

ФГУП «ГНЦ РФ ТРИНИТИ»

На правах рукописи

Нифанова Александра Васильевна

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ S_n -МЕТОДЫ ДЛЯ
КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ
В СФЕРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Специальность 05.13.18

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор Трощиев В.Е.

Троицк 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Кинетическое уравнение переноса нейтронов для сферы и математические постановки задач о его решении	18
§1 Интегро-дифференциальное уравнение переноса в частных производных первого порядка.....	18
§2 Семейство характеристик уравнения переноса в фазовом пространстве (r, μ) и семейство обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ) на характеристиках.....	21
§3 Классы задач для уравнений переноса и итерационные процессы их решения.....	23
Комментарии к главе 1	25
Глава 2. Преобразование разностной схемы дискретного и непрерывного S_n-методов в ячейке баланса в разностную схему метода характеристических трубок относительно полного потока частиц и схему распределения потока по неосвещенному контуру S_n-ячейки	26
§1 Разностная схема DS_n -метода в ячейке баланса.....	26
§2 Преобразование разностной схемы DS_n -метода в схему для ОДУ относительно полного потока и схему распределения потока по неосвещенным граням S_n -ячейки (расщепление DS_n -схемы).....	30
§3 Принадлежность разностной схемы первого этапа расщепления DS_n -метода классу схем метода характеристических трубок (ХТ-схемы).....	33
§4 Дискретная форма и расщепление непрерывного S_n -метода на схему для ОДУ и схему распределения полного потока.....	39
§5. О расщеплении балансных разностных схем для нестационарных и многомерных кинетических уравнений переноса частиц.....	43
Выводы и комментарии по главе 2.....	47
Глава 3. Обобщение метода характеристических трубок на ячейки-трубки общего вида и построение двухэтапных DS_n-методов квазимонотонного типа	48

§1 Построение осредненного ОДУ баланса в характеристических ячейках-трубках общего вида.....	48
§2 S_n -ячейка как ячейка-трубка.	55
§3 Положительные монотонные и квазимонотонные схемы 2-го порядка точности для ОДУ баланса.....	57
§4 Схемы распределения полного потока.....	63
Выводы к главе 3.....	65
Глава 4. Численное исследование точности двухэтапных характеристических DSn-методов для различных классов сферических задач.....	66
§1 Тестирование новых схем на решении задач с источником.....	66
§2 Применение двухэтапных методов к решению задач на определение критических параметров.....	70
Выводы к главе 4.....	72
Заключение.....	73
Выводы.....	75
Приложение.....	77
Литература.....	94

ВВЕДЕНИЕ

Кинетические уравнения переноса излучений – нейтронов, фотонов и других частиц [1-3] являются математическим описанием физических законов сохранения. Кратко, без детализации, эти законы можно свести к двум положениям – это сохранение числа частиц при их движении без взаимодействия со средой (*дивергентность уравнения переноса*) и определенное количественное соответствие между числом исчезнувших частиц при их взаимодействии со средой и числом вновь появившихся вторичных частиц (*самосогласованность столкновительных членов в кинетическом уравнении*). Точное выполнение законов сохранения в дискретных моделях переноса и кинетики частиц (*консервативность модели*) является одним из наиболее важных аппроксимационных требований. Поэтому при построении консервативных сеточных аппроксимаций методом баланса [4] кинетические уравнения переноса частиц [1-3] принято рассматривать в дивергентной форме ([5-18] и др.):

$$\begin{aligned} LN(\vec{r}, \vec{\Omega}) &\equiv \operatorname{div}(N \cdot \vec{\Omega}) + \sigma(\vec{r})N = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \\ Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= TN(\vec{r}, \vec{\Omega}) + G(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad TN(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \iint f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})N(\vec{r}, \vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

и строго выполнять сеточную дивергентность и сеточную самосогласованность столкновительных членов $\sigma(\mathbf{r})N$, TN и таким образом обеспечивать консервативность модели в дискретной форме.

Следующее важное требование, предъявляемое к сеточным аппроксимациям кинетических уравнений (B.1), заключается в построении и использовании разностных схем, порядок точности которых не ниже второго на гладких решениях (это требование обусловлено очень низкой точностью схем первого порядка). Так как уравнение переноса (B.1) линейное, то невозможно построить линейную разностную схему второго порядка точности, которая была бы теоретически положительной и монотонной [19]. *Немонотонность схем второго порядка точности* часто проявляется и в практических расчетах, поэтому *вопрос монотонизации сеточных решений* для этого класса схем с обеспечением хорошей точности расчетов является исключительно актуальным. Частичным решением проблемы немонотонности сеточных решений для схем второго

порядка точности является разработка и локальное по ячейкам сетки применение «алгоритмов коррекции потока» (АКП) [12]. Однако в АКП очень трудным вопросом является математически строгое определение ячеек сетки, в которых проявляется немонотонность, и оценка ошибки в сеточном решении. Достаточно простого и общего решения этого вопроса не существует.

Еще одно важное требование к численным методам решения уравнений переноса заключается в необходимости построения *схем бегущего счета (СБС)*, то есть схем с треугольными матрицами у полной системы сеточных уравнений. Это требование связано с тем, что уравнение (В.1) является интегральным относительно процесса рассеяния вторичных частиц по направлениям полета, что в свою очередь требует применения итерационных алгоритмов по интегралу $TN(\vec{r}, \vec{\Omega})$ в кинетическом уравнении (В.1).

По своему смыслу интеграл TN собирает на направление $\vec{\Omega}$ частицы, рассеянные со всех направлений $\vec{\Omega}'$ на единичной сфере с центром в точке \vec{r} . Поэтому реальным способом численного решения задач переноса и кинетики нейтронов является метод итераций по интегралу рассеяния вторичных нейтронов

$$L \overset{\nu}{N} = \overset{\nu-1}{Q}, \quad \overset{\nu-1}{Q} = T \overset{\nu-1}{N} + G. \quad (\text{В.2})$$

Таким образом, на каждой итерации требуется решать уравнение (В.2) с известной правой частью. Уравнение (В.2) является гиперболическим, оно имеет характеристики, которые являются траекториями движения частиц, и для него ставится задача Коши с заданным потоком нейтронов на внешней поверхности тела, в котором нейтроны движутся и взаимодействуют с ядрами среды. Чтобы осуществить эффективно итерационный процесс в сеточной форме

$$L^h \overset{\nu}{N}^h = \overset{\nu-1}{Q}^h, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{В.3})$$

необходимо строить разностные схемы с треугольными матрицами у полной системы сеточных уравнений (схемы бегущего счета). В работе [20] показано, что в общем случае такие схемы можно строить на сетках, состоящих из выпуклых ячеек соответствующей размерности. Схемами бегущего счета, в частности, являются S_n -схемы [21-23, 7, 10, 11], схемы метода характеристик [24, 11] и характеристических трубок (ХТ-схемы) [9], многомерные схемы [13, 15, 16, 18].

Для широкого круга задач нейтронно-ядерной физики со сферической симметрией процессов переноса и кинетики нейтронов основными математическими методами их

численного решения являются S_n -методы и методы характеристик. Первые варианты этих методов были независимо сформулированы в конце 1940-х, начале 1950-х годов в работах по атомным проектам США и СССР. Это S_n -метод Карлсона [22] и КН-схема Гольдина [6], метод прямого интегрирования Рихтмайера [25] и метод характеристик Владимирова [24]. В 1960-х годах были предложены дискретный S_n -метод (DS_n -метод) [22] и метод характеристических трубок (ХТ-метод) [9], которые представляют собой развитие и обобщение в определенных направлениях первоначальных методов. Эти два метода и их модификации наиболее широко используются в практических расчетах задач нейтронно-ядерной физики и физики взаимодействия теплового излучения с веществом. К таким задачам относятся определение функции плотности нейтронов и интенсивности излучений в стационарных и нестационарных задачах, расчет критических параметров в сферических системах, расчеты потоков в задачах защиты от излучений и другие. Достоинства этих методов и имеющиеся в них недостатки обуславливают *актуальность* их дальнейшего развития и совершенствования.

S_n -методы – это конечно-разностные аппроксимации кинетического интегро-дифференциального уравнения переноса частиц в сфере, рассматриваемого как уравнение в частных производных первого порядка (см. гл.1). Методы характеристик – это сеточные аппроксимации семейства обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ), записанных на характеристиках-траекториях движения частиц в сфере (см. гл. 1). Отсюда проистекает существенное различие в математических свойствах этих методов и в классах задач, для которых их применение эффективно. Общей составной частью вычислительных алгоритмов всех названных методов является итерационный процесс по интегральным членам кинетических уравнений переноса, благодаря чему можно использовать алгоритмы бегущего счета на каждой отдельной итерации.

Дискретный S_n -метод является наиболее простым и экономичным с точки зрения программной реализации и объема вычислений. Метод консервативен и всюду, кроме

окрестности центра сферы, имеет второй порядок аппроксимации и точности на гладких решениях, легко обобщается на многомерные геометрии, но имеет недостаток, - DSn -метод немонотонен. Это может приводить к осцилляциям в сеточном решении или даже к появлению отрицательных значений скалярного потока, что существенно снижает точность расчетов при численном решении стационарных и нестационарных задач переноса в сложных гетерогенных средах.

XT -метод, в отличие от DSn -метода, положителен и монотонен, имеет также второй порядок точности и полностью консервативен. Однако расчетная сетка в виде характеристических ячеек-трубок (T -сетка) существенно сложнее по сравнению с прямоугольной Sn -сеткой и практически не подходит для решения нестационарных задач с учетом других физических процессов. Прямое обобщение характеристических сеток на многомерные уравнения является также очень сложной задачей.

Ячейками сетки в DSn -методе являются прямоугольники в фазовом пространстве координат r ($0 \leq r \leq R$) и направлений полета нейтронов μ ($-1 \leq \mu \leq 1$) (рис.2.1.1, рис. 2.1.2). Уравнение баланса нейтронов в каждой ячейке сетки представляет собой аппроксимацию уравнения в частных производных 1-го порядка по переменным r и μ . Ячейками сетки в XT -методе являются отрезки характеристических трубок – это криволинейные четырехугольники, образованные характеристиками-траекториями в фазовом пространстве (r, μ) и линиями сетки по переменной r (рис. 2.3.2). При этом в каждой ячейке-трубке выполняется осредненное ОДУ баланса нейтронов.

DSn - и XT -методы – принципиально разные по своей сути, но их первоначальной аппроксимационной основой являются сеточные уравнения баланса, записанные соответственно на Sn - и T -сетках. Это аппроксимационное свойство в определенной степени их сближает.

В связи с этим представляет большой теоретический и практический интерес обобщение подхода «характеристических трубок» на сетки произвольного вида, особенно

на Sn-сетки, и построение на этой основе новых разностных схем типа DSn-метода с математическими свойствами, характерными для XT-метода, и с возможностью их обобщения на сетки для многомерных и нестационарных уравнений переноса.

Целью диссертационной работы является построение и исследование нового класса Sn-методов для решения сферически-симметричных задач переноса нейтронов – методов, объединяющих в себе достоинства DSn- и XT-методов и сохраняющих возможность достаточно простого их обобщения на нестационарные и многомерные уравнения.

Sn-метод был сформулирован Б. Карлсоном для сферически-симметричного уравнения переноса в недивергентной форме, в связи с чем для выполнения сеточной дивергентности Sn-схемы потребовались непростые дополнительные преобразования расчетных формул [21]. В Sn-метод используется прямоугольная сетка по переменным r и μ ($0 \leq r \leq R, -1 \leq \mu \leq 1$), которую мы будем называть Sn-сеткой. Сеточная функция в пределах отдельной прямоугольной ячейки предполагается линейной по каждой переменной (непрерывный Sn-метод). В последующих работах Б. Карлсоном был сформулирован дискретный Sn-метод (DSn-метод) [22], в котором в качестве сеточной функции используются средние значения потоков частиц на гранях (сторонах) Sn-ячейки, а уравнение баланса замыкается еще одним уравнением, связывающим значения сеточной функции на ч-х гранях Sn-ячейки.

В.Я. Гольдиным при построении КН-схемы (консервативная нестационарная схема) была использована дивергентная форма уравнения переноса, что автоматически обеспечивало ее консервативность [5,6]. Позже была показана эквивалентность КН-схемы и схемы Sn-метода для уравнения в дивергентной и недивергентной формах, получены оценки порядка аппроксимации схемы в окрестности и вне центра сферы [7, 8, 10]. К настоящему времени установлены многие математические свойства Sn-методов, из которых отметим следующие.

1. Методы сеточно-дивергентны и консервативны относительно вторичных нейтронов по построению при условии, что итерационный процесс по интегралу вторичных нейтронов сведен с требуемой точностью.
2. S_n -методы – это линейные схемы второго порядка аппроксимации на гладких решениях, которые, согласно теореме Годунова, являются теоретически (и практически) немонотонными.
3. В окрестности центра сферы у S_n -метода на единицу понижается порядок аппроксимации и точности, а DS_n -метод имеет нулевой порядок аппроксимации и точности [10].
4. В окрестности центра сферы при измельчении сетки по радиусу решение сходится к const по угловой переменной без ее измельчения [10].
5. Для уравнений квазидиффузии существует разностная схема, согласованная с DS_n -методом [7].

В дальнейшем, в ряде работ [13-18] и др. были предложены конечно-разностные схемы для многомерных уравнений переноса в криволинейных системах координат, которые можно рассматривать как обобщения DS_n -метода на многомерные косоугольные сетки.

В работе [26] было рассмотрено семейство разностных схем типа S_n -метода, которые различаются аппроксимацией (непрерывной или дискретной) потоковых и столкновительных членов. Сравнение численных результатов, проведенное авторами, показало, что практическая точность непрерывного S_n -метод с непрерывной же аппроксимацией столкновительных членов выше, чем точность DS_n -метода, но он требует примерно в 2,5 раза большего числа арифметических операций. Непрерывный S_n -метод иногда используется для построения схем типа DS_n -метода с улучшенными свойствами [12].

Существуют подходы (они берут начало из работ [10,27]), в которых предлагается расширенная трактовка DSn-метода, а именно, он рассматривается как представитель некоторого, например, четырехпараметрического, как в работах [28], семейства схем. В работе [28a] такое семейство схем строится на основе предложенного авторами аппарата взаимных преобразований дивергентной и недивергентной разностных форм оператора переноса, а также рассматриваются алгоритмы подбора параметров схемы, и некоторые из этих алгоритмов используют соотношения непрерывного Sn-метода. Эффективность метода авторы подтверждают расчетами сферически-симметричной задачи (однородный шар) с параметрами близкими к критическим. Предложенные авторами схемы дают заметное по сравнению с DSn-методом повышение точности на грубых сетках.

Немонотонность является существенным недостатком DSn-метода (равно как и Sn-метода). Уравнение переноса может быть многомерным даже для пространственно одномерных задач, поэтому расчеты нередко ведутся на грубых сетках. Низкая точность схем первого порядка не позволяет их применять для получения монотонных решений с удовлетворительной точностью. Требуются схемы второго или более высокого порядка точности. В обзоре [12] подчеркивается, что наиболее сложно обеспечить одновременное требование положительности и высокой точности. Поэтому практически одновременно с Sn-методом начали появляться методы его коррекции. В качестве коррекции Sn-схем одним из первых был предложен метод балансного зануления отрицательных потоков в ячейке [29], который, несмотря на имеющиеся недостатки, успешно используется в некоторых задачах. Использовался также пересчет ячейки, в которой возникли отрицательные потоки, по положительной схеме первого порядка (шаговая или St-схема). Как отмечается в обзоре [12], такие методы коррекции могут ухудшить сходимость итерационного процесса в сложных задачах. Более успешно применяется взвешенная схема. Она отличается от Sn-схемы 2-го порядка точности тем, что в дополнительные

соотношения схемы вводится весовой множитель. Взвешенная схема занимает некоторое промежуточное положение между схемами 1-го и 2-го порядка аппроксимации.

Для построения монотонных схем для разных классов уравнений неоднократно привлекался характеристический подход [30-32] и др. В работе [30] была предложена нелинейная схема с монотонной аппроксимацией дифференциального оператора для модельного уравнения переноса. Искомое значение в неосвещенной вершине прямоугольной ячейки вычислялось в результате параболической интерполяции со сглаживанием. Для построения интерполяции брались значения плотности потока в точках на одном из ребер ячейки и его продолжении. В эти точки попадали характеристики дифференциального оператора, выпущенные из освещенных вершин, а значения плотности потока в них определялись точным решением уравнения переноса вдоль выпущенных характеристик. Сама задача при этом решалась методом квазидиффузии [33]. Этот подход получил развитие в работе [34]. В двумерном уравнении интерполяция строилась на произвольной прямой, проведенной через неосвещенную вершину ячейки, а в многомерном случае на произвольной плоскости, проходящей через неосвещенную вершину ячейки.

В работе [35] был предложен метод «мягкой коррекции», в котором весовая функция в конкретной ячейке записывается на основе характеристического представления уравнения переноса в этой ячейке и зависит от ее оптической толщины. Этот метод коррекции дал начало адаптивным схемам [12, 36], в которых учитывается структура решения в областях с различными физическими параметрами. Некоторые из этих методов, особенно последние, достаточно эффективны при определенных условиях, но не являются достаточно общим решением проблемы немонотонности, а их обобщения на многомерные уравнения очень сложны.

В работе [37] отмечается, что нефизическое осциллирующее решение в оптически плотной среде DS_n-метод дает из-за линейной интерполяции столкновительного члена,

описывающего поглощение частиц в кинетическом уравнении. В связи с этим авторами предлагается DSn-метод с добавкой диссипативных членов, который они называют DDAD–схемой (Diamond Difference Artificial Dissipation). В работе приводятся расчеты гетерогенных слоистых задач (для плоской, сферически-симметричной и двумерной цилиндрической геометрии), которые были выполнены по ромбовой (алмазной) схеме (DD) с пересчетом отрицательных значений по шаговой схеме (DD/St) и по DDAD–схеме с пересчетом отрицательных значений по шаговой схеме (DDAD/St). Результаты расчетов по новой схеме заметно лучше, чем по DD/St-схеме. Этот же алгоритм DDAD применяется и в работе [36] для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в многогрупповом приближении.

Как отмечается в работе [14], в DSn-методе аппроксимация уравнения переноса по угловой переменной даже в случае изотропного рассеяния не всегда удовлетворительна, особенно в задачах о прохождении частиц на большие расстояния. Автор предлагает нелинейную модификацию дополнительных соотношений и квадратурных формул DSn-метода, что позволяет получать решение с хорошей точностью на довольно грубой сетке в пространстве направлений. Эта же проблема подробно рассматривается в работе [39]. Чтобы выделить ошибки, порождаемые разностной аппроксимацией по угловой переменной автор вместо разностной аппроксимации по пространственной переменной (радиусу в сферически-симметричной задаче) предлагает решение системы связанных друг с другом обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием стандартного пакета.

В ряде работ [12,36,40-43], были предложены схемы более высокого порядка аппроксимации, чем DSn-метод, некоторые из них обладают и лучшими свойствами в плане положительности и монотонности, но при этом они сложнее для численной реализации, и особенно для обобщения на многомерные геометрии. Задача построения

монотонных положительных разностных схем для уравнений переноса с аппроксимацией не ниже второго порядка, достаточно простых и универсальных, остается актуальной.

В 1951-1952 г.г. В.С. Владимировым был разработан метод характеристик для численного решения задач на собственные значения и задач с источником в многослойных сферически-симметричных системах [24,44-46,11]. Идея метода состояла в том, что в результате замены переменных интегро-дифференциальное уравнение с частными производными сводится к уравнениям вдоль характеристик, то есть вдоль траекторий полета частиц. Решение можно находить, если ввести сетку на характеристиках, то есть разбить их на интервалы, внутри каждого интервала приблизить правую часть уравнения линейной функцией и произвести точное интегрирование последовательно на всех интервалах. Такой способ всегда дает положительное решение. Недостатком метода является его неконсервативность, которая приводит во многих практически важных задачах к снижению точности численного решения.

Метод характеристических трубок – ХТ-метод [9,12], предложенный В.Е. Трошиевым (кандидатская диссертация, 1966г.), является продолжением и развитием метода характеристик Владимирова. В сферически-симметричной геометрии характеристическая трубка – это область, заключенная между двумя «соседними» характеристиками дифференциального оператора уравнения переноса, которая разбивается на Т-ячейки баланса прямыми постоянными радиусов (торцы Т-ячейки). В каждой Т-ячейке вводится сеточная функция на торцах и записывается разностное уравнение баланса частиц, которое преобразуется таким образом, что уже может рассматриваться как разностная аппроксимация обыкновенного дифференциального уравнения. Важным свойством ОДУ является то, что его можно рассматривать как относительно функции плотности потока частиц вдоль средней характеристики, так и функции потока вдоль трубки. В последнем случае это есть ОДУ баланса частиц в Т-ячейке. Для решения ОДУ существует ряд методов, дающих положительное и монотонное

решение. Таким образом, ХТ-метод положителен, монотонен и имеет 2-й порядок точности, в нем точно выполняются законы сохранения нейтронов. Широкое применение ХТ-метода для решения задач о переносе нейтронов и γ -квантов [9] показало его хорошие практические качества и подтвердило его теоретические свойства. Недостатком ХТ-метода является сложность его расчетной сетки и принципиальные трудности его обобщения на нестационарные и многомерные задачи (в отличие от DSn-метода).

В работе [46] был предложен новый подход к построению разностных схем для многомерных уравнений переноса, который является нетривиальным обобщением ХТ-метода на выпуклые многомерные косоугольные сетки. Суть подхода [46] состоит в трактовке любого типа сеточных ячеек как характеристических трубок с двумя многогранными торцами – освещенным и неосвещенным – и последующем построении осредненного ОДУ баланса частиц в такой ячейке–трубке. В итерационном процессе по интегралу столкновений ОДУ относительно полного потока нейтронов вдоль ячейки–трубки может быть эффективно решено по консервативным положительным, монотонным или квазимонотонным нелинейного типа схемам 2-го порядка точности. Такие схемы построены в работах [47-51, 12], причем схемы [51] являются линейными. После решения ОДУ возникает задача консервативного распределения найденного полного потока по неосвещенным граням исходной ячейки. Задача распределения уже известного полного потока становится самостоятельной и должна решаться для каждой конкретной схемы с учетом структуры сеток и способов задания сеточных функций. В частности, распределение может быть выполнено на основе дополнительных интерполяционных соотношений, применяемых в DSn-методе и его обобщениях на многомерные уравнения и сетки.

В данной работе характеристический подход [46] развит для сферически-симметричного уравнения переноса частиц на сетках Sn-методов [52-55]. В этом случае особенности формулировок и исследования характеристического подхода обусловлены

криволинейностью сферической системы координат, что наглядно проявляется при анализе дискретного Sn-метода.

Целью работы было построение новых разностных схем на базе схем DSn- и ХТ-методов на Sn-сетках (DSn-методы характеристических трубок или DSnt-методы) и численное исследование этих схем на монотонность и точность в расчетах основных классов задач переноса и кинетики нейтронов.

Диссертация состоит из четырех глав, введения, заключения, приложения и списка литературы.

В первой главе излагаются математические постановки задач переноса и кинетики нейтронов для сферически-симметричных систем, в односкоростном приближении. Это задачи с источником и задачи на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения в частных производных первого порядка или для семейства обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений на характеристиках (ОИДУ).

Во второй главе рассматриваются Sn- и ХТ-методы решения задач переноса. Дискретный и непрерывный Sn-методы подвергаются анализу с точки зрения характеристического подхода [46, 55, 56]. Введением дополнительной сеточной функции – полного потока частиц – DSn-метод преобразуется в двухэтапную схему – схему метода характеристических трубок для полного потока и DSn-схему его распределения по неосвещенным граням Sn-ячейки, и таким образом, расщепляется по причинам, вызывающим его немонотонность. В главе также обсуждается вопрос о возможности расщепления балансных разностных схем для многомерных кинетических уравнений переноса частиц.

В третьей главе рассматриваются ячейки-трубки с произвольными торцами. Для них вводятся понятия средней характеристики, среднего расстояния, проходимого частицами в ячейке, инварианта переноса в трубке, и строится в ячейке обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) баланса относительно полного потока частиц.

Прямоугольные S_n -ячейки также рассматриваются как ячейки-трубки. В S_n -ячейке формулируется новая двухэтапная схема, состоящая из разностной аппроксимации ОДУ баланса *на первом этапе* и схемы распределения полного потока по неосвещенным граням ячейки *на втором этапе*. Для решения ОДУ на первом этапе рассматривается ряд схем второго порядка точности, обладающих свойствами положительности и монотонности. Для второго этапа предлагаются схемы распределения полного потока.

В четвертой главе проводится численный анализ построенных новых двухэтапных схем в сравнении с DS_n -методом. Устранение одной причины немонотонности приводит к существенному улучшению качества численного решения и дает фактически квазимонотонные схемы.

Основные результаты работы следующие:

1. Введением новой сеточной функции – полного потока частиц на освещенных и неосвещенных гранях - классический DS_n -метод преобразован в разностную схему для ОДУ баланса относительно полного потока на неосвещенных гранях и схему его распределения по этим граням. Обе схемы имеют второй порядок точности на гладких решениях, но не положительны и не монотонны. DS_n -метод в новой двухэтапной форме представляет собой схему расщепления по причинам, вызывающим его теоретическую и практическую немонотонность.
2. Математические понятия инварианта переноса и среднего расстояния, ранее введенные в методе характеристических трубок, обобщены на сетки произвольной формы. Установлена их связь с фазовым объемом сеточных ячеек в сфере. В S_n -ячейке, трактуемой как характеристическая трубка, построено ОДУ баланса относительно полного потока и функция независимого источника с непрерывным изменением аргумента - расстояния от освещенных граней до неосвещенных.
3. Для ОДУ в S_n -ячейке-трубке предложена экономичная монотонная 2-го порядка точности разностная схема для определения полного потока. Эта схема и различные

алгоритмы распределения полного потока по неосвещенным граням представляют собой новые численные методы (DSn-методы характеристических трубок - DSnt-методы), в которых полностью устранена причина немонотонности, обусловленная DSn-аппроксимацией столкновительных членов в уравнении переноса и кинетики нейтронов.

4. Написаны программы, реализующие разработанные методы. Эффективность новых DSnt-схем подтверждена численными расчетами задач с независимыми источниками и задач на собственные значения. Полное устранение одной причины немонотонности приводит к качественно новым численным результатам (квазимонотонные схемы).

Результаты работы докладывались и обсуждались на Научных сессиях МИФИ (2001, 2003, 2004, 2007), на семинаре «Нейтроника-2005» в Обнинске, на семинаре В. Я. Гольдина Института математического моделирования РАН, на семинаре В.М.Головизнина ИБРАЭ РАН.

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ, из них две статьи в реферируемых журналах – «Доклады академии наук» и «Математическое моделирование», два препринта ГНЦ РФ ТРИНИТИ и четыре сообщения в сборниках трудов Научных сессий МИФИ.

Глава 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ ДЛЯ СФЕРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ О ЕГО РЕШЕНИИ

§1 Интегро-дифференциальное уравнение переноса в частных производных первого порядка

Математическим описанием процессов переноса и кинетики нейтронов является кинетическое интегро-дифференциальное уравнение переноса [1,2,3], которое для сферы в односкоростном приближении обычно рассматривается в двух эквивалентных формах – дивергентной и недивергентной:

$$\frac{\partial N(r, \mu, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mu v N) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} v N \right) + \sigma(r) v N = S(r, \mu, t), \quad (1.0)$$

$$\frac{\partial N(r, \mu, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial v N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial v N}{\partial \mu} + \sigma(r) v N = S(r, \mu, t), \quad (1.0')$$

$$S(r, \mu, t) = \frac{1}{2} \sigma(r) m(r) \int_{-1}^{+1} g(r, \mu' \rightarrow \mu) v N(r, \mu', t) d\mu' + \frac{1}{2} Q(r, \mu, t). \quad (1.0'')$$

Для целей нашего исследования в основном достаточно рассмотрения стационарного уравнения переноса с изотропным рассеянием частиц, которое также целесообразно рассматривать в одних случаях в дивергентной, а в других – в недивергентной формах:

$$LN(r, \mu) \equiv \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mu N) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} N \right) + \sigma(r) N = S(r), \quad (1.1)$$

$$LN(r, \mu) \equiv \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu} + \sigma(r) N = S(r), \quad (1.1')$$

$$S(r) = \frac{\beta(r)}{2} n^0(r) + \frac{Q(r)}{2}, \quad n^0(r) = \int_{-1}^{+1} N(r, \mu) d\mu. \quad (1.1'')$$

В уравнениях (1.0), (1.1) r, μ, t есть независимые переменные: r - это расстояние от центра сферы до точки M , где находится нейтрон; $\mu = \cos \theta$, где θ - это угол в точке M

между радиус-вектором \vec{r} и направлением полета нейтрона $\vec{\xi}$ в сфере (рис.1.1), v - скорость движения нейтронов, t - время. Таким образом, переменные r, μ изменяются в области

$$D = \{0 \leq r \leq R, -1 \leq \mu \leq 1\}, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

где R - внешний радиус сферы.

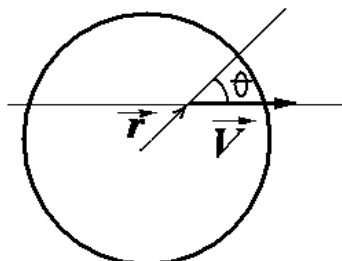


Рис.1.1 Изменение угла θ на траектории нейтрона в сфере.

Искомая функция $N(r, \mu, t)$ или $N(r, \mu)$ есть плотность нейтронов в фазовом пространстве r, μ , иначе говоря,

$$N(r, \mu)dW, \quad dW = r^2 dr d\mu \quad (1.3)$$

есть число частиц в элементарном фазовом объеме dW . Скорость движения частиц в уравнениях (1.1) предполагается равной единице, и поэтому функцию $N(r, \mu)$ можно трактовать и как поток частиц $vN(r, \mu)$.

Функции $\sigma(r), \beta(r) = \sigma(r)m(r), m(r), g(r, \mu' \rightarrow \mu), Q(r)$ - являются заданными. Они характеризуют свойства среды, в которой нейтроны при своем движении со скоростью v взаимодействуют с ядрами веществ, образующих среду. Более точно, $\sigma(r)$ - это коэффициент поглощения частиц; $m(r)$ - число вторичных частиц, рождающихся в одном акте взаимодействия; $g(r, \mu' \rightarrow \mu)$ - индикатриса рассеяния вторичных частиц, удовлетворяющая условию

$$\int_{-1}^{+1} g(r, \mu' \rightarrow \mu) d\mu \equiv 1;$$

$Q(r, \mu, t), Q(r)$ - это независимые источники частиц.

Для нестационарных задач должно быть задано начальное распределение нейтронов в фазовом пространстве r, μ :

$$N(r, \mu, t = 0) = N^0(r, \mu), \quad (r, \mu) \in D. \quad (1.4)$$

Задание нейтронов, влетающих в сферу на поверхности $r=R$, является единственным граничным условием для уравнений (1.0), (1.1):

$$\begin{aligned} N(R, \mu, t) &= \psi(\mu, t), & \mu \leq 0, \\ N(R, \mu) &= \psi(\mu), & \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Общее количество частиц, влетающих в сферу, определяется интегралом

$$j^-(R) = R^2 \int_{-1}^0 \mu \psi(\mu) d\mu. \quad (1.5')$$

Уравнения (1.0) и (1.1) вместе с начальными и краевыми условиями (1.4) и (1.5) определяют соответственно начально-краевую или краевую задачу определения функции N в области (1.2). В зависимости от подходов, применяемых для сеточной аппроксимации уравнений (1.0), (1.1), могут потребоваться дополнительные условия – уравнения на луче $\mu = -1$ и в центре сферы $r = 0$. Эти условия следуют из основных уравнений (1.0'), (1.1'):

- на луче $\mu = -1$ функции $N(r, \mu = -1, t)$ и $N(r, \mu = -1)$ являются соответственно решением уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(r, \mu = -1, t)}{\partial t} + \frac{dN}{dr} + \sigma(r)N &= S(r, \mu = -1, t), \\ \frac{dN(r, \mu = -1)}{dr} + \sigma(r)N(r, \mu = -1) &= S(r); \end{aligned} \quad (1.6)$$

- в центре сферы функции $N(0, \mu, t)$ и $N(0, \mu)$ являются решением уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(r = 0, \mu, t)}{\partial \mu} &\equiv 0, \quad -1 \leq \mu \leq +1, \\ \frac{dN(r = 0, \mu)}{d\mu} &\equiv 0, \quad -1 \leq \mu \leq +1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Начальные и краевые условия для уравнения (1.6) следуют из условий (1.4) и (1.5), а для уравнений (1.7) – из (1.4) и из решения уравнений (1.6) в точке $(r = 0, \mu = -1)$. Точными решениями уравнений (1.7) являются

$$N(r = 0, \mu, t) = \text{const}(t), \quad N(r = 0, \mu) = \text{const}. \quad (1.7')$$

Дополнительные граничные условия (1.6), (1.7) обычно требуются в тех случаях, когда сеточные аппроксимации строятся для уравнений переноса (1.0), (1.1), трактуемых как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Если же уравнения переноса тракуются как семейство обыкновенных интегродифференциальных уравнений на характеристиках-траекториях полета частиц в пространстве (r, μ) , то дополнительные условия (1.6), (1.7) являются уравнениями на отдельной характеристике

$$(\mu = -1, R \leq r \leq 0; r = 0, -1 \leq \mu \leq 1),$$

проходящей через центр сферы, см. §2 этой главы.

§2 Семейство характеристик уравнения переноса в фазовом пространстве (r, μ) и задача Коши для семейства обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ) на характеристиках

Другой подход к математической постановке задач переноса и их решению основан на том, что уравнение переноса (1.1') есть интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа, так как его дифференциальный оператор есть не что иное, как производная от функции $N(r, \mu)$ вдоль характеристик – траекторий движения частиц в фазовом пространстве r, μ :

$$\frac{dN(r, \mu)}{d\xi} = \frac{\partial N(r, \mu)}{\partial r} \frac{dr}{d\xi} + \frac{\partial N(r, \mu)}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\xi}. \quad (2.1)$$

Сравнивая (2.1) с (1.1'), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\mu} dr = \frac{r}{1 - \mu^2} d\mu, \quad (2.2)$$

решением которого в области D (1.2) является однопараметрическое семейство кривых (гипербол, см. рис. 2.1)

$$r\sqrt{1-\mu^2} = C. \quad (2.3)$$

Произвольная константа C – параметр семейства принадлежит интервалу

$$0 \leq C \leq R. \quad (2.4)$$

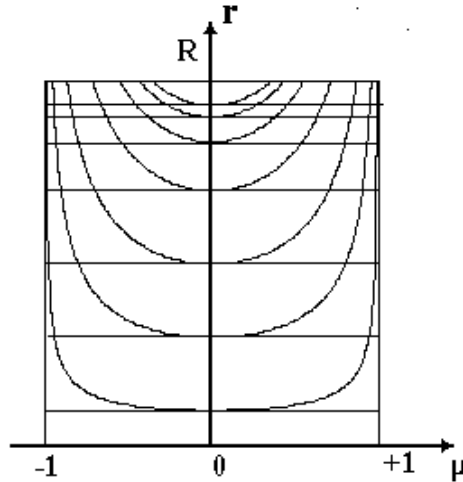


Рис.2.1 Характеристики-траектории движения частиц в фазовом пространстве μ, r области D.

Характеристика (2.3) с значением параметра равным C (2.4) начинается на поверхности сферы в точке

$$\left(r = R, \mu = -\sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2}} \leq 0 \right), \quad (2.5)$$

пересекает луч $\mu = 0$ в точке

$$(r = C, \mu = 0) \quad (2.5')$$

(минимум гиперболы, рис.2.1) и заканчивается на «противоположной стороне»

поверхности сферы в точке

$$\left(r = R, \mu = +\sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2}} \geq 0 \right). \quad (2.5'')$$

Расстояние, проходимое частицей в сфере по траектории (2.3) от точки (r_1, μ_1) до точки

(r_2, μ_2) , есть

$$\Delta\xi = r_2\mu_2 - r_1\mu_1, \mu_2 > \mu_1. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) следует из (2.2):

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{1}{\mu} dr, & d\xi &= \frac{r}{1-\mu^2} d\mu, \\ \mu^2 d\xi &= \mu dr, & (1-\mu^2)d\xi &= rd\mu, & d\xi &= \mu dr + rd\mu, \end{aligned} \quad (2.6')$$

а также легко может быть получено из геометрических соображений (рис. 1.1).

Таким образом, переменная ξ на характеристике с параметром C изменяется в интервале

$$R\mu_c \leq \xi_c \leq -R\mu_c, \mu_c = -\sqrt{1 - \frac{C^2}{R^2}}. \quad (2.7)$$

Вдоль любой характеристики (2.3), (2.4) выполняется ОИДУ

$$\Lambda N_c(\xi_c) \equiv \frac{dN_c(\xi_c)}{d\xi_c} + \sigma(\xi_c)N_c(\xi_c) = S(\xi_c), \quad (2.8)$$

для которого требуется решать задачу Коши с начальным условием (1.5)

$$N_c(R, \mu_c) = \psi(\mu_c). \quad (2.9)$$

Сохраняется так же формула (1.5') для общего количества частиц, влетающих в сферу, а элементарный фазовый объем (1.3') с использованием переменной ξ записывается как

$$dW = r^2 \mu d\xi d\mu. \quad (2.10)$$

При значении параметра $C=0$ характеристика (2.3) состоит из трех прямолинейных отрезков. Это отрезки:

$$\{\mu = -1, R \geq r \geq 0\}, \{-1 \leq \mu \leq +1, r = 0\}, \{\mu = +1, 0 \geq r \geq R\}. \quad (2.11)$$

Так как расстояние (2.6), проходимое частицей на отрезке (2.11) в центре сферы равно нулю, то из ОИДУ (2.8) следует дополнительное граничное условие (1.7').

§3 Классы задач для уравнений переноса и итерационные процессы их решения

Существуют два основных класса задач, решения которых находятся как решения уравнений (1.1) с определенно заданными независимыми источниками и граничными условиями.

Первый класс задач – это «задачи с источником». В таких задачах хотя бы один из внешних источников $Q(r, \mu)$ – (1.1'') или $\psi(\mu)$ – (1.5) отличен от нуля. В этом случае постановка задачи и ее решение однозначно определены уравнением и условиями (1.1) – (1.5).

Второй класс задач – это «задачи на собственные значения», которые ставятся для однородного уравнения переноса с однородными граничными условиями:

$$Q(r) \equiv 0; N(R, \mu) = \gamma N(r, -\mu), \mu \leq 0, 0 \leq \gamma < 1. \quad (3.1)$$

В этом случае ищется ненулевое решение и отвечающее ему собственное число, которое имеет определенный математический и физический смысл. Например, это может быть определение постоянной размножения нейтронов λ , коэффициента эффективности реактора $K_{эфф}$, критического радиуса системы $R_{крит}$ и т.д. [1-3]

На практике при решении любого класса задач применяется метод итераций по интегралу рассеяния (1.1')

$$L N^{v+1}(r, \mu) = S^v(r), \quad (3.2)$$

$$\Lambda N_c^{v+1}(\xi_c) = S^v(\xi_c), \quad (3.3)$$

$$\dot{S}^v(r) = \frac{\beta(r)}{2} n^v(r) + \frac{Q(r)}{2}, \quad (3.4)$$

где v - порядковый номер итерации.

В задачах с источником начальное приближение $n^0(r)$ обычно выбирается равным нулю, а в задачах на собственные значения – отличным от нуля.

Таким образом, на каждой отдельной итерации необходимо численно решать уравнение (3.2) или (3.3) с соответствующими граничными условиями и источниками. Это уравнение уже не является интегро-дифференциальным, так как его правая часть является известной функцией. Уравнение (3.2) есть дифференциальное уравнение в частных

производных первого порядка гиперболического типа, а уравнение (3.3) есть однопараметрическое семейство ОДУ.

Комментарии к главе 1

Для описания процессов переноса и кинетики нейтронов часто используются и другие представления кинетических уравнений. Это интегральные уравнения Пайерлса [1,3,57], уравнения переноса в частных производных второго порядка в самосопряженной форме [44,58], вариационные принципы [44,1], уравнения метода сферических гармоник [44,1,3], сопряженные уравнения [1,3] и др., а также вероятностные трактовки нейтронно-ядерных процессов (методы Монте-Карло).

Кинетические интегро-дифференциальные уравнения переноса нейтронов первого порядка, записанные в главе 1, широко применяются для решения самых различных задач теории переноса нейтронов, взаимодействия теплового излучения (фотонов) с нагретым веществом, переноса γ -квантов высоких энергий и др. Особенно они важны при решении задач с самосогласованным учетом нескольких физических процессов, например, газодинамического движения среды, нейтронно-ядерных взаимодействий, теплопереноса и др. [5,6].

1. В данной работе для описания процессов переноса и кинетики нейтронов в сферических системах используется интегро-дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка, либо однопараметрическое семейство обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений. Они применяются для решения задач «с источником», в которых требуется определять функцию плотности частиц и для решения задач на собственные значения, в которых нет внешнего источника нейтронов, но имеется размножающая среда.
2. При численном решении применяется метод итераций по интегралу рассеяния $n^0(r)$, то есть правая часть уравнения каждый раз берется с предыдущей итерации.

Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДИСКРЕТНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО S_n-МЕТОДОВ В ЯЧЕЙКЕ БАЛАНСА В РАЗНОСТНУЮ СХЕМУ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ТРУБОК ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛНОГО ПОТОКА ЧАСТИЦ И СХЕМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА ПО НЕОСВЕЩЕННОМУ КОНТУРУ S_n-ЯЧЕЙКИ

§1 Разностная схема DSn-метода в ячейке баланса

В системе координат μ, r в области D вводится прямоугольная сетка (рис.1.1 и 1.2), ячейки которой ограничены линиями, параллельными координатным осям:

$$\begin{aligned} \mu = \mu_q, \quad q = 0, 1, \dots, \bar{q}, \quad \bar{q} + 1, \dots, 2\bar{q}, \quad \mu_0 = -1, \quad \mu_{\bar{q}} = 0, \quad \mu_{2\bar{q}} = +1; \\ r = r_p, \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p}, \quad r_0 = 0, \quad r_{\bar{p}} = R. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Сетку по переменной μ предполагаем равномерной, а по переменной r – произвольной (для решения реальных прикладных задач выбор равномерных по r сеток практически невозможен, в то время как по μ обычно применяются равномерные сетки):

$$\begin{aligned} \Delta\mu = \mu_{q+1} - \mu_q, \quad \Delta r_{p+\frac{1}{2}} = r_{p+1} - r_p, \quad \Delta V_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(r_{p+1}^3 - r_p^3), \\ \Delta W_{p+\frac{1}{2}} = \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta\mu, \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

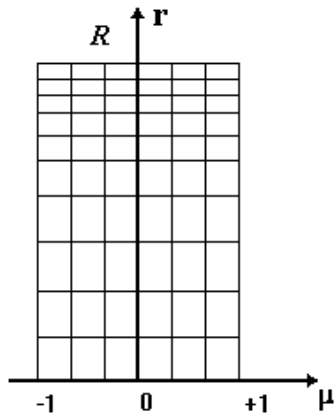


Рис.1.1 S_n-сетка в области D.

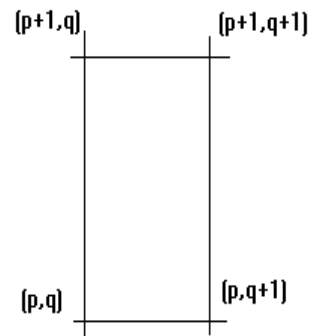


Рис.1.2 Ячейка d_{p,q}

Ячейками баланса в DSn-методе являются прямоугольники d_{p,q} (S_n-ячейки), образованные линиями:

$$\mu = \mu_q, \quad r = r_p, \quad \mu = \mu_{q+1}, \quad r = r_{p+1}, \quad (1.3)$$

Значения сеточной функции N^h вводятся на ребрах (гранях) S_n-ячеек:

$$N_{p+1, q+\frac{1}{2}}, \quad N_{p, q+\frac{1}{2}}, \quad N_{p+\frac{1}{2}, q+1}, \quad N_{p+\frac{1}{2}, q}, \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1; \quad q = 0, 1, \dots, \bar{q} - 1. \quad (1.4)$$

Далее мы будем также использовать для сеточной функции (1.4) полулокальную систему обозначений, в которой опустим «полуцелые» индексы:

$$N_{p+1}, N_p, N_{q+1}, N_q, \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1; \quad q = 0, 1, \dots, \bar{q} - 1. \quad (1.4')$$

Уравнение баланса частиц в ячейке получается умножением уравнения (1.1.1) на $r^2 dr d\mu$ с последующим интегрированием по прямоугольной ячейке $d_{p,q}$ и переходом по формуле Грина к контурным интегралам:

$$\begin{aligned} & r_{p+1}^2 \int_{\mu_q}^{\mu_{q+1}} \mu N(r_{p+1}, \mu) d\mu - r_p^2 \int_{\mu_q}^{\mu_{q+1}} \mu N(r_p, \mu) d\mu + (1 - \mu_{q+1}^2) \int_{r_p}^{r_{p+1}} r N(r, \mu_{q+1}) dr - \\ & - (1 - \mu_q^2) \int_{r_p}^{r_{p+1}} r N(r, \mu_q) dr + \int_{r_p}^{r_{p+1}} \sigma(r) r^2 dr \int_{\mu_q}^{\mu_{q+1}} N(r, \mu) d\mu = \Delta\mu \int_{r_p}^{r_{p+1}} S(r) r^2 dr \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнение баланса (1.5) есть точное уравнение. Полагая в нем приближенно сеточную функцию на гранях и в центрах ячеек постоянной, получаем систему приближенных сеточных уравнений баланса DS_n-метода:

$$\begin{aligned} & (r_{p+1}^2 N_{p+1, q+\frac{1}{2}} - r_p^2 N_{p, q+\frac{1}{2}}) \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta\mu + [(1 - \mu_{q+1}^2) N_{p+\frac{1}{2}, q+1} - (1 - \mu_q^2) N_{p+\frac{1}{2}, q}] r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} + \\ & + \sigma_{p+\frac{1}{2}} N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta\mu = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta\mu, \\ & N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (N_p + N_{p+1} + N_q + N_{q+1}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$S_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \beta_{p+\frac{1}{2}} n_{p+\frac{1}{2}}^0 + \frac{1}{2} Q_{p+\frac{1}{2}}, \quad n_{p+\frac{1}{2}}^0 = \sum_{q=0}^{\bar{q}-1} N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} \Delta\mu, \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1, \quad q = 0, 1, \dots, \bar{q} - 1,$$

$$\text{где} \quad \mu_{q+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mu_{q+1} + \mu_q), \quad r_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (r_{p+1} + r_p), \quad (1.7)$$

а $\Delta\mu$, $\Delta r_{p+\frac{1}{2}}$, $\Delta V_{p+\frac{1}{2}}$ определяются формулами (1.2).

Каждое уравнение системы сеточных уравнений баланса (1.6) в ячейке $d_{p,q}$ дополняется интерполяционным соотношением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (N_{q+1} + N_q) = \frac{1}{2} (N_{p+1} + N_p), \\ & p = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1, \quad q = 0, 1, \dots, \bar{q} - 1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

которое по своему смыслу является аппроксимационным требованием на гладкость сеточного решения в S_n -ячейке (напомним, что в левой части уравнения баланса (1.6) и в соотношениях (1.8) сеточная функция N – это $N^{\nu+1}$, а в правой части - N^{ν} , где ν - номер итерации, однако аппроксимации (1.6), (1.8) справедливы и без итерационного алгоритма (1.3.2)).

Система двух уравнений (1.6) и (1.8) есть разностная схема DS_n -метода в ячейке баланса $d_{p,q}$. По самому построению схемы очевидно, что она консервативна (дивергентна) относительно переноса частиц. Замкнутой система сеточных уравнений (1.6), (1.8) для всех p, q становится после присоединения к ней:

- основного граничного условия (1.1.5) в сеточной форме:

$$N_{\bar{p}, q+1/2} \equiv N(R, \mu_{q+1/2}) = \psi_{q+1/2}, \quad q = 0, 1, \dots, q/2 - 1; \quad (1.9)$$

- дополнительных граничных значений сеточной функции в «полуцелых» узлах на луче $\mu = -1$:

$$N_{p+\frac{1}{2}, 0} = \frac{1}{2}(N_{p+1, 0} + N_{p, 0}), \quad p = p-1, p-2, \dots, 0, \quad (1.10)$$

которые находятся из решения уравнения (1.1.6)

$$-\frac{dN(r, -1)}{dr} + \sigma(r)N(r, -1) = S$$

по разностной схеме

$$-\frac{N_{p+1, 0} - N_{p, 0}}{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}} + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \frac{N_{p+1, 0} + N_{p, 0}}{2} = S_{p+\frac{1}{2}}, \quad N_{p, 0} = \psi(-1), \quad p = p-1, p-2, \dots, 0;$$

- аппроксимации в центре сферы ($r = 0$) условия (1.1.7). В численном решении сеточные значения при $r = 0, \mu < 0$ не равны между собой. Поэтому в центре сферы условие

$$N(r = 0, \mu) = const$$

обычно аппроксимируется в форме симметричного переноса значений сеточной функции из области $\mu < 0$ в область $\mu > 0$:

$$N_{\frac{\bar{q}}{2}+k+\frac{1}{2}} = N_{\frac{\bar{q}}{2}-k-\frac{1}{2}}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{\bar{q}}{2} - 1. \quad (1.11)$$

Теперь из системы уравнений (1.9), (1.10), (1.6), (1.8) последовательно определяются значения сеточной функции (1.4') для $\mu \leq 0$ (алгоритм бегущего счета). Далее, используя

условия (1.11) в центре сферы и значения $N_{p+\frac{1}{2}, \bar{q}}$, $p=0,1,\dots,\bar{p}-1$, на луче $\mu=0$ находим сеточную функцию (1.4') для $\mu > 0$. В алгоритме бегущего счета искомыми значениями сеточной функции в рассчитываемой ячейке $d_{p,q}$ (1.3) являются значения на неосвещенных гранях ячейки баланса. В полных обозначениях – это:

$$N_{p,q+\frac{1}{2}}, N_{p+\frac{1}{2},q+1} \text{ для } \mu \leq 0 \text{ и } N_{p+1,q+\frac{1}{2}}, N_{p+\frac{1}{2},q+1} \text{ для } \mu > 0.$$

В полулокальных – это, соответственно:

$$N_p, N_{q+1} \text{ для } \mu \leq 0 \text{ и } N_{p+1}, N_{q+1} \text{ для } \mu > 0.$$

В итерационном процессе (1.3.2) правая часть (1.6) для следующей $(v+2)$ – итерации определяется формулой

$$S_{p+\frac{1}{2}}^{v+1} = \frac{1}{2} \beta_{p+\frac{1}{2}} \sum_{q=0}^{\bar{q}-1} N_{p+\frac{1}{2},q+\frac{1}{2}}^{v+1} \Delta\mu + \frac{1}{2} Q_{p+\frac{1}{2}}. \quad (1.12)$$

Квадратурная формула (1.12) согласована с аппроксимацией члена $\sigma(r)N$ в уравнении (1.6) и поэтому обеспечивает консервативность DS_n–метода относительно вторичных нейтронов с точностью итерационной погрешности, допущенной на $(v+1)$ -итерации.

Замечание. Следует отметить, что DS_n–метод был сформулирован Б.Карлсоном для сферически-симметричного уравнения в недивергентной форме (1.1.1')

$$LN(r, \mu) \equiv \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu} + \sigma N = S(r),$$

что потребовало для обеспечения сеточной дивергентности DS_n–метода дополнительных нестандартных преобразований расчетных формул, см. [21], а также [10]. В связи с этим записи разностных уравнений баланса в сеточно-дивергентной форме (1.6) и в работе [21] оказываются существенно разными, хотя они и эквивалентны. Эквивалентность проще всего показать, если для преобразования разностей в уравнении (1.6) применить формулу разностного дифференцирования произведения

$$a_2 N_2 - a_1 N_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} (N_2 - N_1) + \frac{N_1 + N_2}{2} (a_2 - a_1).$$

В результате, сеточные аналоги (аппроксимации) кинетических уравнений переноса (1.1.1) и (1.1.1') в DS_n-методе записываются в виде:

$$\frac{r_{p+1}^2 \bar{\mu} N_{p+1} - r_p^2 \bar{\mu} N_p}{\Delta V_{p+\frac{1}{2}}} + \left(\frac{1 - \mu_{q+1}^2}{\tilde{r}_{p+\frac{1}{2}}} N_{q+1} - \frac{1 - \mu_q^2}{\tilde{r}_{p+\frac{1}{2}}} N_q \right) \frac{1}{\Delta \mu} + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \frac{1}{4} (N_p + N_{p+1} + N_q + N_{q+1}) = S_{p+\frac{1}{2}}, \quad (1.13)$$

$$\tilde{r}_{p+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3} (r_p^2 + r_p r_{p+1} + r_{p+1}^2)}{\frac{1}{2} (r_p + r_{p+1})};$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2} (r_p^2 + r_{p+1}^2)}{\frac{1}{3} (r_p^2 + r_p r_{p+1} + r_{p+1}^2)} \bar{\mu} \frac{N_{p+1} - N_p}{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}} + \frac{1 - \frac{1}{2} (\mu_q^2 + \mu_{q+1}^2)}{\tilde{r}_{p+\frac{1}{2}}} \frac{N_{q+1} - N_q}{\Delta \mu} + \\ & + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \frac{1}{4} (N_p + N_{p+1} + N_q + N_{q+1}) = S_{p+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.13')$$

Для наших целей будет требоваться в основном сеточное-дивергентное представление DS_n-метода (1.13).

DS_n-метод является широко применяемым методом для решения задач переноса и кинетики нейтронов в стационарной и нестационарной постановках. Это обусловлено простотой структуры сеток и экономичностью вычислительного алгоритма метода, полной консервативностью относительно законов сохранения нейтронов и вторым порядком точности на гладких решениях. Главным и практически единственным недостатком DS_n-метода является теоретическая и часто практическая немонотонность получаемых сеточных решений. Вопросы монотонизации Sn-методов рассматривались в работах Б. Карлсона, Латропа, В. Я. Гольдина, Калиткина, Т. А. Гермогеновой, В. Е. Трошиева и др.

§2 Преобразование разностной схемы DS_n-метода в схему для ОДУ относительно полного потока и схему распределения потока по неосвещенным граням Sn-ячейки (расщепление DS_n-схемы)

Покажем, что DS_n-метод обладает следующим свойством: «разностная схема (1.6), (1.8) DS_n-метода в каждой ячейке баланса расщепляется на две последовательно

выполняемые схемы: схему для кинетического ОДУ переноса относительно полного потока и схему распределения полного потока по неосвещенным граням S_n -ячейки»

Введем новую сеточную функцию Φ^h – полный поток частиц через освещенный и неосвещенный контуры S_n -ячеек в уравнении баланса (1.6). Полные потоки нейтронов Φ_1 и Φ_2 через освещенный и неосвещенный контуры ячейки $d_{p,q}^{1)}$ имеют соответственно

вид:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \Phi_{I_{p,q}} = \left((1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_q - r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_{p+1} \right) \\ \Phi_2 &\equiv \Phi_{2_{p,q}} = \left((1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_{q+1} - r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_p \right) \end{aligned} \right\} \text{ для } \mu < 0, \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \Phi_{I_{p,q}} = \left((1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_q + r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_p \right) \\ \Phi_2 &\equiv \Phi_{2_{p,q}} = \left((1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_{q+1} + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_{p+1} \right) \end{aligned} \right\} \text{ для } \mu > 0, \quad (2.2)$$

Теперь уравнение баланса (1.6) запишется как:

$$\Phi_2 - \Phi_1 + \sigma_{p+\frac{1}{2}} N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} \Delta W_{p+\frac{1}{2}} = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta W_{p+\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

Заметим, что в формулах (2.1), (2.2) коэффициенты при значениях сеточной функции N^h обладают свойством:

$$I \equiv I_{p,q} = \begin{cases} (1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} - r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \equiv (1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} - r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu, & \mu < 0 \\ (1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \equiv (1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} + r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu, & \mu > 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Учитывая свойство (2.4), получаем, что

$$N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} \equiv \frac{1}{4} (N_{p+1} + N_q + N_p + N_{q+1}) = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2I} + \alpha, \quad (2.5)$$

где

¹ Освещенный контур ячейки $d_{p,q}$ – это те две стороны прямоугольника, через которые частицы «влетают» в ячейку, а неосвещенный контур – это стороны, через которые частицы вылетают из ячейки. Для $\mu < 0$ освещенный контур – это отрезки прямых между узлами $(p+1, q+1)$, $(p+1, q)$, (p, q) , а для $\mu > 0$ – между узлами (p, q) , $(p, q+1)$, $(p+1, q+1)$ (см. рис.1.2).

$$\alpha = \begin{cases} \frac{(N_{p+1} - N_q) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu}{I}, & \mu < 0 \\ \frac{(N_p - N_q) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu}{I}, & \mu > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

являются величинами 2-го порядка малости относительно шагов Δr , $\Delta \mu$. Отметим, что в (2.6) сеточные значения функции N уже известны из расчета предыдущих ячеек.

Таким образом, уравнение баланса (1.6) или (2.3) в ячейке $d_{p,q}$ принимает вид:

$$\Phi_2 - \Phi_1 + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + \alpha I \right) \frac{\Delta W_{p+\frac{1}{2}}}{I} = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta W_{p+\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.7) находится полный поток Φ_2 через неосвещенные грани Sn-ячеек.

Замечание. В практических расчетах следует использовать уравнение для определения N_2 - среднего значения функции на неосвещенном контуре:

$$(N_2 - N_1) I + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \left(\frac{N_1 + N_2}{2} + \alpha \right) \Delta W_{p+\frac{1}{2}} = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta W_{p+\frac{1}{2}}, \quad N_1 = \frac{\Phi_1}{I}, \quad N_2 = \frac{\Phi_2}{I}, \quad (2.8)$$

так как полные потоки Φ при измельчении Sn-сетки являются бесконечно малыми величинами.

Определение из уравнений (2.7) полного потока Φ_2 (или среднего значения N_2 из (2.8)) на неосвещенном контуре ячейки $d_{p,q}$ есть *первый этап расчета по расщепленной разностной схеме DSn-метода* в отдельной Sn-ячейке. Таким образом, на первом этапе расщепления классическое уравнение баланса (1.6), являющееся дивергентной аппроксимацией уравнения в частных производных (1.1.1), заменено аппроксимацией (2.7) некоторого ОДУ относительно полного потока частиц Φ в Sn-ячейке.

На втором этапе найденный полный поток Φ_2 необходимо распределить по граням неосвещенного контура Sn-ячейки $d_{p,q}$. Система двух уравнений для определения

сеточных значений N на неосвещенных гранях следует из равенств (2.1), (2.2) для Φ_2 , определений (2.8) для N_1 и N_2 и дополнительных соотношений (1.8):

$$\begin{cases} (1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_{q+1} - r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_p = \Phi_2, & \mu < 0 \\ N_{q+1} + N_q = N_{p+1} + N_p, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} (1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_{q+1} + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_{p+1} = \Phi_2, & \mu > 0 \\ N_{q+1} + N_q = N_{p+1} + N_p \end{cases} \quad (2.9')$$

Таким образом, разностная схема классического DS n -метода, представляющая собой в каждой ячейке баланса систему двух уравнений (1.6), (1.8), преобразована (расщеплена) в (на) две разностные схемы (2.7) и (2.9), которые последовательно выполняются в каждой Sn-ячейке. Отметим, что аппроксимации краевых условий (1.9)-(1.11) не влияют на вывод и структуру алгоритма расщепления. Использование их и в классическом, и в расщепленном DS n -методе позволяет в численном расчете реализовать алгоритм бегущего счета.

§3 Принадлежность разностной схемы первого этапа расщепления DS n -метода классу схем метода характеристических трубок (ХТ-схемы)

Итак, важной особенностью разностного уравнения (2.7) является то, что это уравнение есть, очевидно, аппроксимация некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) **относительно полного потока** $\Phi(\xi)$, где аргумент ξ

изменяется в Sn-ячейке в интервале $0 \leq \xi \leq \frac{\Delta W_{p+\frac{1}{2}}}{I}$. Однозначно записать это

ОДУ невозможно. Можно, например, считать, что это есть аппроксимация уравнения

$$\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} + \sigma(\xi)\Phi(\xi) = IS(\xi),$$

$$\sigma(\xi) \equiv \sigma_{p+\frac{1}{2}}, \quad S(\xi) \equiv \frac{\beta_{p+\frac{1}{2}}}{2} n_{p+\frac{1}{2}} + \frac{Q_{p+\frac{1}{2}}}{2},$$

а можно полагать, что σ и S непрерывно зависят от аргумента ξ . Аппроксимация некоторого «неизвестного» ОДУ (2.7) фактически является сеточным уравнением баланса частиц в S_n -ячейке. Это указывает на то, что прямоугольная S_n -ячейка в схеме (2.7) играет роль ячейки-трубки аналогично ячейкам-трубкам баланса в ХТ-методе [9]. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

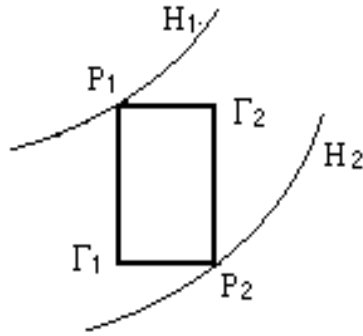


Рис. 3.1 S_n -ячейка как ячейка трубка.

В ХТ-методе [9] сетку задачи в области D образуют семейство прямых линий

$$r = r_p, \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p}, \quad r_0 = 0, r_{\bar{p}} = R \quad (3.1)$$

и семейство характеристик (1.2.1)-(1.2.5') для дискретных значений параметра C :

$$C = r_p, \quad p = 0, 1, \dots, p. \quad (3.2)$$

$$r\sqrt{(1-\mu^2)} = r_p, \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p}. \quad (3.3)$$

Характеристики (3.3) – это траектории частиц в пространстве r, μ . Расстояние, проходимое частицами между двумя точками (r_2, μ_2) , (r_1, μ_1) на кривой (3.3),

определяется разностью (1.2.6):
$$\Delta\zeta = r_2\mu_2 - r_1\mu_1, \quad \mu_2 > \mu_1 \quad (3.4)$$

Решение уравнения переноса (1.1.1) или (1.1.14) вдоль каждой характеристики (3.3) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (1.2.8) с параметром

$$C = r_p:$$

$$\frac{dN_p(\zeta)}{d\zeta_p} + \sigma_p(\zeta_p)N_p(\zeta_p) = S_p(\zeta_p), \quad 0 \leq \zeta_p \leq 2\sqrt{R^2 - r_p^2}, \quad \zeta_p = \zeta_p(r, \mu) \quad (3.5)$$

с начальным условием (задача Коши)

$$N_p(0) = \psi(\mu_p), \quad \zeta_p(r=R, \mu=\mu_p) = 0, \quad \mu_p = -\sqrt{1 - \frac{r_p^2}{R^2}}, \quad p=0, 1, \dots, \bar{p}. \quad (3.6)$$

Любые две соседние характеристики (3.3) с номерами p' и $p'+1$ образуют характеристическую трубку, которая линиями (3.1) $r=r_p$, $p=p', p'+1, \dots, p$ разбивается на счетные ячейки-трубки (Т-ячейки) (рис.3.2). Построенная таким образом сетка разбивает область D на криволинейные четырехугольники

$$d_{p,q}, \quad p=0, 1, \dots, p-1; \quad q(p)=0, 1, \dots, p-1,$$

которые являются ячейками-трубками с прямолинейными параллельными торцами (рис.3.2).

Значения сеточной функции N^h в ХТ-методе отнесены к серединам торцов Т-ячеек. В полосе $r=r_p$, $r=r_{p+1}$ мы обозначим их через

$$N_{p,q+\frac{1}{2}}, N_{p+1,q+\frac{1}{2}}, \quad q=1, \dots, 2p. \quad (3.7)$$

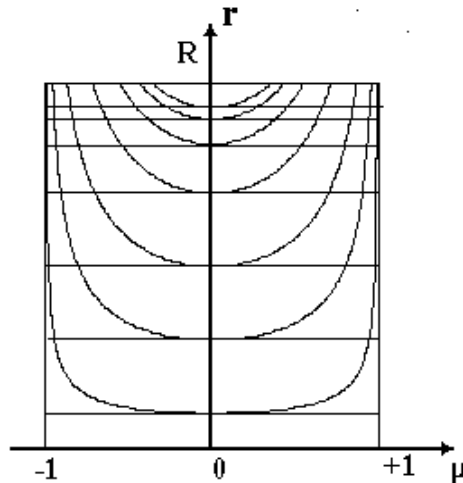


Рис. 3.2 Характеристические трубки в области D и ячейки-трубки баланса ХТ-метода.

При этом значение $N_{p,p+\frac{1}{2}}$ отнесено к середине вертикального торца $\mu=0$, так как четырехугольник вырождается в криволинейный треугольник $d_{p,p+\frac{1}{2}}$ (рис.3.2).

Ячейками баланса в полосе $r_p \leq r \leq r_{p+1}$ являются криволинейные четырехугольники $d_{p,q}$, $q=1, \dots, 2p$, ограниченные двумя соседними характеристиками (3.3) и параллельными торцами $r=r_p$, $r=r_{p+1}$.

Сеточное уравнение баланса частиц в ХТ-методе получается интегрированием дивергентного уравнения переноса (1.1.1) по криволинейному четырехугольнику $d_{p,q}$ с переходом к контурному интегралу по формуле Грина (или интегрированием ОИДУ (1.2.8) по той же ячейке $d_{p,q}$):

$$N_{p+1,q+\frac{1}{2}} r_{p+1}^2 \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} - N_{p,q+\frac{1}{2}} r_p^2 \mu_{p,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p,q+\frac{1}{2}} + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \iint_{d_{p,q}} N(r, \mu) r^2 dr d\mu = \iint_{d_{p,q}} S(r, \mu) r^2 dr d\mu. \quad (3.8)$$

В зависимости от выбора квадратурной формулы для аппроксимации в соотношении (3.8) двойных интегралов можно получать в ХТ-методе те или иные разностные схемы.

Простейшая разностная схема 2-го порядка точности получается, если в двойных интегралах уравнений баланса (3.8) подынтегральные функции аппроксимировать константой в виде полусуммы значений на торцах:

$$N_{p+\frac{1}{2},q+\frac{1}{2}} = \frac{I}{2} (N_{p,q+\frac{1}{2}} + N_{p+1,q+\frac{1}{2}}), \quad S_{p+\frac{1}{2},q+\frac{1}{2}} = \frac{I}{2} (S_{p,q+\frac{1}{2}} + S_{p+1,q+\frac{1}{2}}). \quad (3.9)$$

При этом фазовый объем Т-ячейки вычисляется точно (аналитически):

$$\Delta W = \iint_{d_{p,q}} r^2 dr d\mu. \quad (3.10)$$

Таким образом, схема (3.8)-(3.10) записывается как:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{p,q+\frac{1}{2}} I - N_{p+1,q+\frac{1}{2}} I + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \frac{N_p + N_{p+1}}{2} \Delta W = \frac{S_p + S_{p+1}}{2} \Delta W, \quad \mu \leq 0 \\ I = -r_{p+1}^2 \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} = -r_p^2 \mu_{p,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p,q+\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{p+1,q+\frac{1}{2}} I - N_{p,q+\frac{1}{2}} I + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \frac{N_p + N_{p+1}}{2} \Delta W = \frac{S_p + S_{p+1}}{2} \Delta W, \quad \mu \geq 0 \\ I = r_{p+1}^2 \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} = r_p^2 \mu_{p,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p,q+\frac{1}{2}}. \end{array} \right. \quad (3.11')$$

В терминах полных потоков Φ через торцы Т-ячеек схема (3.11), (3.11') принимает вид:

$$\Phi_2 - \Phi_1 + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \frac{\Delta W}{I} = S_{p+\frac{1}{2}} \frac{\Delta W}{I}, \quad (3.12)$$

где $\frac{\Delta W}{I}$ есть аппроксимация расстояния (3.4) в Т-ячейке (среднее расстояние в ячейке-трубке).

Сравнивая аппроксимации полного потока (2.7) в DSn-методе и (3.12) в ХТ-методе, мы получаем, что с точностью до малых величин α схемы (2.7) и (3.12) эквивалентны. Это означает, что в разностной схеме расщепленного DSn-метода прямоугольная Sn-ячейка трактуется как характеристическая трубка, а схема для полного потока (схема 1-го этапа) принадлежит классу ХТ-схем.

В ХТ-методе [9], исходя из аппроксимаций (3.11), (3.12), в каждой Т-ячейке было построено осредненное в трубке ОДУ, подобное ОДУ (3.5) вдоль отдельной характеристики. Такое уравнение легко получить, если рассмотреть внутри Т-ячейки бесконечно-близкие торцы

$$r = r^*, \quad r = r^* + dr$$

и учесть, что коэффициенты при N_p и N_{p+1} в уравнениях баланса (3.8) тождественно равны:

$$r_p^2 \mu_{p,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p,q+\frac{1}{2}} \equiv r_{p+1}^2 \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p+1,q+\frac{1}{2}} = I \quad (3.13)$$

и остаются постоянными для любых внутренних торцов (инвариант переноса вдоль трубки). Независимой переменной в осредненном ОДУ является среднее расстояние ζ^* от торца $r = r_{p+1}$ до любого внутреннего торца $r = r^*$ для $\mu < 0$ и от торца $r = r_p$ до $r = r^*$ для $\mu > 0$. Это расстояние может быть введено различными способами, например, как полусумма расстояний (3.4) на отрезках характеристик, образующих Т-ячейку.

Искомой функцией в осредненном ОДУ является поток частиц через торец $r = r^*$:

$$\Phi(\zeta^*) = \bar{N}(\zeta^*) (r^*)^2 \mu_{q+\frac{1}{2}}^* \Delta \mu_{q+\frac{1}{2}}^*$$

(или среднее значение $\bar{N}(\zeta^*)$, если разделить ОДУ на коэффициент $r^2 \mu \Delta \mu$).

Построенное таким образом ОДУ

$$\frac{d\Phi(\zeta^*)}{d\zeta^*} + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \Phi(\zeta^*) = S(\zeta^*) \quad (3.14)$$

по своему смыслу является уравнением баланса частиц с непрерывным изменением аргумента ζ^* в Т-ячейке. В методе [9] ОДУ (3.14) решалось в Т-ячейке точно, т.е. аналитически как в методе Владимирова [24,3,12], а для столкновительных членов на каждой итерации применялась нелинейная консервативная разностно-аналитическая аппроксимация в виде прямой линии или параболы. При таком алгоритме решения ОДУ (3.14) не требуется знание ζ^* как функции r^* . Достаточно знать среднюю длину $\Delta \zeta$ для всей ячейки. В численных расчетах [9] эта длина вычислялась по формуле

$$\Delta \zeta = \frac{\Delta W}{I} . \quad (3.15)$$

ХТ-метод консервативен и монотонен, имеет 2-й порядок точности относительно полной длины $\Delta \zeta$ Т-ячейки и ширины (площади) трубки I (1.3.13), позволяет аккуратно рассчитывать разрывные решения, но сетка в виде криволинейных четырехугольников не применима для решения нестационарных задач переноса особенно с учетом других физических процессов.

В связи с проведенным выше расщеплением DS_n-метода на схему для ОДУ относительно полного потока частиц и схему его распределения по неосвещенным граням S_n-ячейки представляет большой интерес задача обобщения ХТ-метода на сетки более общего вида, в особенности на S_n-сетки. Этот вопрос рассматривается в гл. 3.

§4 Дискретная форма и расщепление непрерывного Sn–метода на схему для ОДУ и схему распределения полного потока.

Непрерывный Sn–метод (CSn–метод) и его эквивалентное представление в дискретной форме

В записи уравнения (1.1.1) принято выделять потоковый член

$$DN(r, \mu) \equiv \frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 \mu N) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} N \right) \quad (4.1)$$

и столкновительный член

$$AN(r, \mu) \equiv \sigma(r)N \quad (4.2)$$

В дискретном Sn-методе предполагается, что сеточная функция N^h , аппроксимирующая решение в ячейке $d_{p,q}$ определяется дискретными значениями на гранях (сторонах) Sn-ячейки. Для непрерывного Sn-метода возможны два варианта:

- При аппроксимации и потокового, и столкновительного членов функция N^h в Sn-ячейке предполагается полилинейной

$$N^h(r, \mu) = \frac{I}{\Delta r_{p+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{q+\frac{1}{2}}} \left[N_{p,q} (r_{p+1} - r) (\mu_{q+1} - \mu) + N_{p,q+1} (r_{p+1} - r) (\mu - \mu_q) + \right. \\ \left. + N_{p+1,q} (r - r_p) (\mu_{q+1} - \mu) + N_{p+1,q+1} (r - r_p) (\mu - \mu_q) \right]; \quad (4.3)$$

- При аппроксимации и потокового члена функция $N^h(r, \mu)$ предполагается полилинейной (4.3), а при аппроксимации столкновительного члена

$$N^h = \frac{I}{4} (N_{p,q} + N_{p,q+1} + N_{p+1,q} + N_{p+1,q+1}). \quad (4.4)$$

В данной работе будет рассматриваться второй вариант непрерывного Sn-метода, который соответствует методу, предложенному Б.Карлсоном.

Интегрирование по ячейке дает уравнение баланса Sn-метода [10], которое имеет вид:

$$r_{p+1}^2 \frac{I}{2} (\mu_{q+1}^- N_{p+1,q+1} + \mu_q^+ N_{p+1,q}) \Delta \mu - r_p^2 \frac{I}{2} (\mu_{q+1}^- N_{p,q+1} + \mu_q^+ N_{p,q}) \Delta \mu + \\ + (I - \mu_{q+1}^2) (r_{p+1}^- N_{p+1,q+1} + r_p^+ N_{p,q+1}) \Delta r_{p+\frac{1}{2}} - (I - \mu_q^2) (r_{p+1}^- N_{p+1,q} + r_p^+ N_{p,q}) \Delta r_{p+\frac{1}{2}} + \\ + \frac{I}{4} \sigma_{p+\frac{1}{2}} (N_{p+1,q+1} + N_{p+1,q} + N_{p,q+1} + N_{p,q}) \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta \mu = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta \mu, \quad (4.5)$$

где $\mu_q^+ = \mu_q + \frac{1}{3}\Delta\mu$, $\mu_{q+1}^- = \mu_{q+1} - \frac{1}{3}\Delta\mu$, $r_p^+ = r_p + \frac{1}{3}\Delta r$, $r_{p+1}^- = r_{p+1} - \frac{1}{3}\Delta r$.

Чтобы непрерывный Sn-метод можно было записать в дискретной форме, в ячейке $d_{p,q}$ вводятся новые сеточные функции – средние значения функции $N(r, \mu)$ на ребрах и разность значений этой функции в вершинах для каждого ребра ячейки:

$$\begin{aligned} N_{p+1} &= \frac{1}{2}(N_{p+1,q+1} + N_{p+1,q}), & N_p &= \frac{1}{2}(N_{p,q+1} + N_{p,q}), \\ N_{q+1} &= \frac{1}{2}(N_{p+1,q+1} + N_{p,q+1}), & N_q &= \frac{1}{2}(N_{p+1,q} + N_{p,q}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\text{Заметим, что } N_{p+1,q+1} + N_{p+1,q} + N_{p,q+1} + N_{p,q} \equiv N_{p+1} + N_p + N_{q+1} + N_q, \quad (4.6')$$

$$\begin{aligned} \Delta N_{p+1} &= (N_{p+1,q+1} - N_{p+1,q}), & \Delta N_p &= (N_{p,q+1} - N_{p,q}), \\ \Delta N_{q+1} &= (N_{p+1,q+1} - N_{p,q+1}), & \Delta N_q &= (N_{p+1,q} - N_{p,q}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

С использованием этих функций уравнение баланса (4.5) непрерывного Sn-метода записывается аналогично дискретному Sn-методу:

$$\begin{aligned} &\Delta\mu r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \left(N_{p+1} + \frac{\Delta\mu}{12\mu_{q+\frac{1}{2}}} \Delta N_{p+1} \right) + \Delta r_{p+\frac{1}{2}} (1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \left(N_{q+1} + \frac{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{12r_{p+\frac{1}{2}}} \Delta N_{q+1} \right) - \\ &- \Delta\mu r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \left(N_p + \frac{\Delta\mu}{12\mu_{q+\frac{1}{2}}} \Delta N_p \right) - \Delta r_{p+\frac{1}{2}} (1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \left(N_q + \frac{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{12r_{p+\frac{1}{2}}} \Delta N_q \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \sigma_{p+\frac{1}{2}} \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta\mu (N_{p+1} + N_p + N_{q+1} + N_q) = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta\mu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Так как в ячейке $d_{p,q}$ освещены два ребра, то в уравнении (4.8) содержатся четыре неизвестных величины. Поэтому требуются дополнительные соотношения. Они следуют из определения сеточных функций (4.6),(4.7):

$$\begin{cases} N_{p+1} + N_p = N_{q+1} + N_q \\ \Delta N_{p+1} + \Delta N_q = 2(N_{p+1} - N_q) \\ \Delta N_{q+1} + \Delta N_p = 2(N_{q+1} - N_p). \end{cases} \quad (4.9)$$

Уравнение баланса (4.8) в совокупности с дополнительными соотношениями (4.9) представляет собой дискретную форму непрерывного Sn-метода. Ниже проводится характеристический анализ (расщепление) непрерывного Sn-метода (4.5), записанного в дискретной форме (4.8).

Характеристический анализ CSn-метода

Расщепление непрерывного Sn-метода, то есть представление его в виде двухэтапной схемы, производится аналогично процедуре расщепления дискретного Sn-метода.

Вводятся функции полного потока на освещенных и неосвещенных гранях ячейки $d_{p,q}$:

$$\Phi_l = \begin{cases} \left((1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} \left(N_q + \frac{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{12 r_{p+\frac{1}{2}}} \Delta N_q \right) - r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \left(N_{p+1} + \frac{\Delta \mu}{12 \mu_{q+\frac{1}{2}}} \Delta N_{p+1} \right) \right), & \mu < 0 \\ \left((1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} \left(N_q + \frac{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{12 r_{p+\frac{1}{2}}} \Delta N_q \right) + r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \left(N_p + \frac{\Delta \mu}{12 \mu_{q+\frac{1}{2}}} \Delta N_p \right) \right), & \mu > 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} \left((1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} \left(N_{q+1} + \frac{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{12 r_{p+\frac{1}{2}}} \Delta N_{q+1} \right) - r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \left(N_p + \frac{\Delta \mu}{12 \mu_{q+\frac{1}{2}}} \Delta N_p \right) \right), & \mu < 0 \\ \left((1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} \left(N_{q+1} + \frac{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{12 r_{p+\frac{1}{2}}} \Delta N_{q+1} \right) + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \left(N_{p+1} + \frac{\Delta \mu}{12 \mu_{q+\frac{1}{2}}} \Delta N_{p+1} \right) \right), & \mu > 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

В выражениях (4.10), (4.11) коэффициенты при значениях сеточной функции N^h (обозначим их через I) обладают следующим свойством:

$$I \equiv I_{p,q} = \begin{cases} \left((1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} - r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \right) \equiv \left((1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} - r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \right), & \mu < 0 \\ \left((1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \right) \equiv \left((1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} + r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \right), & \mu > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Теперь уравнение баланса (4.5) записывается в виде

$$\Phi_2 - \Phi_l + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \frac{I}{4} (N_{p+1} + N_p + N_{q+1} + N_q) \Delta W_{p+\frac{1}{2}} = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta W_{p+\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

С учетом дополнительных соотношений (4.9) и свойства (4.12), получаем, что

$$\frac{I}{4}(N_{p+l} + N_p + N_{q+l} + N_q) = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2I} + \frac{\varepsilon}{I}, \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon = & (N_p - N_q) \Delta r_{p+\frac{l}{2}} \Delta \mu r_{p+\frac{l}{2}} \mu_{q+\frac{l}{2}} - \frac{I}{24} \left[\Delta \mu^2 r_{p+l}^2 \Delta N_{p+l} + \Delta r_{p+\frac{l}{2}}^2 (I - \mu_{q+l}^2) \Delta N_{q+l} + \right. \\ & \left. + \Delta \mu^2 r_p^2 \Delta N_p + \Delta r_{p+\frac{l}{2}}^2 (I - \mu_q^2) \Delta N_q \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

является величиной 3-го порядка малости относительно шагов сетки.

Уравнение баланса можно записать, используя функции полного потока через освещенные грани

$$\Phi_2 - \Phi_1 + \sigma_{p+\frac{l}{2}} \left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + \varepsilon \right) \frac{\Delta W_{p+\frac{l}{2}}}{I} = S_{p+\frac{l}{2}} \Delta W_{p+\frac{l}{2}}, \quad (4.16)$$

его можно использовать в CSn-методе для вычисления полного потока Φ_2 через неосвещенные грани Sn-ячеек. В практических расчетах следует использовать уравнение для определения N_2 - среднего значения функции N на неосвещенном контуре:

$$(N_2 - N_1)I + \sigma_{p+\frac{l}{2}} \left(\frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{\varepsilon}{I} \right) \Delta W_{p+\frac{l}{2}} = S_{p+\frac{l}{2}} \Delta W_{p+\frac{l}{2}}, \quad N_1 = \frac{\Phi_1}{I}, \quad N_2 = \frac{\Phi_2}{I}, \quad (4.17)$$

которое получается из уравнения (4.16). Определение из уравнений (4.16), (4.17) полного потока Φ_2 (или среднего значения N_2) на неосвещенном контуре ячейки $d_{p,q}$ есть первый этап в расщеплении CSn-метода в отдельной Sn-ячейке.

На втором этапе найденный полный поток Φ_2 необходимо распределить по неосвещенным граням. Система уравнений для определения значений N на неосвещенных гранях имеет вид:

$$\begin{cases} \left(I - \mu_{q+l}^2 \right) r_{p+\frac{l}{2}} \Delta r_{p+\frac{l}{2}} \left(N_{q+l} + \frac{\Delta r_{p+\frac{l}{2}}}{12 r_{p+\frac{l}{2}}} \Delta N_{q+l} \right) - r_p^2 \mu_{q+\frac{l}{2}} \Delta \mu \left(N_p + \frac{\Delta \mu}{12 \mu_{q+\frac{l}{2}}} \Delta N_p \right) = \Phi_2, \quad \mu < 0 \\ N_{p+l} + N_p = N_{q+l} + N_q \\ \Delta N_{p+l} + \Delta N_q = 2(N_{p+l} - N_q) \\ \Delta N_{q+l} + \Delta N_p = 2(N_{q+l} - N_p) \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left((1 - \mu_{q+l}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} \left(N_{q+l} + \frac{\Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{12 r_{p+\frac{1}{2}}} \Delta N_{q+l} \right) + r_{p+l}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \left(N_{p+l} + \frac{\Delta \mu}{12 \mu_{q+\frac{1}{2}}} \Delta N_{p+l} \right) \right) = \Phi, \quad \mu > 0 \\ N_{p+l} + N_p = N_{q+l} + N_q \\ \Delta N_{p+l} + \Delta N_q = 2(N_{p+l} - N_q) \\ \Delta N_{q+l} + \Delta N_p = 2(N_{q+l} - N_p) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

§5. О расщеплении балансных разностных схем для нестационарных и многомерных кинетических уравнений переноса частиц.

При построении конечно-разностных схем методом баланса уравнение переноса частиц

$$LN(\vec{r}, \vec{\Omega}) \equiv \vec{\Omega} \cdot \nabla N + \sigma(\vec{r})N = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (5.1)$$

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = T N(\vec{r}, \vec{\Omega}) + G(\vec{r}, \vec{\Omega})$$

обычно рассматривается в дивергентной форме

$$LN(\vec{r}, \vec{\Omega}) \equiv \text{div}(N \cdot \vec{\Omega}) + \sigma(\vec{r})N = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (5.2)$$

В уравнениях (5.1), (5.2) \vec{r} - это точка пространства (x,y,z), в которой находится частица, а единичный вектор $\vec{\Omega}$ определяет направление распространения частицы.

Искомая функция $N(\vec{r}, \vec{\Omega})$ есть плотность частиц в единице фазового пространства $(\vec{r}, \vec{\Omega})$. Это означает, что число частиц в элементарном фазовом объеме $d\vec{r} d\vec{\Omega}$ есть $N(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{r} d\vec{\Omega}$. В столкновительных членах $\sigma(\vec{r})$ - это коэффициент поглощения частиц средой, а через $T N(\vec{r}, \vec{\Omega})$ обозначен интегральный оператор, собирающий вторичные частицы со всех направлений $\vec{\Omega}'$ на направление $\vec{\Omega}$.

Уравнение (5.1) и эквивалентное ему уравнение (5.2) есть стационарное односкоростное кинетическое уравнение переноса частиц, в котором скорость движения частиц надо считать равной единице.

Следуя работе [46], рассмотрим класс разностных схем, которые построены на сетках, состоящих из выпуклых ячеек d_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) соответствующей размерности (в

пространстве (x, y, z) выпуклые ячейки – это многогранники). В этом случае можно строить консервативные (дивергентные) схемы с треугольными или блочно-треугольными матрицами – схемы бегущего счета [20], что очень важно для проведения итерационного процесса по интегралу вторичных частиц (интегралу столкновений), который содержится в источнике Q .

В выпуклых ячейках d_k для каждого направления $\bar{\Omega}$ полная поверхность S_k , ограничивающая ячейку, всегда разделяется на освещенную поверхность S_{k1} ($\bar{\Omega} \cdot \bar{n} < 0$) и неосвещенную – S_{k2} ($\bar{\Omega} \cdot \bar{n} > 0$), \bar{n} – внешняя нормаль к поверхности S . На освещенной поверхности S_1 (здесь и далее индекс k опущен) сеточная функция N_1^h есть совокупность значений $\{N_{1,j}, j=1,2,\dots\}$ и является заданной, а на неосвещенной – S_2 искомая сеточная функция N_2^h есть совокупность значений $\{N_{2,j}, j=1,2,\dots\}$ и определяется из сеточного уравнения баланса и дополнительных аппроксимационных соотношений (уравнений), число которых должно быть достаточным для определения функции N_2^h во всех точках-узлах на неосвещенной поверхности.

Если обозначить полный (интегральный) поток частиц через поверхность S_1 в некотором направлении $\bar{\Omega}$ как $F_1^h = F_1(N_1^h)$, а через поверхность S_2 как $F_2^h = F_2(N_2^h)$, то, интегрируя уравнение (5.1) по ячейке d , получаем для этого направления сеточное уравнение баланса в ячейке, которое в общей форме можно записать как

$$F_2^h - F_1^h + \bar{\sigma} \sum a_j N_j^h \Delta V = \bar{Q} \Delta V. \quad (5.3)$$

Дополнительные аппроксимационные соотношения в общей форме имеют вид:

$$f_m(N_j^h, Q_j^h) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (5.4)$$

где M равно числу искомых значений сеточной функции N_2^h (если в уравнении баланса (5.3) искомая сеточная функция определяется в единственном узле, то уравнение (5.4) отсутствует). Функции f_m для линейных схем есть линейные комбинации своих аргументов.

В уравнениях (5.3), (5.4) N_j^h есть значения сеточных функций N_1^h и N_2^h во всех узлах, используемых для аппроксимации уравнения (5.1) в ячейке d , $\bar{\sigma}$ и \bar{Q} – средние значения функций $\sigma(\bar{r})$ и $Q(r)$ в ячейке, ΔV – объем ячейки d , $\sum a_j \equiv 1$. В уравнении

баланса (5.3) полные потоки F_2^h и F_1^h есть линейные комбинации значений N_j^h , относящихся к поверхностям S_2 и S_1 , соответственно:

$$F_2^h = \sum c_j N_{2,j}^h, \quad \sum c_j = I(\bar{\Omega}, d), \quad (5.5)$$

$$F_1^h = \sum b_j N_{1,j}^h, \quad \sum b_j = I(\bar{\Omega}, d), \quad (5.5')$$

где I – это инвариант переноса в направлении $\bar{\Omega}$ в ячейке d . Он определяется формулой

$$I = \iint_{S_2} \bar{\Omega} \bar{n} ds \equiv - \iint_{S_1} \bar{\Omega} \bar{n} ds, \quad (5.6)$$

где ds есть элемент площади на поверхности S .

Таким образом, схемы типа (5.3)-(5.6) в отдельной ячейке d представляют собой систему алгебраических уравнений относительно значений $N_{2,j}^h$, составляющих сеточную функцию N_2^h . Такие схемы являются обобщением DS n -метода на многомерные уравнения переноса.

Схемы метода баланса (5.3) – (5.6) есть схемы для уравнения переноса в декартовой системе координат. В этих схемах имеется сетка и по фазовой переменной $\bar{\Omega}$, которая характеризуется направлениями $\bar{\Omega}_n$, $n = 1, 2, \dots$ и площадками-окрестностями $\Delta\Omega_n$ на единичной сфере около этих направлений ($\sum \Delta\Omega_n \equiv 4\pi$). Чтобы в уравнении баланса (5.3) отразить потоки частиц с учетом площадей $\Delta\Omega_n$ надо домножить уравнение (5.3) на эти площади и произведение $F\Delta\Omega_n$ снова обозначить через F , а $\Delta V\Delta\Omega$ – через ΔW . В криволинейных системах координат, например, сферической или цилиндрической, где операция дивергенции в уравнении (5.1) распространяется на фазовую переменную Ω , под ячейкой d следует понимать пространственно-фазовую ячейку. Все эти положения справедливы и для криволинейных систем координат. Балансные схемы для нестационарного уравнения формулируются точно так же.

Преобразование (расщепление) любой схемы метода баланса в схему метода характеристических трубок и схему распределения полного потока частиц по неосвещенным граням сеточной ячейки проводится точно также, как и для DS n -метода в сферически-симметричной геометрии:

а) Вводятся в ячейке баланса d новые дополнительные сеточные функции полных потоков F_1^h и F_2^h .

б) Из системы уравнений (5.3), (5.4) всегда можно получить уравнение относительно F_2^h , которое имеет вид:

$$\frac{F_2^h - F_1^h}{\Delta\rho} + \bar{\sigma}(\gamma F_2^h + (1-\gamma)F_1^h + \varepsilon) = \bar{Q}I, \quad \Delta\rho = \Delta V / I, \quad (5.7)$$

где γ - весовой коэффициент из интервала $0.5 \leq \gamma \leq 1,0$, а $\varepsilon = \varepsilon(N_{1,j}^h, Q_j^h, \Delta\rho)$ есть величина более высокого порядка малости, чем F^h .

в) Распределение полного потока F_2^h по поверхности S_2 определяется как решение системы уравнений:

$$f_m(N_j^h, Q_j^h) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad \sum c_j N_{2,j}^h = F_2^h \quad (5.8)$$

относительно $N_{2,j}^h$.

В уравнении (5.7) $\Delta\rho$ по геометрическому смыслу есть среднее расстояние, проходимое частицами в ячейке от поверхности S_1 до поверхности S_2 . Формула определения $\Delta\rho$ следует вместе с уравнением (5.7) из сеточного уравнения баланса (5.3) и дополнительных аппроксимационных соотношений (5.4).

Таким образом, исходная схема (5.3)–(5.6) будет расщеплена на две схемы (5.7) и (5.8), а ее реализация на два последовательных этапа. Первый этап – это решение уравнения (5.7) относительно F_2^h . Результатом реализации первого этапа является определение полного потока F_2^h через неосвещенную поверхность S_2^h , а также определение в ячейке d количества выбывших частиц:

$$\bar{\sigma} \sum a_j N_j^h \Delta V = \bar{\sigma}(\gamma F_2^h + (1-\gamma)F_1^h + \varepsilon)\Delta\rho \equiv \bar{Q}\Delta V - (F_2^h - F_1^h). \quad (5.9)$$

Второй этап – это распределение по поверхности S_2 найденного на первом этапе полного потока F_2^h . Распределение является результатом решения системы уравнений (5.8).

Таким образом, выполнив расщепление, любую конечно-разностную схему для уравнения переноса (5.1) можно проанализировать относительно качества определения полного потока F_2^h , исследовав схему (5.7) на положительность, монотонность,

устойчивость, точность аппроксимации и т.д., а затем отдельно провести анализ алгоритма (5.8) распределения полного потока. Следует подчеркнуть, что алгоритм двухэтапной схемы расщепления может оказаться в общем случае далеко не таким изящным, как для расщепленного DS_n-метода.

Выводы и комментарии по главе 2

1. Основным и новым результатом в главе 2 является преобразование разностной схемы DS_n-метода в две схемы, последовательно выполняемые в каждой S_n-ячейке. Это схема для ОДУ относительно полного потока частиц и схема распределения этого потока по неосвещенным граням S_n-ячейки. Таким образом, DS_n-схема преобразована в двухэтапную схему расщепления, которую можно трактовать как схему расщепления по причинам немонотонности DS_n-метода, одна из которых – линейная аппроксимация второго порядка столкновительных членов в (1.1.1), а вторая – линейная аппроксимация второго порядка дополнительных интерполяционных соотношений (DS_n-распределение).
2. Показано, что прямоугольную S_n-ячейку следует рассматривать как ячейку-трубку, а схему 1-го этапа относительно полного потока как схему метода характеристических трубок (ХТ-схему). Распределение полного потока по неосвещенным граням (второй этап) эквивалентно классическому DS_n-распределению. Таким образом, показано, что DS_n-метод в двухэтапной форме является DS_n-методом характеристических трубок на прямоугольных сетках.
3. Непрерывный S_n-метод представлен в дискретной форме и аналогично DS_n-методу преобразован в двухэтапную схему.
4. Расщепление схемы S_n-методов открывает новые возможности для построения методов их коррекции.
5. Рассмотрен математический формализм преобразования разностных схем в двухэтапные схемы расщепления.

**Гл 3. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ТРУБОК НА
ЯЧЕЙКИ-ТРУБКИ ОБЩЕГО ВИДА И ПОСТРОЕНИЕ ДВУХЭТАПНЫХ
DSn-МЕТОДОВ КВАЗИМОНОТОННОГО ТИПА**

**§1 Построение осредненного ОДУ баланса в характеристических ячейках-трубках
общего вида**

Ячейки-трубки с криволинейными торцами

В системе координат μ, r в области $D = \{0 \leq r \leq R, -1 \leq \mu \leq 1\}$ рассмотрим ячейку-трубку W , ограниченную замкнутым контуром Γ с направлением обхода против часовой стрелки (рис.1.1). Контур Γ образован отрезками H_1 и H_2 двух характеристик уравнения переноса и двумя непрерывными криволинейными – торцами Γ_1 и Γ_2 (см. рис.1.1).

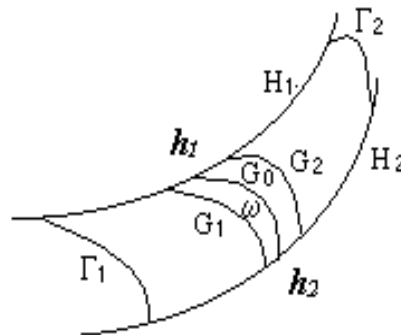


Рис.1.1. Характеристическая ячейка-трубка W в области $\mu > 0$.

На контуре Γ_1 задано граничное условие в виде ограниченной положительной функции

$$N(\mu, r) \Big|_{\Gamma_1} = N_{\Gamma_1}(\mu, r),$$

а в ячейке W задан источник частиц в виде функции

$$S(\mu, r), \quad (\mu, r) \in W$$

с теми же свойствами. Тогда в ячейке-трубке W решение уравнения (1.1.1) вдоль любой характеристики (1.2.3), (1.2.4), начинающейся на контуре Γ_1 и заканчивающейся на

контуре Γ_2 , может быть получено как решение ОДУ (1.2.8). При этом будем считать, что переменная ζ изменяется на каждой характеристике с параметром C от $\zeta = 0$ до

$$\Delta\zeta_c = \mu_2 r_2 - \mu_1 r_1,$$

где точки (μ_1, r_1) и (μ_2, r_2) есть концевые точки данной характеристики на контурах Γ_1 и Γ_2 , соответственно.

Задача состоит в том, чтобы получить ОДУ для функции полного потока, непрерывно изменяющейся вдоль ячейки–трубки W . Независимой переменной в ОДУ будет ξ – средняя длина характеристики от граничного торца Γ_1 до любого внутреннего контура G_0 . Для этого необходимо установить взаимоднозначное соответствие между расстоянием ξ и контуром G_0 , то есть задать внутри ячейки W правило перехода от одного торца к другому. Иначе говоря, требуется определить закон непрерывного заметания ячейки от контура Γ_1 до контура Γ_2 . Выбор правила заметания ячейки позволяет построить ОДУ баланса с однозначно определяемой правой частью S как функцией ξ . Зададим закон заметания ячейки так, чтобы любой внутренний контур G_0 получался пропорциональным делением каждой характеристики, начинающейся на контуре Γ_1 и заканчивающейся на контуре Γ_2 . Контур G_0 получится, если на каждой характеристике, определяемой параметром C (1.2.3), отложить расстояние

$$\zeta_c = \gamma \Delta\zeta_c, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Построим таким способом контуры G_1 и G_2 :

$$\zeta_{1c} = (\gamma - \delta) \Delta\zeta_c \quad \text{для } G_1, \quad \zeta_{2c} = (\gamma + \delta) \Delta\zeta_c \quad \text{для } G_2,$$

где δ – малая величина.

Соотношение баланса частиц, инвариант переноса и среднее расстояние в ячейке-трубке

Рассмотрим внутри ячейки–трубки W область ω , ограниченную контуром G , который образован участками характеристик h_1 , h_2 и торцами G_1 и G_2 . Для вывода

уравнения баланса умножим уравнение (1.1.1) на $r^2 dr d\mu$ и проинтегрируем по области ω :

$$\iint_{\omega} LN(r, \mu) r^2 dr d\mu \equiv \iint_{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mu N) + \frac{\partial}{\partial \mu} (r(1-\mu^2)N) \right] dr d\mu + \iint_{\omega} \sigma(r) N r^2 dr d\mu = \iint_{\omega} S(r) r^2 dr d\mu. \quad (1.1)$$

Применяя формулу Грина, получаем уравнение баланса частиц в области ω :

$$\begin{aligned} \iint_{\omega} LN(r, \mu) r^2 dr d\mu &\equiv \int_G [(1-\mu^2)rNdr - r^2 \mu N d\mu] + \iint_{\omega} \sigma(r) N r^2 dr d\mu = \\ &= \iint_{\omega} S(r) r^2 dr d\mu \quad . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Контурный интеграл в (1.2) есть сумма интегралов:

$$\begin{aligned} J = \int_G (1-\mu^2)rNdr - r^2 \mu N d\mu &= \int_G Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = \int_{G_2} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) - \\ &- \int_{-G_1} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) + \int_{h_1} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) + \int_{h_2} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Знак «-» у G_1 означает противоположное направление обхода при интегрировании.

Из (1.2.3) следует, что на любой характеристике h_1 и h_2

$$d\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) \equiv 0. \quad (1.4)$$

Следовательно,

$$\int_{h_1} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = \int_{h_2} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = 0. \quad (1.4')$$

Таким образом, контурный интеграл (1.3) упрощается:

$$J = \int_{G_2} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) - \int_{-G_1} Nd\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) \quad (1.3')$$

и уравнение баланса (1.1) принимает вид:

$$\Phi_2 - \Phi_1 + \iint_{\omega} \sigma(r) N r^2 dr d\mu = \iint_{\omega} S(r) r^2 dr d\mu, \quad (1.5)$$

где

$$\Phi_2 = \int_{G_2} N d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right), \quad \Phi_1 = \int_{-G_1} N d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) \quad (1.5')$$

есть полные потоки частиц через контуры G_2 и $-G_1$, соответственно.

Введем на контурах G_1 и G_2 средние значения искомой функции \bar{N}_1 и \bar{N}_2 , определив связь между полными потоками Φ и средними значениями \bar{N} соотношениями:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \int_{-G_1} N d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) = \bar{N}_1 \int_{-G_1} d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right), \\ \Phi_2 &\equiv \int_{G_2} N d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) = \bar{N}_2 \int_{G_2} d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Заметим, что интеграл

$$\int_G d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) = 0, \quad (1.7)$$

т. к. под знаком интеграла стоит полный дифференциал, а контур G – замкнутый.

Используя (1.7), получаем равенство

$$\int_{G_2} d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) - \int_{-G_1} d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) = 0, .$$

из которого следует, что величина

$$I \equiv \int_{-G_1} d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) = \int_{G_2} d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) > 0. \quad (1.8)$$

Если в данной трубке построить другой замкнутый контур, заменив торец G_2 на любой другой G^* , то для него, очевидно, будет справедливо равенство аналогичное (1.8).

Поэтому величина I является инвариантом, который естественно назвать инвариантом

переноса, и связь между полными потоками Φ и средними значениями \bar{N} (1.6) можно записать в виде:

$$\bar{N}_1 = \Phi_1 / I, \quad \bar{N}_2 = \Phi_2 / I. \quad (1.6')$$

Инвариант переноса (1.8) для данной характеристической трубки постоянен и не зависит от вида и расположения кривых G_1 и G_2 , образующих сечения трубки в пространстве μ, r . Сечение трубки (ширина трубки) по размерности является площадью. Формула (1.8) является обобщением формулы (2.13), которая была получена в работе [9] для прямолинейных торцов. Точно также обобщается формула среднего расстояния (1.2.6). Среднее расстояние между криволинейными торцами G_1 и G_0 есть

$$\delta\xi = \frac{\delta\omega}{I}. \quad (1.9)$$

Среднее расстояние от торца Γ_1 до G_0 есть

$$\xi = \frac{\Delta W_0}{I}, \quad (1.9')$$

Где ΔW_0 - объем части ячейки, заключенный между Γ_1 и G_0 .

Уравнение баланса, связывающее значения \bar{N}_1 и \bar{N}_2 на контурах G_1 и G_2 , следует из равенств (1.5)-(1.6), (1.6'):

$$(\bar{N}_2 - \bar{N}_1)I + \iint_{\omega} \sigma N r^2 dr d\mu = \int_{\omega} S(r) r^2 dr d\mu. \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) является точным.

Осредненное ОДУ баланса частиц в ячейке-трубке

Применяя к интегральным членам уравнения (1.10) теорему о среднем, получаем:

$$(\bar{N}_2 - \bar{N}_1)I + \sigma \bar{N}_{\omega} \delta\omega = \bar{S}_{\omega} \delta\omega, \quad \delta\omega = \iint_{\omega} r^2 dr d\mu, \quad (1.11)$$

где \bar{N}_ω и \bar{S}_ω – средние значения плотности потока частиц N и источника S в трубке ω , величину σ в ячейке-трубке считаем постоянной.

Разделив соотношение (1.11) на $\delta\xi$, получим разностное уравнение:

$$\frac{\bar{N}_2 - \bar{N}_1}{\delta\xi} + \sigma N_\omega = S_\omega, \quad (1.12)$$

$$\delta\xi = \frac{\delta\omega}{I}, \quad N_\omega = \frac{\iint_\omega N(\mu, r) r^2 dr d\mu}{\iint_\omega r^2 dr d\mu}, \quad S_\omega = \frac{\iint_\omega S(\mu, r) r^2 dr d\mu}{\iint_\omega r^2 dr d\mu}.$$

В уравнении (1.12) $\delta\xi$ есть среднее расстояние, проходимое частицами в ячейке ω .

Устремим δ к 0. Тогда G_1 и G_2 стремятся к G_0 , а \bar{N}_1 и \bar{N}_2 к \bar{N}_0 – осредненному потоку на контуре G_0 . Обозначим

$$\bar{N}_\omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\iint_\omega N(\mu, r) r^2 dr d\mu}{\iint_\omega r^2 dr d\mu}, \quad \bar{S}(\xi) \equiv \bar{S}_\omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\iint_\omega S(\mu, r) r^2 dr d\mu}{\iint_\omega r^2 dr d\mu}, \quad (1.13)$$

$$\bar{N}_\omega = \bar{N}_0 + \rho = \frac{\bar{N}_1 + \bar{N}_2}{2} + \tilde{\rho},$$

где ρ (или $\tilde{\rho}$) – малая поправка. Чтобы оценить эту поправку перейдем к переменным

$$x = r\mu \text{ и } z = \frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2.$$

Якобиан $\frac{D(x, z)}{D(\mu, r)} = \begin{vmatrix} r & \mu \\ -\mu r^2 & (1 - \mu^2)r \end{vmatrix} = r^2$, поэтому

$$\iint_\omega N(\mu, r) r^2 dr d\mu = \iint_\omega N(x, z) dx dz, \quad \iint_\omega r^2 dr d\mu = \iint_\omega dx dz,$$

$$\int_{G_0} N(\mu, r) d\left(\frac{1}{2}(1 - \mu^2)r^2\right) = \int_a^b N(x_0(z), z) dz, \quad a = z|_{h_2}, \quad b = z|_{h_1},$$

$$\rho = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\iint_{\omega} N(x, z) dx dz}{\iint_{\omega} dx dz} - \frac{\int_a^b N(x_0(z), z) dz}{b-a} \right\}. \quad (1.14)$$

Разложение в разности (1.14) функции $N(x, z)$ в ряд по переменным x и z и применение квадратурной формулы средних [19] дает оценку

$$\rho = O((b-a)^2) \equiv O(I^2). \quad (1.14')$$

Таким образом, получаем ОДУ в ячейке–трубке W относительно среднего значения плотности потока:

$$\frac{\partial \bar{N}(\xi)}{\partial \xi} + \sigma(\bar{N}(\xi) + \rho) = \bar{S}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \Delta \xi, \quad \Delta \xi = \frac{\Delta W}{I} = \frac{\iint r^2 dr d\mu}{I}, \quad (1.15)$$

с начальным условием

$$\bar{N}(0) = \bar{N}_{\Gamma_i}. \quad (1.15')$$

Домножим обе части равенств (1.15), (1.15') на I . Учитывая соотношения (1.9), получаем задачу Коши для ОДУ относительно полного потока частиц:

$$\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi} + \sigma(\Phi(\xi) + I\rho) = \bar{S}(\xi)I, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta \xi, \quad (1.16)$$

$$\Phi(0) = \Phi_{\Gamma_i}. \quad (1.16')$$

Для практического использования уравнений (1.15), (1.16) в них следует отбросить погрешности ρ и $I\rho$. В результате мы получаем в ячейке ОДУ баланса частиц относительно приближенных значений \tilde{N} или $\tilde{\Phi}$ и задачу Коши для их решения:

$$\frac{\partial \tilde{N}(\xi)}{\partial \xi} + \sigma \tilde{N}(\xi) = \bar{S}(\xi), \quad \tilde{N}(0) = \tilde{N}_{\Gamma_i}, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta \xi, \quad (1.17)$$

$$\text{или} \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}(\xi)}{\partial \xi} + \sigma \tilde{\Phi}(\xi) = I\bar{S}(\xi), \quad \tilde{\Phi}(0) = \tilde{\Phi}_{\Gamma_i}, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta \xi. \quad (1.18)$$

§2 Sn–ячейка как ячейка-трубка

Прямоугольную Sn–ячейку $d_{p,q}$ (рис.2.1) будем рассматривать как характеристическую трубку W , у которой отрезки характеристик H_1 и H_2 превратились в точки (Sn–трубка). Два освещенных ребра образуют контур Γ_1 , а два неосвещенных – контур Γ_2 . Таким образом, в Sn–ячейке любой внутренний контур Γ^* есть линия, соединяющая точки P_1 и P_2 .

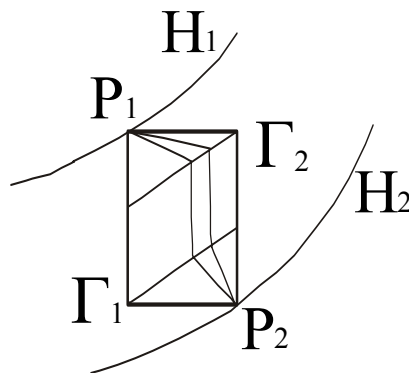


Рис.2.1 Sn–ячейка, характеристики и промежуточные контуры ($\mu > 0$).

Закон перехода от Γ_1 к Γ_2 показан на рис. 2.1, каждый промежуточный контур в ячейке делит характеристики внутри нее в определенном отношении. При этом истинные характеристики в Sn–ячейке заменяются прямыми, соответствующими аппроксимации уравнения переноса в недивергентной форме (2.1.13'). Инвариант переноса и среднее расстояние в Sn–ячейке определяются теми же интегралами (2.7) и (2.8), что и в общем случае.

Получим полные потоки нейтронов через контуры Γ_1 и Γ_2 , используя значения средних потоков на ребрах ячейки, и вычислим длину “средней” характеристики $\Delta\xi$, учитывая прямоугольный вид Sn–ячейки. Из (1.2) и (1.3) следует, что

$$I = \frac{I}{2} \left(1 - \mu_q^2 \right) r_{p+1}^2 - \frac{I}{2} \left(1 - \mu_{q+1}^2 \right) r_p^2,$$

$$\Delta W = \iint_{d_{pq}} r^2 dr d\mu = \frac{1}{3} (r_{p+1}^3 - r_p^3) \Delta \mu_{q+\frac{1}{2}},$$

$$\Delta \xi = \frac{\Delta W}{I} = \frac{2}{3} \frac{(r_{p+1}^3 - r_p^3) \Delta \mu_{q+\frac{1}{2}}}{(1 - \mu_q^2) r_{p+1}^2 - (1 - \mu_{q+1}^2) r_p^2}. \quad (2.1)$$

Формулы для полных потоков $\tilde{\Phi}$ и для средних значений \tilde{N} следуют из соотношений (1.6):

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= \int_{-\Gamma_1} (1 - \mu^2) r N dr - r^2 \mu N d\mu = \frac{1}{2} (1 - \mu_q^2) (r_{p+1}^2 - r_p^2) N_{p+\frac{1}{2},q} + \frac{1}{2} r_p^2 (\mu_{q+1}^2 - \mu_q^2) N_{p,q+\frac{1}{2}} = \\ &= (1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_{p+\frac{1}{2},q} + r_p^2 \mu_{p+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{p+\frac{1}{2}} N_{p,q+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2 &= \int_{\Gamma_2} (1 - \mu^2) r N dr - r^2 \mu N d\mu = \frac{1}{2} (1 - \mu_{q+1}^2) (r_{p+1}^2 - r_p^2) N_{p+\frac{1}{2},q+1} + \frac{1}{2} r_{p+1}^2 (\mu_{q+1}^2 - \mu_q^2) N_{p+1,q+\frac{1}{2}} = \\ &= (1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}} N_{p+\frac{1}{2},q+1} + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{q+\frac{1}{2}} N_{p+1,q+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\tilde{N}_1 = \frac{1}{I} \int_{-\Gamma_1} (1 - \mu^2) r N dr - r^2 \mu N d\mu = \alpha N_{p+\frac{1}{2},q} + \beta N_{p,q+\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} (1 - \mu_q^2) (r_{p+1}^2 - r_p^2)}{I} = \frac{(1 - \mu_q^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{I}, \quad \beta = \frac{\frac{1}{2} r_p^2 (\mu_{q+1}^2 - \mu_q^2)}{I} = \frac{r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{q+\frac{1}{2}}}{I},$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{1}{I} \int_{\Gamma_2} (1 - \mu^2) r N dr - r^2 \mu N d\mu = \alpha N_{p+\frac{1}{2},q+1} + \beta N_{p+1,q+\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

$$\alpha = \frac{(1 - \mu_{q+1}^2) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r_{p+\frac{1}{2}}}{I}, \quad \beta = \frac{r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu_{q+\frac{1}{2}}}{I},$$

$$\alpha + \beta = 1.$$

Знак \sim в дальнейшем будем опускать.

Для S_n -ячейки имеется постановка задачи Коши (1.17), (1.18), выражения для полных потоков на освещенных и неосвещенных торцах, и требуется метод решения ОДУ.

§3 Положительные монотонные и квазимонотонные схемы 2-го порядка точности для ОДУ

В каждой S_n -ячейке требуется решать задачу Коши для ОДУ баланса (1.17), (1.18) вдоль некоторой средней характеристики. Полагая в пределах S_n -ячейки $\sigma(\xi) = \text{const}$, запишем ОДУ и начальное условие в виде

$$\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} + \sigma \varphi(\xi) = S(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq \Delta \xi, \quad S(\xi) \geq 0, \quad (3.1)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \geq 0.$$

Точное решение задачи (3.1) является положительным, а при $S(\xi) = \text{const}$ и монотонным.

Рассмотрим методы численного решения ОДУ (3.1), которые обеспечивают положительность и монотонность или квазимонотонность сеточного решения. Положительной и квазимонотонной является сеточно-аналитическая схема, которая применялась Владимиром в его методе характеристик [24]. Схема [24] требует большого объема вычислений, кроме того, она не консервативна. В работе [9] построена сеточно-аналитическая консервативная схема, практическая точность которой существенно возрастает, но объем вычислений также увеличивается.

К настоящему времени построен ряд схем – положительных, монотонных (или квазимонотонных) 2-го порядка точности и не использующих аналитические решения. В этих методах сетка с шагом h_k по переменной ξ может быть неравномерной:

$$h_k = \xi_k - \xi_{k-1}, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_{\bar{k}} = \Delta \xi.$$

Сеточная функция ϕ_k вводится в концевых узлах, а также может вводиться и в узлах внутри сеточных интервалов. Схемы записываются для одной ячейки. Если используются искусственные ячейки, то шаг искусственной равен шагу той, к которой она пристраивается, поэтому индекс k у h_k можно опустить.

СХЕМА 1. [48]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{h} + \sigma \phi_{k-\frac{1}{2}} = S_{k-\frac{1}{2}} \\ \frac{\phi_{k+\frac{1}{2}} - \phi_{k-\frac{1}{2}}}{h} + \sigma \phi_k = S_k \\ \frac{\phi_{k+\frac{1}{2}} - \phi_k}{h/2} + \sigma \phi_{k+\frac{1}{2}} = S_{k+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

К ячейке $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ пристраивается половина искусственной ячейки $[\xi_k, \bar{\xi}_{k+\frac{1}{2}}]$.

Свойства среды и источники в ней задаются как гладкие продолжения из основной ячейки.

$\bar{\phi}_{k+\frac{1}{2}}, \bar{S}_{k+\frac{1}{2}}$ - поток и правая часть в середине искусственной ячейки, в точке $\bar{\xi}_{k+\frac{1}{2}}$.

Предполагается, что $S_{k-1}, S_{k-\frac{1}{2}}, S_k, \bar{S}_{k+\frac{1}{2}}$ лежат на одной прямой, т.е.

$$S_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(S_k + S_{k-1}), \bar{S}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}S_k - \frac{1}{2}S_{k-1}$$

Граничные условия по ζ задаются на левом конце в виде

$\phi_0 = \phi(0) \geq 0$, поэтому для ячейки $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ ϕ_{k-1} известно. Получаем формулы для расчета $\phi_{k-\frac{1}{2}}, \phi_k$.

$$\left(1 + \frac{3}{2}\sigma h + \sigma^2 h^2 + \frac{\sigma^3 h^3}{2}\right) \phi_{k-\frac{1}{2}} = \left(1 + \sigma h + \frac{\sigma^2 h^2}{2}\right) \phi_{k-1} + S_{k-1} \left(\frac{h}{4} + \frac{\sigma h^2}{2} + \frac{\sigma^2 h^3}{4}\right) + S_k \left(\frac{h}{4} + \frac{\sigma^2 h^3}{4}\right),$$

$$\left(1 + \sigma h + \frac{\sigma^2 h^2}{2}\right) \phi_k = \left(1 + \frac{\sigma h}{2}\right) \phi_{k-\frac{1}{2}} + \frac{h}{4} S_{k-1} + S_k \left(\frac{h}{4} + \frac{\sigma h^2}{2}\right).$$

Видно, что при положительных ϕ_0, S_k, S_{k-1} схема всегда положительна.

При $S=0$ схема монотонна.

Используя формулы для $\phi_{k-\frac{1}{2}}, \phi_k$, можно найти погрешность разностной схемы.

При $S=0$ она имеет порядок не ниже $O(h^2)$.

СХЕМА 2. [48]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{h} + \sigma \phi_{k-\frac{1}{2}} = S_{k-\frac{1}{2}} \\ \frac{\bar{\phi}_{k+\frac{1}{2}} - \phi_{k-\frac{1}{2}}}{h} + \sigma \phi_k = S_k \\ \frac{\bar{\phi}_{k+1} - \phi_k}{h} + \sigma \phi_{k+\frac{1}{2}} = \bar{S}_{k+\frac{1}{2}} \\ \frac{\bar{\phi}_{k+1} - \bar{\phi}_{k+\frac{1}{2}}}{h/2} + \sigma \bar{\phi}_{k=1} = \bar{S}_{k+1} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$S_{k-1}, S_{k-\frac{1}{2}}, S_k, \bar{S}_{k+\frac{1}{2}}, \bar{S}_{k+1}$ - лежат на одной прямой

$$\bar{S}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} S_k + \frac{1}{2} S_{k-1}, \quad S_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (S_k + S_{k-1}), \quad \bar{S}_{k+1} = 2 S_k - S_{k-1}$$

Формулы для расчета $\phi_{k-\frac{1}{2}}, \phi_k$:

$$\begin{aligned} \left(1 + 2\sigma h + 2\sigma^2 h^2 + \sigma^3 h^3 + \frac{\sigma^4 h^4}{2} \right) \phi_{k-\frac{1}{2}} &= \left(1 + \frac{3}{2}\sigma h + \sigma^2 h^2 + \frac{\sigma^3 h^3}{2} \right) \phi_{k-1} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(h + \sigma h^2 + \sigma^2 h^3 + \frac{\sigma^3 h^4}{2} \right) S_{k-1} + \left(\frac{\sigma h^2}{2} + \frac{\sigma^3 h^4}{4} \right) S_k, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{3}{2}\sigma h + \sigma^2 h^2 + \frac{\sigma^3 h^3}{2} \right) \phi_k = \left(1 + \sigma h + \frac{\sigma^2 h^2}{2} \right) \phi_{k-1} + \frac{\sigma h^2}{4} S_{k-1} + \frac{1}{4} (2h + \sigma h^2 + 2\sigma h^3) S_k.$$

Схема положительна и монотонна. При $S=0$ погрешность разностной схемы на границах

ячеек имеет порядок не ниже $O(h^2)$.

СХЕМА 3. [49]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_{k-\frac{1}{2}} - \phi_{k-1}}{h/2} + \sigma \phi_{k-\frac{3}{4}} = S_{k-\frac{3}{4}} \\ \frac{\phi_{k-\frac{1}{4}} - \phi_{k-\frac{3}{4}}}{h/2} + \sigma \phi_{k-\frac{1}{2}} = S_{k-\frac{1}{2}} \\ \frac{\phi_k - \phi_{k-\frac{1}{2}}}{h/2} + \sigma \phi_{k-\frac{1}{4}} = S_{k-\frac{1}{4}} \\ \frac{\phi_k - \phi_{k-\frac{1}{4}}}{h/4} + \sigma \phi_k = S_k \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Предполагается, что S – прямая линия на ячейке. Обозначим балансное значение потока в k -ой ячейке ϕ_k^* ,

$$\phi_k^* = \frac{1}{2} (\phi_{k-\frac{3}{4}} + \phi_{k-\frac{1}{4}}).$$

Формулы для расчета ϕ_k^*, ϕ_k :

$$\begin{aligned} \left(4 + 4\sigma h + 2\sigma^2 h^2 + \frac{\sigma^3 h^3}{2} + \frac{\sigma^4 h^4}{8} \right) \phi_k^* &= \left(4 + 2\sigma h + \frac{\sigma^2 h^2}{2} + \frac{\sigma^3 h^3}{8} \right) \phi_{k-1} + \\ &+ S_k \frac{1}{16} (8h + 10\sigma h^2 + 2\sigma^2 h^2 + \sigma^3 h^4) + S_{k-1} \frac{1}{16} (24h + 14\sigma h^2 + 4\sigma^2 h^3 + \sigma^3 h^4), \\ \left(4 + 4\sigma h + 2\sigma^2 h^2 + \frac{\sigma^3 h^3}{2} + \frac{\sigma^4 h^4}{8} \right) \phi_k &= 4\phi_{k-1} + S_k \frac{1}{8} (\sigma^3 h^4 + 12\sigma h^2 + 3\sigma^2 h^3 + 2h) + \\ &+ S_{k-1} \frac{1}{8} (\sigma^2 h^3 + 4\sigma h^2 + 16h). \end{aligned}$$

Схема положительна и монотонна.

При $S=0$ погрешность разностной схемы и на границах, и в центрах ячеек имеет порядок не ниже $O(h^2)$

Нужно отметить, что для всех схем 1, 2, 3 в формулах для расчета потоков все члены положительны. Это позволяет избежать потерь точности, возможных при вычитании близких чисел. Схемы 1, 2, 3 имеют хорошую практическую точность, но при их реализации требуется большой объем вычислений.

СХЕМА 4. [27]

Трехточечная схема:

$$\begin{cases} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{h} + \sigma \phi_{k-\frac{1}{2}} = S_{k-\frac{1}{2}} \\ \frac{\phi_k - \phi_{k-\frac{1}{2}}}{h/2} + \sigma \phi_k = S_k \end{cases} \quad (3.5)$$

имеет второй порядок точности, она положительна при определенных ограничениях на правую часть. Если $\phi_{k-1}, S_k, S_{k-\frac{1}{2}}$ не отрицательны, то $\phi_k \geq 0$. Если

$$S_{k-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(S_{k-1} + S_k) \text{ и значения } \phi_{k-1}, S_{k-1}, S_k \text{ не отрицательны, то } \phi_{k-\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Схема 4 проста в реализации и экономична.

СХЕМА 4'. [51]

В работе [51] была предложена и исследована трехточечная разностная схема с весовым множителем γ , зависящим от шага сетки h ($0 \leq \gamma(h) \leq 1$).

$$\begin{cases} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{h} + \sigma \phi_{k-\frac{1}{2}} = S_{k-\frac{1}{2}} \\ \frac{\phi_k - \phi_{k-\frac{1}{2}}}{h/2} + \sigma(\gamma \phi_k + (1-\gamma)\phi_{k-\frac{1}{2}}) = \gamma S_k + (1-\gamma)S_{k-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (3.5')$$

Схема имеет второй порядок точности, положительна, монотонна и достаточно экономична.

СХЕМА 5.

Если в каждой ячейке задачу (3.1) расщепить на две: задачу с нулевым начальным условием и ненулевой правой частью и задачу с нулевой правой частью и данным

начальным условием, то искомое решение будет суммой решений первой и второй задачи.

Если для первой задачи в ячейке выбрать аппроксимацию в виде:

$$\frac{\phi'_k - \phi'_{k-1}}{h} + \sigma \frac{\phi'_k + \phi'_{k-1}}{2} = S_{k-\frac{1}{2}},$$

а для второй использовать трехточечную схему, то сеточное решение будет являться суммой сеточных решений, и выражения для ϕ_k и для $\phi_{k-\frac{1}{2}}$ будут иметь вид:

$$\phi_{k-\frac{1}{2}} = \frac{(1 + 0.5\sigma h)\phi_{k-1}}{1 + \sigma h(1 + 0.5\sigma h)} + 0.5h \frac{S_{k-\frac{1}{2}}}{(1 + 0.5\sigma h)}, \quad (3.6)$$

$$\phi_k = \frac{\phi_{k-1}}{1 + \sigma h(1 + 0.5\sigma h)} + h \frac{S_{k-\frac{1}{2}}}{(1 + 0.5\sigma h)}. \quad (3.6')$$

Схема 5 положительна, монотонна, имеет 2-й порядок точности.

Для практического применения рассмотренных схем требуется вычислять значения правой части ОДУ в определенных точках одномерной счетной ячейки на основе ее определения (1.13):

$$\bar{S}(\xi) \equiv \bar{S}_\omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\iint_\omega S(\mu, r) r^2 dr d\mu}{\iint_\omega r^2 dr d\mu}.$$

Поэтому правая часть $S(\mu, r)$ уравнения (1.1.1) должна быть в ячейке известной функцией. Аналогично тому, как это делается в работе [9], $S(\mu, r)$ представляется внутри ячейки балансной прямой линией, которая строится на каждой итерации по известным значениям. При использовании трехточечных схем требуется знать значения правой части в центре и на конце одномерной ячейки. Чтобы гарантировать положительность сеточного решения правую часть лучше всего опять же представить в виде балансной прямой линии теперь уже внутри одномерной ячейки, для этого требуется знать также и S_{k-1} – значение правой части в начале одномерной ячейки. Если используется схема 5, то необходимо

знать только балансное значение правой части в центре ячейки, что значительно упрощает задачу.

§4 Схемы распределения полного потока.

После того как в ячейке решено осредненное ОДУ баланса и получено неотрицательное значение осредненного потока на неосвещенных гранях должны быть найдены значения сеточной функции на неосвещенных ребрах ячейки. Если рассматривать, например, область $\mu > 0$, то в ячейке $d_{p,q}$ нужно определять значения N_{p+1} и N_{q+1} (эту процедуру будем называть распределением полного потока по неосвещенным граням ячейки). Для этого требуются дополнительные соотношения, которые можно строить на основе предположений о поведении функции в счетной ячейке.

В качестве метода распределения полного потока естественно использовать интерполяционные соотношения DSн-метода (2.1.11):

$$N_{p+1,q+\frac{1}{2}} - N_{p+\frac{1}{2},q+1} = N_{p+\frac{1}{2},q} - N_{p,q+\frac{1}{2}} \quad (\text{DSн-распределение}). \quad (4.1)$$

В соотношениях (4.1) предполагается, что все четыре значения функции N :

$$N_{p+1,q+\frac{1}{2}}, \quad N_{p+\frac{1}{2},q+1}, \quad N_{p+\frac{1}{2},q}, \quad N_{p,q+\frac{1}{2}} - \text{ лежат в одной плоскости.}$$

Для построения нового способа распределения, воспользуемся недивергентной формой записи DSн-метода в ячейке (2.1.13') и соответствующими ей прямыми характеристиками. Из средних точек освещенных ребер проведем характеристики (прямые) до пересечения с прямой, проходящей через середины освещенных ребер. Значения функции потока в точках пересечения обозначим N' и N'' (рис.4.1). Относительно функции N в счетной ячейке будем предполагать, что

$$N' - N'' = N_{p+1} - N_{q+1}. \quad (4.2)$$

Введем новую функцию $\Delta N(\xi)$ равную разности значений функции N на этих двух характеристиках (ξ – длина отрезка характеристики), обозначим

$$\begin{aligned}\Delta N(0) &= N_q - N_p \\ \Delta N(\Delta\xi) &= N' - N''\end{aligned}\quad (4.3)$$

Заметим, что величина $\Delta\xi$ равна длине осредненной характеристике в ячейке. Если предполагать правую часть уравнения переноса постоянной в счетной ячейке, то введенная функция $\Delta N(\xi)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{\partial \Delta N(\xi)}{\partial \xi} + \sigma \Delta N(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta\xi, \quad (4.4)$$

$$\Delta N(0) = N_q - N_p.$$

$$\Delta N(\xi) = \Delta N(0) e^{-\sigma \Delta\xi},$$

то есть с учетом (4.2)

$$N_{p+1, q+\frac{1}{2}} - N_{p+\frac{1}{2}, q+1} = N' - N'' = e^{-\sigma \Delta\xi} \cdot \left(N_{p+\frac{1}{2}, q} - N_{p, q+\frac{1}{2}} \right) \quad (\sigma \text{ Sn-распределение}). \quad (4.5)$$

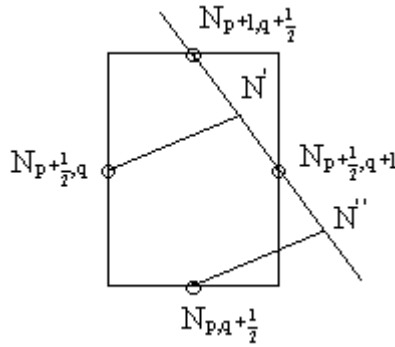


Рис. 4.1 Построение σ Sn-распределения.

Если аппроксимировать правую часть уравнения переноса в счетной ячейке прямой линией $S = Ar + B$, $A = \text{const}$, $B = \text{const}$, то аналогично (4.5) получим

$$N_{p+1, q+\frac{1}{2}} - N_{p+\frac{1}{2}, q+1} = N' - N'' = e^{-\sigma \Delta\xi} \cdot \left(N_{p+\frac{1}{2}, q} - N_{p, q+\frac{1}{2}} \right) + A \frac{\Delta r}{2\sigma} (1 - e^{-\sigma \Delta\xi}). \quad (4.6)$$

Итак, кроме DSn-распределения, использующего известные интерполяционные соотношения, построены два варианта нового σ Sn-распределения. Сочетание разностной схемы для решения ОДУ баланса и способа распределения полного потока по

неосвещенным граням ячейки дает каждый раз новый вариант метода численного решения уравнения переноса (1.1.1).

Выводы к главе 3

1. Обобщены понятия инварианта переноса и среднего расстояния в ячейках–трубках с произвольными торцами, и в частности в S_n -ячейках. Предложен алгоритм заметания ячейки (закон движения контура от освещенного торца к неосвещенному), построена функция источника нейтронов в зависимости от среднего расстояния и ОДУ баланса относительно полного потока в ячейке-трубке.
2. Для решения ОДУ баланса рассмотрены ранее известные и построены новые положительные, монотонные или квазимонотонные разностные схемы 2-го порядка точности.
3. Кроме DS_n -распределения предложен метод распределения полного потока по неосвещенным граням, основанный на решении ОДУ для разности значений сеточной функции на двух «соседних» характеристиках.
4. Для ОДУ в S_n -ячейке-трубке предложена экономичная монотонная 2-го порядка точности разностная схема для определения полного потока. Эта схема и различные алгоритмы распределения полного потока по неосвещенным граням представляют собой новые численные методы (*DS_n -методы характеристических трубок - DS_{nt} -методы*), в которых полностью устранена причина немонотонности, обусловленная DS_n -аппроксимацией столкновительных членов в уравнении переноса и кинетики нейтронов.

Глава 4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ДВУХЭТАПНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ DS_n -МЕТОДОВ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ СФЕРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Наиболее экономичными разностными схемами для решения ОДУ баланса в счетной ячейке представляются трехточечная схема 4 (3.3.5) и схема 5 (3.3.6), (3.3.6'). Для реализации трехточечной схемы требуется рассчитывать правую часть ОДУ в центре и на правом конце одномерной ячейки-трубки. Для схемы 5 правая часть должна быть известна только в центре ячейки. Расчеты показали, что трехточечная схема 4 обеспечивает лучшую точность, поэтому она была выбрана для реализации первого этапа метода, и во всех представленных в работе расчетах именно она применяется для решения ОДУ баланса в ячейке. В зависимости от используемого на втором этапе способа распределения полного потока по неосвещенным граням S_n -ячейки новая разностная двухэтапная схема названа либо DS_{nt} -методом с DS_n -распределением, либо DS_{nt} -методом с σS_n -распределением. В последнем случае имеется в виду и используется первый вариант σS_n -распределения, описанный в §4 главы 3.

Задача численного исследования этих двух новых разностных двухэтапных схем заключается в том, чтобы выяснить их преимущества и недостатки в сравнении со схемой классического DS_n -метода и друг с другом. С этой целью были написаны программы и проведены расчеты для задач с источником и для задач определения критического параметра в сферических системах.

§1 Тестирование новых схем на решении задач с источником

Рассматриваются 4 однообластные сферические задачи [7].

Задача 1. Однородная сфера с параметрами:

$$R=1,5; \quad \sigma(r)=1,0; \quad \beta(r)=1,1; \quad Q(r)=1,0.$$

Задача2. Однородная сфера с параметрами:

$$/ \quad R=4,5; \quad \sigma(r)=1,0; \quad \beta(r)=1,1; \quad Q(r)=1,0 .$$

Задача3. Однородная сфера с параметрами:

$$R=0,5; \quad \sigma(r)=1,0; \quad \beta(r)=1,5; \quad Q(r)=1,0 .$$

Задача 4. Однородная сфера с параметрами:

$$R=1,5; \quad \sigma(r)=1,0; \quad \beta(r)=1,5; \quad Q(r)=1,0 .$$

Эти задачи имеют гладкое аналитическое решение. Они были решены классическим DS_n-методом и характеристическими двухэтапными DS_n-методами на равномерных сетках с начальным числом интервалов – 10 по переменной r и 12 по переменной μ , сетки измельчались в 2, 4 и 8 раз. Так как функция скалярного потока частиц является гладкой, то DS_n-метод во всей области, кроме окрестности $r=0$ имеет второй порядок точности, очень хорошо передает поведение решения, небольшая и незначительная немонотонность возникает только вблизи центра сферы ($r=0$), отрицательные значения потока частиц не появляются. Расчеты показали примерно одинаковую скорость сходимости итераций по правой части (использовались простые итерации) и одинаковую точность методов при решении этих задач (таблицы с результатами расчетов приведены в Приложении). Это доказывает хорошее качество предложенных схем. Можно сделать вывод, что свойства аппроксимации, сходимости и точности DS_{nt}-схем на гладких решениях аналогичны свойствам классического DS_n-метода.

Преимущество новых схем обнаруживается, например, при решении задачи на крупной сетке для однородной сферы, в которой есть значительное поглощение нейтронов, и отсутствует их рассеяние.

Задача 5. Параметры системы:

$$R=20,0; \quad \sigma(r)=10,0; \quad \beta(r)=0,0; \quad Q(r)=1,0 .$$

Решение данной задачи должно быть гладким, но для численного метода имеет значение ее физическая особенность, отсутствие рассеяния и сильное поглощение, т.е. при крупной

сетке большое число средних пробегов нейтронов в счетной ячейке. DSn-метод дает сильно немонотонное решение во всей области. DSnt-метод с DSn-распределением дает немонотонное решение, но немонотонность существенно уменьшается. Это объясняется тем, что одна причина немонотонности устранена, и полный поток на неосвещенных гранях получен положительным. Немонотонность остается только из-за способа распределения этого потока. DSnt-метод с σ Sn-распределением не оставляет никаких осцилляций потока и дает решение полностью соответствующее физическому процессу. На графике представлен скалярный поток на гранях расчетных ячеек $n(r_p) = \sum_q N_{p,q+\frac{1}{2}} \Delta\mu$, решение получено на равномерной сетке (10 интервалов по переменной r , 8 интервалов по переменной μ). Обозначения на графике: DSN - Dsn-метод, CH_DSN и CH_CH - новые схемы, CH_DSN - Dsn-распределение, CH_CH - σ Sn-распределение.

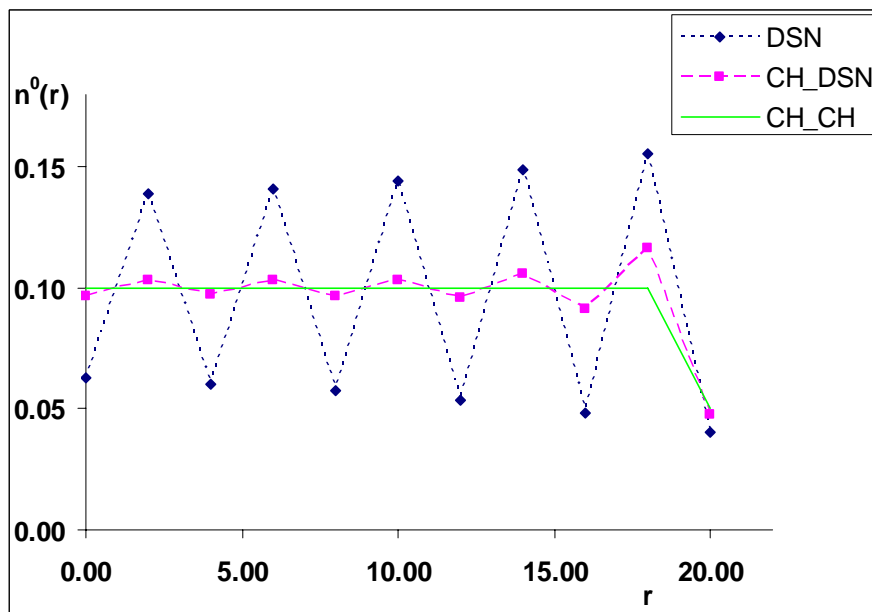


Рис.1.1 Однородная сфера: $\sigma = 10$, $\beta = 0$, $Q = 1$.

При решении многослойных задач переноса с резко меняющимися характеристиками среды DSn-методом часто возникает не физическая немонотонность численного решения (функции $n^0(r)$). Примером этого является тестовая задача Рида [47,12]. Параметры многослойной сферической системы данной задачи приведены в

таблице 1. Задача была решена DSn-методом и новыми двухэтапными методами на равномерных сетках (40 интервалов по переменной r , 8 интервалов по переменной μ с последующим измельчением в 2 и 4 раза). Решение (функция скалярного потока $n^0(r)$), полученное на сетке 40×8 DSn-методом и новыми двухэтапными методами представлено на рис.1.2. Обозначения: DSN - Dsn-метод, CH_DSN и CH_CH - новые схемы, CH_DSN – Dsn-распределение, CH_CH – σ Sn-распределение. DSn-метод дает сильную немонотонность, и даже появляются отрицательные значения скалярного потока. Характеристический метод с DSn-распределением дает немонотонное решение, но немонотонность существенно уменьшается. Характеристический метод с σ Sn-распределением демонстрирует практически полное устранение немонотонности. На рис.1.3 отдельно представлен результат, полученный этим методом.

Таблица 1. **ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА РИДА**

	$0 < r < 2$	$2 < r < 3$	$3 < r < 5$	$5 < r < 6$	$6 < r < 8$
β	0,0	0,0	0,0	0,9	0,9
σ	50,0	5,0	0,0	1,0	1,0
Q	50,0	0,0	0,0	0,7	0,0

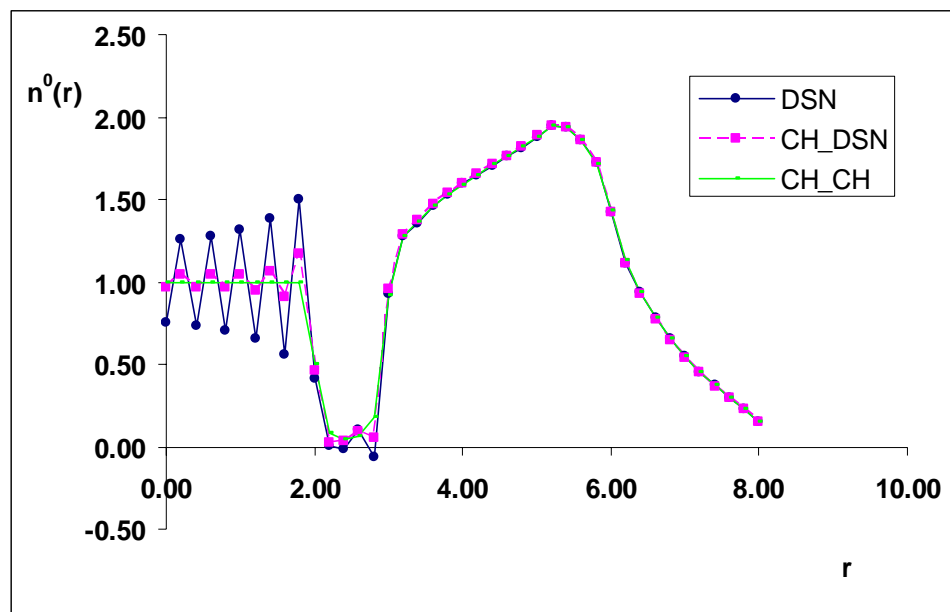


Рис.1.2 Задача Риды, три метода решения.

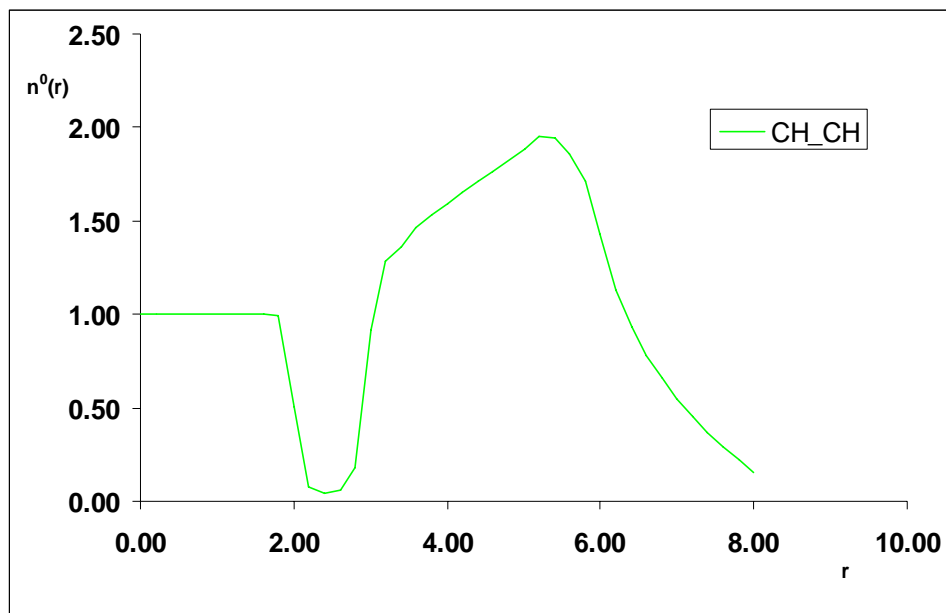


Рис.1.3 Задача Риды, DSnt-метод с σ Sn-распределением.

§ 2 Применение двухэтапных методов к решению задач на определение критических параметров

Разработанные DSnt-методы эффективны при решении различных задач на определение критических параметров сферических систем.

Рассмотрим задачу из работы В.С. Владимирова [44]. Требуется найти наименьшее положительное число α ($\alpha_{кр}$), при котором однородная задача

$$LN(r, \mu) \equiv \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu} + \alpha N = \frac{1}{2} \alpha h \int_{-1}^1 N(r, \mu', t) d\mu'$$

$$N(1, \mu) = 0, \quad \mu < 0, \quad h = 1,724$$

имеет ненулевое решение.

Расчет $\alpha_{кр}$ выполнен DSnt-методом с σ Sn-распределением на равномерной сетке (10 интервалов по r , 10 интервалов по μ), $\alpha_{кр} = 1,280$. Этот результат можно считать хорошим, в работе [44] приводится значение $\alpha_{кр} = 1,279$, полученное методом характеристик и $\alpha_{кр} = 1,280$, полученное методом Бубнова-Галеркина.

Для сравнения двухэтапных методов с Sn-методами рассмотрим задачу определения критического параметра λ слоистой системы из работы [26].

$$LN(r, \mu) \equiv \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mu N) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} N \right) + \left(\sigma(r) + \frac{\lambda}{v} \right) N = S(r),$$

$$S(r) = \frac{\beta(r)}{2} n^0(r) + \frac{Q(r)}{2}, \quad n^0(r) = \int_{-1}^1 N(r, \mu) d\mu, \quad Q(r) \equiv 0,$$

$$N(5.0, \mu) = 0, \quad \mu \leq 0 \quad .$$

Сферически-симметричная система состоит из трех областей, заполненных средой с различными свойствами, параметры приведены в таблице 2.

Таблица 2. **ТРЕХОБЛАСТНАЯ СИСТЕМА** $v=100$, $Q(r)=0$

	$0,0 < r < 1,0$	$1,0 < r < 3,0$	$3,0 < r < 5,0$
σ	1,0	0,1	0,01
β	2,0	0,1	0,01

Для численного расчета выбирались начальные сетки (такие же как в работе [26]).

По переменной r 12 интервалов: $r_0=0,0$; $r_1=0,1$; $r_2=0,4$; $r_3=0,7$; $r_4=0,9$; $r_5=1,0$; $r_6=1,2$; $r_7=2,0$; $r_8=2,8$; $r_9=3,0$; $r_{10}=3,6$; $r_{11}=4,8$; $r_{12}=5,0$.

По переменной μ 10 интервалов: $\mu_0=-1,0$; $\mu_1=-0,9$; $\mu_2=-0,7$; $\mu_3=-0,4$; $\mu_4=-0,1$; $\mu_5=0,0$; $\mu_6=0,1$; $\mu_7=0,4$; $\mu_8=0,7$; $\mu_9=0,9$; $\mu_{10}=1,0$.

Расчеты проводились также на пропорционально измельченных сетках в 2 и в 4 раза , значения λ приведены в таблице 3 (λ_{ε} – экстраполированное значение), результаты для непрерывного Sn-метода (кроме λ_{ε}) взяты для сравнения из работы [26]

Таблица 3. **РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА λ ПРИ ИЗМЕЛЬЧЕНИИ СЕТКИ**

Число интервалов по r и по μ	12 по r , 10 по μ	24 по r , 20 по μ	48 по r , 40 по μ	λ_{ε}
DSn-метод	6,4046	5,1633	4,7803	4,6092
DSnt-метод с DSn-распред .	4,6704	4,6478	4,6450	4,6446
DSnt-метод с σ Sn-распред.	3,6499	4,3770	4,5767	4,6523
Непрерывный Sn-метод [26]	4,4366	4,5859	4,6291	4,6467

Видно, что DSnt-метод с DSn-распределением сходится быстрее остальных методов и превосходит их по точности.

Полученные результаты позволяют заключить, что новые опробованные двухэтапные DSnt-методы не уступают по качеству Sn-методам, они могут быть использованы для решения различных задач на определение критических параметров.

Выводы к главе 4

1. Сравнительный численный анализ новых двухэтапных DSnt-схем с классическим DSn-методом для задач с гладкими решениями (однородные шары), в которых DSn-метод не проявляет немонотонности, показал, что характеристические DSn-схемы по точности ему не уступают.
2. Для задач с гладкими решениями, в которых DSn-метод на крупной сетке дает сильную немонотонность, применение новых схем на той же сетке существенно уменьшает осцилляции и обеспечивает практически 2-й порядок точности. Для сложных многослойных задач новые схемы также дают сеточное решение с высокой практической точностью.
3. Применение новых двухэтапных квазимоноотонных схем для решения задач на собственные значения дает более высокую точность, чем непрерывный и дискретный Sn-метод.
4. Таким образом, устранение одной причины немонотонности приводит на практике к существенному улучшению численных результатов. Можно заключить, что двухэтапные новые схемы являются квазимоноотонными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ DSn-метода с позиций метода характеристических трубок (характеристический анализ). Этот анализ основан на введении в сеточный шаблон DSn-метода *дополнительной сеточной функции полного потока* на неосвещенных гранях прямоугольных Sn-ячеек. В результате DSn-метод в каждой счетной ячейке удается преобразовать в строго последовательное выполнение разностных схем, которые имеют определенный математический и физический смысл.

Выполняемая первой схема – это схема метода характеристических трубок (ХТ-метод [9]) для некоторого осредненного ОДУ относительно полного потока частиц. По этой схеме в DSn-методе рассчитываются физические процессы поглощения нейтронов при их взаимодействии со средой и полный поток нейтронов через неосвещенные грани Sn-ячеек. Таким образом, схема первого этапа – это схема, определяющая *баланс нейтронов* в DSn-методе.

Выполняемая второй схема – это схема распределения найденного полного потока по двум неосвещенным граням. Эта схема в точности эквивалентна дополнительному интерполяционному соотношению DSn-метода, которое вместе с сеточным уравнением баланса DSn-метода дает замкнутую систему двух уравнений для искомых значений сеточной функции в рассчитываемой Sn-ячейке. Схема DSn-распределения полного потока – это аппроксимация и расчет процесса переноса нейтронов в Sn-ячейке без их взаимодействия со средой по известным значениям полных потоков. Таким образом, схема второго этапа – это схема решения кинетического уравнения в Sn-ячейке, трактуемой как полость.

Расщепление DSn-метода на две схемы – это новое свойство метода, которое является наиболее важным на пути построения новых схем – DSn-схем

характеристических трубок (DSnt-схемы). Свойство «расщепления» также показывает глубокую взаимную связь Sn-методов и методов характеристик, которые рассматривались ранее как совершенно разные методы, можно сказать, как альтернативные. Расщепление означает отделение друг от друга двух причин, вызывающих немонотонность DSn-метода. Первая причина – это линейная 2-го порядка точности аппроксимация процессов кинетики частиц в столкновительных членах кинетического уравнения. Вторая причина – это аппроксимация процесса бесстолкновительного переноса частиц в уравнении первого порядка с частными производными.

На основе проведенного анализа DSn-метода (расщепления) в работе развит характеристический подход (подход характеристических трубок) к построению консервативно-характеристических схем на прямоугольных Sn-сетках для сферически-симметричного кинетического уравнения переноса. Главная суть ХТ подхода – это построение в Sn-ячейках ОДУ баланса частиц относительно функции полного потока с *непрерывным изменением аргумента* – расстояния от неосвещенной поверхности Sn-ячейки до освещенной и решение этого ОДУ по монотонным схемам второго порядка точности. Это первый этап в построении и реализации новых разностных схем. На этом этапе в новых схемах полностью устраняется первая причина немонотонности Sn-методов.

На втором этапе положительный полный поток должен быть распределен по неосвещенным граням Sn-ячейки на основе дополнительных аппроксимационных требований. Численные расчеты показывают, что можно успешно использовать линейные схемы распределения (например, DSn- и σ Sn-распределения), хотя теоретически они не являются монотонными. В расчетах по консервативно-характеристическим схемам, построенным на основе ХТ подхода с линейными алгоритмами распределения полного потока, происходит существенное улучшение качества сеточного решения по сравнению с классическим DSn-методом.

Проблема построения полностью положительных и монотонных схем второго порядка точности на S_n -сетках (устранение второй причины немонотонности) полностью сводится к построению положительных и монотонных алгоритмов распределения полного потока частиц по неосвещенным граням прямоугольных S_n -ячеек. Теоретически и практически полное ее решение может быть дано только на основе алгоритмов распределения нелинейного типа. Частичное решение при определенных условиях дают алгоритмы балансной коррекции потока (АКП), которые являются также нелинейными.

В характеристический подход формально укладываются и методы, в которых осредненное ОДУ аппроксимируется не положительными и не монотонными схемами. Тот же DS_n -метод в расщепленной форме можно трактовать как метод характеристического подхода. В двухэтапном DS_n -методе на втором этапе имеются также широкие возможности для построения и применения новых АКП, но этот вопрос в работе не рассматривался.

ВЫВОДЫ

- DS_n -метод преобразован в две последовательно выполняемые схемы. Первая – это разностная схема для ОДУ относительно полного потока на неосвещенных гранях, вторая – это схема его распределения по двум неосвещенным граням. В новой двухэтапной форме классический DS_n -метод представляет собой схему расщепления по двум причинам, обуславливающим его теоретическую и практическую немонотонность.
- Показано, что у DS_n -метода в новой двухэтапной форме схема для ОДУ аналогична простейшей разностной схеме метода характеристических трубок – ХТ-метода, а схема распределения эквивалентна дополнительным интерполяционным соотношениям дискретного S_n -метода – DS_n -метода.

- Сформулирован новый подход к построению разностных схем на S_n -сетках. Суть подхода заключается в том, что разностная схема первого этапа заменяется в каждой ячейке на ОДУ баланса относительно полного потока с непрерывным изменением аргумента в самом ОДУ, в независимом источнике и источнике вторичных нейтронов. В работе такое ОДУ построено.
- Применение положительных монотонных или квазимоноотонных разностных схем 2-го порядка точности для численного решения ОДУ в каждой отдельной S_n -ячейке полностью устраняет первую причину немонотонности DS_n -метода, обусловленную аппроксимацией члена поглощения частиц в кинетическом уравнении.
- Для решения ОДУ в S_n -ячейке предложена экономичная монотонная 2-го порядка точности разностная схема и алгоритмы распределения полного потока по неосвещенным граням, что в совокупности составляет суть новых DS_n -методов характеристических трубок (DS_{nt} -методы или DS_{nt} -схемы). Эффективность новых DS_{nt} -схем подтверждена численными расчетами различных типов задач переноса и кинетики нейтронов для сферических систем.
- Математический формализм обобщения классического DS_n -метода на нестационарные и многомерные кинетические уравнения полностью сохраняется для DS_{nt} -схем.

В заключении хочу выразить благодарность профессору Трощиеву В. Е. за научное руководство, а также руководителю отделения Лопанцевой Г. Б. и ученому секретарю ТРИНИТИ Ежову А. А. за помощь в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для решения задач применяются простые итерации по интегралу рассеяния (их число – number). Начальный поток полагается равным нулю. Критерием сходимости является выполнение неравенства

$$\left| \frac{n^{(0)k}(r) - n^{(0)k-1}(r)}{n^{(0)k-1}(r)} \right| < \varepsilon \quad \text{для } r = r_{p+\frac{1}{2}}, \quad p = 0, \dots, p-1, \quad \varepsilon = 10^{-6}$$

Для однородных сферических задач, сосчитанных на равномерных пропорционально измельченных сетках, приводятся таблицы значений функций

$$n^{(0)}(r) = \int_{-1}^1 N(r, \mu) d\mu$$

$$n^{(1)}(r) = \int_{-1}^1 \mu N(r, \mu) d\mu$$

на гранях ячеек после первой и последней итерации, таблицы значений функции $n^{(0)}(r)$ в центрах ячеек для 10-ти интервалов по r (при измельчении сетки это усредненное значение по объему нескольких ячеек)

Аналитически рассчитывается значение выходящего потока после 1-й итерации (AnOut).

Для этого решается задача

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} + \sigma N = \frac{Q}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq 2R\mu$$

$$N(0) = 0$$

и вычисляется

$$n^{(1)}(R) = \int_0^1 \mu N(R, \mu) d\mu = \frac{Q}{2\sigma} \int_0^1 \mu d\mu - \frac{Q}{2\sigma} \int_0^1 \mu e^{-2\sigma R\mu} d\mu =$$

$$= \frac{Q}{4\sigma} \left[1 + \frac{e^{-2\sigma R}}{\sigma R} + \frac{e^{-2\sigma R}}{2\sigma^2 R^2} - \frac{1}{2\sigma^2 R^2} \right]$$

Значение AnOut можно сравнить со значением выходящего потока, посчитанным численно после 1-й итерации.

Кроме этого приводится число частиц в системе на 1-й итерации (Pnum1I), значение выходящего потока на последней итерации (OutE), число частиц в системе, посчитанное «по ячейкам» (PnumE) и посчитанное по аналитической формуле с использованием численно полученного значения выходящего потока (PnumE1), и разность между ними (Delta)

Задача1. Однородная сфера с параметрами:

$$R=1.5; \quad \sigma(r)=1.; \quad \beta(r)=1.1; \quad Q(r)=1.$$

Результаты расчетов. DS_n-метод.

Сетка задачи: 10 интервалов по r, 12 интервалов по μ

number=37

-----After the First Iteration-----

AnOut= .205508237E+00 PnumlI= .663867142E+00

-----After the Last Iteration-----

PnumE= .209793138E+01 PnumE1= .209791775E+01 Delta= .136293761E-04

OutE= .593240789E+00

p	r _p	1-я итерация		последняя итерация	
		n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p	n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p
0	0.00000E+00	7.682809520E-01	-1.578056260E-16	2.940663590E+00	-2.938865510E-16
1	1.50000E-01	7.779244200E-01	1.134486570E-02	2.970698880E+00	6.477829010E-02
2	3.00000E-01	7.660371870E-01	2.278789610E-02	2.907742640E+00	1.294125530E-01
3	4.50000E-01	7.630005670E-01	3.498429460E-02	2.838084510E+00	1.933972110E-01
4	6.00000E-01	7.406210140E-01	4.837554300E-02	2.699452300E+00	2.564245750E-01
5	7.50000E-01	7.272818330E-01	6.341827380E-02	2.555034350E+00	3.181638620E-01
6	9.00000E-01	6.890205440E-01	8.092691500E-02	2.336769220E+00	3.782492790E-01
7	1.05000E+00	6.613555340E-01	1.015494880E-01	2.119331310E+00	4.363627860E-01
8	1.20000E+00	5.909721040E-01	1.271068850E-01	1.800298210E+00	4.919970230E-01
9	1.35000E+00	5.343574040E-01	1.590114570E-01	1.497350190E+00	5.447749760E-01
10	1.50000E+00	3.416771870E-01	2.049479370E-01	9.341113970E-01	5.932407890E-01

p	r _{p-1/2}	n ⁽⁰⁾ _{p-1/2}	
		1-я итер.	последняя итер.
1	7.50000E-02	7.731026860E-01	2.955681230E+00
2	2.25000E-01	7.719808040E-01	2.939220760E+00
3	3.75000E-01	7.645188770E-01	2.872913580E+00
4	5.25000E-01	7.518107910E-01	2.768768400E+00
5	6.75000E-01	7.339514240E-01	2.627243330E+00
6	8.25000E-01	7.081511880E-01	2.445901790E+00
7	9.75000E-01	6.751880390E-01	2.228050260E+00
8	1.12500E+00	6.261638190E-01	1.959814760E+00
9	1.27500E+00	5.626647540E-01	1.648824200E+00
10	1.42500E+00	4.380172960E-01	1.215730790E+00

DSn method Task 1

Сетка задачи: 80 интервалов по r, 96 интервалов по μ

number= 36 Neg= 0

sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 96

-----After the First Iteration-----

AnOut= .205508237E+00 PnumlI= .662626323E+00

-----After the Last Iteration-----

PnumE= .208385386E+01 PnumE1= .208383574E+01 Delta= .181242416E-04

Output flow= .592614922E+00

p	r _p	1-я итерация		последняя итерация	
		n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p	n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p
0	0.00000E+00	7.756916560E-01	4.775029660E-16	2.973958550E+00	1.490866080E-15
1	1.87500E-02	7.766648100E-01	1.398886050E-03	2.979214590E+00	8.110346790E-03

2	3.75000E-02	7.765003960E-01	2.793349290E-03	2.978337890E+00	1.622308850E-02
3	5.62500E-02	7.765605400E-01	4.190044900E-03	2.977879210E+00	2.433411290E-02
4	7.50000E-02	7.762517820E-01	5.588529960E-03	2.975742500E+00	3.244343960E-02
5	9.37500E-02	7.761081410E-01	6.989914760E-03	2.973697390E+00	4.055020100E-02
6	1.12500E-01	7.756796340E-01	8.394672790E-03	2.970467670E+00	4.865390050E-02
7	1.31250E-01	7.753907750E-01	9.803615340E-03	2.967186130E+00	5.675384800E-02
8	1.50000E-01	7.748388660E-01	1.121737690E-02	2.962854150E+00	6.484946060E-02
9	1.68750E-01	7.744164510E-01	1.263670820E-02	2.958412680E+00	7.294008790E-02
10	1.87500E-01	7.737384050E-01	1.406229720E-02	2.952973640E+00	8.102512340E-02
11	2.06250E-01	7.731852430E-01	1.549488070E-02	2.947398290E+00	8.910393060E-02
12	2.25000E-01	7.723785370E-01	1.693517710E-02	2.940849690E+00	9.717589340E-02
13	2.43750E-01	7.716945660E-01	1.838392520E-02	2.934151530E+00	1.052403810E-01
14	2.62500E-01	7.707564590E-01	1.984186810E-02	2.926491460E+00	1.132967730E-01
15	2.81250E-01	7.699402110E-01	2.130975510E-02	2.918675540E+00	1.213444410E-01
16	3.00000E-01	7.688675240E-01	2.278835430E-02	2.909901930E+00	1.293827610E-01
17	3.18750E-01	7.679165520E-01	2.427843210E-02	2.900970240E+00	1.374111060E-01
18	3.37500E-01	7.667055220E-01	2.578078430E-02	2.891080550E+00	1.454288480E-01
19	3.56250E-01	7.656165220E-01	2.729619960E-02	2.881033130E+00	1.534353610E-01
20	3.75000E-01	7.642627080E-01	2.882550600E-02	2.870024130E+00	1.614300130E-01
21	3.93750E-01	7.630315670E-01	3.036952020E-02	2.858859670E+00	1.694121770E-01
22	4.12500E-01	7.615298070E-01	3.192910680E-02	2.846727500E+00	1.773812190E-01
23	4.31250E-01	7.601516480E-01	3.350511540E-02	2.834443680E+00	1.853365080E-01
24	4.50000E-01	7.584960730E-01	3.509845190E-02	2.821183910E+00	1.932774090E-01
25	4.68750E-01	7.569653150E-01	3.671000350E-02	2.807777760E+00	2.012032880E-01
26	4.87500E-01	7.551493820E-01	3.834072170E-02	2.793385560E+00	2.091135050E-01
27	5.06250E-01	7.534597950E-01	3.999153540E-02	2.778853600E+00	2.170074250E-01
28	5.25000E-01	7.514762890E-01	4.166344630E-02	2.763323680E+00	2.248844040E-01
29	5.43750E-01	7.496209630E-01	4.335742940E-02	2.747661900E+00	2.327438060E-01
30	5.62500E-01	7.474619000E-01	4.507454190E-02	2.730988350E+00	2.405849800E-01
31	5.81250E-01	7.454330990E-01	4.681581070E-02	2.714191920E+00	2.484072860E-01
32	6.00000E-01	7.430894920E-01	4.858235580E-02	2.696367700E+00	2.562100710E-01
33	6.18750E-01	7.408783940E-01	5.037526440E-02	2.678430510E+00	2.639926900E-01
34	6.37500E-01	7.383399790E-01	5.219572840E-02	2.659446970E+00	2.717544820E-01
35	6.56250E-01	7.359364660E-01	5.404490480E-02	2.640361310E+00	2.794947980E-01
36	6.75000E-01	7.331915650E-01	5.592406830E-02	2.620208090E+00	2.872129690E-01
37	6.93750E-01	7.305842130E-01	5.783445450E-02	2.599964800E+00	2.949083390E-01
38	7.12500E-01	7.276197680E-01	5.977743080E-02	2.578630020E+00	3.025802310E-01
39	7.31250E-01	7.247959080E-01	6.175432020E-02	2.557218740E+00	3.102279810E-01
40	7.50000E-01	7.215974180E-01	6.376659290E-02	2.534688950E+00	3.178509020E-01
41	7.68750E-01	7.185428860E-01	6.581566980E-02	2.512097620E+00	3.254483220E-01
42	7.87500E-01	7.150939170E-01	6.790313870E-02	2.488356860E+00	3.330195430E-01
43	8.06250E-01	7.117924520E-01	7.003053430E-02	2.464570670E+00	3.405638820E-01
44	8.25000E-01	7.080741130E-01	7.219958030E-02	2.439599590E+00	3.480806250E-01
45	8.43750E-01	7.045071080E-01	7.441194290E-02	2.414600670E+00	3.555690770E-01
46	8.62500E-01	7.004980370E-01	7.666950030E-02	2.388376750E+00	3.630285080E-01
47	8.81250E-01	6.966445980E-01	7.897406600E-02	2.362144540E+00	3.704582080E-01
48	9.00000E-01	6.923205090E-01	8.132769500E-02	2.334641360E+00	3.778574260E-01
49	9.18750E-01	6.881565990E-01	8.373237190E-02	2.307151010E+00	3.852254340E-01
50	9.37500E-01	6.834890800E-01	8.619036070E-02	2.278336030E+00	3.925614580E-01
51	9.56250E-01	6.789868830E-01	8.870384590E-02	2.249557510E+00	3.998647470E-01
52	9.75000E-01	6.739434770E-01	9.127533070E-02	2.219392680E+00	4.071344970E-01
53	9.93750E-01	6.690708280E-01	9.390723210E-02	2.189289970E+00	4.143699320E-01
54	1.01250E+00	6.636132410E-01	9.660233920E-02	2.157728440E+00	4.215702120E-01
55	1.03130E+00	6.583324830E-01	9.936334340E-02	2.126257670E+00	4.287345280E-01
56	1.05000E+00	6.524156820E-01	1.021933720E-01	2.093242530E+00	4.358619940E-01

57	1.06880E+00	6.466823340E-01	1.050954440E-01	2.060349940E+00	4.429517630E-01
58	1.08750E+00	6.402525010E-01	1.080730940E-01	2.025810770E+00	4.500028960E-01
59	1.10630E+00	6.340134450E-01	1.111297360E-01	1.991429780E+00	4.570144920E-01
60	1.12500E+00	6.270054710E-01	1.142694040E-01	1.955278510E+00	4.639855430E-01
61	1.14380E+00	6.201964030E-01	1.174959940E-01	1.919325640E+00	4.709150870E-01
62	1.16250E+00	6.125302060E-01	1.208141590E-01	1.881450280E+00	4.778020270E-01
63	1.18130E+00	6.050720080E-01	1.242283960E-01	1.843819230E+00	4.846453170E-01
64	1.20000E+00	5.966471120E-01	1.277441440E-01	1.804074650E+00	4.914437440E-01
65	1.21880E+00	5.884404880E-01	1.313666620E-01	1.764627470E+00	4.981961580E-01
66	1.23750E+00	5.791276530E-01	1.351024140E-01	1.722820900E+00	5.049011880E-01
67	1.25630E+00	5.700448520E-01	1.389576500E-01	1.681374160E+00	5.115575380E-01
68	1.27500E+00	5.596724840E-01	1.429402160E-01	1.637241290E+00	5.181636240E-01
69	1.29380E+00	5.495438540E-01	1.470576960E-01	1.593543370E+00	5.247179500E-01
70	1.31250E+00	5.378743770E-01	1.513198740E-01	1.546706310E+00	5.312186170E-01
71	1.33130E+00	5.264650110E-01	1.557362120E-01	1.500397350E+00	5.376638390E-01
72	1.35000E+00	5.131499640E-01	1.603193860E-01	1.450283470E+00	5.440512370E-01
73	1.36880E+00	5.001153000E-01	1.650816540E-01	1.400818230E+00	5.503785790E-01
74	1.38750E+00	4.845984880E-01	1.700403960E-01	1.346482240E+00	5.566426790E-01
75	1.40630E+00	4.693885860E-01	1.752124160E-01	1.292961260E+00	5.628405570E-01
76	1.42500E+00	4.506525820E-01	1.806238770E-01	1.232611530E+00	5.689674690E-01
77	1.44380E+00	4.322615810E-01	1.863000720E-01	1.173332150E+00	5.750189940E-01
78	1.46250E+00	4.078917060E-01	1.922885220E-01	1.102548830E+00	5.809864580E-01
79	1.48130E+00	3.839329140E-01	1.986351430E-01	1.033319370E+00	5.868618140E-01
80	1.50000E+00	3.416312000E-01	2.054994120E-01	9.285611230E-01	5.926149220E-01

l	$r_{l-1/2}$	$n_{p-1/2}^{(0)}$, 1-я итер.	$n_{p-1/2}^{(0)}$, последняя итер.
1	7.50000E-02	7.756524620E-01	2.969923690E+00
2	2.25000E-01	7.716113130E-01	2.933790480E+00
3	3.75000E-01	7.634393160E-01	2.862825870E+00
4	5.25000E-01	7.505775000E-01	2.756052040E+00
5	6.75000E-01	7.321812690E-01	2.612849950E+00
6	8.25000E-01	7.068940230E-01	2.432099350E+00
7	9.75000E-01	6.724916210E-01	2.211626780E+00
8	1.12500E+00	6.250710050E-01	1.946953700E+00
9	1.27500E+00	5.566594420E-01	1.627432850E+00
10	1.42500E+00	4.417659860E-01	1.212807670E+00

Результаты расчетов. Характеристический метод с DSn -распределением.

Сетка задачи: 10 интервалов по r , 12 интервалов по μ

```

number= 36
sig=.10000E+01 sigs=.11000E+01 N_u= 12
-----After the First Iteration-----
AnOut=.205508237E+00 PnumlI=.663836359E+00
-----After the Last Iteration-----
PnumE=.209367380E+01 PnumEl=.209365510E+01 Delta=.186980782E-04
OutE= .593051338E+00

```

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$	$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$
0	0.00000E+00	7.676101600E-01	-1.454287810E-16	2.951793320E+00	-3.866264950E-16
1	1.50000E-01	7.777502600E-01	1.135237600E-02	2.982671060E+00	6.484099000E-02
2	3.00000E-01	7.660144560E-01	2.278673250E-02	2.918117480E+00	1.295239260E-01
3	4.50000E-01	7.631628460E-01	3.497791410E-02	2.846561710E+00	1.935218220E-01

4	6.00000E-01	7.408872210E-01	4.836413980E-02	2.706430540E+00	2.565429290E-01
5	7.50000E-01	7.275482100E-01	6.337260920E-02	2.560293830E+00	3.182695440E-01
6	9.00000E-01	6.890868490E-01	8.086801360E-02	2.340556410E+00	3.783284270E-01
7	1.05000E+00	6.611849940E-01	1.014736090E-01	2.121646650E+00	4.364070080E-01
8	1.20000E+00	5.908187850E-01	1.270438650E-01	1.801583450E+00	4.919871730E-01
9	1.35000E+00	5.339790750E-01	1.589249570E-01	1.496982640E+00	5.447025470E-01
10	1.50000E+00	3.415979840E-01	2.049616180E-01	9.326634340E-01	5.930513380E-01

l	$r_{l-1/2}$	$n_{p-1/2}^{(0)}$, 1-я итер.	$n_{p-1/2}^{(0)}$, последняя итер.
1	7.50000E-02	7.729524800E-01	2.968230430E+00
2	2.25000E-01	7.720155600E-01	2.950166710E+00
3	3.75000E-01	7.645744240E-01	2.880038010E+00
4	5.25000E-01	7.518783730E-01	2.772950340E+00
5	6.75000E-01	7.342659040E-01	2.629704370E+00
6	8.25000E-01	7.083663160E-01	2.446363850E+00
7	9.75000E-01	6.754396270E-01	2.226981150E+00
8	1.12500E+00	6.262011220E-01	1.956508970E+00
9	1.27500E+00	5.629387900E-01	1.644001680E+00
10	1.42500E+00	4.373992390E-01	1.206081290E+00

Char method and DS_n distribution Task 1

Сетка задачи: 80 интервалов по r , 96 интервалов по μ

```

number=      36  Neg=      0
sig= .10000E+01  sigs= .11000E+01  N_u= 96
-----After the First Iteration-----
AnOut= .205508237E+00  PnumlI= .662627313E+00
-----After the Last Iteration-----
PnumE= .208380406E+01  PnumE1= .208378595E+01  Delta= .181122127E-04
Output flow= .592612709E+00

```

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$	$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$
0	0.00000E+00	7.756947140E-01	5.123659950E-16	2.974261440E+00	1.502334900E-15
1	1.87500E-02	7.766779210E-01	1.398817570E-03	2.979564500E+00	8.110560680E-03
2	3.75000E-02	7.765169710E-01	2.793095650E-03	2.978693260E+00	1.622356860E-02
3	5.62500E-02	7.765783210E-01	4.189657760E-03	2.978226550E+00	2.433481280E-02
4	7.50000E-02	7.762700000E-01	5.588033310E-03	2.976078130E+00	3.244433030E-02
5	9.37500E-02	7.761265250E-01	6.989322300E-03	2.974020120E+00	4.055126000E-02
6	1.12500E-01	7.756980610E-01	8.393994060E-03	2.970777600E+00	4.865510900E-02
7	1.31250E-01	7.754092090E-01	9.802855860E-03	2.967483550E+00	5.675518970E-02
8	1.50000E-01	7.748572470E-01	1.121654070E-02	2.963139670E+00	6.485092150E-02
9	1.68750E-01	7.744347420E-01	1.263579720E-02	2.958686720E+00	7.294165590E-02
10	1.87500E-01	7.737565140E-01	1.406131340E-02	2.953236800E+00	8.102678770E-02
11	2.06250E-01	7.732030890E-01	1.549382530E-02	2.947650900E+00	8.910568170E-02
12	2.25000E-01	7.723959890E-01	1.693405270E-02	2.941092270E+00	9.717772260E-02
13	2.43750E-01	7.717115090E-01	1.838273490E-02	2.934384310E+00	1.052422810E-01
14	2.62500E-01	7.707727460E-01	1.984061750E-02	2.926714860E+00	1.132987350E-01
15	2.81250E-01	7.699557230E-01	2.130845130E-02	2.918889810E+00	1.213464570E-01
16	3.00000E-01	7.688821300E-01	2.278700720E-02	2.910107460E+00	1.293848240E-01
17	3.18750E-01	7.679301630E-01	2.427705230E-02	2.901167310E+00	1.374132080E-01
18	3.37500E-01	7.667180590E-01	2.577938430E-02	2.891269630E+00	1.454309820E-01
19	3.56250E-01	7.656279560E-01	2.729479140E-02	2.881214560E+00	1.534375190E-01
20	3.75000E-01	7.642730380E-01	2.882410150E-02	2.870198410E+00	1.614321900E-01
21	3.93750E-01	7.630408350E-01	3.036812900E-02	2.859027220E+00	1.694143680E-01
22	4.12500E-01	7.615380960E-01	3.192773750E-02	2.846888770E+00	1.773834180E-01

23	4.31250E-01	7.601590600E-01	3.350377390E-02	2.834599100E+00	1.853387130E-01
24	4.50000E-01	7.585027510E-01	3.509714300E-02	2.821333950E+00	1.932796150E-01
25	4.68750E-01	7.569713820E-01	3.670872900E-02	2.807922710E+00	2.012054920E-01
26	4.87500E-01	7.551549840E-01	3.833948240E-02	2.793525780E+00	2.091157040E-01
27	5.06250E-01	7.534650120E-01	3.999032920E-02	2.778989310E+00	2.170096170E-01
28	5.25000E-01	7.514812130E-01	4.166227050E-02	2.763455120E+00	2.248865860E-01
29	5.43750E-01	7.496255900E-01	4.335628000E-02	2.747789100E+00	2.327459750E-01
30	5.62500E-01	7.474662420E-01	4.507341640E-02	2.731111470E+00	2.405871340E-01
31	5.81250E-01	7.454370850E-01	4.681470680E-02	2.714310980E+00	2.484094230E-01
32	6.00000E-01	7.430930900E-01	4.858127320E-02	2.696482830E+00	2.562121880E-01
33	6.18750E-01	7.408815390E-01	5.037420270E-02	2.678541740E+00	2.639947850E-01
34	6.37500E-01	7.383426720E-01	5.219468880E-02	2.659554550E+00	2.717565520E-01
35	6.56250E-01	7.359387220E-01	5.404388740E-02	2.640465300E+00	2.794968420E-01
36	6.75000E-01	7.331934430E-01	5.592307380E-02	2.620308680E+00	2.872149830E-01
37	6.93750E-01	7.305857870E-01	5.783348140E-02	2.600062120E+00	2.949103220E-01
38	7.12500E-01	7.276210910E-01	5.977647740E-02	2.578724210E+00	3.025821810E-01
39	7.31250E-01	7.247969990E-01	6.175338320E-02	2.557309800E+00	3.102298960E-01
40	7.50000E-01	7.215982610E-01	6.376567040E-02	2.534776940E+00	3.178527800E-01
41	7.68750E-01	7.185434160E-01	6.581475970E-02	2.512182560E+00	3.254501620E-01
42	7.87500E-01	7.150941350E-01	6.790224060E-02	2.488438900E+00	3.330213420E-01
43	8.06250E-01	7.117923180E-01	7.002964680E-02	2.464649770E+00	3.405656380E-01
44	8.25000E-01	7.080737320E-01	7.219870310E-02	2.439675920E+00	3.480823360E-01
45	8.43750E-01	7.045064840E-01	7.441107320E-02	2.414674250E+00	3.555707420E-01
46	8.62500E-01	7.004972140E-01	7.666863640E-02	2.388447670E+00	3.630301250E-01
47	8.81250E-01	6.966435240E-01	7.897320490E-02	2.362212720E+00	3.704597740E-01
48	9.00000E-01	6.923191410E-01	8.132683620E-02	2.334706890E+00	3.778589400E-01
49	9.18750E-01	6.881549540E-01	8.373151370E-02	2.307213900E+00	3.852268940E-01
50	9.37500E-01	6.834872630E-01	8.618950180E-02	2.278396440E+00	3.925628610E-01
51	9.56250E-01	6.789848130E-01	8.870298320E-02	2.249615300E+00	3.998660920E-01
52	9.75000E-01	6.739411750E-01	9.127446350E-02	2.219447990E+00	4.071357810E-01
53	9.93750E-01	6.690682760E-01	9.390635820E-02	2.189342680E+00	4.143711530E-01
54	1.01250E+00	6.636104930E-01	9.660145740E-02	2.157778660E+00	4.215713670E-01
55	1.03130E+00	6.583294850E-01	9.936245140E-02	2.126305390E+00	4.287356150E-01
56	1.05000E+00	6.524124880E-01	1.021924690E-01	2.093287820E+00	4.358630110E-01
57	1.06880E+00	6.466788930E-01	1.050945280E-01	2.060392660E+00	4.429527070E-01
58	1.08750E+00	6.402488740E-01	1.080721640E-01	2.025851050E+00	4.500037630E-01
59	1.10630E+00	6.340095720E-01	1.111287910E-01	1.991467440E+00	4.570152800E-01
60	1.12500E+00	6.270014210E-01	1.142684430E-01	1.955313750E+00	4.639862500E-01
61	1.14380E+00	6.201921070E-01	1.174950140E-01	1.919358310E+00	4.709157080E-01
62	1.16250E+00	6.125257420E-01	1.208131620E-01	1.881480440E+00	4.778025590E-01
63	1.18130E+00	6.050673000E-01	1.242273790E-01	1.843846700E+00	4.846457560E-01
64	1.20000E+00	5.966422460E-01	1.277431090E-01	1.804099580E+00	4.914440870E-01
65	1.21880E+00	5.884353780E-01	1.313656060E-01	1.764649640E+00	4.981964000E-01
66	1.23750E+00	5.791224000E-01	1.351013410E-01	1.722840480E+00	5.049013240E-01
67	1.25630E+00	5.700393560E-01	1.389565590E-01	1.681390910E+00	5.115575650E-01
68	1.27500E+00	5.596668650E-01	1.429391090E-01	1.637255280E+00	5.181635360E-01
69	1.29380E+00	5.495379950E-01	1.470565740E-01	1.593554200E+00	5.247177400E-01
70	1.31250E+00	5.378684240E-01	1.513187430E-01	1.546714180E+00	5.312182790E-01
71	1.33130E+00	5.264588250E-01	1.557350720E-01	1.500401920E+00	5.376633660E-01
72	1.35000E+00	5.131437260E-01	1.603182460E-01	1.450285030E+00	5.440506210E-01
73	1.36880E+00	5.001088450E-01	1.650805180E-01	1.400816400E+00	5.503778130E-01
74	1.38750E+00	4.845920540E-01	1.700392770E-01	1.346477340E+00	5.566417530E-01
75	1.40630E+00	4.693819670E-01	1.752113200E-01	1.292952820E+00	5.628394610E-01
76	1.42500E+00	4.506461220E-01	1.806228290E-01	1.232599940E+00	5.689661890E-01
77	1.44380E+00	4.322550090E-01	1.862990850E-01	1.173316780E+00	5.750175180E-01

78	1.46250E+00	4.078856210E-01	1.922876430E-01	1.102530360E+00	5.809847660E-01
79	1.48130E+00	3.839269100E-01	1.986344010E-01	1.033296830E+00	5.868598870E-01
80	1.50000E+00	3.416272400E-01	2.054989720E-01	9.285366340E-01	5.926127090E-01

l	$r_{l-1/2}$	$n_{p-1/2}^{(0)}$, 1-я итер.	$n_{p-1/2}^{(0)}$, последняя итер.
1	7.50000E-02	7.756691850E-01	2.970215870E+00
2	2.25000E-01	7.716243200E-01	2.933984480E+00
3	3.75000E-01	7.634460440E-01	2.862948010E+00
4	5.25000E-01	7.505804950E-01	2.756127800E+00
5	6.75000E-01	7.321831510E-01	2.612892820E+00
6	8.25000E-01	7.068957490E-01	2.432115930E+00
7	9.75000E-01	6.724937190E-01	2.211619390E+00
8	1.12500E+00	6.250736110E-01	1.946920700E+00
9	1.27500E+00	5.566618460E-01	1.627366660E+00
10	1.42500E+00	4.417624160E-01	1.212681160E+00

Результаты расчетов. Характеристический метод с σS_n -распределением.

Сетка задачи: 10 интервалов по r , 12 интервалов по μ

```

number=      36
sig= .10000E+01  sigs= .11000E+01  N_u= 12
-----After the First Iteration-----
AnOut= .205508237E+00PnumlI= .662988399E+00
-----After the Last Iteration-----
PnumE=.208295720E+01 PnumEl=.208293968E+01  Delta=.175270734E-04
OutE=.592575097E+00

```

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$	$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$
0	0.000000000E+00	7.682513950E-01	-1.076206180E-16	2.932779940E+00	-6.049577070E-16
1	1.500000000E-01	7.742914500E-01	1.142333930E-02	2.954631160E+00	6.472346310E-02
2	3.000000000E-01	7.665312510E-01	2.292913720E-02	2.899501170E+00	1.292922860E-01
3	4.500000000E-01	7.592844490E-01	3.522282620E-02	2.821378700E+00	1.931873680E-01
4	6.000000000E-01	7.417934140E-01	4.867801170E-02	2.693657170E+00	2.561313130E-01
5	7.500000000E-01	7.236749700E-01	6.377845050E-02	2.540759360E+00	3.177961260E-01
6	9.000000000E-01	6.917000780E-01	8.125509860E-02	2.336479810E+00	3.778299260E-01
7	1.050000000E+00	6.569204460E-01	1.019258130E-01	2.105713550E+00	4.358769490E-01
8	1.200000000E+00	5.944301220E-01	1.274842580E-01	1.804029210E+00	4.914527070E-01
9	1.350000000E+00	5.283757000E-01	1.595212070E-01	1.483593820E+00	5.441480870E-01
10	1.500000000E+00	3.486672370E-01	2.053384890E-01	9.488016520E-01	5.925750970E-01

l	$r_{l-1/2}$	$n_{p-1/2}^{(0)}$, 1-я итер.	$n_{p-1/2}^{(0)}$, последняя итер.
1	7.500000000E-02	7.715332140E-01	2.944722870E+00
2	2.250000000E-01	7.705908300E-01	2.927049340E+00
3	3.750000000E-01	7.628538030E-01	2.858104200E+00
4	5.250000000E-01	7.503552700E-01	2.753620000E+00
5	6.750000000E-01	7.325858770E-01	2.612490870E+00
6	8.250000000E-01	7.075335630E-01	2.432932430E+00
7	9.750000000E-01	6.741446770E-01	2.214339160E+00
8	1.125000000E+00	6.254878480E-01	1.946764800E+00
9	1.275000000E+00	5.610852290E-01	1.634134040E+00
10	1.425000000E+00	4.381822060E-01	1.204078670E+00

Char method and Char distribution Task 1

Сетка задачи: 80 интервалов по r , 96 интервалов по μ

```

number=      36  Neg=      0

```

```

sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 96
-----After the First Iteration-----
AnOut= .205508237E+00 PnumlI= .662614158E+00
-----After the Last Iteration-----
PnumE= .208364122E+01 PnumEl= .208362313E+01 Delta= .180942996E-04
Output flow= .592605472E+00

```

p	r _p	1-я итерация		последняя итерация	
		n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p	n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p
0	0.00000000E+00	7.756880810E-01	6.262427980E-16	2.973852400E+00	1.805665870E-15
1	1.87500000E-02	7.766020590E-01	1.399075050E-03	2.978987320E+00	8.110252710E-03
2	3.75000000E-02	7.765019720E-01	2.793650040E-03	2.978236760E+00	1.622293030E-02
3	5.62500000E-02	7.765013210E-01	4.190498720E-03	2.977650550E+00	2.433385520E-02
4	7.50000000E-02	7.762559640E-01	5.589148310E-03	2.975638990E+00	3.244306740E-02
5	9.37500000E-02	7.760505420E-01	6.990703460E-03	2.973466060E+00	4.054970550E-02
6	1.12500000E-01	7.756853010E-01	8.395633390E-03	2.970362850E+00	4.865327630E-02
7	1.31250000E-01	7.753341120E-01	9.804749560E-03	2.966953940E+00	5.675309140E-02
8	1.50000000E-01	7.748458910E-01	1.121868080E-02	2.962750710E+00	6.484857040E-02
9	1.68750000E-01	7.743608180E-01	1.263817830E-02	2.958182360E+00	7.293906410E-02
10	1.87500000E-01	7.737472690E-01	1.406392260E-02	2.952874640E+00	8.102396800E-02
11	2.06250000E-01	7.731311720E-01	1.549665200E-02	2.947172570E+00	8.910264620E-02
12	2.25000000E-01	7.723899900E-01	1.693707620E-02	2.940757840E+00	9.717448430E-02
13	2.43750000E-01	7.716426930E-01	1.838593820E-02	2.933932430E+00	1.052388510E-01
14	2.62500000E-01	7.707711800E-01	1.984397260E-02	2.926408420E+00	1.132951280E-01
15	2.81250000E-01	7.698909310E-01	2.131193630E-02	2.918463770E+00	1.213426830E-01
16	3.00000000E-01	7.688857800E-01	2.279059060E-02	2.909827840E+00	1.293808950E-01
17	3.18750000E-01	7.678697000E-01	2.428071260E-02	2.900764800E+00	1.374091320E-01
18	3.37500000E-01	7.667268920E-01	2.578309270E-02	2.891013770E+00	1.454267690E-01
19	3.56250000E-01	7.655711860E-01	2.729853400E-02	2.880831370E+00	1.534331750E-01
20	3.75000000E-01	7.642860140E-01	2.882785960E-02	2.869961480E+00	1.614277200E-01
21	3.93750000E-01	7.629861820E-01	3.037190280E-02	2.858657750E+00	1.694097720E-01
22	4.12500000E-01	7.615533960E-01	3.193152340E-02	2.846665170E+00	1.773787000E-01
23	4.31250000E-01	7.601044940E-01	3.350758810E-02	2.834237910E+00	1.853338690E-01
24	4.50000000E-01	7.585185070E-01	3.510099520E-02	2.821119150E+00	1.932746440E-01
25	4.68750000E-01	7.569153460E-01	3.671264560E-02	2.807566490E+00	2.012003910E-01
26	4.87500000E-01	7.551703030E-01	3.834347680E-02	2.793318340E+00	2.091104710E-01
27	5.06250000E-01	7.534073640E-01	3.999442500E-02	2.778638500E+00	2.170042500E-01
28	5.25000000E-01	7.514968550E-01	4.166647100E-02	2.763257440E+00	2.248810870E-01
29	5.43750000E-01	7.495677590E-01	4.336059390E-02	2.747447360E+00	2.327403460E-01
30	5.62500000E-01	7.474841410E-01	4.507782810E-02	2.730927930E+00	2.405813810E-01
31	5.81250000E-01	7.453808350E-01	4.681920920E-02	2.713981940E+00	2.484035510E-01
32	6.00000000E-01	7.431146010E-01	4.858583960E-02	2.696315720E+00	2.562062050E-01
33	6.18750000E-01	7.408269790E-01	5.037882660E-02	2.678224780E+00	2.639886950E-01
34	6.37500000E-01	7.383670010E-01	5.219935250E-02	2.659401270E+00	2.717503610E-01
35	6.56250000E-01	7.358837180E-01	5.404860500E-02	2.640155250E+00	2.794905480E-01
36	6.75000000E-01	7.332185300E-01	5.592784570E-02	2.620164630E+00	2.872085900E-01
37	6.93750000E-01	7.305284050E-01	5.783833830E-02	2.599755160E+00	2.949038240E-01
38	7.12500000E-01	7.276467630E-01	5.978141930E-02	2.578589600E+00	3.025755810E-01
39	7.31250000E-01	7.247383800E-01	6.175842880E-02	2.557008940E+00	3.102231940E-01
40	7.50000000E-01	7.216268630E-01	6.377079710E-02	2.534657040E+00	3.178459830E-01
41	7.68750000E-01	7.184857320E-01	6.581996660E-02	2.511892220E+00	3.254432730E-01
42	7.87500000E-01	7.151259200E-01	6.790750360E-02	2.488333750E+00	3.330143680E-01
43	8.06250000E-01	7.117341590E-01	7.003497930E-02	2.464366490E+00	3.405585800E-01
44	8.25000000E-01	7.081057930E-01	7.220410790E-02	2.439579340E+00	3.480751950E-01
45	8.43750000E-01	7.044461580E-01	7.441657840E-02	2.414394940E+00	3.555635150E-01
46	8.62500000E-01	7.005310270E-01	7.667422970E-02	2.388363260E+00	3.630228170E-01
47	8.81250000E-01	6.965831910E-01	7.897889420E-02	2.361942200E+00	3.704523880E-01

48	9.000000000E-01	6.923572640E-01	8.133258560E-02	2.334639720E+00	3.778514850E-01
49	9.187500000E-01	6.880922440E-01	8.373735430E-02	2.306946840E+00	3.852193680E-01
50	9.375000000E-01	6.835258480E-01	8.619543300E-02	2.278338800E+00	3.925552660E-01
51	9.562500000E-01	6.789217010E-01	8.870901700E-02	2.249356330E+00	3.998584290E-01
52	9.750000000E-01	6.739830530E-01	9.128057270E-02	2.219405770E+00	4.071280590E-01
53	9.937500000E-01	6.690030460E-01	9.391257140E-02	2.189088190E+00	4.143633690E-01
54	1.012500000E+00	6.636547780E-01	9.660775520E-02	2.157750230E+00	4.215635290E-01
55	1.031300000E+00	6.582627190E-01	9.936885720E-02	2.126056820E+00	4.287277210E-01
56	1.050000000E+00	6.524595950E-01	1.021989590E-01	2.093274160E+00	4.358550690E-01
57	1.068800000E+00	6.466101510E-01	1.051011300E-01	2.060149280E+00	4.429447160E-01
58	1.087500000E+00	6.402990070E-01	1.080788520E-01	2.025852760E+00	4.499957310E-01
59	1.106300000E+00	6.339386950E-01	1.111355940E-01	1.991229140E+00	4.570072060E-01
60	1.125000000E+00	6.270548450E-01	1.142753330E-01	1.955331610E+00	4.639781420E-01
61	1.143800000E+00	6.201188450E-01	1.175020230E-01	1.919124800E+00	4.709075650E-01
62	1.162500000E+00	6.125827940E-01	1.208202560E-01	1.881515370E+00	4.777943900E-01
63	1.181300000E+00	6.049913780E-01	1.242345950E-01	1.843617720E+00	4.846375600E-01
64	1.200000000E+00	5.967033490E-01	1.277504080E-01	1.804152720E+00	4.914358750E-01
65	1.218800000E+00	5.883564730E-01	1.313730280E-01	1.764424840E+00	4.981881680E-01
66	1.237500000E+00	5.791881110E-01	1.351088410E-01	1.722913280E+00	5.048930860E-01
67	1.256300000E+00	5.699570780E-01	1.389641800E-01	1.681169840E+00	5.115493170E-01
68	1.275000000E+00	5.597379400E-01	1.429467990E-01	1.637349640E+00	5.181552920E-01
69	1.293800000E+00	5.494518590E-01	1.470643820E-01	1.593336350E+00	5.247094970E-01
70	1.312500000E+00	5.379459480E-01	1.513266010E-01	1.546832790E+00	5.312100550E-01
71	1.331300000E+00	5.263682020E-01	1.557430390E-01	1.500186520E+00	5.376551540E-01
72	1.350000000E+00	5.132293640E-01	1.603262340E-01	1.450431800E+00	5.440424450E-01
73	1.368800000E+00	5.000128750E-01	1.650885940E-01	1.400602370E+00	5.503696630E-01
74	1.387500000E+00	4.846886180E-01	1.700473210E-01	1.346658650E+00	5.566336600E-01
75	1.406300000E+00	4.692793790E-01	1.752194140E-01	1.292738430E+00	5.628314150E-01
76	1.425000000E+00	4.507591210E-01	1.806307870E-01	1.232827810E+00	5.689582320E-01
77	1.443800000E+00	4.321436950E-01	1.863070110E-01	1.173098910E+00	5.750096350E-01
78	1.462500000E+00	4.080292810E-01	1.922951910E-01	1.102834610E+00	5.809770320E-01
79	1.481300000E+00	3.838024900E-01	1.986417150E-01	1.033068290E+00	5.868522790E-01
80	1.500000000E+00	3.418819400E-01	2.055048190E-01	9.290794930E-01	5.926054720E-01

l	$r_{l-1/2}$	$n^{(0)}_{p-1/2}$, 1-я итер.	$n^{(0)}_{p-1/2}$, последняя итер.
1	7.500000000E-02	7.756263850E-01	2.969745620E+00
2	2.250000000E-01	7.715894810E-01	2.933602550E+00
3	3.750000000E-01	7.634246370E-01	2.862642520E+00
4	5.250000000E-01	7.505597430E-01	2.755852150E+00
5	6.750000000E-01	7.321650840E-01	2.612649490E+00
6	8.250000000E-01	7.068784280E-01	2.431899590E+00
7	9.750000000E-01	6.724762340E-01	2.211429150E+00
8	1.125000000E+00	6.250559630E-01	1.946759210E+00
9	1.275000000E+00	5.566452690E-01	1.627240620E+00
10	1.425000000E+00	4.417670150E-01	1.212635880E+00

Задача2. Однородная сфера с параметрами:

$$R=4.5; \quad \sigma(r)=1.; \quad \beta(r)=1.1; \quad Q(r)=1.$$

Результаты расчетов. DSp-метод.

Сетка задачи: 10 интервалов по r, 12 интервалов по μ

DSn method Task 2
 number= 774 Neg= 0
 sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 12
 -----After the First Iteration-----
 AnOut= .243834778E+00PnumlI= .254524495E+02
 -----After the Last Iteration-----
 PnumE= .177958408E+04 PnumEl= .177956527E+04Delta= .188168044E-01
 Output flow= .102879766E+02

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n^{(0)}_p$	$n^{(1)}_p$	$n^{(0)}_p$	$n^{(1)}_p$
			-1.268652070E-		-1.602364070E-
0	0.00000E+00	9.797674250E-01	16	1.317648080E+02	14
1	4.50000E-01	9.980524240E-01	1.663511320E-03	1.319799090E+02	2.128063680E+00
2	9.00000E-01	9.775942000E-01	3.612258410E-03	1.272241980E+02	4.196532550E+00
3	1.35000E+00	9.944151300E-01	6.037304270E-03	1.203652020E+02	6.101914910E+00
4	1.80000E+00	9.673729280E-01	1.002336740E-02	1.098701530E+02	7.772303130E+00
5	2.25000E+00	9.827397630E-01	1.554433260E-02	9.799692960E+01	9.144200500E+00
6	2.70000E+00	9.391805560E-01	2.559728160E-02	8.330953900E+01	1.016653750E+01
7	3.15000E+00	9.485694490E-01	4.062619060E-02	6.848513890E+01	1.080873970E+01
8	3.60000E+00	8.544568940E-01	7.011444440E-02	5.142099740E+01	1.104621380E+01
9	4.05000E+00	8.327794780E-01	1.182413890E-01	3.599672550E+01	1.088615500E+01
10	4.50000E+00	4.424314030E-01	2.430889130E-01	1.633793410E+01	1.028797660E+01

l	$r_{l-1/2}$	$n^{(0)}_{p-1/2}$, 1-я итер.	$n^{(0)}_{p-1/2}$, последняя итер.
1	2.25000E-01	9.889099250E-01	1.318723580E+02
2	6.75000E-01	9.878233120E-01	1.296020540E+02
3	1.12500E+00	9.860046650E-01	1.237947000E+02
4	1.57500E+00	9.808940290E-01	1.151176770E+02
5	2.02500E+00	9.750563460E-01	1.039335410E+02
6	2.47500E+00	9.609601600E-01	9.065323430E+01
7	2.92500E+00	9.438750030E-01	7.589733900E+01
8	3.37500E+00	9.015131710E-01	5.995306820E+01
9	3.82500E+00	8.436181860E-01	4.370886140E+01
10	4.27500E+00	6.376054400E-01	2.616732980E+01

DSn method Task 2

Сетка задачи: 80 интервалов по r, 96 интервалов по μ

number= 743 Neg= 0
 sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 96
 -----After the First Iteration-----
 AnOut= .243834778E+00PnumlI= .254375882E+02
 -----After the Last Iteration-----
 PnumE= .169626307E+04 PnumEl= .169624534E+04Delta= .177268655E-01
 Output flow= .987652022E+01

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n^{(0)}_p$	$n^{(1)}_p$	$n^{(0)}_p$	$n^{(1)}_p$
0	0.00000E+00	9.885986400E-01	6.878491980E-16	1.285699810E+02	8.801705020E-14
1	5.62500E-02	9.889925240E-01	2.100828380E-04	1.287263290E+02	2.599626640E-01
2	1.12500E-01	9.887031400E-01	4.184512350E-04	1.286569120E+02	5.200679480E-01
3	1.68750E-01	9.889447010E-01	6.283648230E-04	1.285687960E+02	7.798116480E-01
4	2.25000E-01	9.886178780E-01	8.398914920E-04	1.283983020E+02	1.039094000E+00
5	2.81250E-01	9.888136900E-01	1.053783440E-03	1.281993440E+02	1.297730890E+00
6	3.37500E-01	9.884515860E-01	1.270559660E-03	1.279344450E+02	1.555574950E+00
7	3.93750E-01	9.886101070E-01	1.490838160E-03	1.276368910E+02	1.812460800E+00
8	4.50000E-01	9.882105410E-01	1.715247760E-03	1.272781860E+02	2.068234330E+00
9	5.06250E-01	9.883327840E-01	1.944389270E-03	1.268854160E+02	2.322735710E+00

10	5.62500E-01	9.878933640E-01	2.178959760E-03	1.264337260E+02	2.575810370E+00
11	6.18750E-01	9.879786170E-01	2.419572190E-03	1.259476360E+02	2.827301870E+00
12	6.75000E-01	9.874965700E-01	2.666989740E-03	1.254040320E+02	3.077057010E+00
13	7.31250E-01	9.875432810E-01	2.921853130E-03	1.248262320E+02	3.324922380E+00
14	7.87500E-01	9.870153390E-01	3.184998750E-03	1.241920150E+02	3.570747010E+00
15	8.43750E-01	9.870212930E-01	3.457108000E-03	1.235241380E+02	3.814380710E+00
16	9.00000E-01	9.864436080E-01	3.739101490E-03	1.228008300E+02	4.055675340E+00
17	9.56250E-01	9.864059450E-01	4.031714300E-03	1.220446360E+02	4.294484170E+00
18	1.01250E+00	9.857739900E-01	4.335965040E-03	1.212339680E+02	4.530662420E+00
19	1.06880E+00	9.856891580E-01	4.652656650E-03	1.203913840E+02	4.764067210E+00
20	1.12500E+00	9.849976330E-01	4.982921980E-03	1.194952960E+02	4.994557540E+00
21	1.18130E+00	9.848613080E-01	5.327647670E-03	1.185684270E+02	5.221994730E+00
22	1.23750E+00	9.841040320E-01	5.688099540E-03	1.175890570E+02	5.446242010E+00
23	1.29380E+00	9.839110390E-01	6.065265700E-03	1.165801940E+02	5.667165270E+00
24	1.35000E+00	9.830808340E-01	6.460566280E-03	1.155198740E+02	5.884632340E+00
25	1.40630E+00	9.828250390E-01	6.875110730E-03	1.144314910E+02	6.098514070E+00
26	1.46250E+00	9.819136070E-01	7.310497640E-03	1.132927390E+02	6.308683280E+00
27	1.51870E+00	9.815878050E-01	7.767980220E-03	1.121274880E+02	6.515016100E+00
28	1.57500E+00	9.805855750E-01	8.249363170E-03	1.109130000E+02	6.717390700E+00
29	1.63120E+00	9.801813390E-01	8.756069140E-03	1.096737060E+02	6.915688850E+00
30	1.68750E+00	9.790772690E-01	9.290141160E-03	1.083863440E+02	7.109794380E+00
31	1.74370E+00	9.785847480E-01	9.853201680E-03	1.070759960E+02	7.299595010E+00
32	1.80000E+00	9.773660590E-01	1.044757060E-02	1.057187830E+02	7.484980570E+00
33	1.85620E+00	9.767737080E-01	1.107510660E-02	1.043405210E+02	7.665845010E+00
34	1.91250E+00	9.754255400E-01	1.173845300E-02	1.029166250E+02	7.842084410E+00
35	1.96870E+00	9.747198020E-01	1.243974870E-02	1.014737360E+02	8.013599270E+00
36	2.02500E+00	9.732248390E-01	1.318201540E-02	9.998645820E+01	8.180292160E+00
37	2.08120E+00	9.723898030E-01	1.396772340E-02	9.848235950E+01	8.342070350E+00
38	2.13750E+00	9.707278650E-01	1.480033750E-02	9.693512510E+01	8.498843150E+00
39	2.19370E+00	9.697448960E-01	1.568271870E-02	9.537335830E+01	8.650524850E+00
40	2.25000E+00	9.678924450E-01	1.661885080E-02	9.376970080E+01	8.797031680E+00
41	2.30620E+00	9.667396520E-01	1.761205750E-02	9.215391550E+01	8.938285120E+00
42	2.36250E+00	9.646690890E-01	1.866693430E-02	9.049746170E+01	9.074208510E+00
43	2.41870E+00	9.633205550E-01	1.978735710E-02	8.883139920E+01	9.204730680E+00
44	2.47500E+00	9.609993190E-01	2.097864750E-02	8.712585050E+01	9.329782180E+00
45	2.53120E+00	9.594242600E-01	2.224534300E-02	8.541332880E+01	9.449299350E+00
46	2.58750E+00	9.568138580E-01	2.359362800E-02	8.366244500E+01	9.563220010E+00
47	2.64370E+00	9.549757720E-01	2.502883010E-02	8.190734400E+01	9.671488070E+00
48	2.70000E+00	9.520304580E-01	2.655816500E-02	8.011492070E+01	9.774048700E+00
49	2.75620E+00	9.498857480E-01	2.818791110E-02	7.832116080E+01	9.870853440E+00
50	2.81250E+00	9.465505740E-01	2.992653210E-02	7.649099910E+01	9.961854720E+00
51	2.86870E+00	9.440467190E-01	3.178146150E-02	7.466251660E+01	1.004701170E+01
52	2.92500E+00	9.402557740E-01	3.376266780E-02	7.279840270E+01	1.012628400E+01
53	2.98120E+00	9.373292800E-01	3.587899250E-02	7.093912460E+01	1.019963840E+01
54	3.03750E+00	9.330023060E-01	3.814225050E-02	6.904478330E+01	1.026704150E+01
55	3.09370E+00	9.295758080E-01	4.056301240E-02	6.715859470E+01	1.032846740E+01
56	3.15000E+00	9.246145570E-01	4.315536960E-02	6.523764770E+01	1.038388940E+01
57	3.20620E+00	9.205928920E-01	4.593203800E-02	6.332834990E+01	1.043328890E+01
58	3.26250E+00	9.148756600E-01	4.890995060E-02	6.138425230E+01	1.047664540E+01
59	3.31870E+00	9.101406120E-01	5.210451150E-02	5.945550990E+01	1.051394710E+01
60	3.37500E+00	9.035147620E-01	5.553624670E-02	5.749146610E+01	1.054517900E+01
61	3.43120E+00	8.979176410E-01	5.922397250E-02	5.554673460E+01	1.057033570E+01
62	3.48750E+00	8.901888140E-01	6.319283030E-02	5.356557760E+01	1.058940680E+01
63	3.54370E+00	8.835397910E-01	6.746603380E-02	5.160800040E+01	1.060239230E+01
64	3.60000E+00	8.744558690E-01	7.207476780E-02	4.961201220E+01	1.060928510E+01

65	3.65620E+00	8.665081290E-01	7.704802130E-02	4.764426780E+01	1.061008960E+01
66	3.71250E+00	8.557343890E-01	8.242508490E-02	4.563489440E+01	1.060479960E+01
67	3.76870E+00	8.461595730E-01	8.824271330E-02	4.365895500E+01	1.059342220E+01
68	3.82500E+00	8.332381830E-01	9.455140910E-02	4.163633010E+01	1.057594880E+01
69	3.88120E+00	8.215863390E-01	1.013986920E-01	3.965305770E+01	1.055238630E+01
70	3.93750E+00	8.058657850E-01	1.088512170E-01	3.761513970E+01	1.052271830E+01
71	3.99370E+00	7.914956100E-01	1.169720430E-01	3.562355580E+01	1.048694680E+01
72	4.05000E+00	7.719963090E-01	1.258524510E-01	3.356441180E+01	1.044503710E+01
73	4.10620E+00	7.539423090E-01	1.355792220E-01	3.156024360E+01	1.039697830E+01
74	4.16250E+00	7.290664250E-01	1.462844510E-01	2.946615440E+01	1.034269690E+01
75	4.21870E+00	7.057520950E-01	1.580942660E-01	2.743853630E+01	1.028215210E+01
76	4.27500E+00	6.725234230E-01	1.712181930E-01	2.527721850E+01	1.021518170E+01
77	4.33120E+00	6.410100480E-01	1.858570630E-01	2.319956550E+01	1.014167450E+01
78	4.38750E+00	5.922663790E-01	2.024108650E-01	2.087790420E+01	1.006121460E+01
79	4.44370E+00	5.454787130E-01	2.212642130E-01	1.867215990E+01	9.973484730E+00
80	4.50000E+00	4.444141730E-01	2.438228060E-01	1.562693500E+01	9.876520220E+00

l	r _{l-1/2}	n ⁽⁰⁾ _{p-1/2} ,	n ⁽⁰⁾ _{p-1/2} ,
		1-я итер.	последняя итер.
1	2.25000E-01	9.885650150E-01	1.278836800E+02
2	6.75000E-01	9.873893730E-01	1.248058040E+02
3	1.12500E+00	9.848460730E-01	1.189100230E+02
4	1.57500E+00	9.803574720E-01	1.103579420E+02
5	2.02500E+00	9.728622800E-01	9.947221500E+01
6	2.47500E+00	9.603939440E-01	8.666023150E+01
7	2.92500E+00	9.391853450E-01	7.238649660E+01
8	3.37500E+00	9.014527800E-01	5.713418820E+01
9	3.82500E+00	8.285326140E-01	4.132261970E+01
10	4.27500E+00	6.509660010E-01	2.483518670E+01

Результаты расчетов. Характеристический метод с DS_n-распределением.

Сетка задачи: 10 интервалов по r, 12 интервалов по μ

Char method and DS_n distribution

number= 810 Neg= 0

sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 12

-----After the First Iteration-----

AnOut= .243834778E+00 PnumI= .254639533E+02

-----After the Last Iteration-----

PnumE= .187324998E+04 PnumEl= .187323035E+04 Delta= .196345282E-01

Output flow= .107505202E+02

p	r _p	1-я итерация		последняя итерация	
		n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p	n ⁽⁰⁾ _p	n ⁽¹⁾ _p
			-1.861710660E-		-2.144985580E-
0	0.00000E+00	9.783580000E-01	16	1.414653850E+02	14
1	4.50000E-01	9.965107790E-01	1.857828990E-03	1.416272430E+02	2.273239730E+00
2	9.00000E-01	9.766622190E-01	4.010699160E-03	1.362234420E+02	4.473699340E+00
3	1.35000E+00	9.926703270E-01	6.573842270E-03	1.285360100E+02	6.488894490E+00
4	1.80000E+00	9.663298410E-01	1.078802450E-02	1.170954590E+02	8.246313600E+00
5	2.25000E+00	9.803325040E-01	1.645453900E-02	1.041854980E+02	9.681712750E+00
6	2.70000E+00	9.374804500E-01	2.676075580E-02	8.841911060E+01	1.074210690E+01
7	3.15000E+00	9.438400320E-01	4.209184180E-02	7.247627210E+01	1.139665040E+01
8	3.60000E+00	8.512097980E-01	7.183954250E-02	5.427129590E+01	1.161866440E+01
9	4.05000E+00	8.239993850E-01	1.199967170E-01	3.774857510E+01	1.141794290E+01
10	4.50000E+00	4.399195540E-01	2.425208260E-01	1.691911870E+01	1.075052020E+01

l	$r_{l-1/2}$	$n^{(0)}_{p-1/2}$, 1-я итер.	$n^{(0)}_{p-1/2}$, последняя итер.
1	2.25000E-01	9.876144730E-01	1.415508560E+02
2	6.75000E-01	9.864905070E-01	1.387782480E+02
3	1.12500E+00	9.848695500E-01	1.321251260E+02
4	1.57500E+00	9.795596740E-01	1.225075680E+02
5	2.02500E+00	9.739065480E-01	1.103310190E+02
6	2.47500E+00	9.595587010E-01	9.598858750E+01
7	2.92500E+00	9.423037770E-01	8.014258730E+01
8	3.37500E+00	8.999909080E-01	6.304154340E+01
9	3.82500E+00	8.426419860E-01	4.568675050E+01
10	4.27500E+00	6.425006520E-01	2.694951050E+01

Char method and DS_n distribution Task 2

Сетка задачи: 80 интервалов по r , 96 интервалов по μ

```
number= 744 Neg= 0
sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 96
-----After the First Iteration-----
AnOut= .243834778E+00 PnumlI= .254378514E+02
-----After the Last Iteration-----
PnumE= .169833967E+04 PnumEl= .169832196E+04 Delta= .177053253E-01
Output flow= .988677514E+01
```

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n^{(0)}_p$	$n^{(1)}_p$	$n^{(0)}_p$	$n^{(1)}_p$
0	0.00000E+00	9.885749890E-01	6.443362690E-16	1.287793490E+02	6.129417720E-14
1	5.62500E-02	9.889741930E-01	2.104677110E-04	1.289394650E+02	2.603595590E-01
2	1.12500E-01	9.886873210E-01	4.190848710E-04	1.288692400E+02	5.208672020E-01
3	1.68750E-01	9.889297590E-01	6.292505560E-04	1.287790870E+02	7.810017470E-01
4	2.25000E-01	9.886038690E-01	8.410331500E-04	1.286062280E+02	1.040665230E+00
5	2.81250E-01	9.887998740E-01	1.055176830E-03	1.284048760E+02	1.299674620E+00
6	3.37500E-01	9.884383910E-01	1.272205590E-03	1.281376350E+02	1.557883440E+00
7	3.93750E-01	9.885969000E-01	1.492730250E-03	1.278378100E+02	1.815126970E+00
8	4.50000E-01	9.881978170E-01	1.717385920E-03	1.274769320E+02	2.071251670E+00
9	5.06250E-01	9.883199020E-01	1.946767440E-03	1.270820310E+02	2.326098110E+00
10	5.62500E-01	9.878808340E-01	2.181579550E-03	1.266282910E+02	2.579512020E+00
11	6.18750E-01	9.879657620E-01	2.422430580E-03	1.261401710E+02	2.831337230E+00
12	6.75000E-01	9.874839040E-01	2.670092660E-03	1.255945950E+02	3.081420660E+00
13	7.31250E-01	9.875300860E-01	2.925202960E-03	1.250148180E+02	3.329609010E+00
14	7.87500E-01	9.870021490E-01	3.188607690E-03	1.243786550E+02	3.575751300E+00
15	8.43750E-01	9.870073530E-01	3.460985150E-03	1.237088240E+02	3.819697340E+00
16	9.00000E-01	9.864294850E-01	3.743265850E-03	1.229835670E+02	4.061298920E+00
17	9.56250E-01	9.863908570E-01	4.036181380E-03	1.222254030E+02	4.300409250E+00
18	1.01250E+00	9.857585650E-01	4.340759280E-03	1.214127780E+02	4.536883510E+00
19	1.06880E+00	9.856725890E-01	4.657797660E-03	1.205682020E+02	4.770578770E+00
20	1.12500E+00	9.849806330E-01	4.988436630E-03	1.196701140E+02	5.001353910E+00
21	1.18130E+00	9.848430530E-01	5.333556210E-03	1.187412260E+02	5.229070260E+00
22	1.23750E+00	9.840853320E-01	5.694427770E-03	1.177598060E+02	5.453590880E+00
23	1.29380E+00	9.838910410E-01	6.072031180E-03	1.167488700E+02	5.674781620E+00
24	1.35000E+00	9.830604490E-01	6.467790890E-03	1.156864580E+02	5.892510200E+00
25	1.40630E+00	9.828033650E-01	6.882807080E-03	1.145959440E+02	6.106647310E+00
26	1.46250E+00	9.818916290E-01	7.318682470E-03	1.134550340E+02	6.317065660E+00
27	1.51870E+00	9.815645440E-01	7.776661040E-03	1.122875990E+02	6.523641320E+00
28	1.57500E+00	9.805620470E-01	8.258553170E-03	1.110708990E+02	6.726252290E+00

29	1.63120E+00	9.801564710E-01	8.765773870E-03	1.098293450E+02	6.924780270E+00
30	1.68750E+00	9.790520680E-01	9.300374860E-03	1.085397040E+02	7.119108870E+00
31	1.74370E+00	9.785580700E-01	9.863972740E-03	1.072270400E+02	7.309125790E+00
32	1.80000E+00	9.773388870E-01	1.045889840E-02	1.058674840E+02	7.494720730E+00
33	1.85620E+00	9.767448930E-01	1.108700460E-02	1.044868350E+02	7.675787460E+00
34	1.91250E+00	9.753960670E-01	1.175094550E-02	1.030605430E+02	7.852222030E+00
35	1.96870E+00	9.746885780E-01	1.245285170E-02	1.016152140E+02	8.023924870E+00
36	2.02500E+00	9.731928830E-01	1.319575320E-02	1.001254650E+02	8.190798300E+00
37	2.08120E+00	9.723560590E-01	1.398210970E-02	9.861887150E+01	8.352749610E+00
38	2.13750E+00	9.706933820E-01	1.481539250E-02	9.706911580E+01	8.509688020E+00
39	2.19370E+00	9.697085200E-01	1.569845310E-02	9.550479430E+01	8.661527620E+00
40	2.25000E+00	9.678552730E-01	1.663528380E-02	9.389855660E+01	8.808184620E+00
41	2.30620E+00	9.667003160E-01	1.762920240E-02	9.228016550E+01	8.949580450E+00
42	2.36250E+00	9.646288430E-01	1.868481400E-02	9.062109510E+01	9.085638360E+00
43	2.41870E+00	9.632778860E-01	1.980598750E-02	8.895236790E+01	9.216287030E+00
44	2.47500E+00	9.609556900E-01	2.099805210E-02	8.724414520E+01	9.341456960E+00
45	2.53120E+00	9.593781440E-01	2.226553170E-02	8.552892500E+01	9.461084470E+00
46	2.58750E+00	9.567666740E-01	2.361462020E-02	8.377532410E+01	9.575107190E+00
47	2.64370E+00	9.549259530E-01	2.505063270E-02	8.201748300E+01	9.683469120E+00
48	2.70000E+00	9.519793100E-01	2.658079860E-02	8.022230070E+01	9.786115300E+00
49	2.75620E+00	9.498316600E-01	2.821138650E-02	7.842576200E+01	9.882997250E+00
50	2.81250E+00	9.464952580E-01	2.995086330E-02	7.659281770E+01	9.974067250E+00
51	2.86870E+00	9.439882330E-01	3.180664900E-02	7.476152390E+01	1.005928460E+01
52	2.92500E+00	9.401958110E-01	3.378872530E-02	7.289459480E+01	1.013860870E+01
53	2.98120E+00	9.372659230E-01	3.590591770E-02	7.103247360E+01	1.021200630E+01
54	3.03750E+00	9.329373980E-01	3.817004870E-02	6.913528650E+01	1.027944410E+01
55	3.09370E+00	9.295072060E-01	4.059167310E-02	6.724624740E+01	1.034089610E+01
56	3.15000E+00	9.245442780E-01	4.318489070E-02	6.532244220E+01	1.039633570E+01
57	3.20620E+00	9.205186250E-01	4.596239830E-02	6.341026550E+01	1.044574400E+01
58	3.26250E+00	9.147996010E-01	4.894113650E-02	6.146329280E+01	1.048910070E+01
59	3.31870E+00	9.100602390E-01	5.213648760E-02	5.953165880E+01	1.052639410E+01
60	3.37500E+00	9.034324950E-01	5.556898390E-02	5.756473600E+01	1.055760900E+01
61	3.43120E+00	8.978307070E-01	5.925741600E-02	5.561711190E+01	1.058274000E+01
62	3.48750E+00	8.900999060E-01	6.322692960E-02	5.363306260E+01	1.060177680E+01
63	3.54370E+00	8.834458380E-01	6.750070790E-02	5.167258410E+01	1.061471940E+01
64	3.60000E+00	8.743598990E-01	7.210993730E-02	4.967370450E+01	1.062156070E+01
65	3.65620E+00	8.664067110E-01	7.708356900E-02	4.770305960E+01	1.062230510E+01
66	3.71250E+00	8.556309780E-01	8.246089090E-02	4.569079260E+01	1.061694630E+01
67	3.76870E+00	8.460502870E-01	8.827861080E-02	4.371195390E+01	1.060549160E+01
68	3.82500E+00	8.331270430E-01	9.458722120E-02	4.168643050E+01	1.058793220E+01
69	3.88120E+00	8.214688870E-01	1.014341810E-01	3.970024540E+01	1.056427530E+01
70	3.93750E+00	8.057468190E-01	1.088861250E-01	3.765941770E+01	1.053450400E+01
71	3.99370E+00	7.913699060E-01	1.170060300E-01	3.566491070E+01	1.049862060E+01
72	4.05000E+00	7.718698100E-01	1.258851360E-01	3.360284900E+01	1.045659020E+01
73	4.10620E+00	7.538087140E-01	1.356101110E-01	3.159575080E+01	1.040840210E+01
74	4.16250E+00	7.289335210E-01	1.463129670E-01	2.949872400E+01	1.035398240E+01
75	4.21870E+00	7.056119520E-01	1.581196660E-01	2.746814350E+01	1.029329060E+01
76	4.27500E+00	6.723872890E-01	1.712395650E-01	2.530382420E+01	1.022616380E+01
77	4.33120E+00	6.408671910E-01	1.858732090E-01	2.322312560E+01	1.015249090E+01
78	4.38750E+00	5.921366450E-01	2.024201770E-01	2.089831830E+01	1.007185520E+01
79	4.44370E+00	5.453452830E-01	2.212644690E-01	1.868931870E+01	9.983939360E+00
80	4.50000E+00	4.443444470E-01	2.438098060E-01	1.564036370E+01	9.886775140E+00

	$r_{i-1/2}$	$n_{p-1/2}^{(0)}$, 1-я итер.	$n_{p-1/2}^{(0)}$, последняя итер.
1	2.25000E-01	9.885507610E-01	1.280848350E+02
2	6.75000E-01	9.873755450E-01	1.249912980E+02
3	1.12500E+00	9.848291040E-01	1.190798690E+02
4	1.57500E+00	9.803365300E-01	1.105109890E+02
5	2.02500E+00	9.728371890E-01	9.960661930E+01
6	2.47500E+00	9.603643480E-01	8.677420400E+01
7	2.92500E+00	9.391521840E-01	7.247860450E+01
8	3.37500E+00	9.014210520E-01	5.720352470E+01
9	3.82500E+00	8.285204280E-01	4.136875280E+01
10	4.27500E+00	6.510631110E-01	2.485725070E+01

Результаты расчетов. Характеристический метод с σSn -распределением .

Сетка задачи: 10 интервалов по r , 12 интервалов по μ

```
Char method and Char distribution TASK 2
number= 662 Neg= 0
sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 12
-----After the First Iteration-----
AnOut= .243834778E+00 PnumI= .254323217E+02
-----After the Last Iteration-----
PnumE= .150250122E+04 PnumE1= .150248544E+04 Delta= .157759527E-01
Output flow= .891968120E+01
```

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$	$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$
0	0.000000000E+00	9.861548310E-01	16	1.113435560E+02	14
1	4.500000000E-01	9.872106460E-01	1.987322910E-03	1.112931990E+02	1.820032510E+00
2	9.000000000E-01	9.848676100E-01	4.149792120E-03	1.076283180E+02	3.588791470E+00
3	1.350000000E+00	9.820825980E-01	7.050179250E-03	1.015913800E+02	5.218678990E+00
4	1.800000000E+00	9.755083110E-01	1.124905370E-02	9.315754820E+01	6.651046830E+00
5	2.250000000E+00	9.668775550E-01	1.759767760E-02	8.286347470E+01	7.832239060E+00
6	2.700000000E+00	9.493875440E-01	2.776252810E-02	7.098681910E+01	8.720758300E+00
7	3.150000000E+00	9.246051510E-01	4.435258980E-02	5.804402360E+01	9.287367010E+00
8	3.600000000E+00	8.678156810E-01	7.370366780E-02	4.426601180E+01	9.513879280E+00
9	4.050000000E+00	7.885602010E-01	1.253599250E-01	3.042394320E+01	9.398107510E+00
10	4.500000000E+00	4.628209020E-01	2.440828800E-01	1.483059030E+01	8.919681200E+00

l	$r_{l-1/2}$	$n_{p-1/2}^{(0)}$	
		1-я итер.	последняя итер.
1	2.250000000E-01	9.867511810E-01	1.113367230E+02
2	6.750000000E-01	9.860839570E-01	1.093834220E+02
3	1.125000000E+00	9.835605460E-01	1.044325270E+02
4	1.575000000E+00	9.790030190E-01	9.711571880E+01
5	2.025000000E+00	9.715893900E-01	8.769409000E+01
6	2.475000000E+00	9.590103250E-01	7.655123640E+01
7	2.925000000E+00	9.383818430E-01	6.408659980E+01
8	3.375000000E+00	8.996545230E-01	5.067401430E+01
9	3.825000000E+00	8.329610090E-01	3.680788310E+01
10	4.275000000E+00	6.493447940E-01	2.215801190E+01

Char method and Char distribution Task 2

Сетка задачи: 80 интервалов по r , 96 интервалов по μ

number= 741 Neg= 0

sig= .10000E+01 sigs= .11000E+01 N_u= 96

-----After the First Iteration-----

AnOut= .243834778E+00 PnumI= .254372256E+02

-----After the Last Iteration-----

PnumE= .169241842E+04 PnumEl= .169240064E+04 Delta= .177865797E-01

Output flow= .985753400E+01

p	r_p	1-я итерация		последняя итерация	
		$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$	$n_p^{(0)}$	$n_p^{(1)}$
0	0.00000000E+00	9.886870620E-01	6.309167260E-16	1.282802520E+02	8.440492230E-14
1	5.62500000E-02	9.888247320E-01	2.108182820E-04	1.284320930E+02	2.594160530E-01
2	1.12500000E-01	9.887956600E-01	4.198371070E-04	1.283682300E+02	5.189781190E-01
3	1.68750000E-01	9.887793110E-01	6.304026570E-04	1.282762680E+02	7.781775650E-01
4	2.25000000E-01	9.887127150E-01	8.425603640E-04	1.281115520E+02	1.036916840E+00
5	2.81250000E-01	9.886491450E-01	1.057087590E-03	1.279087900E+02	1.295012560E+00
6	3.37500000E-01	9.885480390E-01	1.274475770E-03	1.276496600E+02	1.552317430E+00
7	3.93750000E-01	9.884455370E-01	1.495381410E-03	1.273482630E+02	1.808666240E+00
8	4.50000000E-01	9.883084620E-01	1.720388860E-03	1.269953750E+02	2.063905000E+00
9	5.06250000E-01	9.881677220E-01	1.950149720E-03	1.265987800E+02	2.317874080E+00
10	5.62500000E-01	9.879929340E-01	2.185300070E-03	1.261530280E+02	2.570419180E+00
11	6.18750000E-01	9.878128300E-01	2.426517390E-03	1.256631940E+02	2.821384140E+00
12	6.75000000E-01	9.875981410E-01	2.674488380E-03	1.251257250E+02	3.070616150E+00
13	7.31250000E-01	9.873766120E-01	2.929933860E-03	1.245442960E+02	3.317962050E+00
14	7.87500000E-01	9.871192780E-01	3.193599440E-03	1.239164490E+02	3.563271330E+00
15	8.43750000E-01	9.868535070E-01	3.466264180E-03	1.232450790E+02	3.806394010E+00
16	9.00000000E-01	9.865501350E-01	3.748744590E-03	1.225284040E+02	4.047182470E+00
17	9.56250000E-01	9.862365580E-01	4.041892930E-03	1.217688480E+02	4.285490160E+00
18	1.01250000E+00	9.858830340E-01	4.346610730E-03	1.209651100E+02	4.521172900E+00
19	1.06880000E+00	9.855173280E-01	4.663838880E-03	1.201192940E+02	4.754087990E+00
20	1.12500000E+00	9.851087730E-01	4.994579440E-03	1.192304320E+02	4.984095010E+00
21	1.18130000E+00	9.846858440E-01	5.339877660E-03	1.183004560E+02	5.211055470E+00
22	1.23750000E+00	9.842165970E-01	5.700852060E-03	1.173286200E+02	5.434833180E+00
23	1.29380000E+00	9.837305940E-01	6.078667710E-03	1.163167510E+02	5.655294150E+00
24	1.35000000E+00	9.831942040E-01	6.474575670E-03	1.152642940E+02	5.872306890E+00
25	1.40630000E+00	9.826384930E-01	6.889876630E-03	1.141729950E+02	6.085742220E+00
26	1.46250000E+00	9.820276310E-01	7.325972170E-03	1.130424340E+02	6.295473690E+00
27	1.51870000E+00	9.813946410E-01	7.784318460E-03	1.118743510E+02	6.501377460E+00
28	1.57500000E+00	9.807008440E-01	8.266492390E-03	1.106684010E+02	6.703332370E+00
29	1.63120000E+00	9.799816820E-01	8.774135170E-03	1.094263220E+02	6.901220170E+00
30	1.68750000E+00	9.791948750E-01	9.309035630E-03	1.081478410E+02	7.094925340E+00
31	1.74370000E+00	9.783787890E-01	9.873062640E-03	1.068347370E+02	7.284335540E+00
32	1.80000000E+00	9.774867860E-01	1.046826470E-02	1.054867450E+02	7.469341310E+00
33	1.85620000E+00	9.765607680E-01	1.109678940E-02	1.041057050E+02	7.649836280E+00
34	1.91250000E+00	9.755491360E-01	1.176099400E-02	1.026913740E+02	7.825717340E+00
35	1.96870000E+00	9.744980490E-01	1.246335050E-02	1.012456600E+02	7.996884660E+00
36	2.02500000E+00	9.733504530E-01	1.320656330E-02	9.976828840E+01	8.163241490E+00
37	2.08120000E+00	9.721574290E-01	1.399346280E-02	9.826129000E+01	8.324694780E+00
38	2.13750000E+00	9.708556300E-01	1.482713910E-02	9.672434730E+01	8.481154750E+00
39	2.19370000E+00	9.695015330E-01	1.571082980E-02	9.515958530E+01	8.632535120E+00
40	2.25000000E+00	9.680238230E-01	1.664809130E-02	9.356661510E+01	8.778753160E+00
41	2.30620000E+00	9.664853420E-01	1.764266740E-02	9.194770310E+01	8.919729790E+00
42	2.36250000E+00	9.648045080E-01	1.869871250E-02	9.030233310E+01	9.055389310E+00
43	2.41870000E+00	9.630533490E-01	1.982059160E-02	8.863294500E+01	9.185659700E+00
44	2.47500000E+00	9.611375230E-01	2.101315960E-02	8.693886730E+01	9.310472570E+00

45	2.531200000E+00	9.591419560E-01	2.228147190E-02	8.522281230E+01	9.429763470E+00
46	2.587500000E+00	9.569559280E-01	2.363114840E-02	8.348384720E+01	9.543471280E+00
47	2.643700000E+00	9.546781440E-01	2.506807690E-02	8.172496070E+01	9.651539140E+00
48	2.700000000E+00	9.521781540E-01	2.659884730E-02	7.994491770E+01	9.753913380E+00
49	2.756200000E+00	9.495697740E-01	2.823043820E-02	7.814701850E+01	9.850544390E+00
50	2.812500000E+00	9.467022640E-01	2.997063740E-02	7.632972500E+01	9.941385770E+00
51	2.868700000E+00	9.437116020E-01	3.182756200E-02	7.449676170E+01	1.002639570E+01
52	2.925000000E+00	9.404135540E-01	3.381041390E-02	7.264603490E+01	1.010553510E+01
53	2.981200000E+00	9.369719350E-01	3.592887270E-02	7.078181640E+01	1.017876930E+01
54	3.037500000E+00	9.331662840E-01	3.819388200E-02	6.890143120E+01	1.024606640E+01
55	3.093700000E+00	9.291940940E-01	4.061692570E-02	6.700981010E+01	1.030739910E+01
56	3.150000000E+00	9.247857410E-01	4.321111720E-02	6.510344090E+01	1.036274250E+01
57	3.206200000E+00	9.201837090E-01	4.599021620E-02	6.318811680E+01	1.041207580E+01
58	3.262500000E+00	9.150550930E-01	4.897003720E-02	6.125927440E+01	1.045538060E+01
59	3.318700000E+00	9.097005510E-01	5.216717390E-02	5.932383110E+01	1.049264310E+01
60	3.375000000E+00	9.037037630E-01	5.560086890E-02	5.737580690E+01	1.052385060E+01
61	3.431200000E+00	8.974426470E-01	5.929130600E-02	5.542359380E+01	1.054899490E+01
62	3.487500000E+00	8.903890570E-01	6.326213920E-02	5.345930710E+01	1.056806840E+01
63	3.543700000E+00	8.830250430E-01	6.753816930E-02	5.149333850E+01	1.058106830E+01
64	3.600000000E+00	8.746695320E-01	7.214883800E-02	4.951519660E+01	1.058799040E+01
65	3.656200000E+00	8.659477910E-01	7.712499740E-02	4.753800540E+01	1.058883570E+01
66	3.712500000E+00	8.559643850E-01	8.250386650E-02	4.554760450E+01	1.058360150E+01
67	3.768700000E+00	8.455464410E-01	8.832441840E-02	4.356097220E+01	1.057229100E+01
68	3.825000000E+00	8.334885620E-01	9.463464930E-02	4.155864580E+01	1.055489980E+01
69	3.881200000E+00	8.209112980E-01	1.014847690E-01	3.956318810E+01	1.053143010E+01
70	3.937500000E+00	8.061424690E-01	1.089383280E-01	3.754716500E+01	1.050187050E+01
71	3.993700000E+00	7.907467170E-01	1.170617260E-01	3.554158960E+01	1.046621700E+01
72	4.050000000E+00	7.723085930E-01	1.259422690E-01	3.350633910E+01	1.042444190E+01
73	4.106200000E+00	7.531031440E-01	1.356710310E-01	3.148593990E+01	1.037652640E+01
74	4.162500000E+00	7.294304810E-01	1.463747550E-01	2.941835960E+01	1.032240640E+01
75	4.218700000E+00	7.047983960E-01	1.581853740E-01	2.737157470E+01	1.026203050E+01
76	4.275000000E+00	6.729723730E-01	1.713045770E-01	2.524045880E+01	1.019524990E+01
77	4.331200000E+00	6.399014640E-01	1.859417360E-01	2.313946050E+01	1.012193810E+01
78	4.387500000E+00	5.928916120E-01	2.024832090E-01	2.085420180E+01	1.004170260E+01
79	4.443700000E+00	5.441307600E-01	2.213285440E-01	1.861800680E+01	9.954199140E+00
80	4.500000000E+00	4.457872520E-01	2.438407100E-01	1.562764890E+01	9.857534000E+00

I	r_{1-1/2}	n⁽⁰⁾_{p-1/2} , 1-я итер.	n⁽⁰⁾_{p-1/2} , последняя итер.
1	2.250000000E-01	9.885307410E-01	1.275950630E+02
2	6.750000000E-01	9.873575340E-01	1.245235020E+02
3	1.125000000E+00	9.848153680E-01	1.186400010E+02
4	1.575000000E+00	9.803205310E-01	1.101069570E+02
5	2.025000000E+00	9.728185740E-01	9.924627900E+01
6	2.475000000E+00	9.603402040E-01	8.646396460E+01
7	2.925000000E+00	9.391188330E-01	7.222307120E+01
8	3.375000000E+00	9.013735350E-01	5.700532990E+01
9	3.825000000E+00	8.284547420E-01	4.122881140E+01
10	4.275000000E+00	6.511009290E-01	2.477850640E+01

ЛИТЕРАТУРА

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
2. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М. Наука, 1966, 686с.
3. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1981, 454 с.
4. А.А. Самарский. Теория разностных схем. М., Наука, 1983
5. Самарский А.А. Прямой расчет мощности взрыва. – Международный симпозиум, Дубна, 14-17 мая 1996 г. В сб.: “Наука и общество: история советского атомного проекта (40-е – 50-е годы)”, 1997, том. 1, стр. 214-222.
6. В.Я. Гольдин. Методы расчета переноса нейтронов и горения в термоядерном изделии (1948–1960 гг.) – Международный симпозиум, Дубна, 14–17 мая 1996 г. В сб.: “Наука и общество: история советского атомного проекта (40–е – 50–е годы)”, 1999, том.2, стр.497–501.
7. В.Е. Трощев. Решение кинетического уравнения и уравнений квазидиффузии по согласованным разностным схемам. – Численные методы решения задач математической физики (дополнение к ЖВМ и МФ, 6, № 4). М.: Наука, 1966. С.177-185.
8. В.Е. Трощев, В.Ф. Юдинцев, В.И. Федянин. Об ускорении сходимости итераций при решении кинетического уравнения. ЖВМ и МФ, 1968, 8, №2, с.452-458.
9. А.В. Никифорова, В.А. Тарасов, В.Е. Трощев. О решении кинетических уравнений дивергентным методом характеристик.–ЖВМ и МФ, 1972, 12, N4,с.1041–1048.
10. В.Е. Трощев. О математических свойствах S_n -методов решения кинетических уравнений.– ЖВМ и МФ, 1975, 15, N5, с.1209–1221.
11. Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1978.
12. Басс, А.М. Волощенко, Т.А. Гермогенова. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. ИПМ АН СССР, М., 1986.
13. В.Е. Трощев, В.А. Шумилин. Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках. – ЖВМ и МФ, 1986, 26,N2, с.230–241.
14. О. С. Широковская. Об одной модификации DS_n -метода. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып.1. с.24–29.
15. Н. П. Плетенева, Р. М. Шагалиев. Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном.// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып.3. с.34–40.
16. Л.П. Федотова, Р.М. Шагалиев. Конечноразностный КМ-метод для двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении. Математическое моделирование. 1991. т.3, №6. С.29-41.

17. В.А. Елесин, В.Е. Трощев, В.Ф. Юдинцев. Развитие численных методов и программ расчета одномерных спектральных задач переноса теплового излучения во ВНИИЭФ. – ВАНТ, Серия: Математическое моделирование физических процессов, 2002, Вып. 1, с. 11-28.
18. А. Н. Москвин, В. А. Шумилин. Методика решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных многоугольных сетках. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып.1. с.31–40.
19. Калиткин Н. Н. Численные методы. М., Наука, 1978.
20. В.Е. Трощев. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором. – ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 3, с.793-797.
21. Б. Карлсон, Дж. Белл. Решение транспортного уравнения S_n -методом. – В сб. “Физика ядерных реакторов”. М., Атомиздат, 1959, стр.408–432.
22. Б. Карлсон. Численное решение задач кинетической теории нейтронов. В сб. “Теория ядерных реакторов”. М., Госатомиздат, 1963, 243–258.
23. Карлсон Б.Г., Латроп К.Д. Теория переноса. Метод дискретных ординат. В сб.: Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Х. Гринпсена, К. Келбера и Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972, стр.102-157.
24. В.С. Владимиров. Численное решение кинетического уравнения для сферы. Вычислительная математика, 3, 1958, 3–33.
25. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М. «Мир», 1972, 418 с.
26. О. В. Бутнева, Ю. М. Матвеев. Численное сравнение дискретной и непрерывной аппроксимаций S_n -метода решения сферически-симметричного уравнения переноса. ВАНТ, Серия: Методики и программы численного решения задач математической физики, 1983, вып.3, С.36-40.
27. Е. В. Грошев, А. М. Пастушенко, В. Ф. Юдинцев. Об одной трехточечной разностной схеме с весовым множителем для уравнения переноса. – Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып.2. С.87–96.
28. а) С. В. Мжачих, Е. В. Грошев, В. Ф. Юдинцев. О некоторых свойствах $\tilde{D}S_n^Y$ -схем для сферически-симметричного уравнения переноса. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып.2. с.21–31.
 б) С. В. Мжачих, Е.В. Грошев, В. Ф. Юдинцев. Еще о свойствах $\tilde{D}S_n^Y$ -схем для сферически-симметричного уравнения переноса. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып.2. с.42–48
29. В.А. Елесин, В.Е. Трощев, В.Ф. Юдинцев, В.И. Федянин – Численная методика и организация программы для решения многогруппового нестационарного кинетического

- уравнения. Сб.: Комплексы программ математической физики, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972, 18–23.
30. В. Я. Гольдин, Н. Н. Калиткин, Т. В. Шишова. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965, т.5, №5, с.938-944.
 31. Головизнин В. М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики. ДАН, 2005, т.403, №4, с.1-6.
 32. Аристова Е. Н., Гольдин В. Я., Дементьев А. С. Разностное решение двумерного стационарного уравнения переноса в переменных Владимирова. Математическое моделирование, 2006, т.18, №6, с.44-52.
 33. В. Я. Гольдин. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. - ЖВМ и МФ, 1964, т.4, №6, с.1078-1087.
 34. В. Я. Гольдин, А. В. Колпаков, А. В. Мисюрёв. Решение нестационарного уравнения переноса без явного выделения фронта. – Препринт ИПМ АН СССР N68, 1983.
 35. Carlson B. G. A method of characteristics and other improvements in solution methods for the transport equation. Nuclear science and engineering: 61, 408-425 (1976).
 36. Т. А. Гермогенова, А. М. Волощенко. К развитию метода дискретных ординат. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов. 1985. Вып. 5. С. 57.
 37. А. Д. Гаджиев, И. А. Кондаков, В. Н. Писарев, О. И. Стародумов, А. А. Шестаков. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией для численного решения уравнения переноса нейтронов. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып.4. с.13–24.
 38. А. Д. Гаджиев, В. Н. Селезнев, А. А. Шестаков. DSn-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып.4. с.33–46.
 39. K. D. Lathrop. A Comparison of Angular Difference Schemes for One-Dimensional Spherical Geometry S_N Equations. Nuclear Science and Engineering: 134, 239-264 (2000).
 40. Е. В. Диянкова, О. С. Широковская. LD–схема для уравнений переноса в сферической геометрии. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып.1. с.40–43.
 41. Е. В. Диянкова, О. С. Широковская. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса. Математическое моделирование, 1994, т.6, №2, с.113-122.
 42. О.С. Широковская, Л.В. Соколов. Неявные консервативные монотонные схемы высокого порядка точности для численного решения уравнения переноса. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып.2. с.31-40.

43. О. В. Диянков. Почти монотонная неявная разностная схема повышенного порядка точности бегущего счета для решения линейного уравнения переноса. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып.3. с.36–44.
44. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. – Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1961, - 158 с.
45. Марчук Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958, 381 с.
46. Трощев В. Е., Нифанова А. В., Трощев Ю. В. Характеристический подход к аппроксимации законов сохранения в кинетических уравнениях переноса излучений. ДАН, 2004, т394, N4, стр.454-458.
47. W. H. Reed. New Difference Schemes for the Neutron Transport Equation. Nucl. Sci. Eng., 46, 1971, p.309-315
48. С. Р. Меркулова, В. Е. Трощев. Монотонные разностные схемы для уравнения переноса и метод их построения. Препринт ИАЭ им. И.В. Курчатова, N5458/16, М., 1992.
49. В. Е. Трощев, А. В. Нифанова. Построение и исследование разностных схем для уравнения переноса первого и второго порядка в плоском слое. Препринт ТРИНИТИ N0052–А,(1999), 6с.
50. А. В. Нифанова, В. Е. Трощев. Нелинейная монотонная схема типа DS_n -метода для уравнения переноса. Научная сессия МИФИ–2001 сборник научных трудов, т.7, М., 2001, с.85–85.
51. Трощев В.Е., Трощев Ю.В. Монотонные разностные схемы с весом для уравнения переноса в плоском слое. – Математическое моделирование, т. 15, № 1, 2003, с. 3-13.
52. А.В. Нифанова. Характеристический подход к аппроксимации сферического уравнения переноса. Научная сессия МИФИ–2003 сборник научных трудов, т.7, М., 2003, с.107–108.
53. А. В. Нифанова, В. Е. Трощев. О методах распределения полного потока в схемах для сферического уравнения переноса. Научная сессия МИФИ–2004 сборник научных трудов, т.7, М., 2004, с.98–99.
54. А. В. Нифанова, В. Е. Трощев. Обобщение метода характеристических трубок на S_n -сетки для сферически-симметричного уравнения переноса. Препринт ТРИНИТИ N0097–А,(2002), 16с.
55. В. Е. Трощев, А. В. Нифанова. Подход характеристических трубок к анализу DS_n -метода и построение новых разностных схем на S_n -сетках. – Математическое моделирование, т. 18, № 7, 2006, с. 24-42.
56. В.Е. Трощев, А.В. Нифанова. Характеристический анализ непрерывного S_n -метода. Научная сессия МИФИ–2007 сборник научных трудов, т.7, М., 2007, с.100–101.
57. В. Я. Гольдин. Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения. ДАН СССР, 1960, т.133, №4, с.748-751.
58. В.Е. Трощев. Метод построения блочно-треугольных разностных схем для уравнения переноса в самосопряженной форме. – Математическое моделирование. 1998, 10, №1, с.117-125.