей на профиле является достаточно большим (порядка тысячи), обе рассматриваемые схемы приводят к при-

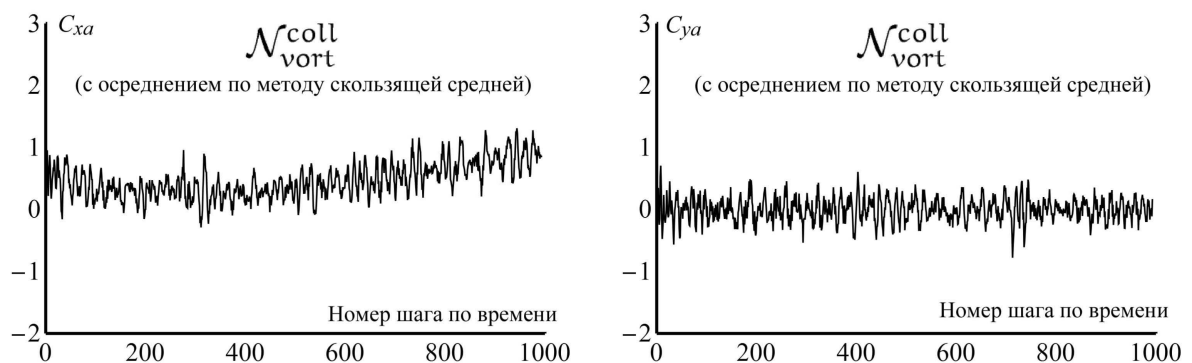


мерно одинаковым осредненным по времени значениям аэродинамических коэффициентов. Однако если необходимо вычисление нестационарных аэродинамических нагрузок, скажем, для решения сопряженных задач аэроупругости, когда профиль движется в потоке либо деформируется под их воздействием, то использование расчетных схем  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  и  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  приводит к результатам, приведенным на рис. 3.11–3.13. Все параметры расчетных схем выбирались одинаково; число Рейнольдса, вычисленное по диаметру круга, составляло  $Re = 10^3$ ; число панелей на профиле  $N_p = 1000$ . На рис. 3.11 показаны полученные в ходе расчета с использованием схемы  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  зависимости коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы кругового профиля от номера шага расчета на начальном этапе развития вихревого следа, когда обтекание еще остается близким к симметричному (до развития «дорожки Кармана»).



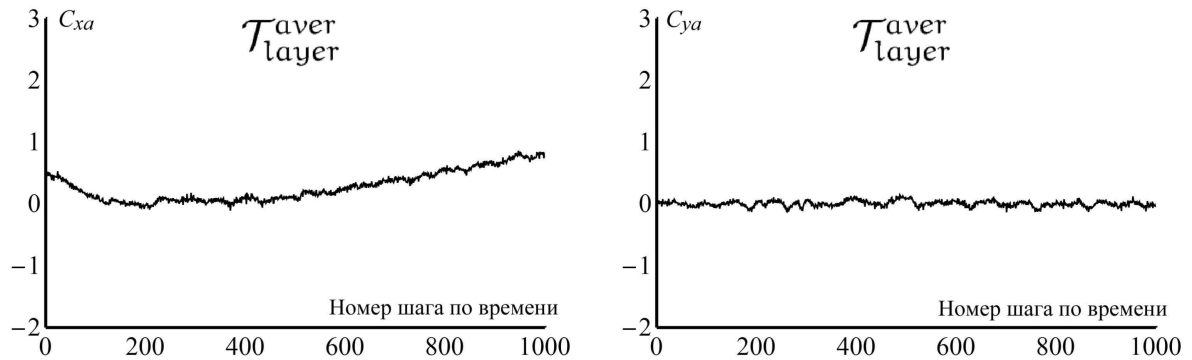
**Рис. 3.11.** Нестационарные аэродинамические коэффициенты кругового профиля; расчет по схеме  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$

На рис. 3.12 показаны результаты того же расчета после осреднения методом скользящей средней с длиной сглаживающего интервала  $n = 8$ .



**Рис. 3.12.** Нестационарные аэродинамические коэффициенты кругового профиля; расчет по схеме  $\mathcal{N}_{vort}^{coll}$  с последующим осреднением результатов

На рис. 3.13 представлены те же характеристики, полученные в расчете с применением расчетной схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  (без осреднения).



**Рис. 3.13.** Нестационарные аэродинамические коэффициенты кругового профиля; расчет по схеме  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$

Видно, что использование схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$  приводит к существенно меньшим осцилляциям аэродинамических нагрузок от шага к шагу.

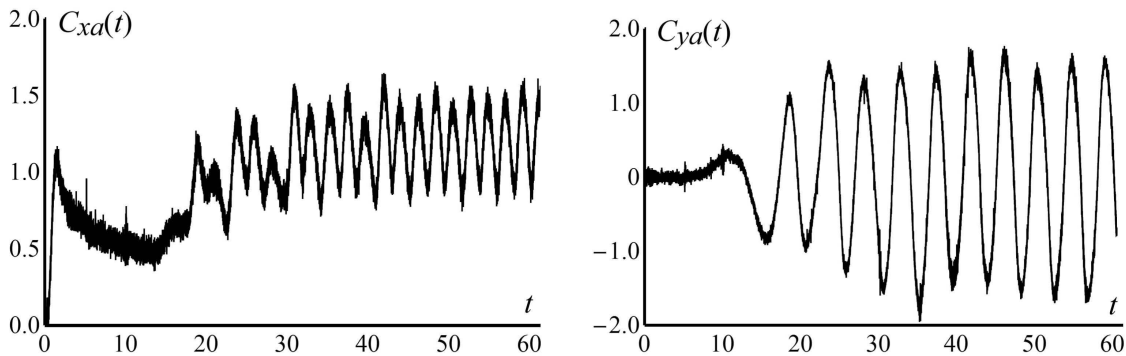
С учетом полученных ранее характеристик точности различных расчетных схем и данного результата можно сделать вывод о целесообразности использования в дальнейшем только расчетной схемы  $\mathcal{T}_{layer}^{aver}$ .

### 3.5.2. Моделирование обтекания кругового профиля при $Re = 10^3$

Расчет обтекания кругового профиля является одной из классических модельных задач, используемых для верификации численных методов моделирования течений. Эта задача тщательно исследована как экспериментально [87, 92], так и численно в большом количестве работ. В достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса  $Re$  от  $3 \cdot 10^2$  до  $1 \cdot 10^5$  значение стационарного коэффициента лобового сопротивления круга близко к  $C_{xa} = 1,2$  [92], среднее значение коэффициента лобового сопротивления  $C_{ya} = 0$ . На начальном этапе развития течения обтекание круга близко к симметричному, позади него образуются два крупных вихря противоположных циркуляций. Такой режим обтекания характеризуется пониженным лобовым сопротивлением и близкой к нулю подъемной силой. Затем данное течение теряет устойчивость и после некоторого переходного режима за профилем образуется «шахматная» вихревая дорожка Кармана, среднее значение коэффициента лобового сопротивле-

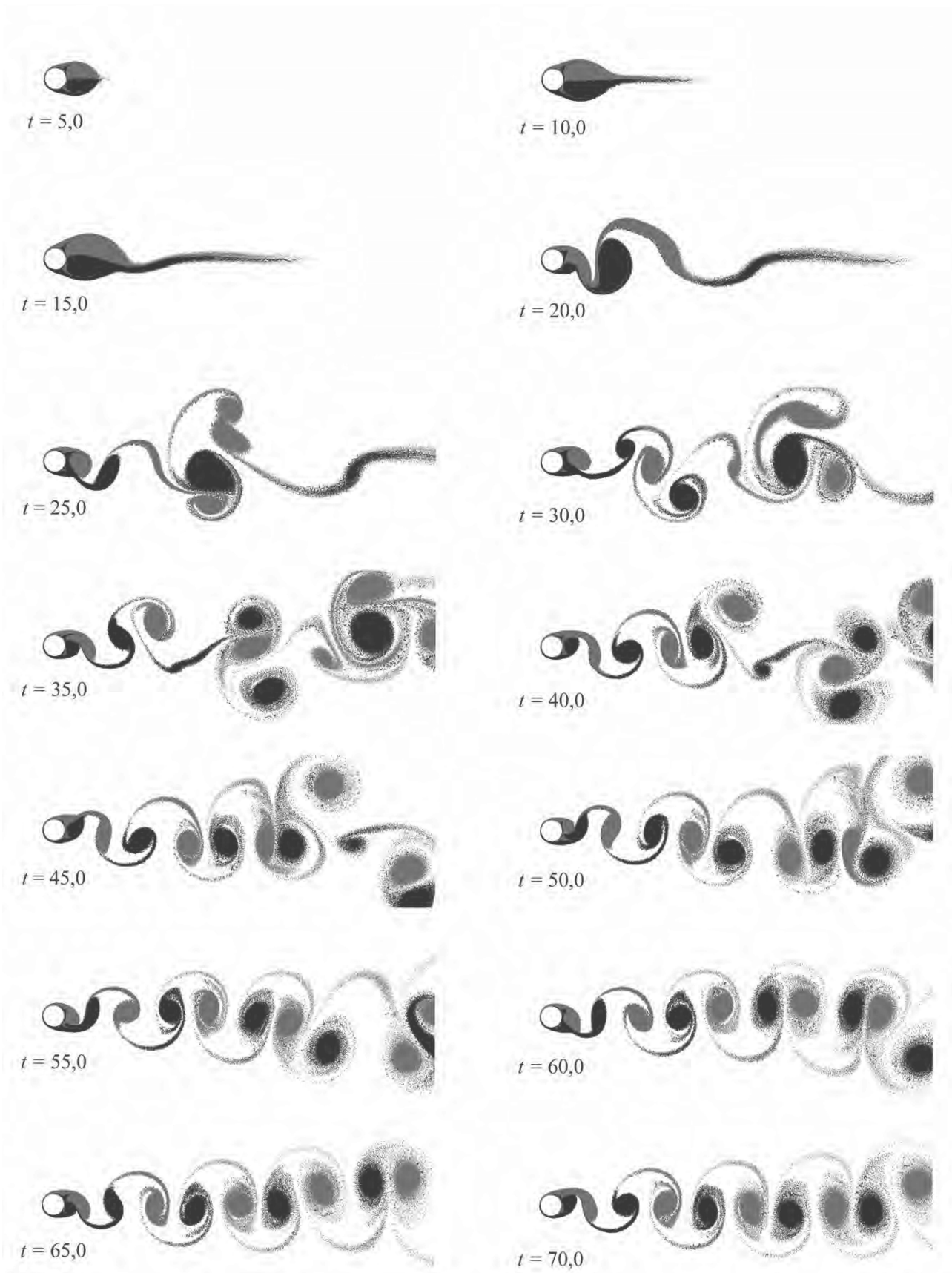
ния приближается к стационарному значению  $C_{xa} \approx 1,2$ , коэффициент подъемной силы колеблется с амплитудой  $\hat{C}_{ya} \approx 1,0 \dots 1,5$  при нулевом среднем значении. Безразмерная частота схода вихрей (число Струхалия) в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 3 \cdot 10^2 \dots 1 \cdot 10^4$  примерно постоянна и близка к  $Sh = 0,21$  [87].

Расчет обтекания кругового профиля методом вихревых элементов проводился при следующих безразмерных значениях параметров: скорость набегающего потока  $V_\infty = 1,0$ , диаметр профиля  $D = 1,0$ , число Рейнольдса  $Re = 10^3$ , число панелей на профиле  $N_p = 1000$ , шаг расчета по времени  $\Delta t = 0,001$ , радиус вихревого элемента  $\varepsilon = 0,0015$ , радиус коллапса вихревых элементов  $\varepsilon_{col} = 0,0010$ , граница моделирования дальнего следа  $L_{far} = 18,0$ . Количество вихревых элементов в расчетах превышало  $N = 120\,000$ , поэтому активно использовались описанные в главе 2 подходы к ускорению вычислений: параллельные алгоритмы и быстрый метод расчета парных взаимодействий вихревых элементов. На рис. 3.14 приведены зависимости безразмерных нестационарных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы от времени, а на рис. 3.15 представлен вид вихревого следа в некоторые моменты времени.



**Рис. 3.14.** Нестационарные аэродинамические коэффициенты кругового профиля

Среднее значение коэффициента лобового сопротивления при установившемся режиме обтекания (при  $t > 30$ ) составляет  $C_{xa} \approx 1,19$ , амплитуда колебаний коэффициента подъемной силы  $\hat{C}_{ya} \approx 1,5$ , безразмерная частота схода вихрей (число Струхалия)  $Sh \approx 0,22$ . Все полученные в результате моделирования методом вихревых элементов качественные и количественные характеристики течения хорошо согласуются с известными результатами.



**Рис. 3.15.** Вид вихревого следа за круговым профилем в различные моменты времени

### 3.5.3. Задача Блазиуса

Моделирование обтекания тонкой пластинки потоком вязкой несжимаемой среды — классическая задача Блазиуса [31] — также является одной из задач, традиционно используемых для верификации численных методов и алгоритмов вычислительной аэрогидродинамики.

Известно [31], что вблизи обтекаемой пластинки функция тока

$$\psi(x, y): \quad V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (3.7)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi = 0, \quad \text{при } y = 0, x \geq 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow V_\infty, \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Уравнение (3.7) допускает автомодельное решение. В результате замены

$$\eta = y \sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x V_\infty}}$$

оно приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{f}{2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad (3.8)$$

с краевыми условиями

$$f|_{\eta=0} = \frac{df}{d\eta}\Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{df}{d\eta}\Big|_{\eta=\infty} = 1. \quad (3.9)$$

Краевую задачу (3.8)–(3.9) можно свести к задаче Коши относительно функции  $F(\xi)$ , где  $f(\eta) = \alpha^{1/3} F(\alpha^{1/3} \eta)$ :

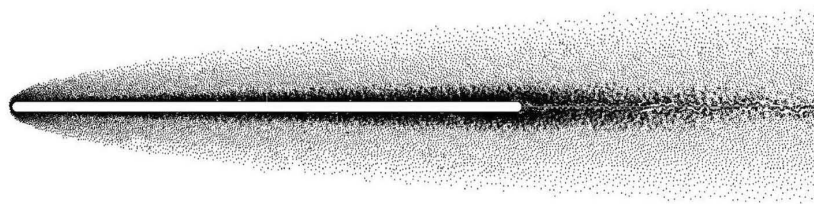
$$\frac{d^3 F}{d\xi^3} + \frac{F}{2} \frac{d^2 F}{d\xi^2} = 0, \quad (3.10)$$

$$F|_{\xi=0} = \frac{dF}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2F}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} = 0.$$

Эта задача может быть решена с высокой точностью любым численным методом, при этом  $\alpha \approx 0,332$  [62, 31].

Осуществив обратные преобразования, можно определить искомое стационарное поле скоростей в пограничном слое при обтекании тонкой пластинки.

При проведении вычислительного эксперимента по моделированию обтекания пластинки длиной  $l = 1$ , имеющей относительную толщину 2 %, передняя и задняя кромки которой имеют форму полуокружностей [1] профиль аппроксимировался ломаной, состоящей из  $N_p = 1300$  панелей, безразмерная величина шага расчета по времени составляла  $\Delta t = 1,5 \cdot 10^{-4}$  при скорости набегающего потока  $V_\infty = 1,0$ . Количество вихревых элементов в расчетах превышало  $N = 100\,000$ . Задача решалась в нестационарной постановке, вязкость среды соответствовала значению  $Re = 10^3$ . Скорость набегающего потока за первые 15 шагов расчета увеличивалась постепенно от нуля до значения  $V_\infty$ , затем оставалась постоянной. Вид близкого к установившемуся вихревого следа вблизи пластинки представлен на рис. 3.16.



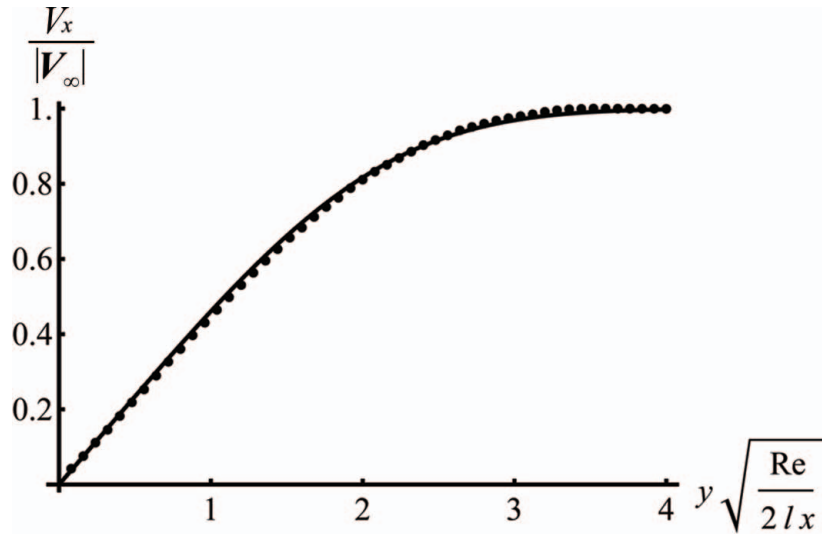
**Рис. 3.16.** Вихревой след вблизи пластинки

В сечениях пластинки  $x = 0,35$ ,  $x = 0,50$ ,  $x = 0,65$  измерялись величины скоростей. Для получения значения безразмерной скорости в расчете вместо значения  $V_\infty$  необходимо брать величину

$$\max_{0 < y < \infty} V = V_\delta(x) > V_\infty$$

в соответствующем сечении, что связано с вытесняющим действием пластинки [1].

На рис. 3.17 в безразмерных величинах представлено распределение продольной компоненты скорости в сечении  $x = 0,35$ .



**Рис. 3.17.** График распределения продольной компоненты скорости в сечении  $x = 0,35$  пограничного слоя на пластинке (точки — результаты расчета, сплошная линия — решение Блазиуса)

Хорошее совпадение результатов расчета со значениями, полученными аналитически, наблюдалось во всех рассматриваемых сечениях пластинки во все моменты времени после того, как течение вышло на близкий к стационарному режим.

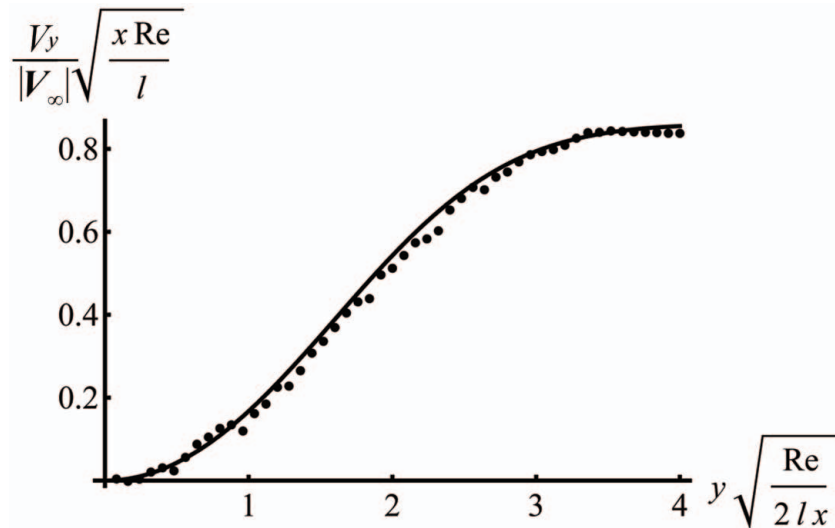
Поперечная компонента скорости  $V_y$  по величине существенно меньше и не может быть выражена в безразмерных переменных. Однако известно, что [31]

$$\frac{V_y}{V_\infty} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu V_\infty}{x}} (\eta f' - f).$$

Поэтому можно провести анализ величины

$$\frac{V_y}{V_\infty} \sqrt{\frac{x}{\nu V_\infty}} = \frac{V_y}{V_\infty} \sqrt{\frac{x \text{Re}}{l}}$$

и построить для нее график в безразмерных переменных Блазиуса.



**Рис. 3.18.** График распределения поперечной компоненты скорости в сечении  $x = 0,35$  пограничного слоя на пластинке (точки — результаты расчета, сплошная линия — решение Блазиуса)

Хорошее согласие результатов наблюдается также и в других сечениях  $x = \text{const}$ .

Отметим, что профиль продольной скорости, показанный на рис. 3.17, соответствует мгновенному распределению, тогда как профиль поперечной скорости существенно меняется от шага к шагу; представленный на рис. 3.18 график получен путем осреднения по большому числу шагов (от 100 шагов в сечении  $x = 0,35$  до 300 шагов в сечении  $x = 0,65$ ).

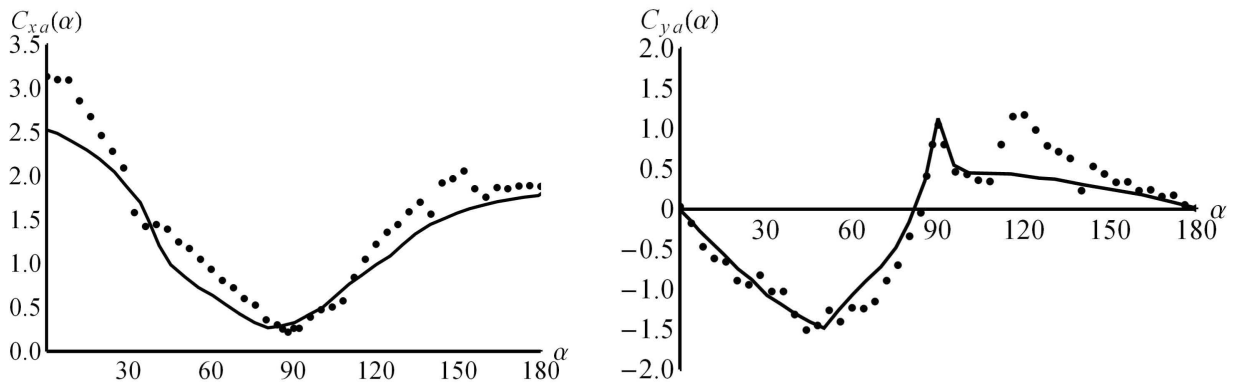
Расчеты показывают, что при использовании классического метода вихревых элементов, приводящему к необходимости решения сингулярного интегрального уравнения на профиле, продольная компонента скорости в установившемся течении также хорошо согласуется с аналитическим решением, а для получения правильного распределения поперечной компоненты скорости требуется значительно увеличивать число вихревых элементов в расчетной схеме и/или проводить осреднение результатов по значительно большему временному промежутку.



### 3.5.4. Моделирование обтекания профиля в форме полукруга

Для профиля, имеющего форму полукруга, были проведены расчеты стационарных аэродинамических характеристик в диапазоне углов атаки  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  с шагом в  $4^\circ$ . Параметры расчета задавались следующим образом: скорость набегающего потока  $V_\infty = 1,0$ , диаметр профиля  $D = 1,0$ , число Рейнольдса  $Re = 10^3$ , число панелей на профиле  $N_p = 164$ , шаг расчета по времени  $\Delta t = 0,004$ , радиус вихревого элемента  $\varepsilon = 0,008$ , радиус коллапса вихревых элементов  $\varepsilon_{col} = 0,002$ , граница моделирования дальнего следа  $L_{far} = 20,0$ .

Полученные значения стационарных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы в зависимости от угла атаки в сравнении с экспериментальными данными [65] показаны на рис. 3.19.



**Рис. 3.19.** Зависимости стационарных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы полукруглого профиля от угла атаки (точки — расчет, сплошная линия — экспериментальные данные [65])

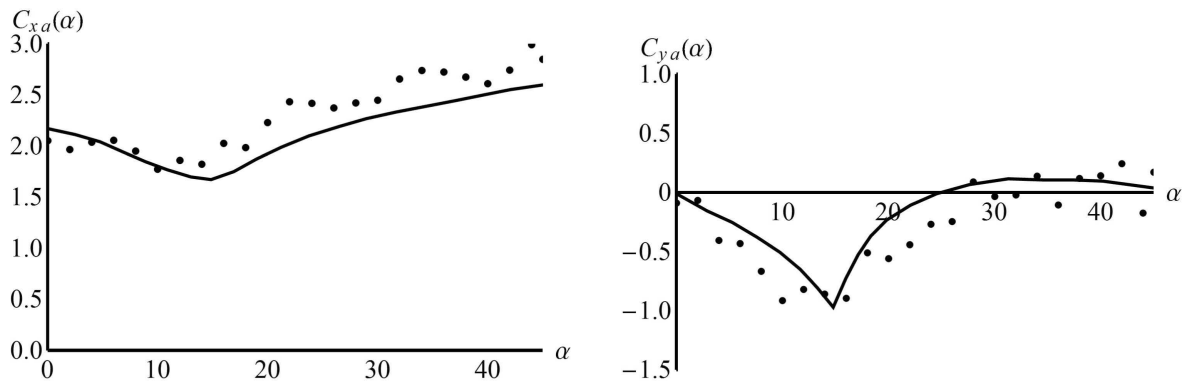
Видно, что значения коэффициента подъемной силы хорошо согласуются с экспериментальными данными при углах атаки  $\alpha \leq 110^\circ$ , на больших углах атаки имеется расхождение. Коэффициент лобового сопротивления вычисляется качественно правильно, но наблюдается некоторое завышение результатов. Это можно объяснить малым числом панелей на профиле в расчете; расчеты показывают, что при увеличении количества панелей  $N_p$  имеется тенденция к снижению коэффициента лобового сопротивления, по крайней мере, при малых углах атаки.

### 3.5.5. Моделирование обтекания квадратного профиля

Для профиля, имеющего форму квадрата, также были проведены аналогичные расчеты стационарных аэродинамических характеристик в диапазоне углов атаки  $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$  с шагом в  $2^\circ$ . Количество панелей на профиле было задано равным  $N_p = 256$ , остальные параметры расчета задавались так же, как в предыдущем примере (раздел 3.5.4).

Следует иметь в виду, что экспериментальные и расчетные данные по определению аэродинамических характеристик квадратного профиля, приведенные в литературе (результаты экспериментов приведены, в частности, в [69, 85, 65] и других работах), существенно разнятся; отличие в значениях аэродинамических характеристик в разных работах достигает 2 раз.

Полученные значения стационарных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы для квадратного профиля в зависимости от угла атаки показаны на рис. 3.20.



**Рис. 3.20.** Зависимости стационарных коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы квадратного профиля от угла атаки (точки — расчет, сплошная линия — экспериментальные данные [65])

Полученные в расчете значения аэродинамических коэффициентов качественно и количественно согласуются с экспериментальными данными. Отметим, что при больших углах атаки  $\alpha > 25^\circ$  обтекание сопровождается сходом крупных интенсивных вихрей с верхней и нижней угловых точек профиля; оно не носит квазипериодический характер, поэтому результат расчета стационарных характеристик может существен-

ным образом зависеть от применяемой процедуры осреднения по времени. Во всех проделанных расчетах выполнялось по 120 000 временных шагов, результаты осреднялись по последним 60 000 шагам.

### 3.6. Результаты главы 3

Для проведения вычислительного эксперимента по моделированию обтекания профилей потоком вязкой несжимаемой среды и вычисления их аэродинамических характеристик разработан параллельный программный комплекс POLARA, позволяющий автоматизировать и оптимизировать процесс решения серии однотипных задач, каждая из которых соответствует расчету обтекания профиля под определенным углом атаки.

Реализованные возможности распараллеливания наиболее трудоемких с вычислительной точки зрения операций метода вихревых элементов, а также проведения расчетов с применением алгоритма быстрого метода расчета парных взаимодействий вихревых элементов позволяют многократно сократить время решения отдельных задач. Получена теоретическая оценка оптимального значения максимальной глубины дерева, при которой время счета является наименьшим. Программный комплекс является переносимым и может быть использован при проведении расчетов на различных многопроцессорных кластерных системах.

Разработана также расширенная модификация программного комплекса POLARA, позволяющая проводить серии методических расчетов по исследованию влияния параметров расчетных схем метода вихревых элементов на получаемые результаты.

Проведена верификация разработанных алгоритмов и программ на примерах моделирования обтекания профилей стандартной аэродинамической формы, для которых известны результаты экспериментов и расчетов других авторов.

Результаты, представленные в главе 3, опубликованы в работах [32, 38, 40, 41, 43, 52, 82].

## ***Основные результаты и выводы***

В диссертационной работе рассмотрена нестационарная задача о моделировании плоскопараллельного обтекания и расчете аэродинамических нагрузок, действующих на профили произвольной формы со стороны потока вязкой несжимаемой среды. По результатам проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей движение вихревых элементов, реализован метод второго порядка точности.
2. Разработана иерархия новых расчетных схем метода вихревых элементов и получены необходимые аналитические расчетные формулы. Использование расчетной схемы, основанной на равенстве нулю касательной компоненты скорости на профиле, выполнении граничного условия в среднем по панели и распределенной вдоль панели завихренностью, позволило существенно повысить точность математического моделирования обтекания профилей.
3. Разработан параллельный программный комплекс POLARA, позволяющий решать серии задач и проводить отдельные расчеты на многопроцессорных вычислительных системах по математическому моделированию нестационарного обтекания профилей и определению их аэродинамических характеристик.
4. Получена уточненная теоретическая оценка трудоемкости приближенного быстрого метода расчета парных взаимодействий вихревых элементов.

## *Литература*

1. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
2. Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев / Б.А. Ушаков [и др.]. М.: Изд-во БИТ НКАП при ЦАГИ, 1940. 340 с.
3. Аэродинамика / Под ред. В.Т. Калугина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 687 с.
4. Березин М.А., Катюшин В.В. Атлас аэродинамических характеристик строительных конструкций. Новосибирск: Олден-полиграфия, 2003. 138 с.
5. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус, 2001. 508 с.
6. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 400 с.
7. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. 544 с.
8. Гирча А.И. Быстрый алгоритм решения «задачи  $N$  тел» в контексте численного метода вязких вихревых доменов // Информационные технологии моделирования и управления. 2008. № 1. С. 47–52.
9. Дмитриев М.Л. Математическое моделирование отрыва потока с гладкой поверхности тел в рамках теории идеальной жидкости: дис.... канд. физ.-мат. наук. М., 1998. 116 с.

10. Дынников Я.А., Дынникова Г.Я. О вычислительной устойчивости и схемной вязкости в некоторых бессеточных вихревых методах решения уравнений Навье — Стокса и теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 10. С. 1905–1917.
11. Дынников Я.А., Дынникова Г.Я. Оценка эффектов схемной вязкости при расчете течений несжимаемой жидкости вихревыми методами // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XIV Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2009. С. 291–294.
12. Дынникова Г.Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2011. 269 с.
13. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 11–19.
14. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения «задачи  $N$  тел» при вихревом моделировании течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1458–1465.
15. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье — Стокса // Доклады Академии наук. 2004. Т. 399, № 1. С. 42–46.
16. Дынникова Г.Я. Расчет обтекания кругового цилиндра на основе двумерных уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса с высоким разрешением в пограничном слое // Доклады Академии наук. 2008. Т. 422, № 6. С. 755–757.
17. Жуковский Н.Е. Теоретические основы воздухоплавания. М.: Типо-Литография И.Х. Кавыкина, 1911. 448 с.

18. Иванова О.А., Махов И.А., Морева В.С. О численном моделировании обтекания и исследовании устойчивости по Ляпунову положения равновесия профиля в потоке // Полет-2007: труды VII Международной научной конференции студентов и молодых ученых. Киев, 2007. С. 90.
19. Иванова О.А., Морева В.С. Численное определение аэродинамических коэффициентов профиля методом вихревых элементов // Вестник Херсонского национального технического университета. 2008. № 2. С. 207–211.
20. Инструменты параллельного программирования в системах с общей памятью / К.В. Корняков [и др.]. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. 272 с.
21. Исследование аэроупругих колебаний провода, вызываемых отрывным вихревым обтеканием О.А. Иванова [и др.] // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Ч. 2. № 4. С. 157–159.
22. Кашафутдинов С.Т., Лушин В.Н. Атлас аэродинамических характеристик крыловых профилей. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1994. 78 с.
23. Келдыш М.В. Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. 576 с.
24. Кирякин В.Ю., Сетуха А.В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерных уравнений Эйлера в лагранжевых координатах // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 9. С. 1263–1276.
25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
26. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа. М.: Наука, 1965. 424 с.
27. Кузнецов Б.Я. Аэродинамические исследования цилиндров // Труды ЦАГИ. 1931. № 98. 40 с.

28. Лаврентьев М.А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М.-Л.: ОГИЗ, 1946. 157 с.
29. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
30. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
31. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
32. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч.2. При меры решения задач / В.С. Морева [и др.] // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2012. № 4. С. 82–102.
33. Макарова М.Е. Поиск аналитических решений и исследование точности расчетных схем метода вихревых элементов в двумерных стационарных задачах обтекания профилей // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2012. Спец. выпуск «Математическое моделирование в технике». С. 109–118.
34. Макарова М.Е. Расчет стационарного безотрывного обтекания профиля потоком идеальной несжимаемой среды // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2011. Спец. выпуск «Прикладная математика». С. 63–74.
35. Макарова М.Е., Марчевский И.К., Морева В.С. Моделирование обтекания тонкой пластинки с использованием модифицированной схемы метода вихревых элементов // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 9. DOI: 10.7463/0913.0602362. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/602362.html>.
36. Макарова М.Е., Марчевский И.К., Морева В.С. О различных подходах к моделированию обтекания профиля методом вихревых элементов // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XVI Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2013. С. 246–249.



37. Марчевский И.К. Математическое моделирование обтекание профиля и исследование его устойчивости в потоке по Ляпунову: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2008. 119 с.
38. Марчевский И.К., Морева В.С. Высокпроизводительный программный комплекс POLARA для определения аэродинамических характеристик профилей // Параллельные вычислительные технологии: труды Международной научной конференции. Уфа, 2010. С. 533–538.
39. Марчевский И.К., Морева В.С. Исследование влияния вязкости на устойчивость положения равновесия профиля в потоке // Метод функций Ляпунова и его приложения: труды X Крымской Международной математической школы. Симферополь, 2010. С. 96–97.
40. Марчевский И.К., Морева В.С. Параллельный программный комплекс POLARA для исследования расчетных схем метода вихревых элементов // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XV Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2011. С. 280–283.
41. Марчевский И.К., Морева В.С. Параллельный программный комплекс POLARA для моделирования обтекания профилей и исследования расчетных схем метода вихревых элементов // Параллельные вычислительные технологии: труды Международной научной конференции. Новосибирск, 2012. С. 236–247.
42. Марчевский И.К., Морева В.С. Уточненный метод вихревых элементов для моделирования обтекания профиля потоком // Необратимые процессы в природе и технике: труды V Всероссийской конференции. М., 2009. С. 97–101.
43. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование в задачах аэрогидродинамики с использованием метода вихревых элементов // CAD-CAM-CAE Observer. 2012. № 2. С. 84–91.

44. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование обтекания системы профилей методом вихревых элементов // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2010. № 1. С. 12–20.
45. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. О применении численных методов высокого порядка для интегрирования дифференциальных уравнений в методе дискретных вихрей // Вестник Херсонского национального технического университета. 2006. № 2. С. 308–312.
46. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Об одном подходе к расчету аэродинамических характеристик профиля в идеальной жидкости методом дискретных вихрей // Вестник Харьковского национального университета. Серия М. 2005. № 661, вып. 4. С. 182–191.
47. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С. М. Белоцерковский [и др.]. М.: Наука, 1988. 232 с.
48. Микеладзе В.Г., Титов В.М. Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет. М.: Машиностроение, 1982. 149 с.
49. Морева В.С. Вычисления вихревого влияния в модифицированной численной схеме метода вихревых элементов // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 137–144.
50. Морева В.С. Приложение метода вихревых элементов и его программная реализация // XXXVIII Гагаринские чтения: сб. докладов Международной молодежной научной конференции. М., 2012. Т. 5. С. 92–93.
51. Морева В.С. Применение метода второго порядка точности при моделировании течений методом вихревых элементов // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: труды XIV Международного симпозиума. Харьков-Херсон, 2009. С. 133–136.

52. Морева В.С. Способы ускорения вычислений в методе вихревых элементов // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. Спец. выпуск «Прикладная математика». 2011. С. 83–95.
53. Нелинейная теория крыла и ее приложения / Т.О. Аубакиров [и др.]. Алматы: Гылым, 1997. 448 с.
54. Павловец Г.А., Петров А.С. Об одной возможной схеме расчета отрывного обтекания тел // Труды ЦАГИ. 1974. № 1571. 12 с.
55. Петров А.С. Расчет отрывного обтекания эллиптических цилиндров // Труды ЦАГИ. 1978. № 1930. 12 с.
56. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 608 с.
57. Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов: Сб. ст. / Под ред. С.М. Белоцерковского. М.: Изд. ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986. Вып. 1313. 503 с.
58. Савицкий Г.А. Ветровая нагрузка на сооружения. М.: Стройиздат, 1972. 110 с.
59. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 269 с.
60. Сарпкаяя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
61. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 336 с.
62. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
63. Седов Л.И. Теория плоских движений идеальной жидкости. М.–Л.: Оборонгиз, 1939. 144 с.
64. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения. М.: Стройиздат, 1984. 360 с.

65. Случановская З.П. Распределение давления на поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты // Труды института механики МГУ, № 24. М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 52–60.
66. Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы / Под ред. С.М. Белоцерковского. М.: ЦАГИ, 2000. 265 с.
67. Тыртышников Е.Е. Методы быстрого умножения и решение уравнений // Матричные методы и вычисления. М.: ИВМ РАН, 1999. С. 4–41.
68. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидроаэродинамика отрывного обтекания тел. М.: Машиностроение, 1977. 198 с.
69. Фершинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984. 600 с.
70. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
71. Щеглов Г.А. Об одном способе распараллеливания вычислений в методе дискретных вихрей // Информационные технологии и программирование. 2005. № 1. С. 47–54.
72. Barba L.A. Vortex method for computing high-Reynolds number flows: Increased accuracy with a fully mesh-less formulation: PhD thesis, California Institute of Technology, 2004. 185 p.
73. Barnes J., Hut P. A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm // Nature. 1986. V. 324, N 4. P. 446–449.
74. Beale J.T., Majda A. Vortex methods ii: higher order accuracy in two and three dimensions // Mathematics of Computation. 1982. V. 39, N 159. P. 29–52.
75. Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow // Journal of Fluid Mechanics. 1973. V. 57. P. 785–796.
76. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. Vortex methods: theory and practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 328 p.

77. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations // SANDIA REPORT. N. SAND96-0583, UC-700, 1996. 52 p.
78. Leonard A. Vortex methods for flow simulation // Journal of Computational Physics. 1980. N 37. P. 289–335.
79. Lewis R.I. Vortex Element Methods For Fluid Dynamic Analysis Of Engineering Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 588 p.
80. Marchevsky I.K., Moreva V.S. On modified numerical schemes in vortex element method for 2D flow simulation around airfoils // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2012. V. 68. P. 1594–1600.
81. Moreva V.S. On simulation of the flow around an airfoil using different numerical schemes of vortex element method // Advanced Problems in Mechanics: proceedings of the XLI Summer School-Conference. St.Petersburg, 2013. P. 387–396.
82. Moreva V.S., Marchevsky I.K. High-efficiency POLARA program for airfoil aerodynamic characteristics calculation using vortex elements method // The 5th International Conference on Vortex Flows and Vortex Models: book of proceedings. Caserta (Italy), 2010. P. 1–6.
83. Moreva V.S., Marchevsky I.K. Vortex element method for 2D flow simulation with tangent velocity components on airfoil surface // 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering: book of proceedings. Vienna, 2012. 14 p.
84. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model — the diffusion velocity method // Computers and Fluids. 1991. V. 19, N 3/4. P. 433–441.

85. Parkinson G.V., Smith J.D. The square prism as an aeroelastic nonlinear oscillator // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1964. V. 17, N 2. P. 225–239.
86. Relf E.H., Lavender T. The auto-rotation of stalled aerofoils and its relation to the spinning speed of aeroplanes // Reports & Memoranda / Great Britain Advisory Committee for Aeronautics (GBACA). 1918. N 549. 9 p.
87. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // NACA Tech. Rept. N 1191. 1954. 25 p.
88. Shankar S. A new mesh-free vortex method: Ph.D. thesis. The Florida State University, 1996. 263 p.
89. Shell T.K. Development of a fast vortex method for fluid flow simulation using special-purpose computers: Ph.D. thesis. Keio University (Japan), 2008. 186 p.
90. Vortex methods: selected papers of the First International Conference on Vortex Methods / K. Kamemoto, M. Tsutahara. Singapore, 2000. 220 p.
91. Winckelmans G. Topics in vortex methods for the computation of three- and two-dimensional incompressible unsteady flows: Ph.D. thesis. California Institute of Technology, 1989. 290 p.
92. Zahm A.F. Flow and drag formulas for simple quadrics // NACA Tech. Rept. N 253. 1927. 23 p.