Институт Проблем Механики РАН

На правах рукописи

Овсеевич Александр Иосифович

Области достижимости управляемых систем, их свойства, аппроксимации и применения

01.02.01 — теоретическая механика

Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук

Москва, 1996

Введение

1 Области достижимости в теории управления

Рассмотрим управляемую динамическую систему общего вида, подверженную к тому же действию неопределенных факторов. Пусть движение состояния системы x подчиняется следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}(t) = f(t, x; u, v). \tag{1.1}$$

Здесь t — текущее время, $u = u(t)$ — управляющее воздействие, $v = v(t)$ — неконтролируемое возмущение.

В такой постановке задача управления системой, находящейся под действием неопределенных факторов лишь чисто психологически отличается от общей задачи теории дифференциальных игр. В этой общей задаче u и v трактуются как управления первого и второго игроков, соответственно. В нашей же исходной постановке второй игрок не преследует каких-то известных нам целей. Однако, если следовать гарантированному подходу (см. [31, 32, 36]), то в качестве цели второго игрока принимается нанесение нам (первому игроку) максимального ущерба.

Вообще говоря, возможные величины векторов управлений и возмущений (допустимых управлений и возмущений) могут быть сложным образом связаны с движением динамической системы. Например, часто рассматривают (см. [21, 22, 23, 37, 38, 39]) интегральные ограничения на управления и/или возмущения вида

$$\int_s^T \phi(t,x,u,v)dt \leq Q,$$

где $\phi(t,x,u,v)$ — заданная функция, s и T — соответственно начальный и конечный моменты движения, Q имеет смысл предельной величины некоего ресурса. Мы, однако, будем рассматривать лишь случай *геометрических* ограничений, имеющих вид

$$u \in U(t,x),$$

$$v \in V(t,x).$$

Таким образом, возможные значения векторов управлений и возмущений полностью определяются текущим моментом времени и состоянием системы.

Такая ситуация естественно приводит к удобной переформулировке закона движения рассматриваемой динамической системы. Рассмотрим множество $F(t,x,v)$ значений вектор-функции f при всевозможных векторах управления $u \in U(t,x)$. Тогда уравнение движения (1.1) переписывается в виде *дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(t,x,v),$$

где в правую часть помимо времени и фазового состояния входят неконтролируемые возмущения. Общее понятие дифференциального включения (см. [89, 10, 75]) определяется заданием для каждого момента времени и состояния системы некоторого множества, которое может также зависеть и от других параметров (в нашем случае — неконтролируемых возмущений). Это множество называется правой частью или индикатрисой дифференциального включения. После этого можно определить решение дифференциального включения как такую траекторию в пространстве состояний (фазовую кривую), что вектор скорости в каждый момент времени лежит внутри индикатрисы. Решение дифференциального включения называют также допустимой траекторией.

Таким образом, исследование динамических систем рассматриваемого класса сводится к изучению допустимых траекторий дифференциальных включений.

Часто мы не нуждаемся в полном определении траектории динамической системы, а интересуемся только положением системы в определенный момент T. Совокупность всевозможных векторов состояния системы в этот момент называется областью или множеством достижимости системы в момент T. Если известно, что в начальный момент s возможные векторы состояний системы образуют некоторое множество M, то говорят об области достижимости $D(t, s; M)$ системы исходя из множества M в момент s. Область достижимости, вообще говоря, зависит от реализации неконтролируемых возмущений.

Понятие области (множества) достижимости предоставляет удобный язык, на котором могут быть описаны различные конкретные задачи теории управления. Ниже мы приведем некоторые примеры того, как это делается.

1.1 Выяснение возможностей управления

Если нам известны области достижимости $D(t, s; M)$, то можно легко оценить возможности управления. Например, часто возникает такой вопрос:"Возможно ли перевести систему в некоторое предписанное состояние x^* в предписанный момент $T > s$?" Для ответа на этот вопрос достаточно проверить, принадлежит ли вектор x^* множеству $D(T, s; M)$. Рассмотрим более общую задачу о приведении системы на заданное терминальное многообразие N в момент T. Ясно, что решение этой задачи эквивалентно выяснению того, пересекается ли терминальное многообразие N с множеством достижимости $D(T, s; M)$. Зная области достижимости, мы можем проанализировать как решение этих задач зависит от момента времени T и множеств M и N. Заметим, что задачи такого рода часто возникают в приложениях.

1.2 Управляемость

Рассмотрим множество $\Delta(s, M)$ — объединение областей достижимости $D(T, s; M)$ для всех моментов $T \geq s$. Если множество $\Delta(s, M)$ совпадает со всем пространством состояний системы, то такая система называется вполне управляемой. Выяснение того, управляема ли данная динамическая система, является классической задачей теории управления. Для линейных систем без ограничений на управления необходимые и достаточные условия управляемости получены Калманом (см. [18]). В дальнейшем появилось много работ, посвященных условиям управляемости линейных систем с ограничениями на управления и нелинейных систем (см. [91, 35, 58, 101, 109, 110]).

1.3 Оценка возмущений и практическая устойчивость

Рассмотрим случай *неуправляемой* системы. В рамках рассматриваемой схемы это означает, что в уравнении (1.1) отсутствует параметр u. После этого мы можем рассматривать параметр v, подчиненный геометрическим ограничениям, как управляющий, и считать, что возмущения отсутствуют. Тогда области достижимости приобретают смысл тех множеств куда система может попасть под действием допустимых возмущений. Тем самым области достижимости характеризуют отклонения траекторий под действием возмущений или точность, с которой можно предсказать движение возмущаемой системы. Иногда задачу оценки возможных отклонений возмущенного движения от номинальной траектории называют задачей о практической устойчивости или о накоплении возмущений.

1.4 Задача управления с терминальным функционалом

Рассмотрим случай отсутствия возмущений у рассматриваемой управляемой системы, иными словами, отсутствия параметра v в уравнениях движения (1.1). Требуется найти допустимое управление $u(t)$ и начальный вектор из множества M, такие что при этом достигается минимум терминального функционала, то есть функционала вида

$$J = F(x(T)),$$

где F — заданная функция, а T — заданный момент времени. Ясно, что сформулированная задача эквивалентна задаче минимизации функции F на области достижимости $D(T, s; M)$. Тем самым, знание областей достижимости позволяет свести сложную задачу оптимального управления к сравнительно более простой задаче нелинейного программирования. Таким образом, полезность областей достижимости в теории оптимального управления становится очевидной.

1.5 Задача быстродействия

Эта задача состоит в приведении системы на заданное множество за кратчайшее время. Такой вопрос часто возникает в теории и в приложениях. Более того, с такого типа задач началось развитие вариационного исчисления, когда Пьер Ферма обнаружил, что распространение луча света описывается именно принципом кратчайшего времени.

Ясно, что с точки зрения областей достижимости вопрос состоит в следующем: требуется найти такое минимальное время T^*, чтобы область достижимости $D(T^*, s; M)$ в этот момент пересекалась с заданным множеством.

Такая переформулировка снова подчеркивает полезность областей достижимости в теории (и практике) оптимального управления.

1.6 Дифференциальные игры

Рассмотрим возможности применения областей достижимости к дифференциальным играм ([32, 33]). Рассмотрим двух игроков X и Y, поведение которых описывается управляемыми динамическими системами вида

$$X: \ \dot{x} = f(x, u, t), \ u \in U, \ x(s) = x^0$$

$$Y: \ \dot{y} = g(x, v, t), \ v \in V, \ y(s) = y^0$$

Зафиксируем момент окончания игры $T > s$ и пусть выигрыш имеет вид

$$J = \Phi(x(T), y(T)),$$

где Φ — заданная функция. Задача первого игрока состоит в минимизации, а задача второго в максимизации выигрыша. Предположим, что существует пара оптимальных стратегий, имеющих форму синтеза:

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t),$$

а J^* является соответствующей ценой игры. Таким образом, ни один из игроков не может улучшить свои показатели за счет изменения стратегии, если второй игрок продолжает пользоваться указанной оптимальной стратегией.

Обозначим через $D_X = D_X(T, s; x^0)$ и $D_Y = D_Y(T, s; y^0)$ области достижимости первого и второго игрока. Тогда ясно, что цена игры J^* оценивается следующими неравенствами

$$\max_{y \in D_Y} \min_{x \in D_X} \Phi(x, y) \leq J^* \leq \min_{x \in D_X} \max_{y \in D_Y} \Phi(x, y)$$

Максимин в левом неравенстве соответствует ситуации, когда вначале второй игрок выбирает оптимальное программное управление, а затем первый игрок на этой основе выбирает свое оптимальное программное управление. Максимин в правом неравенстве соответствует противоположному порядку выбора оптимальных программных управлений игроков. Ясно, что вместо выбора программных управлений игроки могут выбирать точки в своих областях достижимости.

Таким образом, с помощью областей достижимости можно получать двусторонние оценки цены дифференциальной игры.

1.7 Гарантированное оценивание (фильтрация) динамических систем

Рассмотрим управляемую динамическую систему, за которой ведется наблюдение. Предположим, что система сама по себе не подвержена неконтролируемым возмущениям, но процесс наблюдения сопровождается ошибками. Требуется по результатам наблюдений за состоянием динамической системы определить множество возможных состояний $D^*(t)$ системы в любой момент времени t. Это множество зависит от результатов наблюдений на интервале времени от s до t и называется также информационным множеством или множеством неопределенности. Если наблюдения не ведутся или, что эквивалентно, ошибка наблюдений a priori неограничена, то информационное множество совпадает с областью достижимости.

Рассмотрим теперь простейший случай наблюдений в дискретные моменты времени t_i с результатом $y(t_i)$ и пусть $Y(y,t)$ — множество состояний системы, совместимых с результатом наблюдения y в момент времени t.

Эволюцию информационного множества можно описать следующим образом. Это множество, как функция времени, имеет разрывы первого рода в моменты наблюдений. Примем для определенности, что эта функция непрерывна слева, так что $D^*(t_i)$ — информационное множество непосредственно перед наблюдением, а $D^*(t_i+0)$ — сразу после наблюдения. Тогда в интервале $(t_i, t_{i+1}]$ между наблюдениями информационное множество $D^*(t)$ совпадает с областью достижимости $D(t, t_i; D^*(t_i))$ исходя из множества $D^*(t_i))$ в момент t_i. В момент же наблюдения информационное множество заменятся на пересечение самого себя, взятого в непосредственно предшествующий момент, с множеством $Y(y(t_i), t_i)$:

$$D^*(t_i+0) = D^*(t_i) \cap Y(y(t_i), t_i).$$

Таким образом, задача гарантированного оценивания сводится к многократному построению областей достижимости и их пересечений с множествами состояний системы, совместимых с результатами наблюдений.

2 Структура и содержание диссертации

В диссертации изучен комплекс вопросов теории управления, группирующихся вокруг понятия области достижимости. Рассмотрены применения областей достижимости как внутри теории управления, так и вне ее. Исследованы вопросы аппроксимации областей достижимости и некоторые задачи о качественном поведении этих областей и их аппроксимаций.

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы.

Задача введения состоит в краткой постановке основных задач теории управления, связанных с областями достижимости, описания состояния дел в соответствующих областях теории управления, а также структуры и содержания диссертационной работы. Введение заканчивается конкретным примером использования техники областей достижимости в некоторых задачах из отдаленных областей “математического естествознания”. Точнее говоря, мы доказываем с помощью этой техники обобщение фундаментальной теоремы Ли–Янга из теории фазовых переходов в ферромагнетиках.

Первая глава посвящена вопросу о полной управляемости динамических систем. В первой части главы изучаются линейные, а во второй — нелинейные системы. Соответственно, результаты второй части значительно менее полны, чем в первой.

В теории управления линейными системами центральное место занимает фундаментальный, хотя и несложно доказываемый, ранговый критерий Калмана полной управляемости систем с неограниченными управлениями. Известны также и его обобщения на нелинейные системы. Разумеется, критерий Калмана не может исчерпать всех аспектов вопроса об управляемости.

Легко видеть, что уже для линейных систем с ограниченными управлениями ранговый критерий не дает *достаточных* условий управляемости. Здесь ответ дается теоремой Браммера [91]. Еще сложнее обстоит дело с управляемостью нелинейных систем. В сколько-нибудь общей ситуации, здесь нельзя рассчитывать найти обозримые необходимые и достаточные условия полной управляемости.

В первой части первой главы для линейных систем проведено новое, довольно конструктивное доказательство классического результата Браммера о необходимых и достаточных условиях полной управляемости линейной системы с ограниченными управлениями. Это доказательство одновременно устанавливает, что программное управление, осуществляющее переход системы из одного состояния в другое, можно брать в виде квазиполинома. Тем самым задача построения такого управления в принципе сведена к решению системы линейных уравнений. В качестве приложения получена оценка времени успокоения (при использовании квазиполиномиального управления) для системы многих маятников на управляемой тележке.

Во второй части главы получены новые нелинейные обобщения критерия Калмана как *необходимого* условия управляемости. Мы сужаем разрыв между необходимыми и достаточными условиями полной управляемости, усиливая упомянутое выше нелинейное обобщение условия Калмана.

При этом, однако, приходится жертвовать общностью и ограничиться рассмотрением аналитических динамических систем на многообразиях, удовлетворяющих некоторым (довольно слабым) топологическим ограничениям. В отличие от ранее известных нелинейных обобщений условия Калмана ([101, 109]) наше условие вытекает из глобальных соображений, основанных на построении полупроницаемых поверхностей для рассматриваемой динамической системы.

Приводимые в этой части работы примеры показывают, что условия нашей теоремы нельзя существенно ослабить.

В конце главы обсуждается подсказанная классическими результатами Хёрмандера [102] связь между полной управляемостью динамической системы и аналитической гипоэллиптичностью некоторых связанных с ней дифференциальных операторов второго порядка.

Вторая глава посвящена главному техническому средству работы с областями достижимости — дифференциальному уравнению типа уравнения Беллмана, для опорных функций "наилучших" эволюционных выпуклых верхних оценок этих областей.

Эта глава, как и предыдущая, естественным образом разбивается на две части. При этом первая часть непосредственно относится к теории управления, но ее основные результаты основаны на материале второй части главы, которая, по существу, принадлежит к теории уравнений в частных производных в чистом виде.

Первая часть главы начинается с эвристических соображений, ведущих к формулировке так называемого "двойственного уравнения Беллмана". Известно (см. [60, 61]), что иногда это уравнение описывает опорную функцию области достижимости. Как правило, это описание корректно только до момента потери строгой выпуклости областью достижимости. Поскольку такой момент неизбежно наступает для нелинейной динамической системы общего положения, то естественно возникает задача придания смысла с точки зрения теории управления *глобальному* (по времени) решению двойственного уравнения Беллмана.

В первой части формулируется фундаментальное понятие теории оценивания областей достижимости — понятие области супердостижимости (а также области субдостижимости). Показано, что двойственное уравнение Беллмана описывает опорную функцию *минимальной* выпуклой области супердостижимости.

Установленное соответствие между решениями двойственного уравнения Беллмана и минимальными выпуклыми областями супердостижимости носит довольно деликатный характер. В частности, поскольку глобальные решения двойственного уравнения Беллмана, вообще говоря, — негладкие, то требуется работать с обобщенными, так называемыми *вязкими* решениями. При этом не удается воспользоваться готовыми результатами теории вязких решений нелинейных уравнений в частных производных первого порядка (см., например, [95]), а приходится развивать соответствующую технику с самого начала.

Соответствующая теория выпуклых *вязких* решений уравнений первого (и второго) порядка строится во второй части главы. Основным ее результатом служит фундаментальная теорема существования выпуклых вязких решений у эволюционного нелинейного уравнения первого порядка с выпуклой правой частью. Двойственное уравнение Беллмана принадлежит к этому классу уравнений, что и позволяет доказать основные результаты первой части главы.

Тема аппроксимации областей достижимости доминирует в третьей главе. В ней методы второй главы применяются к задаче аппроксимации областей достижимости линейных управляемых систем с помощью эллипсоидов. В этой главе получены явные дифференциальные уравнения для параметров *оптимальных* в некотором смысле эллипсоидов суб- и супердостижимости рассматриваемой системы. Полученные результаты можно также трактовать как решение некоторой задачи оптимального гарантированного оценивания и даже как гарантированный аналог уравнений фильтра Калмана.

Результаты этой главы доставляют обобщение основных уравнений из работ [50, 82, 83, 77, 94].

Заключительные главы (4, 5, 6) этой работы посвящены качественным свойствам областей достижимости и их эллипсоидальных аппроксимаций. Это свойства, относящиеся к асимптотике при больших временах областей достижимости и аппроксимирующих эллипсоидов, а также свойства гладкости границ областей достижимости. (К счастью, последняя проблема для эллипсоидов решается тривиально.)

В четвертой главе изучается вопрос о предельном поведении некоторых *локально оптимальных* эллипсоидов супердостижимости для *устойчивых* линейных управляемых систем. Основная гипотеза, относящаяся к этой задаче, состоит в том, что такой предел при времени движения, стремящемся к бесконечности, всегда существует. Иными словами, в рассматриваемом отношении, *хорошие* локально оптимальные эллипсоиды супердостижимости ведут себя так же, как сами области достижимости. Эта гипотеза далека от доказательства, но в четвертой главе собрано много свидетельств в ее пользу. В частности, во многих случаях показано, что дифференциальные уравнения эллипсоидов имеют *единственную* точку равновесия, а в двумерном "диагональном" случае основная гипотеза доказана.

Пятая глава посвящена предельному поведению самих областей достижимости, а также их *глобально оптимальных* эллипсоидальных аппроксимаций случая для линейной *автономной* управляемой общего вида системы. Здесь основная задача состоит в том, чтобы правильно обобщить на общий случай результаты, которые близки к очевидным в случае *устойчивых* линейных управляемых систем. Эта задача решается с помощью нового понятия *формы* выпуклого тела. Под формой следует понимать класс эквивалентности выпуклого тела относительно всевозможных невырожденных линейных преобразований. Оказывается, хорошо ведут себя относительно предельного перехода по большому времени не сами области достижимости, а их формы. Предельные формы областей достижимости допускают сравнительно простое описание, которое сводится к рассмотрению трех “подсистем” исходной системы, соответствующих строго устойчивому, строго неустойчивому и нейтральному подпространству матрицы системы.

Аналогичные результаты получены и для *глобально оптимальных* эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости. Конечно, непосредственное применение к ним понятия “формы” совершенно бессодержательно, поскольку все эллипсоиды имеют одинаковую форму. Оказывается, однако, что если модифицировать эллипсоиды с помощью тех же матричных множителей, которые обеспечивают сходимость форм областей достижимости, то в результате получается сходящееся к определенному пределу семейство эллипсоидов. Для получаемых таким образом предельных эллипсоидов также верен некоторый принцип расщепления, который, как и в случае областей достижимости, позволяет при их описании ограничиться рассмотрением трех “подсистем” исходной системы, соответствующих строго устойчивому, строго неустойчивому и нейтральному подпространству матрицы системы. Таким образом, установлено, что *глобально оптимальные* эллипсоиды доставляют *хорошую* аппроксимацию областей достижимости, в том смысле, что их предельное поведение качественно близко к поведению областей достижимости.

Наконец, в шестой главе изучаются особенности границ областей достижимости линейных *автономных* управляемых систем. Построенную теорию можно считать расширением теории двойственности Калмана [18]. Эта последняя устанавливает связь между управляемостью некоторой линейной управляемой системы и *линейной* наблюдаемостью сопряженной системы. В шестой главе устанавливается аналогичная связь между гладкостью границы областей достижимости линейной автономной управляемой системы и некоторыми задачами о *нелинейной* наблюдаемости сопряженной системы. Более точно, формулируются задачи о *проективной* и *сферической* наблюдаемости, и показано, что если эти задачи разрешимы, то отсюда вытекает гладкость границ областей достижимости за определенный интервал времени. В частности, в случае проективной наблюдаемости, этот интервал произволен.

Сформулированные результаты позволяют найти аналог рангового критерия управляемости Калмана для задачи о гладкости границы областей достижимости за любой интервал времени и/или о проективной наблюдаемости.

Кроме того, в этой главе получены результаты о гладкости границ *предельных форм* областей достижимости, введенных в предыдущей главе.

В заключении резюмированы основные результаты диссертационной работы.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались ряде конференций, в том числе на конференции IFAC Вильнюс 1986, “Понтрягинские чтения” Кемерово 1990, “Modeling, Estimation and Filtering of Systems with Uncertainty” Sopron, Hungary, 1990, “Symposium on optimal control of mechanical systems” IUTAM Москва 1992, “Modeling Technics for uncertain Systems” Sopron, Hungary, 1992, “Математические методы навигации и управления движущимися объектами” Таруса 1994, “Nonlinear and game theoretic control synthesis” Институт Эйлера, Санкт-Петербург 1995, на международном семинаре “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” Москва 1996, на научных семинарах Института проблем механики РАН, Московского института электронного машиностроения, Математического института им. Стеклова, МГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [20, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 82, 83, 112, 113, 114, 116].

Объем работы. Диссертация содержит 177 страниц формата А4; использован текстовый шрифт размером в 12 точек (4.23 мм).

Автор выражает глубокую благодарность коллективу лаборатории механики управляемых систем ИПМ РАН и, особенно, его руководителю — академику Российской Академии Наук Ф. Л. Черноусько за постоянное внимание и поддержку.

3 Одно применение к статистической физике

В этом разделе приводится пример применения соображений, связанных с областями достижимости динамических систем, к задачам из совершенно других областей. Точнее говоря, здесь мы демонстрируем применение техники областей достижимости к одной задаче, возникшей в статистической физике, и доказываем с помощью этой техники обобщение фундаментальной **теоремы Ли–Янга** из теории фазовых переходов в ферромагнетиках.

Мы указываем некоторое свойство статистической суммы, связанной с решетчатой динамической системой общего вида, которое с одной стороны включает в себя отсутствие нулей у статсуммы как функции внешнего поля в определенных областях комплексного пространства, а с другой стороны сохраняется при подключении добавочного квадратичного взаимодействия. Отсюда вытекает важная теорема Ли – Янга из теории фазовых переходов в ферромагнетиках.

3.1 Введение

В 1952 г. физики Ли и Янг опубликовали важную работу [130], относящуюся к теории фазовых переходов. Их подход был основан на выделении некоторых областей в комплексном пространстве значений внешнего магнитного поля, в которых статсуммы изинговых ферромагнетиков не обращаются в нуль. Теорема Ли-Янга утверждает, что некоторые области, по очевидным причинам не содержащие нулей статсуммы, отвечающей невзаимодействующим спинам, не содержат также и нулей статсуммы, соответствующей ферромагнитному взаимодействию.

Здесь мы показываем, что существует некоторое свойство статистической суммы (характеристической функции меры на $\mathbf{R}^n$), которое включает в себя отсутствие нулей в некоторых областях комплексного пространства и сохраняется при добавлении квадратичного взаимодействия (т.е. умножения исходной меры на функцию вида $\exp A(x)$, где A — квадратичная форма специального вида). В конце главы приведен пример, показывающий что само по себе свойство отсутствия нулей может быть нарушено при подобном возмущении гамильтониана.

3.2 Основные результаты

Для точной формулировки необходимо ввести некоторые обозначения.

Определение. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ — открытое подмножество комплексного пространства. Обозначим через $N(\Omega)$ замыкание множества $M(\Omega)$ многочленов, не имеющих нулей в Ω, в пространстве целых функций $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$,* *имеющих конечную норму* $||f||_\epsilon = \sup_{z\in\mathbf{C}^n}|f(z)|\exp(-\epsilon|z|^2)$ *для любого* $\epsilon > 0$. *Топология в пространстве целых функций задается этими нормами.*

Теорема Гурвица показывает что если $f \in N(\Omega)$, то f не обращается в нуль внутри Ω. Последнее свойство, однако, не гарантирует, что $f \in N(\Omega)$. Например, функция $z \mapsto e^{-iz}$ не содержится в $N(H_+)$, где $H_+ = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость.

Основной результат этого раздела состоит в следующем.

Теорема *Пусть* ν *— такая мера на* $\mathbf{R}^n$, *что*

$$\int \exp(a|x|^2)d\nu < \infty$$

для любого $a > 0$, Ω *— открытое подмножество* $\mathbf{C}^n$, $K = K(\Omega)$ *состоит из таких векторов* $\xi \in \mathbf{C}^n$, *что* $x + z\xi \in \Omega$ *если* $x \in \Omega, \operatorname{Im} z > 0$, Q_Ω *— множество квадратичных форм на* $\mathbf{R}^n$ *вида* $A(x) = \sum_{i=1}^N (\xi_i, x)^2, \xi_i \in K(\Omega)$. *Предположим, что характеристическая функция*

$$\hat{\nu}(z) = \int \exp i(z,x)d\nu(x)$$

меры ν *лежит в* $N(\Omega)$. *Тогда, если* $A \in Q_\Omega$, *то характеристическая функция меры* $d\mu(x) = \exp A(x)d\nu(x)$ *также лежит в* $N(\Omega)$.

Исходная теорема Ли–Янга соответствует случаю $\Omega = \mathbf{R}^n + i\mathbf{R}^n_+$, $d\nu(x) = \prod_{i=1}^n d\nu_i(x_i)$, $\nu_i = \delta_{-1} + \delta_1$, где δ_t — мера Дирака с носителем в $t \in \mathbf{R}$. Значительно позднее Ньюман [111] обобщил этот результат убрав все ограничения кроме четности на меры ν_i. Данлоп и Ньюман [97] доказали теорему типа Ли–Янга для статсуммы плоских и пространственных ротаторов, а также для моделей теории поля со взаимодействием вида $(\sum \phi_i^2)^2$ и с числом компонент 2 или 3. Доказательства в этих работах, равно как и в некоторых других основаны на сведении к случаю ферромагнетиков со спином $1/2$ и последующей индукции по числу спинов. Здесь используется существенно иной подход.

Работа Либа и Сокала [108] имеет много общего с нашей. В частности, для случая $\Omega = \mathbf{R}^n + i\mathbf{R}^n_+$ их результаты являются более общими, чем наши. В некоторых приложениях, которые имели в виду как автор, так и Либ и Сокал, наша теорема приводит, однако, к несколько более точным, хотя и не вполне удовлетворительным результатам.

Доказательство теоремы: Ясно, что достаточно рассмотреть случай $A(x) = (\xi, x)^2, \xi \in K$, соответствующий мере

$$d\mu(x) = (\exp(\xi, x)^2) d\nu(x).$$

Рассмотрим функцию $f_t(Z) = f(Z, t), Z \in \mathbf{C}^n, t \in \mathbf{R}$, заданную формулой

$$f(Z, t) = \int \exp((\xi, x)^2 + i(Z, x)) d\nu(x).$$

Очевидно $f_0(Z)$ — характеристическая функция меры ν, а $f_1(Z)$ — характеристическая функция меры μ. Кроме того ясно, что $f(Z, t)$ целая функция от Z, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\xi, \frac{\partial}{\partial Z})^2 \phi = 0 \tag{3.1}$$

Хорошо известно, что задача Коши для уравнения (3.1) корректно поставлена в пространстве целых функций с нормой

$$||\phi||_\epsilon = \sup_{Z \in \mathbf{C}^n} |\phi(Z)| \exp(-\epsilon |Z|^2).$$

Это вытекает из формулы Пуассона для решения задачи (3.1). Обозначим через $T_t : \phi_0 \to \phi_t$ операторы полугруппы, порожденной уравнением

(1). Если

$$T_t(M(\Omega)) \subset M(\Omega) \quad \text{for} \quad t \geq 0, \tag{3.2}$$

то отсюда немедленно вытекает наша теорема, поскольку оператор T_t непрерывен, f_0 лежит в замыкании $N(\Omega)$ множества $M(\Omega)$, и поэтому $T_1 f_0 = f_1 \in N(\Omega)$.

Чтобы установить включение (3.2) рассмотрим произвольный многочлен $U_0 \in M(\Omega)$, точку $x \in \Omega$ и функции $U(Z,t) = (T_t U_0)(Z)$ и $u(z,t) = U(x + z\xi, t)$, где $z \in \mathbf{C}$. Ясно, что $U(Z,t)$ и $u(z,t)$ — многочлены соответственно по Z и по z. Кроме того, многочлен $u(z,0)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости. Действительно, если $u(z,0), \operatorname{Im} z > 0$, то вектор $x+z\xi \in \Omega$ является (несуществующим) корнем многочлена $U_0 \in M(\Omega)$.

Далее, из уравнения (3.1), примененного к $U(Z,t)$, следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3.3}$$

Поэтому, считая сформулированную ниже основную лемму доказанной, получим, что многочлен $u_t(z) = u(z,t)$ также не обращается в нуль в верхней полуплоскости. Таким образом, если $\operatorname{Im} z > 0, x \in \Omega$, то многочлен $U_t(Z) = U(Z,t)$ не обращается в нуль при $Z = x + z\xi$. Остается заметить, что любая точка $Z \in \Omega$ может быть записана в виде $x + z\xi$, где $x \in \Omega, \operatorname{Im} z > 0$. Это доказывает включение (3.2), а вместе с ним и теорему.

Основная лемма. *Пусть $u_t(z) = u(z,t)$ — многочлен по $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяющий уравнению теплопроводности (3.3). Тогда, если $u_0 \in M(H_+)$, то $u_t \in M(H_+)$ для любого $t \geq 0$.*

Эта лемма, по-существу, совпадает с одномерным вариантом теоремы и сам результат не является новым. Излагаемое далее доказательство, однако, представляется новым и, возможно, полезным для исследования не только статистической суммы для ферромагнетиков. Его идея состоит в сведении вопроса к вычислению области достижимости некоторой конечномерной динамической системы.

Доказательство леммы. Рассмотрим вначале случай когда $u(z,t)$ имеет простые корни по z. Обозначим их через $\alpha_i(t), i = 1, \ldots, N$. Тогда, как легко показать рассматривая уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2v\frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

которому удовлетворяет функция

$$v(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}\log u(z,t) = \sum (z - \alpha_i(t))^{-1},$$

что для α_i выполняется следующая система дифференциальных уравнений

$$\dot{\alpha}_i = 2\sum_{j\neq i}(\alpha_i - \alpha_j)^{-1}, i, j = 1, \ldots, N, \tag{3.4}$$

известных в теории солитонов.

Исследование системы (3.4) показывает, что если $\alpha_i(0)$ различны, то соответствующая задача Коши разрешима при $t \geq 0$ и все $\alpha_i(t)$ различны. Поэтому, чтобы обеспечить простоту нулей функции $u(z,t)$ достаточно считать, что нули функции $u(z,0)$ простые.

Условие $u_0 \in M(H_+)$ эквивалентно тому, что $\operatorname{Im}\alpha_i(0) \leq 0 \quad \forall i$. Покажем, что $\operatorname{Im}\alpha_i(t) \leq 0 \quad \forall i, t \geq 0$, или, иными словами, область достижимости динамической системы (3.4) с начальным условием $\operatorname{Im}\alpha_i(0) \leq 0 \quad \forall i$ одна и та же для всех положительных времен. Действительно, если $t \geq 0$ — первый момент, когда одна из координат $\alpha_i(t) \in \mathbf{C}$ становится вещественной, то полагая $z_j = \alpha_j(t) - \alpha_i(t)$ получим $\operatorname{Im} z_j \leq 0, \quad \forall j$ и $\operatorname{Im}(-z_j^{-1}) \leq 0$. Поэтому, $\operatorname{Im}\sum_{j\neq i}(\alpha_i(t) - \alpha_j(t))^{-1} \leq 0$ и более того, если существует такой индекс k, что координата $\alpha_k(t)$ не вещественна, то $\operatorname{Im}\sum_{j\neq i}(\alpha_i(t)-\alpha_j(t))^{-1}<0$.

Поэтому, либо все координаты $\alpha_i(t)\in\mathbf{R}$ и тогда уравнение (3.4) гарантирует, что все $\alpha_i(s)\in\mathbf{R}$ при $s\geq t$, либо $\operatorname{Im}\dot\alpha_i(t)<0$. Следовательно кривые $\alpha_i(t)$ не могут пересечь вещественную ось. Тем самым разобран случай, когда многочлен u_0 имеет простые корни. Общий случай получается отсюда с помощью аппроксимации u_0 многочленами с простыми корнями, лежащими в нижней полуплоскости. ∎

Поясним теперь почему само по себе отсутствие нулей характеристической функции в области Ω может быть нарушено при замене меры $d\nu$ на меру $\mu=T\nu,\quad d\mu(x)=\exp(A(x))d\nu(x)$.

Рассмотрим случай $n=1,\Omega=H_+$. Ясно, что квадратичная форма $A(x)=\frac{1}{2}x^2$ содержится в Q_Ω. Обозначим через ν_t сдвиг меры ν на $t\in\mathbf{R}$:

$$\int f(x)d\nu_t(x)=\int f(x-t)d\nu(x).$$

Тогда получим для характеристической функции $\widehat{T\nu_t}$ меры выражение $T\nu_t$

$$\widehat{T\nu_t}(z)=\int\exp(\tfrac{1}{2}(x-t)^2+iz(x-t))d\nu(x)=$$
$$\exp(-izt+\tfrac{1}{2}t^2)\int\exp(\tfrac{1}{2}x^2+i(z+it)x)d\nu(x)=$$
$$\exp(-izt)\widehat{T\nu}(z+it)$$

Поэтому, если $\widehat{T\nu}(z)=0$ для некоторого $z\in\mathbf{C}$, то при достаточно большом отрицательном t функция $\widehat{T\nu_t}$ имеет нуль H_+. В то же время функция $\widehat{\nu}_t(z)=\exp(-izt)\widehat{\nu}(z)$ не имеет нулей в H_+ если там не обращается в нуль начальная функция $\widehat{\nu}_t(z)$.

Глава 1

Полная управляемость. Когда области достижимости исчерпывают все пространство?

1 Линейная система с ограничениями на управление. Критерий Браммера

Указан критерий полной управляемости линейной динамической системы с ограниченными управлениями, а также показано, что программное управление, осуществляющее переход системы из одного состояния в другое, можно строить в виде квазиполинома. Тем самым задача построения такого управления в принципе сведена к решению системы линейных уравнений.

1. Одним из фундаментальных результатов теории управления является критерий Калмана [18], дающий необходимые и достаточные условия полной управляемости динамических систем вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m \tag{1.1}$$

Здесь $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ — линейные операторы, не зависящие от времени, Критерий Калмана состоит в том, чтобы пара матриц удовлетворяла следующему условию общности положения:

$$\operatorname{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \tag{1.2}$$

При этом условии можно из любой точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ попасть в любую точку $x_1 \in \mathbf{R}^n$, двигаясь по траектории динамической системы (1.1) с некоторым управлением $u(t)$. В данной работе указываются аналог критерия Калмана для случая, когда управления u в уравнении (1.1) стеснены ограничением

$$|u| \leq C \tag{1.3}$$

а также способ построения программного управления, обеспечивающего переход. Понятно, что при ограничении (1.3) условие Калмана (1.2) совершенно недостаточно для полной управляемости. Действительно, если, например, матрица A имеет строго отрицательные вещественные части у всех собственных чисел, то, исходя из любой точки и двигаясь вдоль траекторий системы (1.1), (1.3), нельзя выйти за пределы некоторого ограниченного множества, причем так будет при любом выборе матрицы B. Если же, наоборот, матрица A имеет строго положительные вещественные части у всех собственных чисел, то нельзя попасть, скажем, в $0 \in \mathbf{R}^n$ из достаточно далекой точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

2. Обсудим следующую теорему, впервые доказанную в [91], некоторые дальнейшие результаты см. в [35, 58].

Теорема 1. *Для полной управляемости системы* (1.1), (1.3) *необходимо и достаточно кроме условия Калмана* (1.2) *еще следующее:*

$$\operatorname{Re} \lambda_i = 0, \tag{2.1}$$

где λ_i *— собственные числа матрицы* A.

Поясним причины необходимости условия (2.1). Пусть для определенности у матрицы A имеется собственное значение λ, причем

$$\operatorname{Re} \lambda = a < 0 \tag{2.2}$$

Заметим, что замена A на $-A$ не изменяет свойства полной управляемости системы (1.1), (1.3), поэтому знак меньше в условии (2.2) не ограничивает общности. Пусть D_T — область достижимости за время T системы (1.1), (1.3) с начальным условием $x(0) = 0$, а h_T — ее опорная функция. Имеем [50]

$$h_T(\xi) = \int_0 T \sup_{|u|\leq C}(\exp(A(T-t))Bu, \xi)\,dt$$
$$\leq C|B| \int_0 T |\exp(A^*(T-t))\xi|\,dt \tag{2.3}$$

Здесь и всюду далее интегрирование по t ведется от 0 до T, A^* — матрица, транспонированная к A, $|B|$ — норма матрицы B. Из условия (2.2) следует, что существует такой вектор $0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n$, что

$$|\exp(A^* t)\xi| \leq C\exp(at), \quad a < 0 \tag{2.4}$$

Для этого достаточно положить $\xi = x + \bar{x}$, где $x \in \mathbf{C}^n$ — собственный, не чисто мнимый вектор матрицы A с собственным значением λ, $\bar{x}$ — комплексно-сопряженный вектор. Из соотношений (2.3), (2.4) вытекает, что величина $h_T(\xi)$ ограничена равномерно по T, что противоречит полной управляемости. Следовательно, условие (2.1) необходимо.

3. Покажем теперь, что управление $u(t)$, обеспечивающее переход из одной точки в другую, можно взять в виде векторного квазиполинома вида

$$u(t) = \sum a_{kl}\exp(\lambda_k t)t^l, \quad a_{kl} \in \mathbf{C}^n \tag{3.1}$$

где λ_k — собственные значения либо матрицы A, либо $-A$.

Теорема 2. *Пусть система* (1.1), (1.3) *вполне управляема* (*что означает, согласно теореме 1, выполнение условий* (1.2), (2.1)). *Тогда для перевода системы из заданного состояния в заданное можно использовать управление вида* (3.1).

Пусть управление $u(t)$ таково, что траектория системы (1.1) проходит через точки $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n, \quad x(0) = x_0, x(T) = x_1, T \geq 0$. Это эквивалентно тому, что

$$\int_0^T \exp(A(T-t))Bu(t)\,dt = x_1 - \exp(AT)x_0$$

Будем искать u в виде $u = u_0 + u_1$, где

$$\int_0^T \exp(A_i(T-t))Bu_i(t)\,dt = x_i(-1)^i, \quad A_i = A(-1)^i, i = 0,1 \qquad (3.2)$$

Если найти решение — квазиполином $u(t)$ уравнений (3.2), такое, что норма $|u(t)|$ мала, например не превосходит $C/2$, где C — постоянная из (1.3), то тем самым будет найдено квазиполиномиальное управление, переводящее систему (1.1), (1.3) из x_0 в x_1 за время T. Заметим, что если для матрицы A выполнены условия (1.2), (2.1), то они выполнены и для A_i. Поэтому окончательно задача сводится к решению уравнения

$$\int_0^T \exp(A(T-t)Bu(t)\,dt = x \qquad (3.3)$$

относительно неизвестного квазиполинома $u(t)$ с малой нормой, если матрицы A, B удовлетворяют условиям (1.2), (2.1), а время T достаточно велико. Будем искать u в виде

$$u = u_{t,\xi}(t) = B^* \exp(A^*(T-t))\xi \qquad (3.4)$$

Очевидно (см. [2]), что u — квазиполином. Из конструкции (3.4) естественным образом возникают помимо евклидовой нормы $|\xi| = (\xi,\xi)^{1/2}$ вектора ξ, еще две нормы и оператор P:

$$\|\xi\|_{\infty,T} = \sup_{0\leq t\leq T} |B^* \exp(A^*(T-t))| = \sup_{0\leq t\leq T} |u_{T,\xi}(t)|$$

$$\|\xi\|_{2,T} = (\int_0^T |B^* \exp(A^*(T-t))|^2 \, dt)^{1/2} = (\int_0^T |u_{T,\xi}(t)|^2 \, dt)^{1/2}$$

$$P\xi = P_T\xi = \int_0^T \exp(A(T-t))Bu_{T,\xi} \, dt$$

В этих обозначениях задача (3.3) сводится к решению уравнения

$$P_T\xi = x \tag{3.5}$$

с малой ($\leq C/2$) нормой $\|\xi\|_{\infty,T}$. Отметим, что существование решения ξ (без оценки нормы $\|\xi\|_{\infty,T}$) уравнения (3.5) следует из условия Калмана (1.2). Видно, что

$$(P_T\xi, \xi) = \|\xi\|^2_{2,T} \tag{3.6}$$

и что (в силу условия Калмана (1.2))

$$|\xi| \leq c\|\xi\|_{\infty,T}, \tag{3.7}$$

где постоянная c не зависит от T.

Основной факт, позволяющий найти решение ξ уравнения (3.5) с малой нормой, состоит в следующем.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (2.1). *Тогда при $T \to \infty$ равномерно по $\xi \neq 0$ имеем $\|\xi\|^2_{2,T} \geq cT\|\xi\|^2_{\infty,T}$ где c — положительная постоянная (не зависящая от T).*

Считая лемму установленной, оценим норму $\|\xi\|_{\infty,T}$ решения уравнения (3.5). Имеем в силу (3.5), (3.6) и леммы

$$(x, \xi) = \|\xi\|^2_{2,T} \geq cT\|\xi\|^2_{\infty,T} \tag{3.8}$$

при больших T. Неравенство Коши–Буняковского и неравенство (3.7) показывают, что $|x|\|\xi\|_{\infty,T} \geq |(x,\xi)|$. Теперь из (3.8) получаем

$$\|\xi\|_{\infty,T} \leq c|x|/T \tag{3.9}$$

и потому, в частности, при больших T всякое решение ξ уравнения (3.5) имеет малую норму $\|\xi\|_{\infty,T}$. Из неравенства (3.9) следует также, что можно перейти из точки $0 \in \mathbf{R}^n$ в точку $x \in \mathbf{R}^n$ или в обратном порядке за время $T = O(|x|)$.

Остается доказать лемму. Пусть

$$u(t) = u_{T,\xi}(t) = \sum a_{kl} \exp(\lambda_k t) t^l,$$

$a_{kl} \in \mathbf{C}^n$. Тогда $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ в силу условия (2.1). Имеем $u(t) = \sum p_k(t) \exp(i\omega_k t)$, где p_k — (векторзначные) полиномы, степень которых не превосходит максимального размера жордановых клеток матрицы A с собственным значением $i\omega_k$, ω_k — вещественное число. Нужно показать, что для функций такого вида выполняется при $T \to \infty$ неравенство

$$I = \int_0^T |u(t)|^2\, dt \geq cT\|\xi\|_{\infty,T}, \quad \|\xi\|_{\infty,T} = \sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)| \tag{3.10}$$

В самом деле

$$\begin{aligned} &I = T\langle |u(T\tau)|^2 \rangle = T\langle |\textstyle\sum p_k(T\tau)\exp(i\omega_k T\tau)|^2\rangle = \\ &T\textstyle\sum J_k + T\sum_{k\neq l} K_{kl}, \quad \text{где } J_k = \langle |p_k(T\tau)|^2\rangle, \\ &K_{kl} = \langle (p_k(T\tau), p_l(T\tau)\exp i(\omega_k - \omega_l)T\tau\rangle, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где использованы обозначения $\langle f(\tau)\rangle = \int_0^1 f(\tau)\, d\tau$, $(x,y) = \sum x_i \bar{y}_i$ — стандартное эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$. Положим $p_{k,T}(t) =$

$p_k(Tt)$. Тогда, очевидно,

$$J_k \geq c_1 \|p_{k,T}\|^2_{\infty,1} = c_1 \|p_k\|^2_{\infty,T} \tag{3.12}$$

где постоянная c_1 зависит только от степени многочленов p_k, или, что то же самое, от размеров жордановых клеток матрицы A. Более точные вычисления с полиномами Лежандра показывают, что можно взять c_1 в виде $(1/\deg p_k)^2$. Второе слагаемое в (3.11) можно оценить, интегрируя по частям:

$$\begin{gathered}|TK_{k,l}| = \Big| - \Big\langle \tfrac{\exp(i(\omega_k-\omega_l)T\tau)}{i(\omega_k-\omega_l)} \tfrac{d}{d\tau}(p_{k,T}, p_{l,T})(\tau) \Big\rangle + \\ \tfrac{\exp(i(\omega_k-\omega_l)Tt)}{i(\omega_k-\omega_l)}(p_{k,T}, p_{l,T})(t)\Big|_0^1 \Big| \leq \Omega^{-1}\left(\Big\langle \Big| \tfrac{dp(\tau)}{d\tau} \Big| \Big\rangle + 2\|p\|_{\infty,1} \right),\end{gathered} \tag{3.13}$$

где $p = (p_{k,T}, p_{l,T})$, а $\Omega = \min\limits_{k,l} |\omega_k - \omega_l|$. Очевидна оценка

$$\langle |dp(\tau)/d\tau| \rangle \leq c_2 \|p\|_{\infty,1} \tag{3.14}$$

с некоторой постоянной c_2, а из известных результатов теории приближений (см. [57]) следует, что $c_2 \leq (\deg p)^2$ и даже более точная оценка $c_2 \leq \langle |dT_N(\tau)/d\tau| \rangle$, где T_N — полином Чебышева.

Собирая вместе неравенства (3.12)–(3.14), получим для второго слагаемого в (3.11) мажоранту вида

$$\Omega^{-1} c_2 \sum_{k \neq l} \|p_k\|_{\infty,T} \|p_l\|_{\infty,T} \leq \Omega^{-1} c_2 (\sum \|p_k\|_{\infty,T})^2 \tag{3.15}$$

где постоянная c_2 зависит только от размера жордановых клеток матрицы A (или, что то же самое, от степеней полиномов $_k$) и может быть оценена так:

$$c_2 \leq \max_{k \neq l} (\deg p_k + \deg p_l)^2 + 2$$

Из неравенств (3.11), (3.12) и (3.15) получаем

$$I \geq c_1 T \sum_{k=1}^{M} \|p_k\|^2_{\infty,T} - c_2\Omega^{-1}(\sum_{k=1}^{M} \|p_k\|_{\infty,T})^2 \geq$$

$$(c_1 T/M - c_2\Omega^{-1})(\sum_{k=1}^{M} \|p_k\|_{\infty,T})^2 \geq (c_1 T/M - c_2\Omega^{-1})\|p_k\|^2_{\infty,T}$$

что доказывает (при $T \to \infty$) неравенство (3.10) и лемму. Теорема 2 доказана.

4. В качестве примера рассмотрим механическую систему, состоящую из многих маятников с общей точкой подвеса. Эта точка подвеса совершает управляемое движение с ограниченным ускорением. В линейном приближении уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} = u;\ \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = u,\ i = 1, \ldots, N;\ |u| \leq 1$$

Здесь x — смещение точки подвеса, x_i — смещение i-го маятника. Задача управления состоит в успокоении системы: перевода из данного начального состояния в состояние, в котором смещения и скорости всех маятников и точки подвеса нулевые. Из предыдущих результатов следует, что решение этой задачи возможно для любого начального состояния, если и только если частоты $|\omega_i| \neq 0$ все различны (это расшифровка условия Калмана (1.2)). Можно также, следуя доказательству теоремы 2, оценить время успокоения T при использовании квазиполиномиального управления u вида

$$u(t) = \xi_1 + \xi_2 t + \mathrm{Re} \sum a_k \exp(i\omega_k t), \quad a_k \in \mathbf{C}$$

Окончательный результат выражается неравенством ($\mathbf{x}$ — вектор состояния в начальный момент)

$$T \leq 2\sqrt{N+2}|\mathbf{x}| + 4((N-1)/\Omega) + \sqrt{14N}/\omega$$

$$\mathbf{x} = (x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_N, \dot{x}_N) \tag{4.1}$$

$$|\mathbf{x}|^2 = x^2 + (\dot{x})^2 + \sum(\omega_i x_i)^2 + (\dot{x}_i)^2$$

$$\Omega = \min_{i,j=1,\ldots,N} |\omega_i \pm \omega_j|, \quad \omega = \min_{i,j=1,\ldots,N} |\omega_i|$$

Подробный вывод оценки (4.1) параллелен доказательству теоремы 2 и требует довольно громоздких выкладок. Аналогичные результаты были получены Ф. Л. Черноусько в задаче успокоения системы N маятников (без успокоения точки подвеса) и в задаче успокоения одного маятника вместе с точкой подвеса. Отметим, что вид (3.4) закона управления был указан еще в работах Калмана 1960-х годов. Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за обсуждения. В частности, формула (3.4) программного управления была указана автору Ф. Л. Черноусько, который с помощью управления как раз такого типа нашел явную оценку времени успокоения для указанных выше управляемых систем маятников с общей точкой подвеса.

2 Управляемость нелинейных систем. Необходимые условия

Доказано необходимое условие полной управляемости (за произвольное время) нелинейной вещественно аналитической динамической системы. В отличие от ранее известных нелинейных обобщений условия Калмана ([101], [109]) наше условие вытекает из глобальных соображений, основанных на построении полупроницаемых поверхностей для рассматриваемой динамической системы.

В этом разделе речь пойдет о необходимых условиях полной управляемости для некоторых нелинейных управляемых систем. Для общей нелинейной управляемой системы трудно ожидать получения необходимых и достаточных условий управляемости, вроде условия Калмана в линейном случае. С другой стороны, уже в течение долгого времени был понят инвариантный смысл условия Калмана, состоящий в том, что алгебра Ли, порожденная допустимыми векторными полями (правыми частями уравнения динамической системы при выборе всевозможных допустимых управлений), имеет максимально возможный ранг. Более того, это условие является необходимым и, в некотором смысле, близким к достаточному. Например, из этого условия вытекает, что область достижимости обязательно имеет непустую внутренность.

Здесь мы несколько сужаем разрыв между необходимыми и достаточными условиями полной управляемости, слегка усиливая указанное выше нелинейное обобщение условия Калмана. (В линейном случае наше условие опять-таки совпадает с критерием Калмана [18].)

При этом, однако, приходится жертвовать общностью и ограничиться рассмотрением аналитических динамических систем на многообразиях, удовлетворяющих некоторым (довольно слабым) топологическим ограничениям. В отличие от ранее известных нелинейных обобщений условия Калмана ([101], [109]) наше условие вытекает из глобальных соображений, основанных на построении полупроницаемых поверхностей для рассматриваемой динамической системы.

2.1 Введение

В теории линейных управляемых систем хорошо известен критерий полной управляемости Калмана [18] (уравнение (1.2) из предыдущего раздела). Для того, чтобы система

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in V, u \in U, \tag{1.1}$$

где $A : V \to V$, $B : U \to V$ — линейные операторы была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг составной матрицы $(B, AB, ..., A^{n-1}B)$ был максимально возможным:

$$\mathrm{rk}(B, AB, ..., A^{n-1}B) = n. \tag{1.2}$$

Здесь $n = \dim V$.

Хорошо известны также и некоторые нелинейные аналоги условия Калмана (1.2), относящиеся к нелинейным управляемым системам вида

$$x = f(x) + g(x)u, x \in V, u \in U \tag{1.3}$$

Здесь уже разумно считать V просто гладким многообразием, а не обязательно векторным пространством, f — гладким векторным полем на V, а g — гладким линейным отображением векторного пространства U в касательное расслоение TV многообразия V. Необходимое условие полной управляемости системы (1.3) в вещественно-аналитическом случае состоит в том ([101, 109]), что алгебра Ли векторных полей, порожденная полями f и gu и для всевозможных $u \in U$, имеет полный ранг в каждой точке $x \in V$

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Lie}(f, gu) = \dim V \tag{1.4}$$

(это означает, что повторяющиеся коммутаторы полей f и gu в каждой точке $x \in V$ порождают касательное пространство $T_x V$). Хорошо известно, что указанное условие для системы (1.1) превращается в условие Калмана и, таким образом, является необходимым и достаточным. В общем случае условие (1.4) является лишь необходимым, как видно из следующего тривиального примера. Пусть

$$V = \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2, f = e_1, g = e_2, u \in \mathbf{R} \qquad (1.5)$$

Очевидно условие (1.4) выполнено, однако, при движении по траекториям системы (1.3) координата x монотонно возрастает, что, конечно, противоречит полной управляемости. В данной работе доказывается, что условие (1.4) можно усилить до

$$\operatorname{rk} I(gu) = \dim V, \qquad (1.6)$$

где $I(gu)$ обозначает идеал, порожденный полями gu в алгебре Ли $\mathrm{Lie}(f, gu)$, а rk (или dim) обозначает размерность подпространства в касательном пространстве в точке x. Для системы (1.1) условие (1.6) опять эквивалентно условию Калмана. Отметим, что пример (1.5) уже не укладывается в рамки условия (1.6), поскольку $I(gu)$ в этой ситуации совпадает с $\mathbf{R}e_2$. В то же время небольшое усложнение примера (1.5) показывает, что условие (1.6), опять-таки не является достаточным. Действительно, пусть

$$f(x) = v(x)e_1, g = e_2 V = \mathbf{R}^2 = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2, u \in \mathbf{R}, \qquad (1.7)$$

причем $v > 0$ и $v' > 0$. Тогда $I(gu)$ содержит поля $g = e_2 u$, $[g, f] = v'e$ и, следовательно, условие (1.6) выполнено, а первая координата x_1 фазового вектора монотонно возрастает по времени, что противоречит управляемости.

2.2 Основной результат

Рассмотрим управляемую систему (1.3). Предположим, что V — вещественно-аналитическое многообразие, поля f и gu — вещественно-аналитичны. Предположим также, что первая группа вещественных гомологий многообразия V — нулевая

$$H_1(V, \mathbf{R}) = 0 \tag{2.1}$$

Условие (2.1) будет использовано в следующем эквивалентном виде. Пусть $p : M \to V$ — накрытие, группа скольжений которого $G = \pi_1(V)/p_*\pi_1(M)$ является подгруппой группы вещественных чисел по сложению. Тогда p — изоморфизм.

Условие (2.1) выполнено, например, при $V = \mathbf{R}^n$ или S^n (n-мерная сфера, $n > 1$) и не выполнено при $V = (S^1)^n$ (n-мерный тор).

Теорема 3. *Условие* (1.6) *является необходимым для полной управляемости (за произвольное время) системы* (1.3).

Доказательство. Предположим противное. Пусть условие (1.6) не выполнено хотя бы в одной точке $x \in V$, а система (1.3) является вполне управляемой. Из полной управляемости следует, что $\operatorname{rk} I(gu)$ не зависит от точки $x \in V$. Более общим образом, пусть $I \subset \operatorname{Lie}(X)$ — произвольный идеал в алгебре Ли, порожденной векторными полями X_u, зависящими от параметра $u \in U$, I_x — ограничение полей из I на касательное пространство в точке x. Тогда, обозначая через e^{tX} фазовый поток, соответствующий полю X, а через $(e^{tX})_*$ его действие на векторные поля, получим, что если $I \subset g$ — идеал в алгебре Ли g, состоящей из векторных полей на V, а $X \in g$, $I\mathcal{O}$ — подпучок пучка векторных полей на V, порожденный идеалом I, то

$$(e^{tX})_* I\mathcal{O} \subset I\mathcal{O} \tag{2.2}$$

Утверждение (2.2) следует из конечной порожденности $I\mathcal{O}$ как пучка модулей над $\mathcal{O}$, что, в свою очередь, вытекает из нетеровости кольца ростков аналитических функций. Отсюда следует, что если $y = e^{tX}x$, то

$$I_y = (e^{tX})_* I_x \tag{2.3}$$

и, в частности,

$$\dim I_y = \dim I_x \tag{2.4}$$

(Заметим, кстати, что условие (1.4) немедленно вытекает из того, что $\dim g$ не зависит от $x \in V$ (частный случай (2.4) и теоремы Фробениуса).

Многократно применяя в нашей ситуации соотношение (2.4) и используя условие полной управляемости получим, что

$$\operatorname{rk} I(gu) = \operatorname{rk} I(gu) \tag{2.5}$$

для любой пары точек x, y.

Легко видеть, что идеал $I(gu) \subset \mathrm{Lie}(f, gu)$ имеет в алгебре Ли $\mathrm{Lie}(f, gu)$ коразмерность не более 1, поскольку элемент f и $I(gu)$ порождают $\mathrm{Lie}(f, gu)$ как векторное пространство. Теперь, используя необходимое условие (1.4) полной управляемости, соотношение (2.5) и предположение о том, что условие (1.6) не выполнено, получим, что идеал $I(gu)$ определяет на V слоение F коразмерности 1. Кроме того, имеется поле f всюду трансверсальное к слоению и такое, что его фазовый поток $\phi_t = e^{tX}$ (в силу (2.2)) переводит F в себя. (Если поле F не порождает однопараметрической группы, т. е. соответствующее дифференциальное уравнение решается только для малых времен, то можно заменить f на поле rf, где $r > 0$ достаточно быстро убывающая на бесконечности гладкая (или вещественно аналитическая) функция, которое уже порождает однопараметрическую группу.)

Рассмотрим отображение

$$\Phi : \mathbf{R} \times L \to V \quad \Phi(t, x) = \phi_t(x) = e^{tX}(x), \tag{2.6}$$

где L — некоторый фиксированный слой нашего слоения F.

Утверждается, что Φ — накрытие и его группа скольжений — подгруппа в группе вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Действительно, Φ является в силу трансверсальности поля f к слоению F локальным изоморфизмом и, если $U \subset \mathbf{R} \times L$ — открытое подмножество, изоморфное $\Phi(U)$, то $\Phi^{-1}(\Phi(U)) = \bigcup_{t \in \Gamma} \Phi_t(U) = U \times \Gamma$, где $\Phi_t(\tau, x) = (\tau - t, f(x))$, а $\Gamma \subset \mathbf{R}$ — множество таких значений $t \in \mathbf{R}$, что $\phi_t(L) = L$. Причина такого разложения $\Phi^{-1}(\Phi(U))$ состоит в том, что если пересечение $\phi_t(L) \cap L$ не пусто, то $\phi_t(L) = L$ поскольку $\phi_t(F) = F$.

Очевидно, группа скольжений Γ накрытия Φ — подгруппа в $\mathbf{R}$. Условия теоремы (см. (2.1)), однако, запрещают нетривиальные накрытия такого типа над многообразием V. Остается заключить, что Φ — изоморфизм. Поэтому на V возникает глобальная координата t, которая монотонно возрастает вдоль траекторий системы (1.3). Такая ситуация, разумеется несовместима с полной управляемостью.

Теорема доказана.

Заметим, что единственное место в доказательстве, которое не проходит в бесконечно дифференцируемом случае — это соотношение (2.2). Оно выполнено, однако, если пучок $I\mathcal{O}$ конечно порожден над $\mathcal{O}$. (Здесь $\mathcal{O}$ — кольцо ростков бесконечно гладких функций.)

Автор признателен А. А. Аграчеву за стимулирующее внимание к настоящей работе. В частности, благодаря ему был существенно переделан первоначальный вариант, где речь шла о вещественно аналитических системах на многоообразии с конечной фундаментальной группой и рассуждения опирались на довольно глубокие результаты Хефлигера (см. [56, 100]) о тривиальности аналитических слоений.

Кроме того, заметим (по совету А. А. Аграчева), что если бы речь в теореме шла о полной управляемости за фиксированное время T, то соответствующий результат был бы а) верен без условия (2.1), б) известен, в) тривиален. (Действительно в нашей терминологии область достижимости $D(x)$ системы (1.3) исходя из фиксированной точки x лежит в одном из слоев слоения F, что противоречит условию $D(x) = V$).

2.3 Пример

Приведем пример, показывающий, что от условия (2.1) нельзя полностью отказаться. Для этого модифицируем пример (1.5) следующим образом. Возьмем $V = T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ — двумерный тор, $f = ae_1 + e_2, g = e_2, u \in \mathbf{R}$. Здесь e_1, e_2 — координатные орты в $\mathbf{R}^2$, a — иррациональная константа. Очевидно $\operatorname{rk} I(gu) = 1$ и условие (1.6) не выполнено. Тем не менее, система (1.3) в этом случае является вполне управляемой, что следует из плотности интегральной кривой поля f в V (более общий результат такого рода см. в [91]).

2.4 Замечание о связи управляемости и гипоэллиптичности

Имеется интересная связь между вопросом о полной управляемости системы (1.3) и вопросом об аналитичности решений некоторого линейного уравнения второго порядка в частных производных. Чтобы записать упомянутое уравнение в наиболее привычном виде будем рассматривать векторные поля f и g_i из (1.3) как дифференциальные операторы первого порядка $X_0 = \sum f^j \partial/\partial x_j$ и $X_i = \sum g_i^j \partial/\partial x_j$. Образуем дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{L} = X_0 + \sum_i X_i^2 \tag{4.1}$$

Это инфинитезимальный оператор диффузионного процесса $Y(t)$, задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением (в форме Стратоновича)

$$dY^j(t) = \sum g_i^j(Y(t)) \circ dw^i(t) + f^j(Y(t))dt,\ Y(0) = y. \tag{4.2}$$

Известно (см. [126]), что траектории процесса Y в точности заметают область достижимости системы (1.3). Предположим, что оператор $\mathcal{L}^*$, сопряженный к $\mathcal{L}$, аналитически гипоэллиптичен. Это по определению означает, что любое фундаментальное решение u_y оператора $\mathcal{L}^*$ с полюсом в y аналитично вне полюса. Однако, среди фундаментальных решений содержится плотность p_y инвариантной меры для процесса (4.2), носитель которой, согласно сказанному выше, содержится в области достижимости системы (1.3). Если область достижимости не совпадает со всем многообразием, то получаем противоречие с аналитичностью.

Таким образом, из аналитической гипоэллиптичности оператора $\mathcal{L}^*$ вытекает полная управляемость системы (1.3). Отметим, что по теореме Хёрмандера (см. [102]) (обычная C^∞) гипоэллиптичность оператора $\mathcal{L}^*$

с аналитическими коэффициентами *эквивалентна* нелинейному условию Калмана (1.4). С другой стороны известны примеры, показывающие, что из полной управляемости аналитическая гипоэллиптичность не следует.

Глава 2

Описание эволюции областей достижимости с помощью дифференциальных уравнений и неравенств

1 Области супердостижимости и решения уравнений Беллмана

Изучаются верхние оценки областей достижимости управляемых динамических систем. Выводятся дифференциальные уравнения, типа уравнения Беллмана, для опорных функций "наилучших" верхних оценок.

1.1 Двойственное уравнение Беллмана

В этом разделе обсуждаются некоторые эвристические соображения, относящиеся к уравнению Беллмана и "двойственному" к нему уравнению. Мы не стремимся к максимальной общности и стараемся лишь выделить основные идеи. Пусть имеется управляемая система общего вида в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$

$$\dot{x} \in U(x) \text{ (или } U(x,t) \text{)},$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, t обозначает время, а $U(x)$ — выпуклый компакт. Пусть $h(x,\xi) \stackrel{def}{=} \sup_{y \in U(x)} \langle y, \xi \rangle$ — его опорная функция. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ мы обозначаем евклидово скалярное произведение. Предположим, что требуется максимизировать *линейный* терминальный функционал $\phi(x_T) = \langle x_T, \xi \rangle$.

Тогда, как хорошо известно, все существенные аспекты этой оптимизационной задачи связаны с уравнением Беллмана:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h(x, t, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0, \quad S(x, T) = \langle x, \xi \rangle$$

Здесь, $S(x, t)$ — оптимальное значение функционала $\phi(x_T)$, взятого по всем допустимым траекториям, начинающимся в момент t из точки x.

Функция S, однако, зависит также от параметров ξ и T; $S = S(x, t; \xi, T)$. Можно попытаться найти уравнение для функции S, рассматриваемой как функция этих двойственных параметров. Разумным кандидатом на эту роль представляется следующее уравнение:

$$\frac{\partial S'}{\partial T} = h(\frac{\partial S'}{\partial \xi}, T, \xi), \quad S'(\xi, t) = \langle x, \xi \rangle. \tag{1.1}$$

Будем называть это соотношение двойственным уравнением Беллмана.

Имеются важные работы (упомянем статьи А. И. Панасюка [60, 61]), показывающие, что двойственное уравнение Беллмана тесно связано с функцией Беллмана. Например, это так если управляемая система линейна [50]. Недолгие размышления приводят, однако, к следующему заключению: в общем случае не существует уравнений, описывающих эволюцию функции Беллмана как функции параметров ξ, T. Ситуация лучше всего описывается на геометрическом языке.

Ясно, что $S(x, t; \xi, T)$ представляет собой, по определению, значение $H_{D_T}(\xi)$ опорной функции области достижимости D_T на векторе ξ. Это множество D_T опять же, по определению, есть совокупность концов $D_T = D(T, t; x) = \{x_T\}$ допустимых траекторий системы (1.1), начинающимся в момент t из точки x. Опорная функция любого множества зависит, однако, лишь от замыкания выпуклой оболочки этого множества и задает эту оболочку однозначно. С другой стороны, нетрудно построить нелинейную управляемую систему типа (1.1), для которой невозможно восстановить оболочку области достижимости D_T зная лишь оболочку области D_τ в некоторый предшествующий момент времени $\tau \leq T$ (хотя такое восстановление, очевидно, возможно если всюду опустить слово "оболочка"). Точнее говоря, обозначим замкнутую выпуклую оболочку множества Ω через $\mathrm{conv}(\Omega)$. Тогда множество $\mathrm{conv}(D_T) = \mathrm{conv}(D(T,\tau; D(\tau))$ строго больше чем $\mathrm{conv}(D(T,\tau; \mathrm{conv}(D(\tau)))$.

Перед тем как представить соответствующий пример заметим, что достаточно рассмотреть такую динамическую систему, в которую управляющий параметр u фактически не входит. Пусть теперь нам дана некоторая динамическая система и такой момент времени τ, что множество D_τ — выпукло, а множество D_t в момент $t \geq \tau$, достаточно близкий к τ, — нет. Это означает, в частности, что имеются две такие точки $a,\ b \in D_\tau$, что интервал $[a,b] \in D_\tau$, а $[\phi_t(a), \phi_t(b)] \notin D_t$. (Здесь, ϕ_t обозначает фазовый поток рассматриваемой динамической системы). После этого мы можем взять множество $\{a,b\}$ в качестве начального множества D'_τ в момент τ и тогда областью достижимости D'_t в момент t будет в точности множество $\{\phi_t(a), \phi_t(b)\}$. Положим также D''_τ — интервал $[a,b]$, а D''_t — соответствующая область достижимости в момент t. Наши предположения гарантируют, что (замкнутая) выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(D''_t)$ *строго* больше интервала $[\phi_t(a), \phi_t(b)]$. Отсюда следует, что желаемый пример всегда возникает при потере выпуклости областей достижимости. Предъявить динамическую систему с потерей выпуклости областей достижимости очень просто, поскольку, на самом деле, противоположное явление весьма редко. Рассмотрим, например, систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - 1 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}, D_0 = \{(0,1),(0,-1)\}.$$

Легко проверить, что $D_t = D_0$ при любом $t > 0$, но образ интервала $[(0,1),(0,-1)]$ под действием фазового потока с ним не совпадает.

С другой стороны нетрудно дать эвристическое истолкование уравнения (1.1). Действительно, как уже говорилось, $S'(\xi,T) = S(x,t;\xi,T)$ это значение опорной функции $H_{D_T}(\xi)$ области достижимости D_T на векторе ξ. Кроме того, градиент $\frac{\partial S'}{\partial \xi} = \frac{\partial H_{D_T}(\xi)}{\partial \xi}$ есть в точности точка опоры для опорной плоскости с нормальным вектором ξ. Это хорошо известно, но для удобства читателя мы приведем подробности. В действительности, чтобы охватить общий случай недифференцируемой функции H_{D_T} нужно заменить градиент на субградиент $\partial H_{D_T}(\xi)$. Напомним [17], что для любой выпуклой функции $\xi \mapsto u(\xi)$ ее субградиентом в точке ξ называется множество $\partial u(\xi) = \{x \in \mathbf{R}^n : u(\eta) - u(\xi) \geq \langle x, \eta - \xi\rangle \text{ for any } \eta\}$. Это множество состоит из одного элемента $\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi)$ в точности для тех точек ξ, где функция дифференцируема. Если $u = H_\Omega$ для выпуклого компакта Ω, то множество $\partial u(\xi)$ содержится Ω, поскольку полагая $\eta = \tau\eta_0$, где τ — большое положительное число, мы получим из определения субградиента $H_\Omega(\eta_0) \geq \langle x, \eta_0\rangle$ для любого вектора η_0, и, наоборот, полагая $\eta = 0$ получим $H_\Omega(\xi) \leq \langle x, \xi\rangle$. Поэтому, $H_\Omega(\xi) = \langle x, \xi\rangle$, а $\partial H_\Omega(\xi)$ состоит, как и утверждалось, из точек опоры для опорных плоскостей с нормальным вектором ξ.

Правая часть $h(\frac{\partial S'}{\partial \xi}, T, \xi)$ уравнения (1.1) представляет собой максимум $\sup \left\langle \dot{x}, \xi \right\rangle$ по всем допустимым скоростям $\dot{x} \in U(x,T)$, где $x = \frac{\partial S'}{\partial \xi}(\xi)$ — точка опоры множества D_T в направлении ξ. Представляется правдоподобным, что $\frac{\partial H_{D_T}(\xi)}{\partial T} = \frac{d}{dT}\left\langle x(T), \xi\right\rangle$ для некоторой допустимой траектории $t \mapsto$

$x(t)$, проходящей через точку опоры x и совпадает с $\sup \langle \dot{x}, \xi \rangle$. Уравнение (1.1) выражает это совпадение.

1.2 Выпуклые области супердостижимости

Рассмотрим управляемую систему общего вида в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$

$$\dot{x} \in U(x) \text{ (или } U(x,t) \text{)}, \tag{1.2}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, t обозначает время, а $U(x)$ — выпуклый компакт. Пусть $h(x,\xi) \stackrel{def}{=} \sup_{y \in U(x)}(y,\xi)$ — его опорная функция. До конца этого раздела будем считать, что

$$|h(x_1,\xi) - h(x_2,\xi)| \leq C(|\xi|+1)|x_1 - x_2| \tag{1.3}$$

и

$$|h(x,\xi_1) - h(x,\xi_2)| \leq C(|x|+1)|\xi_1 - \xi_2| \tag{1.4}$$

с некоторой положительной постоянной C. Нам потребуется и еще одно условие регулярности.

Условие $(*)$ *Для любой пары $(x,s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ и любого вектора $\xi \in \mathbf{R}^n$ существует такое решение $t \mapsto x(t)$ дифференциального включения (1.1), что $x(s) = x$, а $\langle \dot{x}(t), \xi \rangle = h(x(t),\xi,t)$, где $h(x(t),\xi,t)$ – значение опорной функции множества $U(x(t),t)$ в точке ξ. Другими словами, $\dot{x}(t)$ — точка опоры в $U(x(t),t)$ для опорной плоскости с нормальным вектором ξ. Более того, требуется, чтобы все функции (зависящие от начальных условий (x,s)) $(\xi,t) \mapsto h(x(t),\xi,t)$ были локально равностепенно непрерывными.*

Это условие выполнено, например, если функция $(x,t) \mapsto \frac{\partial h}{\partial \xi}(x,\xi,t)$ определена (при $\xi \neq 0$) и удовлетворяет условию Липшица относительно переменной x, поскольку тогда в качестве $x(t)$ можно взять единственное решение задачи Коши $\dot{x}\ (t) = \frac{\partial h}{\partial \xi}(x(t), \xi, t)$, $x(s) = x$. (Здесь ξ рассматривается как фиксированный параметр.)

Вместо областей достижимости мы будем изучать так называемые *области супердостижимости* рассматриваемой системы. Это понятие определяется с помощью эволюционных (полугрупповых) неравенств (включений) следующим образом. Семейство Ω_t подмножеств фазового пространства $\mathbf{R}^n$ называется семейством областей супердостижимости управляемой системы если имеют место следующие включения:

$$\Omega_t \supset D(t, s; \Omega_s) \text{ для любого } t \geq s,$$

где $D(t, s; \Omega_s)$ обозначает множество достижимости системы с начальным множеством Ω_s в момент s.

Заметим, что заменяя в последнем соотношении знаки включений на равенства мы (снова) приходим к понятию областей достижимости.

Оказывается двойственное уравнение Беллмана прямо связано с областями *супердостижимости*, а не с областями достижимости. А именно, оно описывает эволюцию опорной функции *минимальной выпуклой области супердостижимости.*

Теорема 1. *Предположим, что для управляемой системы (1.2) выполнено условие регулярности (1.3) и условие $(*)$. Тогда имеется взаимно однозначное соответствие между минимальными компактными выпуклыми областями супердостижимости Ω_t, $t \geq s$ этой динамической системы и вязкими решениями задачи Коши для двойственного уравнения Беллмана*

$$\frac{\partial S}{\partial t} = h(\frac{\partial S}{\partial \xi}, t, \xi), \quad S(\xi, s) = H_{\Omega_s}(\xi).$$

Перед тем как обратиться к доказательству этой основной теоремы мы сделаем отступление о понятии вязкого (или точнее, но длиннее, вязкостного) решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана).

1.3 Вязкие решения

Мы будем следовать с небольшими изменениями изложению основных понятий теории вязких решений, данному в [95]. Напомним вначале главное определение.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(\frac{\partial u}{\partial \xi}, t, \xi) \tag{1.5}$$

в области $\mathcal{O}_T = \mathbf{R}^n \times \mathcal{T}$, где h — непрерывная функция, а $\mathcal{T}$ — открытый интервал времени t. Для функции $u : \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathbf{R}$ обозначим через $\mathcal{P}^{2,-}u(s,z),\ (s,z) \in \mathcal{O}_T$ множество таких троек $(a, p, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{S}\,(n)$, что

$$\begin{aligned} u(t,x) \geq u(s,z) + a(t-s) + (p, x-z) + \tfrac{1}{2}(X(x-z), (x-z)) \\ +o(|t-s| + |x-z|^2) \ \text{ as } (t,x) \in \mathcal{O}_T. \end{aligned}$$

Здесь, $\mathcal{S}\,(n)$ обозначает множество симметрических $n \times n$-матриц. Обозначим через $\mathcal{P}^{1,-}u(s,z),\ (s,z) \in \mathcal{O}_T$ множество таких пар $(a,p) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, что

$$\begin{aligned} u(t,x) \geq u(s,z) + a(t-s) + (p, x-z) \\ +o(|t-s| + |x-z|) \ \text{ as } (t,x) \in \mathcal{O}_T. \end{aligned}$$

(Слабое) *суперрешение* задачи (1.5) это такая полунепрерывная снизу функция $v\ \in$LSC$(\mathcal{O}_T)$ (LSC — сокращение для lower semicontinuous), что

$$a \geq h(p,t,\xi) \text{ для } (t,\xi) \in \mathcal{O}_T \text{ и } (t,\xi,p,X) \in \mathcal{P}^{2,-}u(t,\xi); \tag{1.6}$$

(сильное) *суперрешение* должно удовлетворять неравенству

$$a \geq h(p, t, \xi) \text{ для } (t, \xi) \in \mathcal{O}_T \text{ и } (t, \xi, p) \in \mathcal{P}^{1,-}u(t, \xi). \qquad (1.7)$$

Аналогично, субрешение (слабое или сильное) это полунепрерывная сверху функция, которая удовлетворяет противоположным неравенствам, причем $\mathcal{P}^-$ заменяется на $\mathcal{P}^+$ (с очевидным определением).

Заметим, что понятие слабого суперрешения приспособлено к работе с уравнениями второго порядка. Мы же в основном ищем и используем сильные (супер) решения.

Остается сказать, что (сильное или слабое) *решение* задачи (1.5) это, по определению, — непрерывная функция, которая одновременно является субрешением и суперрешением (соответствующим одному и тому же прилагательному).

1.4 Выпуклые вязкие решения

Этот параграф посвящен доказанной в [117] (см. также следующий раздел) фундаментальной теореме существования *выпуклого* решения двойственного уравнения Беллмана. С помощью этой теоремы мы в дальнейшем охарактеризуем эти решения в терминах областей супердостижимости.

Мы рассмотрим уравнение (1.5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(\frac{\partial u}{\partial \xi}, t, \xi), \qquad (1.8)$$

в котором функция h *выпукла* по аргументу ξ. Заметим, что для двойственного уравнения Беллмана это так, и, более того, любое уравнение вида (1.5) является двойственным уравнением Беллмана для некоторой задачи управления в том и только в том случае, если функция h выпукла и имеет первую степень однородности по ξ (т. е. является опорной функцией). Везде считается, что выполнено условие регулярности (1.3), (1.4) для функции h, хотя это условие и не кажется близким к необходимому, и для получения *слабого* решения уравнения (1.8) используется метод исчезающей вязкости. Заметим, что из условия (1.3), в частности, следует что норма $||h|| \stackrel{def}{=} \sup_\xi |h(\xi)/(1+|\xi|^2)^{1/2}|$ конечна.

Таким образом рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \xi}, t, \xi) + \epsilon^2(1+|\xi|^2)\Delta u_\epsilon, \;\; u_\epsilon(0) = u^0 \qquad (1.9)$$

где Δ — оператор Лапласа и ϵ — (малая) положительная константа, в качестве приближения к (1.8). В [117] (см. также следующий раздел) показано, что эта задача Коши обладает единственным решением полиномиального роста, которое при $\epsilon \to 0$ сходится к единственному вязкому решению u уравнения (1.8). Кроме того, оба упомянутых решения — выпуклые функции и u — однородная функция первой степени по ξ если таким свойством обладает функция h. Тем самым наша задача сводится к установлению того, что построенное вязкое решение задачи Коши (1.8) задает опорную функцию *минимальной* выпуклой области супердостижимости. Это тесно связано с тем фактом, что *произвольная* (достаточно регулярная) выпуклая область супердостижимости приводит к вязкому суперрешению этой задачи Коши.

1.5 Области супердостижимости и суперрешения

В этом разделе мы будем существенно использовать Условие $(*)$ из раздела 1.2, которое позволяет провести допустимую траекторию через любую точку фазового пространства.

Кроме того, нам потребуется одно почти очевидное, но важное замечание о связи допустимых траекторий управляемых систем с решениями двойственного уравнения Беллмана. Именно,

Предложение 1 *Гладкая функция v вида $v(\xi, t) = \langle x(t), \xi \rangle$ является субрешением двойственного уравнения Беллмана в том и только в том случае, если $x(t)$ — допустимая траектория управляемой системы* (1.1).

В самом деле, тот факт, что v — субрешение выражается неравенством $\langle \frac{d}{dt}x(t), \xi \rangle \leq h(x(t), t, \xi)$. Это, однако, означает в точности, что вектор $\frac{d}{dt}x(t)$ принадлежит множеству $U(x(t), t)$, т. е. является допустимой скоростью. Предложение доказано.

Пусть теперь $v(\xi, t)$ — опорная функция некоторой области супердостижимости Ω_t. Тогда должно выполняться следующее фундаментальное дифференциальное неравенство

$$v(\xi, t) - v(\xi, s) \geq (t - s)h(x, \xi, s) + o(t - s) \tag{1.10}$$

для любого $t \geq s$, где x — точка опоры в Ω_s для опорной плоскости с нормальным вектором ξ. Действительно, в предыдущих обозначениях имеем $v(\xi, t) \geq \langle x(t), \xi \rangle = v(\xi, s) + \int_s^t \left\langle \dot{x}\,(\tau), \xi \right\rangle \, d\tau$ и последний интеграл больше чем $(t-s)h(x, \xi, s) + o(t-s)$, поскольку подынтегральное выражение имеет вид $h(x, \xi, s) + o(1)$. Это дифференциальное неравенство можно переписать в более полезной форме

$$v(\xi, t) - v(\xi, s) \geq (t - s)h(\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, s), \xi, s) + o(t - s), \tag{1.11}$$

где через $\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, s)$ обозначен субградиент выпуклой функции v, а через $h(\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, s), \xi, s)$ обозначен $\sup h(x, \xi, s)$ по всем векторам $x \in \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, s)$.

Теперь докажем, что: i) вязкое решение u двойственного уравнения Беллмана является опорной функцией некоторой области супердостижимости, ii) эта функция u меньше (не больше) чем любая такая опорная функция v. Утверждение i) немедленно следует из принципа максимума для вязких решений двойственного уравнения Беллмана и предложения 1. В самом деле, из этого предложения и принципа максимума вытекает, что если Ω_t — семейство выпуклых компактов с опорной функцией u и некоторая допустимая траектория $t \mapsto x(t)$ управляемой системы (1.1) начинается в момент s из множества Ω_s, то $\langle x(t), \xi \rangle \leq u(\xi, t)$ для любого $\xi \in \mathbf{R}^n$ и $t \geq s$. Но это означает, что $x(t) \in \Omega_t$, т. е. Ω_t — семейство областей супердостижимости. Чтобы проверить свойство ii) будем исходить из результата следующего раздела (см. равенство (2.19) и оценку (2.20)), утверждающего, что

$$u(\xi, t) - u(\xi, s) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_s^t h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \xi}(\xi, \tau), \xi, \tau) d\tau, \tag{1.12}$$

для любого момента $t \geq s$, где u_ϵ — диффузионное приближение к функции u. Кроме того, результаты следующего раздела показывают, что $u = \lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon$, причем сходимость локально равномерная. Хорошо известно и легко доказывается, что для сходящейся последовательности u_ϵ выпуклых функций выполнено предельное соотношение $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \xi}(\xi, \tau) \to \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \tau)$, которое означает, что предел p любой сходящейся подпоследовательности $p_\epsilon \in \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \xi}(\xi, \tau)$ лежит в $\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \tau)$. Отсюда следует

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_s^t h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial \xi}(\xi, \tau), \xi, \tau) d\tau \leq \int_s^t \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \tau), \xi, \tau) d\tau, \tag{1.13}$$

где $\overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi})$ обозначает $\sup h(p, \xi, \tau)$ по $p \in \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \tau)$. Функция $\tau \mapsto \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, \tau), \xi, \tau)$

является полунепрерывной сверху, и отсюда получаем, что

$$\int_s^t \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\tau),\xi,\tau)d\tau \le \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,s),\xi,s)(t-s)+o(t-s). \qquad (1.14)$$

Применим теперь неравенство (1.10) к функции u и получим, что

$$u(\xi,t)-u(\xi,s) \ge \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,s),\xi,s)(t-s)+o(t-s). \qquad (1.15)$$

Соотношения (1.12), (1.13), (1.14), и (1.15) позволяют заключить, что

$$u(\xi,t)-u(\xi,s) = \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,s),\xi,s)(t-s)+o(t-s), \qquad (1.16)$$

и

$$\int_s^t \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\tau),\xi,\tau)d\tau = \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,s),\xi,s)(t-s)+o(t-s).$$

Заметим, что из последнего неравенства вытекает, что полунепрерывная сверху функция

$$\tau \mapsto \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\tau),\xi,\tau),$$

в действительности, непрерывна справа в точке s. Чтобы доказать принцип максимума ii) положим $u^\epsilon(\xi,t)=u(\xi,t)-\epsilon(t-s)$ и заметим, что достаточно доказать $v \ge u^\epsilon$ для любого $\epsilon > 0$. Если предположить противное, то существует конечный инфимум s_* тех моментов времени $t > s$, для которых $v(\xi,t) < u^\epsilon(\xi,t)$ для некоторого вектора ξ. Тогда, для некоторых векторов ξ_* we have $v(\xi_*,s_*) = u^\epsilon(\xi_*,s_*)$, тогда как $v(\xi,s_*) \ge u^\epsilon(\xi,s_*)$ для любого ξ. Поэтому справедливо включение $\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi_*,s_*) \supset \frac{\partial u^\epsilon}{\partial \xi}(\xi_*,s_*) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi_*,s_*)$ и с помощью (1.16) можно заключить, что

$$v(\xi_*,t)-u^\epsilon(\xi_*,t) \ge \epsilon(t-s_*)+o(t-s_*).$$

Это очевидным образом противоречит определению момента s_* и неравенство $v \ge u^\epsilon$ доказано.

1.6 “Гладкий” случай

Значительно более полные результаты о связи вязких суперрешений двойственного уравнения Беллмана и опорных функций областей супердостижимости можно получить если ограничиться рассмотрением достаточно “регулярных” объектов. Эти результаты к тому же существенно легче доказываются, чем теорема 1., но, к сожалению, минимальная выпуклая область супердостижимости, о которой идет речь в теореме 1., может быть “нерегулярной”.

Введем (*ad hoc*) следующее определение.

Определение 1 *Функция $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ называется “гладкой” если она дифференцируема либо по первому — временно́му аргументу t, либо по второму — пространственному аргументу ξ в каждой точке (t, ξ), в которой $\xi \neq 0$.*

Тогда основной результат этого раздела состоит в следующем.

Теорема 2. *Соответствие $\Omega \mapsto H_\Omega$ между выпуклыми областями супердостижимости с “гладкими” опорными функциями и “гладкими”, выпуклыми и однородными первой степени суперрешениями двойственного уравнения Беллмана является взаимно однозначным.*

Мы уже знаем из предыдущего раздела, что выпуклые и однородные первой степени суперрешения двойственного уравнения Беллмана совпадают с опорными функциями некоторых выпуклых областей супердостижимости. Тем самым остается доказать, что “гладкие” опорные функции выпуклых областей супердостижимости являются суперрешениями двойственного уравнения Беллмана.

Ввиду предшествующих результатов это сводится к доказательству следующего утверждения. Пусть v — такая “гладкая” функция, что она выпукла по пространственным переменным ξ, и

$$v(\xi,t)-v(\xi,s)\geq (t-s)h(\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,s),\xi,s)+o(t-s), \tag{1.17}$$

при $t\to s$. Тогда v — суперрешение двойственного уравнения Беллмана.

Займемся проверкой условия (1.7) для функции v. Предположим, что вектор $(a,p)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ лежит в $\mathcal{P}^{1,-}v(s,z)$. Напомним, что это означает, что

$$\begin{gathered} v(t,x)\geq v(s,z)+a(t-s)+(p,x-z)\\ +o(|t-s|+|x-z|)\ . \end{gathered} \tag{1.18}$$

Нужно проверить, что $a\geq h(p,s,z)$. Полагая $x=z$ получим, что $p\in \frac{\partial v}{\partial \xi}(z,s)$ (здесь $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ символизирует субградиент). Если взять $t=s-\epsilon$, то получим

$$h(\frac{\partial v}{\partial \xi}(z,s-\epsilon),z,s-\epsilon)+o(1)\leq \frac{v(s,z)-v(s-\epsilon,z)}{\epsilon}\leq a+o(1),$$

где левое неравенство следует из (1.17), а правое из (1.18). Отсюда следует, что

$$a\geq \sup h(p_\epsilon,s-\epsilon,z_\epsilon)+o(1),$$

где sup берется по векторам $p_\epsilon\in\frac{\partial u}{\partial \xi}(z_\epsilon,s-\epsilon)$ и $z_\epsilon=z+o(\epsilon)$. Пусть теперь функция v дифференцируема по ξ в точке (s,z). Тогда из полунепрерывности сверху многозначного отображения $(t,x)\mapsto\frac{\partial v}{\partial \xi}(t,x)$ получим, что that $\sup h(p_\epsilon,s-\epsilon,z_\epsilon)=h(\frac{\partial v}{\partial \xi}(z,s),z,s)+o(1)$, поскольку множество $\frac{\partial v}{\partial \xi}(z,s)$ состоит из одной точки. Таким образом, $a\geq h(p,s,z)$ что нам и нужно.

Если функция v дифференцируема по t в точке (s,z), то срабатывают еще более простые соображения.

Положим $t = s + \epsilon$ и получим

$$h(\tfrac{\partial v}{\partial \xi}(z,s),z,s) + o(1) \le \tfrac{v(s+\epsilon,z)-v(s,z)}{\epsilon} =$$
$$\tfrac{v(s,z)-v(s-\epsilon,z)}{\epsilon} + o(1) \le a + o(1),$$

где левое неравенство следует из (1.17), правое из (1.18), а центральное равенство в точности означает дифференцируемость функции v по t. Отсюда снова получаем $a \ge h(p,s,z)$, что и требовалось.

2 Диффузионное приближение дуального уравнения Беллмана

В этом разделе исследуется метод исчезающей вязкости для двойственного уравнения Беллмана — эволюционного уравнения в частных производных первого порядка, правая часть которого выпукла по пространственным переменным. Мы находим классическое гладкое и выпуклое приближенное решение соответствующей задачи Коши и обосновываем возникающие предельные переходы, доказывая тем самым выпуклость решения исходного уравнения. Также устанавливаются некоторые свойства минимальности решений, которые существенны для приложений к задачам оценивания областей достижимости.

Основная цель этого раздела состоит в доказательстве выпуклости решений двойственного уравнения Беллмана. Более точно, пусть h — такая измеримая по Борелю функция $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что $p \mapsto h(p,x,t)$ удовлетворяет условию Липшица, причем константа Липшица растет линейно по x и, аналогично, функция $x \mapsto h(p,x,t)$ удовлетворяет условию Липшица, с константой Липшица растущей линейно по p. Условие линейного роста роста констант Липшица естественно возникает в приложениях к задачам оценивания областей достижимости управляемых систем, в которых функция h имеет вид $h(p,x,t) = \sup_{y \in U(p,t)} \langle y, x\rangle$. (В частности, функция $\widetilde{h}(p,x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}} h(p,x)$ равномерно липшицева по p.) Пусть, кроме того, функция h *выпукла* по x. Тогда уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(\frac{\partial u}{\partial x}, x, t),\ \ u(x,0) = u^0(x) \tag{2.1}$$

называется двойственным уравнением Беллмана, и мы показываем при некоторых слабых ограничениях, что задача Коши (2.1) имеет единственное вязкое решение, которое к тому же выпукло по x. Мы подчеркиваем вторую часть предыдущего утверждения, поскольку существование и единственность вязкого решения более или менее известно. Кроме того, эти утверждения можно доказать *в рамках* теории вязких решений уравнений *первого порядка*. С утверждением о выпуклости дело обстоит иначе. По крайней мере автор не смог доказать выпуклость вязких решений не привлекая их представления в виде предела *классических* решений приближенного уравнения. Для проведения такой процедуры используется диффузионное приближение к двойственному уравнению Беллмана. Таким образом, в рассматриваемом случае термин *вязкое* решение отражает существо дела.

Мы закончим введение эвристическими соображениями (близкими к использованным в [106]), которые "доказывают" выпуклость решений (2.1) с выпуклыми начальными условиями.

Положим $U(x,y,t) = \frac{1}{2}u(x,t) + \frac{1}{2}u(y,t) - u(\frac{1}{2}(x+y),t)$. Утверждение $U \geq 0$ всюду в точности совпадает с выпуклостью функции u. Имеем (опуская несущественные аргументы функций)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2}h(\frac{\partial u}{\partial x}(x),x) + \frac{1}{2}h(\frac{\partial u}{\partial x}(y),y) - h(\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{x+y}{2}),\frac{x+y}{2}).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &\geq \tfrac{1}{2}(h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(x),x) - h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}),x)) + \\ &+ \tfrac{1}{2}(h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(y),y) - h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}),y))\end{aligned} \tag{2.2}$$

в силу выпуклости функции $x \mapsto h(p,x)$. Кроме того, начальные условия $U(x,y,0) \geq 0$ из-за выпуклости начальной функции $x \mapsto u(x,0)$. Правая часть уравнения (2.2) тесно связана с градиентом функции U благодаря соотношениям

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial U}{\partial x} &= \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\partial u}{\partial x}(x) - \tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2})\big) \\ \tfrac{\partial U}{\partial y} &= \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\partial u}{\partial x}(y) - \tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2})\big), \end{aligned} \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2) и (2.3) вместе показывают, что

$$\frac{\partial U}{\partial t}(z,t) \geq -C(z)\left|\frac{\partial U}{\partial z}(z,t)\right|, \tag{2.4}$$

где z обозначает пару (x, y), а $C(z)$ — максимум констант Липшица для функций $p \mapsto \frac{1}{2}h(p,x)$ и $p \mapsto \frac{1}{2}h(p,y)$. После этого принцип максимума доказывает, что $U \geq 0$ всюду, что как раз и означает выпуклость функции u.

К сожалению, для обоснования этих соображений нужно работать с *классическими* решениями двойственного уравнения Беллмана. Это условие чересчур ограничительно для наших целей, поскольку соответствующая задача Коши вряд-ли обладает глобальным классическим решением для сколько-нибудь общей правой части h. Поэтому мы идем окольным путем через диффузионное приближение, которое дает *классические* решения приближенной задачи.

2.1 Диффузионное приближение

Из-за роста константы Липшица приходится прибегать к нестандартному диффузионному приближению к двойственному уравнению Беллмана. А именно, приближенные решения соответствующей задачи Коши получаются как решения уравнения

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \epsilon^2(1+|x|^2)\Delta u_\epsilon + h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x), \tag{2.5}$$

где большой коэффициент при лапласиане призван подавить трудности, связанные с ростом константы Липшица функции $p \mapsto h(p, x, t)$. Несущественный аргумент t здесь опущен. Другими словами, изучается задача Коши

$$\frac{1}{(1+|x|^2)}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta u_\epsilon + \frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}}\widetilde{h}(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x), \;\; u_\epsilon(x,0) = u^0(x). \qquad (2.6)$$

Чтобы установить разрешимость этой задачи Коши можно без потери общности положить $\epsilon = 1$ и опустить индекс ϵ. Из-за отсутствия явных формул для решения параболического уравнения

$$\frac{1}{(1+|x|^2)}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{1}{(1+|x|^2)^{1/2}}\widetilde{h}, \qquad (2.7)$$

где $\widetilde{h}$ — заданная функция, исследование его разрешимости основано на априорных оценках. Пусть теперь u — классическое решение уравнения (2.7), которое обращается в нуль при $t = 0$. Воспользуемся весовой функцией $e^{-\phi}$, где вид функции ϕ будет указан позднее, и связанной с ней L^2-нормой. Из уравнения (2.7) следует, что

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{2}\int \tfrac{|u|^2}{(1+|x|^2)}e^{-\phi}\,dx = \int(\Delta u)ue^{-\phi}\,dx + \\ +\int \widetilde{h}\tfrac{u}{(1+|x|^2)^{1/2}}e^{-\phi}\,dx.\end{gathered} \qquad (2.8)$$

Первый (наиболее существенный) интеграл в правой части можно преобразовать, с помощью интегрирования по частям, к виду

$$-\int(\Delta u)ue^{-\phi}\,dx = \int \textstyle\sum_i(\partial_i u)^2 e^{-\phi}\,dx -$$

$$\int \textstyle\sum_i(\partial_i u)(\partial_i \phi)ue^{-\phi}\,dx = \int |\tfrac{\partial u}{\partial x}|^2 e^{-\phi}\,dx +$$

$$+\int \tfrac{1}{2}|u|^2 \textstyle\sum_i(\partial_i^2\phi - (\partial_i\phi)^2)e^{-\phi}\,dx.$$

Теперь возьмем в качестве функции ϕ некоторую гладкую функцию, совпадающую с $C\log|x|$ при $|x| \geq 1$. Таким образом, весовая функция

$e^{-\phi}$ убывает с полиномиальной скоростью. Несложное вычисление показывает, что $|\sum_i(\partial_i^2\phi - (\partial_i\phi)^2)| \leq A/(1+|x|^2)$ для некоторой постоянной A. Второй интеграл можно оценить как

$$|\int \widetilde{h}\frac{u}{(1+|x|^2)^{1/2}}e^{-\phi}\,dx| \leq \frac{C}{2}\int \widetilde{h}^2 e^{-\phi}\,dx + \frac{1}{2C}\int \frac{|u|^2}{1+|x|^2}e^{-\phi}\,dx,$$

где C — произвольная (положительная) константа. Теперь положим $|u|_+^2 = \int \frac{|u|^2}{1+|x|^2}e^{-\phi}\,dx$, $|v|_0^2 = \int |v|^2 e^{-\phi}\,dx$. Учитывая предыдущие оценки можно заключить, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}|u(t)|_+^2 + |\frac{\partial u}{\partial x}(t)|_0^2 \leq \frac{C}{2}|\widetilde{h}(t)|_0^2 + (A + \frac{1}{2C})|u(t)|_+^2. \qquad (2.9)$$

Лемма Гронуолла дает теперь (поскольку $u(0) = 0$)

$$\frac{1}{2}|u(t)|_+^2 \leq \frac{C}{2}\int_0^t e^{(2A+\frac{1}{C})(t-s)}|\widetilde{h}(s)|_0^2 ds \leq \frac{C}{2}e^{(2A+\frac{1}{C})t}\int_0^t |\widetilde{h}(s)|_0^2 ds. \qquad (2.10)$$

Проинтегрировав соотношение (2.9) получим

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}|u(t)|_+^2 + \textstyle\int_0^t |\frac{\partial u}{\partial x}(s)|_0^2 ds \leq \\ &\leq \tfrac{C}{2}\textstyle\int_0^t |\widetilde{h}(s)|_0^2 ds + (A+\frac{1}{2C})\int_0^t e^{(2A+\frac{1}{C})s}ds\int_0^s |\widetilde{h}(u)|_0^2 du. \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Зафиксируем теперь достаточно малую константу C и подберем такую величину времени $T = T(C)$, что при $0 \leq t \leq T$ второй интеграл в правой части последнего неравенства меньше чем первый. Отсюда следует, что при $0 \leq t \leq T$ выполнено неравенство

$$\int_0^t |\frac{\partial u}{\partial x}(s)|_0^2 ds \leq C\int_0^t |\widetilde{h}(s)|_0^2 ds. \qquad (2.12)$$

Из этой оценки мы выведем сходимость метода Пикара для решения задачи Коши (2.6). Под этим названием мы имеем в виду следующую итерационную процедуру

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} = (1+|x|^2)\Delta u_{n+1} + h(\frac{\partial u_n}{\partial x}, x),\ \ u_n(x,0) = u^0(x).$$

Из (2.12) следует, что

$$\int_0^t |\frac{\partial}{\partial x}(u_{n+1}-u_n)(s)|_0^2 ds \le CL\int_0^t |\frac{\partial}{\partial x}(u_n-u_{n-1})(s)|_0^2 ds,$$

где L — константа Липшица функции $\widetilde{h}$. Отсюда, при $|CL|<1$ следует, что $\int_0^t |\frac{\partial}{\partial x}(u_{n+1}-u_n)(s)|_0^2 ds \to 0$ экспоненциально быстро. В силу (2.11) $|(u_{n+1}-u_n)(s)|_+$ стремится к нулю с такой же скоростью. Тем самым доказана сходимость метода в банаховом пространстве с нормой

$$\sup_{t\in[0,T]}|u(t)|_+ + (\int_0^T |\frac{\partial u}{\partial x}(s)|_0^2 ds)^{1/2},$$

а также то, что предел является решением исходной задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1+|x|^2)\Delta u + h(\frac{\partial u}{\partial x}, x),\ u(x,0)=u^0(x). \tag{2.13}$$

Проведя эти рассуждения достаточное число раз мы получим решение задачи Коши на произвольном интервале времени, поскольку временная граница $T(C)$ не зависит от выбора начального условия u^0, для которого норма $|u^0|_+^2$ конечна. Если вернуться теперь к задаче Коши, в которой фигурирует ϵ вместо 1, то можно утверждать, что нормы

$$\sup_{t\in[0,T]}|u_\epsilon(t)|_+ + \epsilon(\int_0^T |\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(s)|_0^2 ds)^{1/2} \tag{2.14}$$

равномерно по ϵ ограничены. Оценка (2.12) также гарантирует единственность решения задачи (2.13) в указанном банаховом пространстве. Тем самым, в частности, мы можем однозначно разрешить задачу Коши (2.13) если начальное условие u — такая локально интегрируемая функция, что $|u(x)| \le C(1+|x|^2)^N$.

Перейдем теперь к вопросу о регулярности полученных решений. Допустим, что функция h локально липшицева (на самом деле, достаточно гёльдеровости) по x. Мы покажем с помощью стандартной процедуры повышения гладкости (метод Мюнхаузена), что решение $u = u(x,t)$ является в действительности $C^{1,2}$-гладкой функцией (при $t > 0$). Для того, чтобы это проделать используем следующий основополагающий результат о решениях гладких параболических уравнений.

Предположим, что $(\frac{\partial}{\partial t} - L)u = f$, *где* L — *эллиптический оператор с гладкими коэффициентами. Тогда из* $f \in W^{k,l}_{p\ \mathrm{loc}}$ *следует, что* $u \in W^{k+1,l+2}_{p\ \mathrm{loc}}$. *Более того,* $\frac{\partial u}{\partial x} \in W^{k+1/2,l+1}_{p\ \mathrm{loc}}$. *(Здесь* $p > 1$ *и* $W^{k,l}_{p\ \mathrm{loc}}$ — *пространство таких локально интегрируемых в* p*-й степени функций* u, *что* $Op((1+|\tau|)^k)Uu \in L_p$ *и* $Op((1+|\xi|)^l)Uu \in L_p$, *где* U — *произвольная гладкая функция с компактным носителем, а* $Op(q(\xi,\tau))$ — *псевдодифференциальный оператор с символом* q *(см.* [124]).*)*

Пусть теперь u — решение такое уравнения $(\frac{\partial}{\partial t} - L)u = h(\frac{\partial u}{\partial x}, x)$, что $\frac{\partial u}{\partial x} \in W^{0,0}_{p\ \mathrm{loc}}$. (Напомним, что это так для нашего решения u и $p = 2$.) Отсюда следует, что $h(\frac{\partial u}{\partial x}, x) \in W^{0,0}_{p\ \mathrm{loc}}$ поскольку функция h липшицева по первому аргументу локально по x и, ввиду процитированных фундаментальных свойств параболических уравнений, $\frac{\partial u}{\partial x} \in W^{1/2,1}_{p\ \mathrm{loc}}$. По теореме вложения Соболева получим, что $\frac{\partial u}{\partial x} \in W^{0,0}_{p'\ \mathrm{loc}}$, where $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2(n+1)}$, если $\frac{1}{p} > \frac{1}{2(n+1)}$ (здесь n — размерность пространства). За конечное число шагов (преобразований $p \mapsto p'$) мы придем к такому значению p, что $\frac{1}{p} < \frac{1}{2(n+1)}$, и тогда из той же теоремы Соболева будет следовать, что $\frac{\partial u}{\partial x} \in C^{\alpha,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ для некоторого положительного числа α. После этого шаудеровские оценки позволяют утверждать, что $u \in C^{1+\alpha,2+\alpha}_{\mathrm{loc}}$.

В результате мы получаем, что задача Коши (2.5) имеет единственное

$C^{1,2}$-решение, если начальная функция u^0 имеет полиномиальный рост.

2.2 Выпуклый случай

Рассмотрим теперь наиболее существенный для нас *выпуклый* случай, когда начальная функция u^0 и правая часть $h = h(p, x)$ двойственного уравнения Беллмана выпуклы по x. Будем также считать, что для начального условия выполнена оценка $|u(x)| \leq C(1 + |x|^2)^N$. В действительности эта оценка не является новым условием, поскольку она эквивалентна условию $|u^0|_+^2 = \int \frac{|u^0|^2}{1+|x|^2} e^{-\phi}\, dx$ для некоторой обсуждавшейся ранее функции ϕ (т. е. такой функции, что $C \log |x|$ для больших x).

Последнее утверждение немедленно вытекает из хорошо известных неравенств

$$|u(x)| \leq \frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} |u(y)| dy \leq \left(\frac{1}{|B(x)|} \int_{B(x)} |u(y)|^2 dy \right)^{1/2},$$

первое из которых выполняется для любой выпуклой функции u, а второе представляет собой неравенство Коши–Буняковского. В этих неравенствах $B(x)$ — единичный шар с центром в x, а $|B(x)|$ обозначает объем шара $B(x)$.

Тогда решение $u = u_\epsilon$ задачи Коши (2.5) также выпукло по x. Для доказательства рассмотрим функцию $U = U(x, y, t) = \frac{1}{2}u(x, t) + \frac{1}{2}u(y, t) - u(\frac{1}{2}(x + y), t)$ и дифференциальное уравнение, в котором она участвует. Вначале отметим, что $U \geq 0$ при $t = 0$, поскольку функция u^0 выпукла.

Кроме того,

$$\Delta_x U(x,y) = \tfrac{1}{2}\Delta u(x) - \tfrac{1}{4}\Delta u(\tfrac{x+y}{2})$$

$$\Delta_y U(x,y) = \tfrac{1}{2}\Delta u(y) - \tfrac{1}{4}\Delta u(\tfrac{x+y}{2})$$

$$\left\langle \tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y} \right\rangle U(x,y) = -\tfrac{1}{4}\Delta u(\tfrac{x+y}{2}),$$

где через $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ обозначен оператор $\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}$, а несущественный аргумент t опущен. Рассмотрим теперь оператор $P = (1+|x|^2)\Delta_x + (1+|y|^2)\Delta_y + 2(x,y)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$. Его главный символ $\sigma(P)(\xi,\eta) = (1+|x|^2)|\xi|^2 + (1+|y|^2)|\eta|^2 + 2(x,y)(\xi,\eta) = |\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi\otimes x + \eta\otimes y|^2$ строго положителен, так что P — невырожденный эллиптический оператор. С другой стороны, имеем

$$\tfrac{\partial U}{\partial t} = \epsilon^2 PU + \tfrac{1}{2}h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(x), x) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(y), y) - h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}), \tfrac{x+y}{2}).$$

Поскольку функция h предполагается выпуклой по x, то получаем

$$-h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}), \tfrac{x+y}{2}) \geq -$$

$$\tfrac{1}{2}h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}), x) - \tfrac{1}{2}h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}), y),$$

откуда следует, что

$$\tfrac{\partial U}{\partial t} \geq \epsilon^2 PU + \tfrac{1}{2}(h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(x), x) -$$

$$h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}), x)) + \tfrac{1}{2}(h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(y), y) - h(\tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}), y)).$$

Заметим теперь, что

$$\tfrac{\partial U}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial u}{\partial x}(x) - \tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}))$$

$$\tfrac{\partial U}{\partial y} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial u}{\partial x}(y) - \tfrac{\partial u}{\partial x}(\tfrac{x+y}{2}))$$

и, поскольку функция h — липшицева, то из предыдущего неравенства получим

$$\frac{\partial U}{\partial t}(z,t) \geq \epsilon^2 PU(z,t) - C(z)|\frac{\partial U}{\partial z}(z,t)|, \qquad (2.15)$$

где z это пара (x, y), а $C(z)$ — максимум констант Липшица для функций $p \mapsto h(p, x)$ и $p \mapsto h(p, y)$. Формальное применение принципа максимума для параболических уравнений дает неравенство $U \geq 0$ всюду, что как раз и означает выпуклость u.

2.3 Принцип максимума в L^2

Чтобы оправдать принцип максимума в интересующей нас ситуации, воспользуемся уже опробованной техникой априорных оценок. Положим $U_- = \min(U, 0)$, умножим обе части неравенства (2.15) на U_- и проинтегрируем с весом $\frac{e^{-\Phi(z)}}{1+|z|^2}$, где $\Phi(x, y) = \phi(x) + \phi(y)$, а ϕ — весовая функция из (2.8). С помощью интегрирования по частям, аналогичному проведенному в (2.9) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}||U_-(t)||_+^2 + ||\frac{\partial U_-}{\partial z}(t)||_0^2 \leq A||U_-(t)||_+^2$$

где использовано обозначение

$$||u||_+^2 = \int \frac{|u|^2}{1+|z|^2} e^{-\Phi}\, dz,$$

$$||v||_0^2 = \int |v|^2 e^{-\Phi}\, dz,$$

а A — некоторая константа. Нужно заметить, что член

$$\int C(z)|\tfrac{\partial U}{\partial z}(z,t)|U_-(z,t)\tfrac{e^{-\Phi}}{1+|z|^2}\, dz =$$

$$\int C(z)|\tfrac{\partial U_-}{\partial z}|U_- \tfrac{e^{-\Phi}}{1+|z|^2}\, dz$$

не доставляет неприятностей, поскольку оценивается как

$$\frac{c}{2}||\frac{\partial U_-}{\partial z}(t)||_0^2 + \frac{M}{2c}||U_-(t)||_+^2,$$

где c — произвольно малая константа, а $M = \sup \frac{|C(z)|}{1+|z|^2}$. Ввиду того, что $U_-(0) \equiv 0$ последнее неравенство гарантирует, что $U_-(t) \equiv 0$ для любого положительного момента времени t, а это как раз означает, что $U \geq 0$ всюду. Это, в свою очередь, доказывает выпуклость функции $u = u_\epsilon$.

2.4 Исчезающая вязкость

Теперь перейдем к изучению сингулярного предельного перехода $\epsilon \to 0$ для рассмотренных функций u_ϵ, имея целью получить вязкое решение задачи Коши для двойственного уравнения Беллмана (2.1). Мы также установим с помощью предыдущих результатов выпуклость этих вязких решений, при выпуклых начальных условиях.

Первое решающее наблюдение состоит в том, что функции u_ϵ монотонно растут вместе с ϵ. Действительно, пусть $\epsilon > \epsilon'$. Тогда разность $U_{\epsilon\epsilon'} = u_\epsilon - u_{\epsilon'}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U_{\epsilon\epsilon'}}{\partial t} = \epsilon'^2(1+|x|^2)\Delta U_{\epsilon\epsilon'} + (\epsilon^2 - \epsilon'^2)(1+|x|^2)\Delta u_\epsilon +$$
$$h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x) - h(\frac{\partial u_{\epsilon'}}{\partial x}, x),$$

и обращается в нуль при $t = 0$. Ввиду выпуклости функции u_ϵ, член $(\epsilon^2 - \epsilon'^2)(1+|x|^2)\Delta u_\epsilon$ неотрицателен, тогда как слагаемое $h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x) - h(\frac{\partial u_{\epsilon'}}{\partial x}, x)$ превышает $-L(x)|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_{\epsilon'}}{\partial x}| = -L(x)|\frac{\partial U_{\epsilon\epsilon'}}{\partial x}|$, где $L(x)$ — уже много раз упомянутая константа Липшица, которая есть $O(|x|)$ при $x \to \infty$. Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\frac{\partial U_{\epsilon\epsilon'}}{\partial t} \geq \epsilon'^2(1+|x|^2)\Delta U_{\epsilon\epsilon'} - L(x)|\frac{\partial U_{\epsilon\epsilon'}}{\partial x}|,$$

которое показывает с помощью принципа максимума (уже использованного в доказательстве неравенства (2.4)), что $U_{\epsilon\epsilon'} \geq 0$, или $u_\epsilon \geq u_{\epsilon'}$.

2.5 Новые априорные оценки

Теперь мы получим, используя вездесущий принцип максимума, некоторые простые равномерные по ϵ поточечные априорные оценки для решений задачи Коши (2.6). Первая поточечная оценка состоит в следующем

$$|u_\epsilon(x,t)| \leq C(1+|x|^2)^N, \tag{2.16}$$

где константа C (и показатель степени N) одна и та же для любого $\epsilon_0 > \epsilon > 0$, $t \in [0,T]$ и фиксированного момента T. Отсюда, в частности, следует, что монотонный поточечный предел $u = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon$ существует почти всюду и является такой выпуклой функцией u, что $|u(x,t)| \leq C(t)(1+|x|^2)^N$ для любого момента времени t. Чтобы доказать неравенство (2.16) положим $v(x,t) = C(1+|x|^2)^N \exp(Ct)$. Тогда, как легко проверить,

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq \epsilon^2(1+|x|^2)\Delta v + h(\frac{\partial v}{\partial x}, x),$$

если константа C достаточно велика. Верно также, что $|u^0(x)| \leq v(x,0)$ если C достаточно велико. Применяя принцип максимума, приходим к выводу о том, что $|u_\epsilon(x,t)| \leq v(x,t) = C(1+|x|^2)^N \exp(Ct)$, что совпадает с неравенством (2.16). Таким образом, u — всюду конечная непрерывная (по x) выпуклая функция, а сходимость $u_\epsilon \to u$ является локально равномерной (при фиксированном времени t).

Чтобы установить непрерывность функции u по t требуется такая оценка градиента

$$|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(x,t)| \leq C(1+|x|^2)^N, \tag{2.17}$$

где константы C (и N) одни и те же для всех $\epsilon_0 > \epsilon > 0$, $t \in [0,T]$ и фиксированном времени T. (Эти константы, однако, не обязаны совпадать с одноименными величинами из неравенства (2.16).) Чтобы доказать оценку (2.17) заметим просто, что

$$|\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)| \leq \operatorname*{osc}_{B(x)} U \stackrel{def}{=} \sup_{B(x)} U - \inf_{B(x)} U \leq 2 \sup_{B(x)} |U|,$$

для любой выпуклой функции U, где $B(x)$ — единичный шар с центром в x. После этого оценка (2.17) вытекает из предыдущего неравенства, в котором $U = u_\epsilon$, объединенным с неравенством (2.16).

Наметим также другое доказательство оценки (2.17), в котором не используется предположение о выпуклости начальной функции. Во-первых будем считать, что h — гладкая функция. Это ограничение не ведет к потере общности при использовании соображений аппроксимации. Положим $v = \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}$. Тогда имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 2\epsilon^2 x \Delta u_\epsilon + \epsilon^2(1+|x|^2)\Delta v + \frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x},$$

где p — первый аргумент функции h, $\frac{\partial h}{\partial p}$ обозначает $\frac{\partial h}{\partial p}(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x)$ и, аналогично, $\frac{\partial h}{\partial x}$ обозначает $\frac{\partial h}{\partial x}(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x)$. Из неравенства Като [119] следует, что для $w = |v|$ имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leq 2\epsilon^2 |x\Delta u_\epsilon| + \epsilon^2(1+|x|^2)\Delta w + C_1(x)|\frac{\partial w}{\partial x}| + C_2(x),$$

где C_1, C_2 — константы Липшица для функций $p \mapsto h(p,x)$ и $x \mapsto h(p,x)$ в точке $(p,x) = (\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(x), x)$. Заметим, что $C_1(x) \leq C(1+|x|)$ в силу исходных предположений, а

$$C_2(x) \leq C(1+|p|) = C(1+w(x)).$$

Имеется также неравенство

$$|x\Delta u_\epsilon| \leq \frac{C}{1+|x|}|(1+|x|^2)\Delta u_\epsilon + h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x)| + C'w,$$

поскольку $\frac{1}{1+|x|}|h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x},x)| \le C''|\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}| = C''w$. Собирая вместе полученные оценки заключаем, что

$$\frac{\partial W}{\partial t} \le \epsilon^2(1+|x|^2)\Delta W + C_1(x)|\frac{\partial W}{\partial x}| + C_2 W, \qquad (2.18)$$

где $W = w - C|u_e|$. Применяя к (2.18) принцип максимума приходим к неравенству (2.17).

2.6 Непрерывность предельной функции

Изучим теперь непрерывность предельной функции $u = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon$ по времени t. Мы покажем, что u — липшицева по t, причем соответствующая константа Липшица растет линейно по x, если только $t \in [0,T]$ и время T — фиксировано. Чтобы проделать это обратимся снова к нашим исходным L^2-методам. А именно, умножим обе части равенства (2.5) на гладкую функцию $f(x)$ с компактным носителем и проинтегрируем по частям. Результат имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int u_\epsilon f\,dx = \epsilon^2\int \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}((1+|x|^2)f)\,dx + \int h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x},x)f\,dx. \qquad (2.19)$$

Теперь оценим интегралы в правой части. Именно,

$$\int \tfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial x}((1+|x|^2)f)dx = \int \tfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(\tfrac{\partial}{\partial x}((1+|x|^2)f)e^{\phi})e^{-\phi}\,dx$$
$$\le ||\tfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x}||_0||\tfrac{\partial}{\partial x}((1+|x|^2)f)e^{\phi}||_0$$

Заметим, что согласно (2.14) $\int_{t_1}^{t_2}||\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(s)||_0 ds = O(\epsilon^{-1})$, тогда как величина $||\frac{\partial}{\partial x}((1+|x|^2)f)e^{\phi}||_0$ не зависит от ϵ. Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2}\epsilon^2\int\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(s)\frac{\partial}{\partial x}((1+|x|^2)f)\,dxds = O(\epsilon). \qquad (2.20)$$

С другой стороны, $|\int h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}, x) f\, dx| \leq C \int (1+|x|^2)^N |f|\, dx$ в силу (2.17). Интегрируя равенство (2.19) по интервалу $[t_1, t_2]$ приходим к выводу, что

$$|\int u_\epsilon(t_2) f\, dx - \int u_\epsilon(t_1) f\, dx| \leq O(\epsilon) + C|t_2 - t_1| \int (1+|x|^2)^N |f|\, dx.$$

Отсюда вытекает решающая оценка

$$|u(x,t_2) - u(x,t_1)| \leq C|t_2 - t_1|(1+|x|^2)^N, \qquad (2.21)$$

которая, в частности, гарантирует непрерывность функции u (по совокупности переменных x и t).

2.7 Вязкое решение

Теперь можно доказать, пользуясь лишь достаточно стандартной техникой, что предельная функция u является (слабым) вязким решением двойственного уравнения Беллмана (2.1). В действительности, можно было бы ограничиться ссылкой на [95], но мы предпочли для удобства читателя воспроизвести соображения из loc. cit.

Мы опираемся на такую простую лемму.

Лемма *Пусть U_ϵ — вязкое решение уравнения*

$$F_\epsilon(\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; x, t) = 0$$

и непрерывные функции $F_\epsilon(a,p,X;x,t)$ локально равномерно сходятся к (непрерывной) функции $F(a,p,X;x,t)$ при $\epsilon \to 0$. Предположим, что (непрерывные) функции U_ϵ локально равномерно сходятся к непрерывной функции U при $\epsilon \to 0$. Тогда функция U — (слабое) вязкое решение уравнения $F(\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; x, t) = 0$.

Доказательство. Докажем, что U — субрешение уравнения

$$F(\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; x, t) = 0,$$

а аналогичное доказательство того, что U — суперрешение оставим читателю. Пусть тройка $\alpha = (a, p, X)$ лежит в $\mathcal{P}^{2,+}U(x,t)$. Нужно показать, что $F(a,p,X;x,t) \geq 0$. Чтобы это проделать, мы покажем, что

$$\alpha \text{ лежит в малой окрестности } \mathcal{P}^{2,+}_{\epsilon}U(x_\epsilon, t_\epsilon), \tag{2.22}$$

где точка $y_\epsilon = (x_\epsilon, t_\epsilon) \to y = (x,t)$ при $\epsilon \to 0$. Это, в частности, означает, что $F_\epsilon(a,p,X;x_\epsilon,t_\epsilon) \geq o(1)$ при $\epsilon \to 0$ и из условий леммы следует, что

$$F(a,p,X;x,t) = \lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(a,p,X;x_\epsilon,t_\epsilon) \geq 0.$$

При доказательстве соотношения (2.22) можно считать без потери общности, что $(x,t) = 0$, и рассмотреть квадратичную функцию $\phi^\alpha(x,t) = U(0) + at + \langle p, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Xx, x\rangle + \delta(|x|^2 + |t|)$, для которой

$$U \leq \phi^\alpha \text{ в окрестности } U \text{точки } 0. \tag{2.23}$$

Такая функция существует, поскольку $\alpha \in \mathcal{P}^{2,+}U(0)$, для любого $\delta > 0$. Положим теперь $\phi^\alpha_+(x,t) = \phi^\alpha(x,t) + \delta(|x|^2 + |t|)$ и определим точку $y_\epsilon = (x_\epsilon, t_\epsilon)$как точку максимума функции $U_\epsilon - \phi^\alpha_+$ в окрестности U. Такая точка заведомо имеется, если окрестность U компактна. Предположим, что (при необходимости переходя к подпоследовательности) $y_\epsilon \to y$ as $\epsilon \to 0$. Имеем

$$U_\epsilon(z) - \phi^\alpha_+(z) \leq U_\epsilon(y_\epsilon) - \phi^\alpha_+(y_\epsilon)$$

для любой точки $z \in U$. В частности, полагая $z = 0$ и переходя к пределу, получим, что $0 \leq U(y) - \phi^\alpha_+(y)$. С другой стороны, $U(y) - \phi^\alpha(y) \leq 0$

благодаря (2.23). Таким образом,

$$U(y) - \phi^\alpha(y) \le 0 \le U(y) - \phi_+^\alpha(y)$$

и мы приходим к выводу о том, что $\delta(|x|^2 + |t|) \le 0$, где (x,t) — компоненты вектора y. Поэтому $y = 0$. Если выбрать величину δ достаточно малой, то отсюда следует, что $\alpha = (a, p, X)$ лежит в произвольно малой окрестности множества $\mathcal{P}_\epsilon^{2,+}U(y_\epsilon)$. Лемма доказана.

Таким образом, функция $u = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon$ является (слабым) вязким решением задачи Коши для двойственного уравнения Беллмана. В действительности, эта функция — сильное вязкое решение. Это следует из единственности слабого вязкого решения рассматриваемой задачи Коши и из существования сильного решения. Первое утверждение, в свою очередь, вытекает из принципа максимума, тогда как последнее можно стандартным образом доказать методом Перрона (см. [95]).

2.8 Другая характеризация функции u

В этом разделе будут очень существенно использоваться особые свойства выпуклых функций для того, чтобы переформулировать фундаментальные свойства функции u. Заметим, что если ограничиться *выпуклыми* функциями, то можно дать еще одно разумное определение обобщенного решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка. Именно, скажем, что выпуклая функция $(x,t) \mapsto u(x,t)$ — обобщенное выпуклое решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = h(\frac{\partial u}{\partial x}, x, t)$, в том и только в том случае, если $u(x,t) - u(x,s) = \int_s^t h(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau), x, \tau) d\tau$, где $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)$ — субдифференциал функции u, а $h(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau), x, \tau)$, по определению, $\sup h(p,x,\tau)$ по $p \in \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)$ для произвольного момента времени $t \ge s$. В этом разделе это свойство и некоторые другие доказываются для функции $u = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon$, рассмотренной в предыдущих разделах. Сделать это, однако, мы можем только при некоторых дополнительных допущениях о правой части двойственного уравнения Беллмана.

Наши дополнительные допущения состоят в следующем: можно решить задачу (дифференциальное включение) с начальными условиями

$$\dot{p}\,(t) \in \frac{\partial h}{\partial x}(p(t), x, t),\ \ p(s) = p \tag{2.24}$$

для любой фиксированной тройки x, t, p.

и

$$\text{функция } x \mapsto h(p, x, t) \text{ однородна первой степени} \tag{2.25}$$

(В принципе, можно разобрать и случай другой степени однородности; однако, приложения этой более общей ситуации нам неизвестны.) Тогда верно следующее.

Теорема i) *Функция u — обобщенное выпуклое решение двойственного уравнения Беллмана* ii) *Функция u имеет правую производную по времени t и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}, x, t),$$

где $\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)$ — субдифференциал функции u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ обозначает правую производную функции u, а функция $\overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau), x, \tau)$ есть, по определению, $\sup h(p, x, \tau)$ *по* $p \in \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)$

iii) *Функция u является минимальной среди таких выпуклых и однородных первой степени (по x) функций $(x, t) \mapsto v(x, t)$, где $t \geq s$, что $v(t', x) - v(t'', x) = \overline{h}(\frac{\partial v}{\partial x}(x, t''), x, t'') + o(|t' - t''|)$ для любого момента времени*

$t' \geq t'' \geq s$, и что $v(x,s) \geq u(x,s)$. (Здесь, $\overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}, x, t) \overset{def}{=} \sup h(p,x,t)$ по $p \in \frac{\partial u}{\partial x}$)

iv) *Функция u является минимальным суперрешением двойственного уравнения Беллмана (2.1).*

Доказательство. Используем в качестве отправной точки уравнение (2.19), из которого следует, что

$$u(x,t) - u(x,s) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_s^t \overline{h}(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(x,\tau), x, \tau) d\tau, \tag{2.26}$$

для любого момента $t \geq s$. Мы, однако, уже знаем, что $u = \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon$ и, как хорошо известно и легко доказывается, для сходящейся последовательности u_ϵ выпуклых функций имеем $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(x,\tau) \to \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)$. Это означает, что предел p любой сходящейся (под)последовательности $p_\epsilon \in \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(x,\tau)$ лежит в $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_s^t h(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x}(x,\tau), x, \tau) d\tau \leq \int_s^t \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau), x, \tau) d\tau. \tag{2.27}$$

(Напомним, что $\overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x})$ обозначает супремум $\sup h(p,x,\tau)$ по множеству $p \in \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)$.) Функция $\tau \mapsto \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau), x, \tau)$ является полунепрерывной сверху и потому

$$\int_s^t \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau), x, \tau) d\tau \leq \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,s), x, s)(t-s) + o(t-s). \tag{2.28}$$

Теперь воспользуемся условием (2.24). Благодаря ему можно решить задачу с начальными условиями

$$\dot{p}\,(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(p(t), x, t), \;\; p(s) = p$$

для любой фиксированной тройки x, t, p. После этого можно положить $v(t,y) = \langle p(t), y\rangle$. В силу тождества Эйлера функция v удовлетворяет (в классическом смысле) дифференциальному неравенству

$$\tfrac{\partial v}{\partial t}(y,t) = \left\langle y, \tfrac{\partial h}{\partial x}(\tfrac{\partial v}{\partial x}(y,t), x, t)\right\rangle \leq$$
$$\left\langle y, \tfrac{\partial h}{\partial x}(\tfrac{\partial v}{\partial x}(y,t), y, t)\right\rangle = h(\tfrac{\partial v}{\partial x}(y,t), y, t),$$

и, тем самым, является субрешением двойственного уравнения Беллмана. Принцип максимума позволяет утверждать, что для любого выпуклого суперрешения w двойственного уравнения Беллмана $w(y,t) - w(x,s) \geq v(y,t)$ если $p(s) = p \in \frac{\partial w}{\partial x}(x,s)$, т. к. это включение гарантирует, что $w(y,s) - w(x,s) \geq v(y,s)$ для любого y. Поэтому, $w(x,t) - w(x,s) \geq h(p,x,s)(t-s) + o(t-s)$ для любого вектора $p \in \frac{\partial w}{\partial x}(x,s)$ и, следовательно,

$$w(x,t) - w(x,s) \geq \overline{h}(\frac{\partial w}{\partial x}(x,s), x, s)(t-s) + o(t-s). \tag{2.29}$$

Учитывая вместе соотношения (2.26), (2.27), (2.28) и неравенство (2.29), примененное к функции $w = u$, заключаем, что

$$u(x,t) - u(x,s) = \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,s), x, s)(t-s) + o(t-s) \tag{2.30}$$

и

$$\int_s^t \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau), x, \tau)d\tau = \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,s), x, s)(t-s) + o(t-s).$$

Но последнее равенство влечет за собой то, что полунепрерывная сверху функция

$$\tau \mapsto \overline{h}(\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau), x, \tau)$$

является, на самом деле, непрерывной справа в точке s, а предшествующее равенство доказывает утверждение ii) теоремы. Чтобы доказать принцип максимума iii) положим $u^\epsilon(x,t) = u(x,t) - \epsilon(t-s)$ и заметим, что достаточно доказать, что $v \geq u^\epsilon$ для любого $\epsilon > 0$. Предположим, что s_* — нижняя грань таких моментов времени $t > s$, что $v(x,t) < u^\epsilon(x,t)$ для некоторого вектора x. Тогда для некоторых векторов x_* имеем $v(x_*, s_*) = u^\epsilon(x_*, s_*)$, в то время как $v(x, s_*) \geq u^\epsilon(x, s_*)$ для любого вектора x. Поэтому выполнено включение $\frac{\partial v}{\partial x}(x_*, s_*) \supset \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x}(x_*, s_*) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_*, s_*)$ и обращаясь к (2.30) приходим к выводу о том, что

$$v(x_*, t) - u^\epsilon(x_*, t) \geq \epsilon(t-s) + o(t-s).$$

Это, очевидно, противоречит определению момента s_* и неравенство $v \geq u^\epsilon$ доказано.

Наконец, утверждение iv) теоремы это общий принцип максимума для субрешений, который справедлив в значительно более общей ситуации.

Глава 3

Аппроксимации областей достижимости линейных систем

1 Введение и постановка задачи

Рассмотрим управляемую динамическую систему общего вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in X, \quad u \in U, \tag{1.1}$$

где X — пространство состояний, U — множество допустимых управлений, а t — время. Хорошо известно, что в теории управления, также как и в дифференциальных играх и в гарантированной фильтрации понятие множества достижимости играет важную роль. Мы напомним, что при фиксированном времени s и множестве начальных состояний M в этот момент ($x(s) \in M$) множество достижимости $D(t) = D(t, s) = D(t, s; M)$ для системы (1.1) в момент времени $t \geq s$ определяется (см., например, [77])

$$D(t; s, M) = \{x(t) : \ x \text{ удовлетворяет } (1.1), \ x(s) \in M\}. \tag{1.2}$$

Главное (полугрупповое) свойство множеств достижимости выглядит следующим образом

$$D(t, \tau; D(\tau, s)) = D(t, s), \tag{1.3}$$

где $s \leq \tau \leq t$ — произвольные моменты времени. Эффективное нахождение множеств достижимости или, что то же самое, решения уравнения (1.3) обычно трудная, почти непреодолимая задача. Иногда, тем не менее, достаточно определить оценку множества достижимости. Следующее определение (см. главу 2) вводит важную концепцию теории аппроксимации множеств достижимости.

Определение 1.1. Семейство $\{\Omega(t)\}, t \geq s$ подмножеств $\Omega(t) \subset X$ называется семейством (или множеством) супердостижимости для системы (1.1) если

$$D(t, \tau; \Omega(\tau)) \subset \Omega(t) \tag{1.4}$$

для любого τ такого что $s \leq \tau \leq t$. Очевидно, если $M \subset \Omega(s)$ то $D(t) \subset \Omega(t)$ для любого $t \geq s$.

Аналогично, путем обращения всех приведенных выше включений, мы определяем множества субдостижимости, которые обеспечивают внутренние приближения для множеств достижимости.

Во многих случаях значительно проще решать неравенство (1.4) чем уравнение (1.3). В частности, при этом иногда возможно найти решение в виде множеств достаточно простой формы (канонических множеств).

В ряде работ [79], [122] и других (см. монографии [94, 107]) было предложено в качестве канонических множеств брать эллипсоиды. Выбор эллипсоидов обусловлен следующими причинами: 1) эллипсоид в пространстве $\mathbf{R}^n$ описывается вектором своего центра и симметрической матрицей размерности $n \times n$, т.е. сравнительно небольшим числом параметров (примерно вдвое меньшим, чем требуется для описания параллелепипеда при больших n); 2) произвольное выпуклое тело можно довольно хорошо приблизить эллипсоидом (в работах [40], [104] доказаны теоремы, позволяющие оценить качество аппроксимации эллипсоидом произвольного выпуклого множества); 3) эллипсоидальные множества неопределенности гарантированного подхода соответствуют традиционным гауссовским распределениям в вероятностном подходе; 4) класс эллипсоидов инвариантен относительно аффинных преобразований.

Эта глава посвящена нахождению оптимальных эллипсоидальных множеств суб- и супердостижимости для линейных управляемых систем в форме

$$\dot{x} = Ax + u, \ x \in V, \ u \in W, \quad \{x, u\} \in \mathcal{E}, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{E}$ — эллипсоид в векторном пространстве $V \oplus W$. Все использованные объекты могут зависеть от времени t. Раньше (см., например, [77], [50]), аналогичная постановка относилась к более простым управляемым системам

$$\dot{x} = Ax + u, \ x \in V, \ u \in W, \quad u \in \mathcal{E}, \tag{1.6}$$

т.е., при более ограничивающем предположении, что вектор состояния x не ограничен, в то время как вектор управления u подчинен условию $u \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — эллипсоид в векторном пространстве W. Уравнения 1.5 можно трактовать как уравнения движения *наблюдаемой* системы. При этом параметр u трактуется как возмущение, а условие $\{x, u\} \in \mathcal{E}$ должно пониматься как вырезающее из пространства состояний область, совместимую с наблюдениями. Конечно, тот факт, что при этом наблюдение и возмущение связаны, кажется несколько экзотическим. Он, однако, является вполне оправданным с точки зрения аналогии с наблюдением гауссовских процессов.

Мы используем следующее стандартное обозначение для эллипсоидов с центром a и матрицей Q в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$E(a, Q) = \{x \in \mathbf{R}^n; (Q^{-1}(x-a), x-a) \leq 1\} \tag{1.7}$$

$$E(Q) = E(0, Q). \tag{1.8}$$

Здесь $Q = Q^*$ — симметрическая положительно определенная матрица, $a \in \mathbf{R}^n$ — центр эллипсоида, а звездочка означает транспонирование. Мы рассматриваем оптимальные семейства эллипсоидов $E(t)$ следующих двух типов. Предположим, что нам задана функция цены $L = L(E)$, гладко зависящая от параметров a, Q эллипсоида $E = E(a, Q)$. Тогда говорят, что семейство эллипсоидов супердостижимости $E(t)$

(а) локально оптимально, если для любого $\tau \geq 0$, оно решает минимизационную задачу

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} L(E(t)) \to \min, \tag{1.10}$$

где минимум берется по всем семействам эллипсоидов супердостижимости $\{E'(t)\}$, таких что $E'(\tau) = E(\tau)$;

(б) глобально оптимально, если для фиксированного $T \geq 0$, оно решает минимизационную задачу

$$L(E(T)) \to \min. \tag{1.11}$$

Аналогично, заменяя супердостижимые на субдостижимые и min на max можно получить определение оптимальных семейств эллипсоидов субдостижимости.

Здесь мы выводим дифференциальные уравнения для параметров a, Q оптимальных эллипсоидов применительно к системе (1.5). Результаты очень похожи на уже известные касающиеся системы (1.6).

2 Дифференциальные неравенства для эллипсоидов суб- и супердостижимости

В этом разделе мы перепишем определение (1.4) супердостижимости, так же как и аналогичное определение субдостижимости, в форме дифференциального неравенства. Это преобразование позволит нам применять стандартные средства анализа для эффективного нахождения оптимальных эллипсоидов суб- и супердостижимости.

Обозначим через $h(t, x, \xi) = H_{\Omega(x)}(\xi)$ опорную функцию множества $\Omega(x) = \{Ax + Bu,\ u \in W,\ \ \{x, u\} \in \mathcal{E}\}$, в правой части уравнения (1.5). Напомним, что опорная функция H_Ω любого подмножества $\Omega \subset W$ определяется соотношением

$$H_\Omega(\xi) = \sup_{y \in \Omega}(y, \xi),$$

где $\xi \in W^*$ — вектор сопряженного пространства W^*. Хорошо известно, что соответствие между замкнутыми выпуклыми множествами и их опорными функциями взаимно однозначно.

Определение 2 *Мы назовем семейство $t \mapsto \Omega_t$ замкнутых выпуклых множеств гладким тогда и только тогда, когда соответствующая функция $(t, \xi) \mapsto H_{\Omega_t}(\xi)$ является гладкой.*

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения* (1.5) *непрерывна по t и предположим, что нам дано гладкое семейство эллипсоидов E_t и $H_t(\xi)$ — соответствующее семейство их опорных функций. Тогда семейство E_t является супердостижимым по отношению к динамической системе (1.5) тогда и только тогда,* *когда выполняется следующее дифференциальное неравенство*

$$\frac{\partial H_t(\xi)}{\partial t} \geq h\left(t, \frac{\partial H_t(\xi)}{\partial \xi}, \xi\right) \qquad (2.1)$$

Обратное неравенство

$$\frac{\partial H_t(\xi)}{\partial t} \leq h\left(t, \frac{\partial H_t(\xi)}{\partial \xi}, \xi\right) \qquad (2.2)$$

описывает эллипсоиды субдостижимости.

Доказательство теоремы. Рассмотрим допустимую траекторию $x(t)$ управляемой системы (1.5) и опорную функцию $H'(t,\xi) = (x(t),\xi)$ соответствующего одноточечного множества $\{x(t)\}$. Включение $x(s) \in E_s$, где E_s – начальный эллипсоид, точно соответствует неравенству $H'(s,\xi) \leq H(s,\xi)$. С помощью соотношения между функцией $h(t,x,\xi) = H_{\Omega(x)}(\xi)$ и правой частью уравнения (1.5) мы имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{\partial H_t'(\xi)}{\partial t} \leq h\left(t, \frac{\partial H_t'(\xi)}{\partial \xi}, \xi\right). \qquad (2.3)$$

(Необходимо принять во внимание очевидное соотношение $\frac{\partial H_t'(\xi)}{\partial \xi} = x(t)$.) Теперь, с учетом теорем сравнения для дифференциальных неравенств первого порядка, мы получаем соотношение $H'(s,\xi) \leq H(s,\xi) \Longrightarrow H'(t,\xi) \leq H(t,\xi)$ для любого $t \geq s$, если $H(t,\xi)$ есть решение дифференциального неравенства (2.1). Таким образом, это неравенство влечет за собой супердостижимость. Теперь предположим что функция $H_t(\xi)$ соответствует семейству эллипсоидов супердостижимости и предположим, что неравенство (2.1) нарушено в точке (t,ξ). Это означает, что в точке $x = \frac{\partial H_t(\xi)}{\partial \xi}$ мы можем найти допустимое управление u такое, что $(Ax + Bu, \xi) > \frac{\partial H_t(\xi)}{\partial t}$ (неравенство строгое!). Отсюда следует, что мы можем выбрать допустимую траекторию $\tau \mapsto$

$x(\tau),\ \tau \geq t$, проходящую через точку x в момент t, которая не содержится в E_τ для τ, достаточно близких к t. Это противоречит свойству супердостижимости.

Теперь мы переходим ко второй части теоремы, касающейся субдостижимости. Как следствие сказанного выше, можно предположить, что неравенство (2.2) не может нарушаться ни для одного семейства субдостижимости. Если же это неравенство выполнено, то тогда его решение не может быть больше решения соответствующего уравнения

$$\frac{\partial H_t''(\xi)}{\partial t} = h\left(t, \frac{\partial H_t''(\xi)}{\partial \xi}, \xi\right) \tag{2.4}$$

с тем же начальным условием в момент s. Далее, в силу результатов главы 2 уравнение (2.4) описывает опорную функцию минимального замкнутого выпуклого множества супердостижимости. Можно легко показать, что множество достижимости системы (1.5) выпукло и компактно (поскольку таков эллипсоид $\mathcal{E}$) и, таким образом, совпадает с этим минимальным замкнутым выпуклым множеством супердостижимости. Теперь мы можем заключить, что если неравенство (2.2) выполнено, то его решение описывает опорную функцию семейства областей (множеств) субдостижимости, что и требовалось доказать.

3 Оптимальные эллипсоиды супердостижимости

Теперь перейдем к дифференциальным уравнениям, описывающим оптимальные эллипсоиды суб- и супердостижимости для системы (1.5). Выпишем уравнение для эллипсоида $\mathcal{E}$ в правой части (1.5)

$$(S_1 u, u) + (u, S_2 x) + (u, S_3) + (S_4 x, x) + (S_5, x) + S_6 \leq 0, \tag{3.1}$$

где S_1 и S_4 — положительно определенные симметрические матрицы, S_3 и S_5 — векторы в соответствующих пространствах W и V, S_2 — матрица линейного оператора $V \to W$, и, наконец, S_5 является константой. Это наши входные данные.

Чтобы применить развитую выше методику дифференциальных неравенств, необходимо выразить опорную функцию $h(t,x,\xi) = H_{\Omega(x)}(\xi)$ правой части уравнения (1.5) через эти данные. Получаем

$$\begin{aligned} & h(t,x,\xi) = (Ax,\xi) - \tfrac{1}{2}(S_1^{-1}S_2x,\xi) + \\ & + \tfrac{1}{2}(S_1^{-1}\xi,\xi)^{1/2}\left((S_1^{-1}(S_2x+S_3), S_2x+S_3) - 4S(x)\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $S(x) = (S_4x,x) + (S_5,x) + S_6$. Более точно, опорная функция $h(t,x,\xi)$ задается приведенной выше формулой тогда и только тогда, когда множество $\Omega(x)$ не пусто или, что то же самое, выражение $(S_1^{-1}(S_2x+S_3), S_2x+S_3) - 4S(x)$ в скобках положительно. Иначе следует считать, что $h(t,x,\xi) = -\infty$. Чтобы прийти к равенству (3.2) можно построить опорную функцию $h(t,x,\xi) = \sup\limits_{\{x,\xi\}\in\mathcal{E}}(u,\xi)$ через соответствующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = (u,\xi) - \lambda((S_1u,u) + (u,S_2x) + (u,S_3) + (S_4x,x) + (S_5,x) + S_6)),$$

где λ — множитель Лагранжа. Получаем

$$\xi = \lambda(2S_1u + S_2x + S_3),$$

и, подставляя это в (3.1), имеем (3.2).

Теперь, чтобы перейти к эллипсоидам суб- и супердостижимости, следует рассмотреть опорную функцию $H(t,\xi) = H_{E(a(t),Q(t))}(\xi) = (a\xi) + (Q\xi,\xi)^{1/2}$ семейства эллипсоидов и подставить

$$x = \frac{\partial H_t(\xi)}{\partial \xi} = a + \frac{Q\xi}{(Q\xi,\xi)^{1/2}} \tag{3.3}$$

вместо x в (3.2). Далее, мы получаем

$$(Q\xi,\xi)^{1/2}\frac{\partial H_t(\xi)}{\partial t} = (\dot{a}, \xi(Q\xi,\xi)^{1/2}) + \frac{1}{2}(\dot{Q}\xi,\xi), \tag{3.4}$$

и

$$\begin{gathered}(Q\xi,\xi)^{1/2} h \;\; t, \tfrac{\partial H_t(\xi)}{\partial \xi}, \xi \;\; = \Big((A - \tfrac{1}{2}S_1^{-1}S_2)x, \eta\Big) + \\ \tfrac{1}{2}(S_1^{-1}, X)^{1/2}\Big((Q,X)\big[(S_1^{-1}(S_2x+S_3), S_2x+S_3) - 4S(x)\big]\Big)^{1/2},\end{gathered} \tag{3.5}$$

где η обозначает вектор $\xi(Q\xi,\xi)^{1/2}$, X обозначает матрицу $\xi\otimes\xi$ (другими словами, $X_{ij} = \xi_i\xi_j$), и $(\alpha,\beta) \overset{def}{=} \mathrm{Tr}(\alpha\beta)$ — симметрические матрицы α, β. Вспоминая неравенство (2.1), мы получаем следующие необходимые и достаточные условия того, что кривая $t \mapsto \{a(t), Q(t)\}$ описывает развитие эллипсоидов супердостижимости:

$$\begin{gathered}(\dot{a},\eta) + (\tfrac{1}{2}\dot{Q}, X) \geq (\overline{A}a, \eta) + (\tfrac{1}{2}\{\overline{A}, Q\}, X) + \\ \tfrac{1}{2}(S_1^{-1}, X)^{1/2}\left((\overline{Q}, X) + 2(\overline{s}, \eta)\right)^{1/2},\end{gathered} \tag{3.6}$$

где матрица $\overline{A} = A - 1/2S_1^{-1}S_2$, а $\{\overline{A}, Q\}$ обозначает “скобки Жордана” $\overline{A}Q + Q\overline{A}^*$, $\overline{Q} = ((Sa,a) + (s,a) - 4S_6)Q + QSQ$, $\overline{s} = QSa + Qs$, где, в свою очередь, $S = S_2^*S_1^{-1}S_2 - 4S_4$, и $s = S_2^*S_1^{-1}S_3 - 2S_5$. Неравенство должно выполняться для любой пары X, η соответствующей любому вектору ξ, т.е., $\eta = \xi(Q\xi,\xi)^{1/2}$, $X = \xi\otimes\xi$ такое, что выражение $(\overline{Q}, X) + 2(\overline{s}, \eta)$ неотрицательно.

Обращая это неравенство, мы заключаем, что свойство субдостижимости может быть записано в виде

$$\begin{gathered}(\dot{a},\eta) + (\tfrac{1}{2}\dot{Q}, X) \leq (\overline{A}a, \eta) + (\tfrac{1}{2}\{\overline{A}, Q\}, X) + \\ \tfrac{1}{2}(S_1^{-1}, X)^{1/2}\left((\overline{Q}, X) + 2(\overline{s}, \eta)\right)^{1/2}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Условие “$(\overline{Q}, X) + 2(\overline{s}, \eta)$ неотрицательно” всегда верно в этом случае, поскольку рассматриваемый эллипсоид принадлежит множеству достижимости.

4 Гамильтонианы Понтрягина

Теперь мы можем сформулировать задачу поиска оптимальных эллипсоидальных оценок множеств достижимости как стандартную задачу теории управления. Обозначим через $w = \{Q, a\}$ пару параметров, описывающих эллипсоиды, т.е. Q — положительно определенная симметрическая матрица, a — вектор центра. Иногда удобно рассматривать эту пару как следующую симметрическую матрицу

$$\widetilde{\{Q, a\}} = \begin{pmatrix} Q & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix},$$

где вектор-строка a^* обозначает транспонированный вектор-столбец a. Тогда условия суб- и супердостижимости для семейств эллипсоидов с параметрами w могут быть описаны дифференциальным включением

$$\dot{w} \in F(t, w), \tag{4.1}$$

где множество $F(t, w)$ состоит из пар $\{\dot{Q}, \dot{a}\}$ которые удовлетворяют условиям (3.7) в случае субдостижимости и (3.6) в случае супердостижимости. В этих обозначениях, например, можно переформулировать задачу поиска глобально оптимальных эллипсоидов супердостижимости как задачу минимизации терминального функционала

$$L(w) \to \inf \tag{4.2}$$

на допустимых траекториях системы (4.1). Аналогичное утверждение верно и для всех остальных интересующих нас случаев.

Уже из первых работ школы Понтрягина хорошо известно, что для решения оптимизационных задач применительно к системе (4.1), (4.2) необходимо вычислить гамильтониан

$$h(t,w,w^*) \stackrel{def}{=} \inf_{y\in F(t,w)} (y,w^*), \tag{4.3}$$

где w^* — сопряженная переменная и $(\cdot,\cdot)$ обозначает обычное скалярное произведение

$$Tr(\widetilde{\{Q,a\}}\widetilde{\{Q',a'\}}) = (Q,Q') + 2(a,a').$$

Ниже мы покажем, что эта задача по существу сводится к следующей. Рассмотрим правую часть (3.6) как функцию $\Phi(X,\eta)$ пары $w^* = \{X,\eta\}$. Эта w^* и есть упоминавшаяся выше сопряженная переменная. Функция $\Phi(X,\eta)$ определена на множестве $S = \{w^* = \{X,\eta\} :\ \eta = \xi(Q\xi,\xi)^{1/2}, X = \xi\otimes\xi\}$, где ξ пробегает все n-мерные векторы. Мы хотим найти минимальную вогнутую оболочку Φ^* этой функции, т.е., минимальную вогнутую функцию сопряженной переменной w^* которая не меньше чем Φ на множестве S. Это означает, в частности, что $\Phi^*(w^*) = -\infty$ если w^* не ограничена на замкнутой выпуклой оболочке $\mathcal{C} = \operatorname{conv}(S)$ множества S. Таким образом, явное нахождение функции Φ^* включает нахождение этой выпуклой оболочки. Чтобы сделать это, мы примем следующую точку зрения на множество S. Мы рассмотрим пару $\{X,\eta\} \in S$ как следующую симметрическую $(n+1)\times(n+1)$-мерную матрицу

$$H = \widetilde{\xi}\otimes\widetilde{\xi} = \begin{pmatrix} X & \eta \\ \eta^* & (Q\xi,\xi) \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\xi}$ означает $(n+1)$-мерный вектор $(\xi,(Q\xi,\xi)^{1/2})$, а η^* — транспонированный вектор η. Нетрудно заметить, что это неотрицательно определенная матрица и $Tr\widetilde{Q}H = 0$. Здесь $\widetilde{Q}$ обозначает матрицу

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1 *Выпуклая оболочка* $\mathcal{C} = \mathrm{conv}\,(S)$ *множества* S *совпадает с множеством* $\mathcal{C}^*$ *всех положительно определенных симметрических* $(n+1)\times(n+1)$*-мерных матриц* H *таких что* $Tr\widetilde{Q}H = 0$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $S \subset \mathcal{C}^*$. Следовательно, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^*$ так как очевидно, что $\mathcal{C}^*$ является выпуклым конусом. Предположим, что $\widetilde{X} \in \mathcal{C}^*$. После невырожденного линейного преобразования в $(n+1)$-мерном пространстве мы можем принять, что $\tilde{X}$ и $\widetilde{Q}$ являются диагональными матрицами. Другими словами, $\widetilde{X} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \otimes e_i$, $\widetilde{Q} = \sum_{i=1}^{n+1} b_i e_i \otimes e_i$, где $a_i \geq 0$ и e_i — координатные орты. Мы также можем принять, что $b_i = 1$ для $i = 1, \dots, n$, и $b_{n+1} = -1$. Тогда $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ и мы полагаем $f_i^{\pm} = e_i \pm e_{n+1,}$ $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\widetilde{X} = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\epsilon=+,-} \sqrt{a_i} f_i^{\epsilon} \otimes \sqrt{a_i} f_i^{\epsilon} \in \mathcal{C}$, что и требовалось доказать.

Для работы с эллипсоидами супердостижимости нужна только частичная информация о множестве $\mathcal{C}$, которая содержится в приведенном ниже следствии предложения 1.

Предложение 2 *Выпуклая оболочка* $\mathrm{conv}\,(S)$ *содержит все элементы вида* $\{X, 0\}$*, где* X *— положительно определенная симметрическая матрица.*

Доказательство. Мы приведем независимое доказательство, несмотря на то, что утверждение с очевидностью следует из предложения 1. Пусть $X \geq 0$ — положительно определенная симметрическая матрица. Мы должны доказать, что $\{X, 0\}$ — выпуклая комбинация элементов множества S. Так как утверждение инвариантно относительно линейных преобразований, можно считать, что X — диагональная матрица. Другими словами, $X = \sum_i a_i e_i \otimes e_i$, где $a_i \geq 0$, а e_i — координатные орты. Тогда $X =$

$\sum_i \sqrt{a_i}e_i \otimes \sqrt{a_i}e_i$, $\{X, 0\} = 1/2 \sum_i \sum_{\epsilon=+,-} \{\epsilon\sqrt{a_i}e_i \otimes \epsilon\sqrt{a_i}e_i, \epsilon\sqrt{a_i}e_i\}$, и наше утверждение доказано.

Теперь мы можем определить функцию Φ^*.

Предложение 3 *Функция $\Phi^*(X, \eta)$ дается правой частью уравнения (3.6), если $(X, \eta) \in \mathrm{conv}\,(S)$ и $-\infty$ в противном случае.*

Доказательство. Рассмотрим линейную карту p из множества W^* пар $w^* = \{X, \eta\}$, где X — симметрическая матрица, и η — вектор, в евклидову плоскость $\mathbf{R}^2$, определяемую посредством

$$p(X, \eta) = \{(S_1^{-1}, X), (\tilde{Q}, X) + (\tilde{s}, \eta)\}.$$

Тогда можно представить Φ как сумму $\Phi = l + \phi \circ p$, где l – линейная функция, а ϕ — вогнутая функция в $\mathbf{R}^2$. Это утверждение очевидно, так как линейный член $l(X, \eta) = (\tilde{A}a, \eta) + (\frac{1}{2}\{\tilde{A}, Q\}, X)$, а оставшаяся часть Φ принимает вид $\phi \circ p$, где

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1 x_2} & , \text{ если } (x_1, x_2) \in p(\mathrm{conv}\,(S)) \\ -\infty & , \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Остается отметить, что функция $(x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1 x_2}$, где $x_i \geq 0$ выпукло, так как $\sqrt{x_1 x_2} = \inf\limits_{\alpha \geq 0}(\alpha x_1 + \alpha^{-1} x_2)$ является минимумом семейства линейных функций.

Мы покажем, что функция Φ^* принимает вид $\Phi^* = l^* + (\phi \circ p)^*$, где * обозначает минимальное вогнутое продолжение с S на W^*. Тем не менее, l^* полностью совпадает с l, в то время как $(\phi \circ p)^*$ – с $\phi^* \circ p$, где ϕ^* обозначает минимальное вогнутое продолжение с $p(S)$ на $\mathbf{R}^2$. Для последующего доказательства привлечем следующее наблюдение.

Утверждение 1 *Образы $p(S)$ и $p(\mathcal{C}) = p(\operatorname{conv}(S))$ совпадают.*

Чтобы доказать утверждение 1 заметим, что

$$p(\operatorname{conv}(S)) = \operatorname{conv} p(S)$$

— выпуклый конус в плоскости, порожденный его компактным выпуклым подмножеством $\tilde{S} = p(\{\{X, \eta\} : (Q, X) = 1\} \cap \mathcal{C})$. Слово “порожденный” значит, что $p(\mathcal{C}) = \mathbf{R}_+^* \tilde{S}$. Тем не менее, множество $\{\{X, \eta\} : (Q, X) = 1\} \cap S$ есть эллипсоид $\{(Q\xi, \xi) = 1\}$, который является связным множеством. Следовательно, множество $p(\{\{X, \eta\} : (Q, X) = 1\} \cap S)\})$ связно. С другой стороны, выпуклая оболочка этого множества совпадает с $p(\{\{X, \eta\} : (Q, X) = 1\} \cap \mathcal{C})\})$. Это означает, что конус $p(S)$ (вообще говоря невыпуклый) содержит непрерывную кривую, соединяющую два крайних луча выпуклого конуса $p(\mathcal{C})$. Следовательно, $p(\mathcal{C}) = p(S)$.

Теперь мы можем доказать, что $(\phi \circ p)^* = \phi \circ p$ на $\mathcal{C}$ и $-\infty$ в противном случае. В самом деле, если $f \stackrel{def}{=} \phi \circ p$ то тогда, по определению операции звездочка, $f^* \leq \phi^* \circ p$. Но, согласно утверждению 1 $\phi^* = \phi$ в $p(\mathcal{C})$ (так как ϕ вогнута) и $-\infty$ в дополнении. С другой стороны, по определению, $f^* \geq f = \phi \circ p$. В итоге мы заключаем, что $f^* \geq f \geq f^*$ и мы получаем требуемый результат.

Теперь, чтобы установить, что $\Phi^* = \Phi = l + \phi \circ p$ в $\mathcal{C}$, остается отметить, что линейный член l не вносит существенных искажений в картину, и доказательство предложения завершено.

Теперь мы перейдем к субоптимальным эллипсоидам, или что примерно то же самое, к максимальной выпуклой оболочке Φ_* функции Φ, т.е., максимальной выпуклой функции сопряженной переменной w^* которая не больше чем Φ на множестве S. Это означает, в частности, что $\Phi^*(w^*) =$

$+\infty$ если w^* не содержится в замкнутой выпуклой оболочке $\mathcal{C} = \mathrm{conv}\,(S)$ множества S. Совершенно очевидно, что функция Φ_* должна быть линейной на $\mathcal{C}$ чтобы функция Φ допускала естественное вогнутое продолжение на это множество. Тем не менее, явное нахождение этой линейной функции не является совершенно тривиальной задачей. Проблема по существу сводится к определению максимальной выпуклой оболочки f_* для функции $f : S \ni \{X, \eta\} \mapsto (S_1^{-1}, X)^{1/2}\left((\tilde{Q}, X) + (\tilde{s}, \eta)\right)^{1/2}$. Рассмотрим более общую задачу. Предположим, что нам дана функция g на множестве $S \subset \mathcal{C}^*$ вида $g(\widetilde{X}) = (\widetilde{S}, \widetilde{X})^{1/2}(\widetilde{T}, \widetilde{X})^{1/2}$, где $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$ — некоторые симметрические $(n+1) \times (n+1)$-мерные матрицы, такие, что $(\widetilde{S}, \widetilde{X}) = Tr\widetilde{S}\widetilde{X}$ и $(\widetilde{T}, \widetilde{X}) = Tr\widetilde{T}\widetilde{X}$ положительны для любого $\widetilde{X} \in \mathcal{C}^*$. Задача состоит в нахождении максимальной выпуклой оболочки g_*. Функция g определяется двумя элементами $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$ сопряженного конуса $\widehat{\mathcal{C}^*}$ к конусу $\mathcal{C}^*$. Функция g_* должна иметь вид $g_*(\widetilde{X}) = (\widetilde{P}, \widetilde{X})$, где $\widetilde{P}$ — элемент искомого сопряженного конуса. Для того, чтобы решить нашу задачу, определим сперва сопряженный конус. Это нетрудно после предложения 1.

Предложение 4 *Сопряженный конус $\widehat{\mathcal{C}^*}$ состоит из симметрических $(n+1)\times(n+1)$-мерных матриц $\widetilde{Y}$ таких что они могут быть представлены в виде $\widetilde{Y} = \widetilde{Z} + \lambda\widetilde{Q}$, где $\widetilde{Z}$ – положительно определенная матрица, а λ — произвольный скаляр.*

Доказательство. Это тривиальное следствие предложения 1.

Мы начинаем определять матрицу $\widetilde{P}$ с решения похожей, но более простой задачи, относящейся к конусу $K = \mathbf{R}^n_+ \subset \mathbf{R}^n$, а именно

Предложение 5 *Пусть $h(x) = (s, x)^{1/2}(t, x)^{1/2}$, где $x \in K$ так же как и s и t (заметим, что K — самосопряженный конус). Тогда максимальная* *выпуклая оболочка h_* функции h дается формулой $h_*(x) = (p, x)$ для $x \in K$, где $p_i = s_i^{1/2} t_i^{1/2}$.*

Доказательство. Из определения выпуклой оболочки ясно, что h_* должна совпадать с линейной функцией $x \longmapsto (p, x)$ на конусе K. Беря координатные орты для x, мы получаем, что $p_i \leq s_i^{1/2} t_i^{1/2}$, и остается проверить, что неравенство $\sum s_i^{1/2} t_i^{1/2} x_i \leq (\sum s_i x_i)^{1/2} (\sum t_i x_i)^{1/2}$ верно, если $x_i \geq 0$. Последнее же немедленно следует из неравенства Коши.

Теперь мы вернемся к выпуклой оболочке функции g. Можно найти такой базис в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$, где симметрические матрицы $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$ диагональны. Это следует из того, что $\widetilde{S}$ по самому своему определению неотрицательно определенная матрица. Более того, в этом базисе матрица $\widetilde{Q}$ имеет точно один отрицательный диагональный элемент. В самом деле, ядро матрицы $\widetilde{S}$ является одномерным пространством, где $\widetilde{Q}$ строго отрицательно определена. С другой стороны, отрицательный индекс инерции $\widetilde{Q}$ равен единице. Теперь мы можем и будем считать, что $\widetilde{Q}_{ii} = 1$ для $i \leq n$ и $\widetilde{Q}_{n+1n+1} = -1$. Рассмотрим диагональные элементы конуса $\mathcal{C}^*$ относительно этого базиса. Нетрудно заметить, что эти элементы образуют конус, изоморфный конусу K, причем изоморфизм осуществляется отображением $\widetilde{X} \longmapsto (\widetilde{X}_{11}, \ldots, \widetilde{X}_{nn})$. Далее, предложение 5 показывает, что матрица $\widetilde{P}$ диагональна в указанном базисе, и что

$$\widetilde{P}_{ii} + \widetilde{P}_{n+1n+1} = \sqrt{(\widetilde{S}_{ii} + \widetilde{S}_{n+1n+1})(\widetilde{T}_{ii} + \widetilde{T}_{n+1n+1})} \text{ если } i \leq n. \tag{4.4}$$

Последнее равенство не определяет матрицу $\widetilde{P}$ однозначно, но лишь с точностью до прибавления скалярного кратного матрицы $\widetilde{Q}$. Тем не менее, это достаточно для однозначного определения функции h_*.

Итак, мы имеем следующие формулы для функций Гамильтона, связанных с задачами оптимизации эллипсоидов суб- и супердостижимости.

Теорема 2. *Гамильтониан* $h(w, w^*)$ (4.3), *соответствующий оптимальным эллипсоидам супердостижимости, имеет следующий вид. Пусть* w *описывается матрицей*

$$w = \widetilde{\{Q, a\}} = \begin{pmatrix} Q & a \\ & \\ a^* & 0 \end{pmatrix},$$

а сопряженная переменная w^* *представлена матрицей*

$$w^* = \begin{pmatrix} X & \eta \\ \eta^* & (Q, X) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$h(w, w^*) = \begin{cases} (\widetilde{A}, w^*) + \sqrt{(\widetilde{S}, w^*)(\widetilde{T}, w^*)}, \text{ если } (\widetilde{T}, w^*) \geq 0 \\ -\infty, \text{ в противном случае} \end{cases}.$$

Здесь

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \{\overline{A}, Q\} & \overline{A}a \\ \overline{A}^* a^* & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{S} = \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{T} = \begin{pmatrix} \overline{Q} & \overline{s} \\ \overline{s}^* & 0 \end{pmatrix},$$

и матрицы $\overline{A}, \{\overline{A}, Q\}, S_1, \overline{Q}$, *а также вектор* $\overline{s}$ *введены в предыдущем разделе.*

Теорема 3. *Гамильтониан* $h(w, w^*)$ (4.3), *соответствующий оптимальным эллипсоидам субдостижимости, имеет вид*

$$h(w, w^*) = (\widetilde{A}, w^*) + (\widetilde{P}, w^*)$$

в предыдущих обозначениях, где матрица $\widetilde{P}$ *дается соотношением (4.4).*

Замечание. Обратим внимание, что этот гамильтониан, в отличие от случая супердостижимости, линеен по отношению к сопряженной переменной. Это означает, в частности, что в случае субдостижимости нам никогда не надо решать граничную задачу, а только задачу Коши.

Теперь, чтобы получить дифференциальные уравнения для оптимальных эллипсоидов, остается продифференцировать найденные гамильтонианы, а точнее записать уравнения Гамильтона–Понтрягина

$$\dot{w} = \frac{\partial}{\partial w^*} h(w, w^*); \quad \dot{w^*} = -\frac{\partial}{\partial w} h(w, w^*)$$

Разумеется, в негладком случае супердостижимости, когда аргумент гамильтониана лежит на границе $(\widetilde{T}, w^*) = 0$, соответствующие производные следует понимать как обычные супердифференциалы выпуклого (или, скорее, вогнутого) анализа [17]. Несмотря на то, что этот супердифференциал многозначен, и, следовательно, выписанное дифференциальное уравнение следует понимать как дифференциальное включение, соответствующая эволюция эллипсоидов определена однозначно. Более того, эта эволюция описывается решением некоторого *дифференциального уравнения*, правая часть которого является кусочно-гладким *селектором* приведенного выше дифференциального включения.

5 Простейший случай

В этом разделе мы выпишем в явном виде уравнения оптимальных эллипсоидов для линейной системы вида

$$\dot{x} = Ax + u, \ x \in V, \ u \in E(g, G). \tag{5.1}$$

В принципе, это можно сделать непосредственным выписыванием дифференциальных уравнений (3.4) для данного случая. Это, строго говоря, требует обоснования предельного перехода от невырожденного эллипсоида $\mathcal{E} \subset V \times W$ к эллиптическому цилиндру $V \times E(g, G)$. Фактически, проще проделать заново все выкладки, аналогичные уже проведенным в этой главе и значительно более простые, чем обосновывать предельный переход.

Результат имеет следующий вид.

Теорема 4. *Пусть $E(a(t), Q(t))$ — оптимальные эллипсоиды (суб- и супердостижимости) для системы (5.1) относительно критерия качества L. Тогда параметры оптимальных эллипсоидов супердостижимости удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям*

$$\dot{Q} = \{A, Q\} + \lambda Q + \lambda^{-1} G$$

$$\lambda = \sqrt{\mathrm{Tr}(PG)/\mathrm{Tr}(PQ)},$$

где матрица P задается следующими соотношениями.

a) В локально оптимальном случае

$$\dot{P} = \partial L / \partial Q. \tag{4.3}$$

b) В глобально оптимальном случае

$$\dot{P} = -\{A, P\}, P(T) = \partial L / \partial Q(Q(T)). \tag{4.4}$$

Параметры оптимальных эллипсоидов субдостижимости удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{Q} = \{A, Q\} + 2G^{1/2}(G^{-1/2} Q G^{-1/2})^{1/2} G^{1/2}$$

независимо от выбора монотонного функционала L и от того какая постановка — локальная или глобальная нас интересует.

Во всех случаях центр эллипсоида удовлетворяет уравнению

$$\dot{a} = Aa + g$$

Замечание. Приведенные выше уравнения соответствуют гамильтонианам Понтрягина вида

$$h(w, w^*) = \mathrm{Tr}(\{A, Q\}P) + 2\sqrt{\mathrm{Tr}(GP)\,\mathrm{Tr}(QP)} + \langle Aa + g, \eta\rangle \tag{5.2}$$

в супердостижимом случае и

$$h(w, w^*) = \mathrm{Tr}(\{A, Q\}P) + 2\mathrm{Tr}(\phi(G, Q)P) + \langle Aa + g, \eta\rangle \tag{5.3}$$

в субдостижимом случае.

Здесь $w = \{Q, a\}$, $w^* = \{P, \eta\}$, а функция $\phi(G, Q)$ определяется следующим образом. Нужно одновременно привести положительно определенные симметрические матрицы G, Q к диагональному виду $\widehat{G} = CGC^*$, $\widehat{Q} = CQC^*$, где C — невырожденная матрица, а затем положить $\phi(G, Q) = C^{-1}\widehat{Q}\widehat{G}C^{*-1}$.

Глава 4

Асимптотическое поведение локально оптимальных эллипсоидов, ограничивающих области достижимости

Изучается асимптотическое поведение некоторых эллипсоидальных оценок областей достижимости *устойчивых* управляемых динамических систем. Показывается, что при широких предположениях имеется в точности один эллипсоид, который может служить пределом указанных выше оценок при $t \to \infty$. Во многих случаях этот эллипсоид является локально притягивающей точкой для уравнений эволюции оценок.

1. Введение

Эта глава посвящена изучению эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости некоторых управляемых линейных динамических систем. Вначале излагаются предварительные сведения, включая дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию этих эллипсоидов. Затем исследуются точки равновесия этих уравнений; точнее, рассматриваются вопросы существования и единственности равновесных точек а таже их устойчивость. Предмет в целом оказывается довольно тонким и потому наши результаты далеки от полноты. В частности, почти ничего не говорится о глобальной устойчивости эллипсоидальных уравнений.

1.1. Области достижимости и супердостижимости

Рассмотрим линейную управляемую систему простейшего вида

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u \in U, \quad x(0) \in M \tag{1.1}$$

Вектор состояния $x \in V (= \mathbf{R}^n)$ принадлежит конечномерному линейному пространству, U и M – заданные выпуклые компакты. Изучаются области достижимости

$$D(T) = D(T, 0; M) = \{x(T) \in V; x \,\text{удовлетворяет (1.1)}\} \tag{1.2}$$

для системы (1.1). Хорошо известно, что понятие области достижимости имеет фундаментальное значение в теории управления, гарантированной фильтрации и в дифференциальных играх (см, например, [77]). В обозначениях (1.2) справедливо фундаментальное (полугрупповое) свойство областей достижимости:

$$D(t, \tau; D(\tau)) = D(t), \tag{1.3}$$

где $0 \leq \tau \leq t$ – произвольные моменты времени. Эффективное определение областей достижимости, или, что эквивалентно, – решение уравнения (1.3) является трудной, почти неприступной задачей. Иногда, впрочем, достаточно иметь лишь *оценку* области достижимости. Следующее определение (см. главу 2) вводит важное понятие теории оценивания (сверху) областей достижимости.

Определение 3. Семейство $\{\Omega(t)\}$, $t \geq 0$ подмножеств $\Omega(t) \subset V$ называется семейством областей супердостижимости (или просто областью супердостижимости) для системы (1.1) если

$$D(t, \tau; \Omega(\tau)) \subset \Omega(t) \tag{1.4}$$

для любого момента τ, такого, что $0 \leq \tau \leq t$.

Очевидно, что если $M \subset \Omega(0)$ то $D(t) \subset \Omega(t)$ для любого t .

Во многих случаях значительно проще решить “неравенство” (1.4) чем уравнение (1.3).

1.2. Эллипсоидальное оценивание.

Ясно, что чем проще множества $\Omega(t)$, чем меньше памяти требуется для их хранения - тем лучше. В этом разделе излагаются основания теории оптимальных *эллипсоидальных* областей супердостижимости. Разумеется, эллипсоиды – это довольно простые множества, хорошо приспособленные к линейным задачам. Подробное обсуждение достоинств эллипсоидов имеется в [77].

Будем пользоваться стандартными обозначениями

$$\begin{gathered} E(a, Q) = \{x \in V = \mathbf{R}^n; (Q^{-1}(x-a), x-a) \leq 1\} \\ E(Q) = E(0, Q). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $Q = Q^*$ – симметрическая положительно-определенная матрица, $a \in V$ – центр эллипсоида, $*$ обозначает транспонирование. Рассмотрим оптимальные супердостижимые эллипсоиды $E(t)$ следующих двух типов. Пусть задан функционал $L = L(E)$, гладко зависящий от параметров a, Q эллипсоида $E = E(a, Q)$. Тогда говорят, что семейство $E(t)$ является локально оптимальным, если для любого $\tau \geq 0$ оно решает следующую оптимизационную задачу

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} L(E(t)) \to \min, \tag{1.6}$$

где минимум берется по всем таким семействам $\{E'(t)\}$ эллипсоидов супердостижимости, что $E'(\tau) = E(\tau)$;

глобально оптимальным, если для любого фиксированного $T \geq 0$ оно решает задачу минимизации

$$L(E(T)) \to \min. \tag{1.7}$$

Возникает естественный вопрос: “Насколько хорошими являются эти оптимальные эллипсоиды?” Цель этой главы — представить некоторые свидетельства в их пользу. Для этого изучим одну пробную задачу, а именно, задачу о предельном поведении оптимальных эллипсоидов, когда время $t \to \infty$. Более точно, если матрица A управляемой системы (1.1) устойчива, то, как известно, область достижимости $D(t)$ имеет определенный предел $D(\infty)$ при $t \to \infty$. Можно спросить: “Стремятся ли оптимальные эллипсоиды $E(t)$ к некоторому пределу E при $t \to \infty$?” На столь общий вопрос нет общего ответа, но во многих естественных ситуациях можно показать, что имеется единственный локально оптимальный постоянный эллипсоид E и что он притягивает близкие эллипсоиды. Заметим, что вопреки "здравому смыслу", изучение глобально оптимальных эллипсоидальных оценок проще (и, возможно, важнее), чем локально оптимальных (см., например, [112]).

1.3. Уравнения оптимальных эллипсоидов

Оказывается, что для линейных управляемых систем (1.1) с эллипсоидальными ограничениями

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u \in E(G), \quad x(0) \in E(Q(0)) \tag{1.8}$$

получается довольно явное описание оптимальных эллипсоидов [77].

Пусть функционал L зависит только от матрицы $Q, L = L(Q)$ и при этом является гладким и строго монотонно возрастающим (т.е. его градиент $\partial L/\partial Q > 0$ – положительно определенный).

Пример 1. $L(Q) = \mathrm{Tr}(CQ), C > 0$ – положительно определенная симметрическая матрица.

Пример 2. $L(Q) = \mathrm{vol}(E(Q)) = c_n \det(Q)^{1/2}$, где c_n – объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

Тогда параметры оптимальных эллипсоидов супердостижимости удовлетворяют следующим уравнениям

$$\begin{gathered} \dot{Q} = \{A, Q\} + \lambda Q + \lambda^{-1} G, \\ \lambda = \sqrt{\mathrm{Tr}(PG)/\mathrm{Tr}(PQ)}, \end{gathered} \tag{1.9}$$

где используются “скобки Йордана"$\{A, Q\} = AQ + QA^*$, и P определяется следующими соотношениями:

В локально оптимальном случае

$$P = \partial L/\partial Q. \tag{1.10}$$

В глобально оптимальном случае

$$\dot{P} = -\{A, P\},\ P(T) = \partial L/\partial Q(Q(T)). \tag{1.11}$$

Следовательно поиск локально оптимальных эллипсоидов сводится к задаче Коши, а глобально оптимальных – к краевой задаче. В частности, изучение предельного поведения локально оптимальных эллипсоидов сводится к исследованию асимптотики решений дифференциальных уравнений (1.9),(1.10). В этой работе рассматриваются исключительно точки равновесия для этих уравнений и их устойчивость. Основная естественная гипотеза о том, что аттракторы уравнений эволюции эллипсоидов сводятся к точкам равновесия, остается нерешенной.

2. Уравнение равновесия

В этом разделе применяется в основном алгебраический подход к точкам равновесия. Другой путь намечен в разделе, посвященном связям между вопросами единственности и устойчивости точек равновесия. Начнем с выписывания уравнений для точек равновесия векторного поля (1.9). Они имеют вид

$$\begin{gathered}\{A, Q\} + \lambda Q + \lambda^{-1} G = 0,\\ \lambda = \sqrt{\mathrm{Tr}(PG)/\mathrm{Tr}(PQ)}\\ P = \partial L/\partial Q.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Таким образом, в нашу задачу входят следующие параметры: матрица A, положительно определенная симметрическая матрица G, и монотонный функционал L. В дальнейшем увидим, что наши основные задачи решены только для весьма тощего подмножества пространства этих параметров. Наш первый реультат, однако, верен при их произвольном выборе.

Теорема 1.. Предположим, что существует точка равновесия для уравнений (1.9) или, что эквивалентно, положительно определенное решение Q уравнений (2.1). Тогда матрица A должна быть устойчивой, т.е. ее спектр (множество собственных значений) $SpecA$ расположен в левой полуплоскости.

Имеется по крайней мере два пути доказательства этого простого, но фундаментального утверждения.

Из первого уравнения (2.1) получаем $\{A, Q\} < 0$, откуда все следует по теореме Ляпунова [14] или из простого наблюдения, что последнее неравенство означает в точности, что линейный оператор $\exp(tA), t \geq 0$ является сжимающим в евклидовой метрике, заданной матрицей Q.

Другой, более идейный способ доказательства состоит в замечании, что область достижимости управляемой системы (1.8), где $Q(0) = Q$, содержится в эллипсоиде $E(Q)$ в силу условия супердостижимости.

В дальнейшем ограничимся случаем *устойчивой* матрицы A.

Обозначим через $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{A} : Q \mapsto -\{A, Q\}$ в пространстве симметрических матриц. В отличие от A он неустойчивый. Более того, оператор $\mathcal{A} - \lambda$ также неустойчивый в силу уравнения (2.1) и теоремы Ляпунова. Теперь можно переписать (2.1) следующим образом:

$$\begin{gathered}(\mathcal{A}-\lambda)Q = \lambda^{-1}G, \\ \lambda = \sqrt{\mathrm{Tr}(PG)/\mathrm{Tr}(PQ)}, \quad P = \partial L/\partial Q.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Имеем поэтому

$$\mathrm{Tr}(PQ) = \lambda^{-1}\mathrm{Tr}(P(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}G).$$

С другой стороны

$$\lambda^2 \mathrm{Tr}(PQ) = \mathrm{Tr}(PG).$$

Тем самым матричное уравнение (2.2) сводится к скалярному уравнению

$$\mathrm{Tr}(P\lambda(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}G) = \mathrm{Tr}(PG), \tag{2.3}$$

где $P = \partial L/\partial Q(\lambda^{-1}(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}G)$. В общем случае изучить уравнение (2.3) непросто. Ниже продемонстрируем как это делается в доступных ситуациях. Вначале рассмотрим случай $L(Q) = \mathrm{Tr}(CQ)$, где C – положительно определенная матрица. Это соответствует случаю постоянной матрицы $P = C$ в уравнении (2.3). Тогда нетрудно заметить, что левая часть (2.3) является возрастающей функцией от λ , равной нулю при $\lambda = 0$ и стремящейся к $+\infty$, когда λ стремится слева к $\inf \mathrm{Re}\, Spec\mathcal{A}$. Поэтому уравнение (2.3) имеет в этом случае единственное решение (это известный результат, см. [53]).

Другой "классический" случай $L(Q) = \log\det(Q)$ можно разобрать не обращаясь к уравнению (2.3). В этом случае $P = Q^{-1}$ и, умножая на P первое уравнение (2.1), получаем

$$\mathrm{Tr}(\{A,Q\}Q^{-1}) + \lambda\mathrm{Tr}(QQ^{-1}) + \lambda^{-1}\mathrm{Tr}(Q^{-1}G) = 0.$$

Можно проверить, что

$$\mathrm{Tr}(\{A,Q\}Q^{-1}) = 2\mathrm{Tr}(A), \quad \mathrm{Tr}(QQ^{-1}) = n$$

(n–размерность фазового пространства) и уравнение сводится к

$$\mathrm{Tr}(A) + \lambda n = 0$$

или $\lambda = -\mathrm{Tr}(A)/n$. Отсюда следует, что существует не более одной точки равновесия, причем такая точка есть в том и только в том случае, если

$$\mathrm{Tr}(A)/n > 2 \sup \mathrm{Re}\, Spec\, A \tag{2.4}$$

(заметим, что обе части (2.4) отрицательны). Необходимое и достаточное условие (2.4) существования и единственности точки равновесия было получено Ф.Л. Черноусько (см. [77]) в "диагональном случае", когда обе матрицы A и G диагональны.

Теперь кратко укажем, как подойти к случаю, когда функционал L имеет вид $L(Q) = \mathrm{Tr}(Q^{m+1}) = (Q^{m+1})$. Это соответствует уравнению (2.3), где $P = Q^m$, и тем самым (2.3) сводится к

$$\mathrm{Tr}((\mathcal{A}-\lambda)^{-m}G)((2\lambda-\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}G) = 0. \tag{2.5}$$

Был разобран случай $m = 0$. Рассмотрим теперь случай $m = 1$. Покажем, что как и при $m = 0$ левая часть (2.5) отрицательна при $\lambda = 0$, возрастает на интервале $0 < \lambda < \inf \mathrm{Re}\, Spec\mathcal{A}$ и стремится к $+\infty$, когда λ стремится слева к $\inf \mathrm{Re}\, Spec\mathcal{A}$. Единственное новое нетривиальное место – это монотонность левой части. Прочие утверждения могут быть установлены в точности как в случае $m = 0$. Чтобы доказать монотонность вычислим производную левой части. Результат имеет вид

$$\mathrm{Tr}((\mathcal{C}^{-2}G)((-1+\lambda\mathcal{C}^{-1})G)) + \mathrm{Tr}((\mathcal{C}^{-1}G)((\mathcal{C}^{-1}+\lambda\mathcal{C}^{-2})G)), \tag{2.6}$$

где $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \lambda$ – *неустойчивый* оператор во всем интервале $0 < \lambda < \inf \mathrm{Re}\, Spec\mathcal{A}$. Чтобы показать, что выражение (2.6) положительно, заметим, что все по той же теореме Ляпунова оператор $\mathcal{C}^{-1}$ переводит множество положительно определенных матриц в себя. Поэтому выражение

(2.6) больше, чем

$$-\mathrm{Tr}((\mathcal{C}^{-2}G)G) + \mathrm{Tr}((\mathcal{C}^{-1}G)(\mathcal{C}^{-1}G)). \tag{2.7}$$

Остается заметить, что (2.7) положительно в силу неравенства Коши, примененного к скалярному произведению $< \alpha, \beta > \stackrel{def}{=} \mathrm{Tr}((\alpha G)(\beta G))$ в пространстве линейных операторов, действующих на симметрические $n \times n$ матрицы.

К сожалению неясно, как распространить эти соображения на большие значения m. В этом случае левая часть (2.5) – *не* монотонная. Делу могут помочь производные высокого порядка, но вычисления становятся чересчур сложными. Можно ожидать, что несколько первых производных по λ левой части (2.5) отрицательны при $\lambda = 0$, а все прочие производные везде положительны. Этого достаточно для существования и единственности точки равновесия ввиду следующей леммы.

Лемма 1.. Пусть f –гладкая вещественная функция на интервале $I = [a, b)$ и пусть $f^{(i)}(a) < 0, \forall i \leq m,\ f(b) > 0$, и $f^{(J)} \geq 0$ на всем интервале $I\ \forall j > m$. Тогда f имеет единственный корень в интервале I.

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Хотя в общем случае не удается эффективно вычислить высшие производные левой части уравнения (2.5), можно это проделать в диагональном случае. В этом случае можно проверить, что условия леммы выполнены. Проверка в основном сводится к тому, что условия леммы справедливы для функции

$$f(\lambda) = \frac{2\lambda - a}{(a - \lambda)^{n+1}}$$

на интервале $I = [0, a), a > 0$.

Резюмируя, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.. Предположим, что A – устойчивая матрица, G – положительно определенная симметрическая матрица и L –монотонный функционал. Тогда уравнения равновесия (2.1) имеют единственное положительно определенное решение Q в следующих случаях:

a) $L(Q) = \mathrm{Tr}(CQ)$, где C – положительно определенная симметрическая матрица;

b) $L(Q) = \det(Q)$ и $\mathrm{Tr}(A)/n > 2 \sup \mathrm{Re}\, Spec\, A$;

c) $L(Q) = \mathrm{Tr}(Q^2)$;

d) $L(Q) = \mathrm{Tr}(Q^n), n > 2$, а A и G — диагональные матрицы.

В дальнейшем будет указан иной “топологический подход” к существованию и единственности точек равновесия.

3. Устойчивость точек равновесия

В этом разделе изучается вопрос об устойчивости для точек равновесия дифференциальных уравнений (1.9),(1.10). Будем рассматриваеть исключительно вопрос об асимптотической устойчивости линеаризованных уравнений. Для его решения выписывается алгебраическое уравнение для собственных значений матрицы линеаризованных уравнений и исследуется расположение его корней.

Линеаризация уравнений (1.9),(1.10) имеет вид

$$\dot{q} = \{A, q\} + \lambda q + (\partial\lambda/\partial Q, q)(Q - \lambda^{-2}G), \tag{3.1}$$

где круглые скобки (α, β) обозначают $\mathrm{Tr}(\alpha\beta)$, а $\frac{\partial\lambda}{\partial Q}$ – градиент функции $\lambda = \lambda(Q) = \sqrt{\mathrm{Tr}(PG)/\mathrm{Tr}(PQ)}$ (где $P = \frac{\partial L}{\partial Q}$) в точке равновесия Q.

Обозначим через $\mathcal{C}$ оператор $q \mapsto -\{A, q\} - \lambda q$ в пространстве симметрических матриц. В предыдущем разделе показано, что $\mathcal{C}$ – неустойчивый оператор. Теперь обозначим через Tq правую часть (3.1) и предположим, что q – собственный вектор линейного оператора T с собственным значением μ. Тогда

$$(\mathcal{C} + \mu)q = (\partial\lambda/\partial Q, q)(Q - \lambda^{-2}G), \tag{3.2}$$

и

$$\mathcal{C}Q = \lambda^{-1}G. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) можно переписать в виде

$$(\partial\lambda/\partial Q, (\mathcal{C} + \mu)^{-1}(Q - \lambda^{-2}G)) = 1. \tag{3.4}$$

В свою очередь, уравнение (3.4) можно, используя (3.3), переписать как

$$(\lambda^{-1}\partial\lambda/\partial Q, (\mathcal{C} + \mu)^{-1}((\lambda + \mu)Q - (\mathcal{C} + \mu)Q)) = 1. \tag{3.5}$$

Принимая во внимание тождество Эйлера

$$(\lambda^{-1}\partial\lambda/\partial Q, Q) = -1/2 \tag{3.6}$$

(напомним, что λ –однородная функция от Q степени $-1/2$) выводим из (3.5), что

$$(\lambda^{-1}\partial\lambda/\partial Q, (\mathcal{C} + \mu)^{-1}Q) = 1/2(\lambda + \mu). \tag{3.7}$$

Это окончательный вид уравнений задающих собственные значения μ оператора T. Теперь можно сформулировать основной результат об устойчивости точек равновесия.

Теорема 3.. Предположим, что матрица $\partial\lambda/\partial Q(Q)$ – отрицательно определенная в точке равновесия Q дифференциальных уравнений (1.9), (1.10). Тогда эта точка является асимптотически устойчивой.

Доказательство теоремы 3.. Обозначим через p положительно определенную симметрическую матрицу

$$p = -\lambda^{-1}\partial\lambda/\partial Q$$

и зададим линейный функционал ϕ на пространстве линейных операторов, действующих на симметрические матрицы, формулой $\phi(\mathcal{B}) = (p, \mathcal{B}Q)/(p, Q)$.

Тогда из (3.7) и тождества Эйлера следует, что

$$\phi((\mathcal{C} + \mu)^{-1}) = -1/(\lambda + \mu). \tag{3.8}$$

Наше основное условие $p > 0$ означает, что если $\mathcal{B}Q$ –положительно определенная симметрическая матрица, то $\phi(\mathcal{B}) > 0$. Теперь можно применить функционал ϕ к обеим частям тождества

$$(\mathcal{C} + \mu)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \exp(-\mathcal{C}t)dt$$

и получить, что

$$\phi((\mathcal{C} + \mu)^{-1}) = \int_0^\infty e^{-\mu t} f(t)dt, \tag{3.9}$$

где $f(t) = \phi(\exp(-\mathcal{C}t))$. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\phi((\mathcal{C} + \mu)^{-1}) = \textstyle\int_0^\infty d(-\frac{e^{-\mu t}}{\mu})f(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}}{\mu} f'(t)dt + \\ &\frac{e^{-\mu t}}{\mu} f(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\mu}(\textstyle\int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}}{\mu} f'(t)dt + 1) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ясно, что $f'(t) = -\phi(\exp(-\mathcal{C}t)\mathcal{C}) < 0$, поскольку $\mathcal{C}Q = \lambda^{-1}G$ – положительно определенная матрица, а оператор $\exp(-\mathcal{C}t)$ переводит множество положительно определенных матриц в себя ($\exp(-\mathcal{C}t)X = \exp(-A + \lambda/2)X\exp(-A^* + \lambda/2)$). Поэтому, если $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, то

$$\left|\int_0^\infty e^{-\mu t} f'(t)dt\right| \leq -\int_0^\infty f'(t)dt = f(0) = 1.$$

В частности,

$$\operatorname{Re}(\int_0^\infty e^{-\mu t} f'(t)dt + 1) \geq 0. \tag{3.11}$$

и неравенство является строгим, если $\mu \neq 0$.

Но согласно (3.10) и (3.8)

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} f'(t)dt + 1 = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

и Re от правой части строго отрицательно, поскольку $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, а $\lambda > 0$. Это противоречит (3.11) и таким образом теорема доказана.

Основное следствие теоремы 3. состоит в следующем.

Следствие 1. Пусть A – устойчивая матрица, G – положительно определенная симметрическая матрица, а функция L – это либо $L(Q) = \operatorname{Tr}(CQ)$, либо $L(Q) = \det(Q)$.

Тогда любая точка равновесия Q дифференциальных уравнений (1.9), (1.10) эллипсоидов супердостижимости устойчива.

Для доказательства достаточно вычислить матрицу $\lambda^{-1}\frac{\partial\lambda}{\partial Q}$, которая равна $-\frac{1}{2}\frac{C}{(C,Q)}$ в первом случае и $-\frac{1}{2}\frac{Q^{-1}GQ^{-1}}{(Q^{-1},G)}$ во втором. В обоих случаях эта матрица отрицательно определена, что и требовалось.$\diamondsuit$

Нужно, однако, подчеркнуть, что теорема 3. не исчерпывает всех ситуаций. Можно, например, убедиться, что матрица $\frac{\partial\lambda}{\partial Q}$ не обязательно отрицательно определенная, если $L(Q) = \operatorname{Tr}(Q^{m+1})$ и $m \geq 1$. Разумно предположить, что и в этом случае множество точек равновесия состоит из единственной устойчивой точки. Такое утверждение удается доказать, однако, лишь в "диагональном"случае (т.е. когда A и G диагональны). Действительно, основное уравнение (3.7) тогда сводится к

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{mq_i^m g_i}{(\sum q_i^m g_i)} - \frac{(m+1)q_i^{m+1}}{(\sum q_i^{m+1})} \right) \frac{1}{c_i + \mu} = \frac{1}{\lambda + \mu}, \tag{3.12}$$

где $Q = diag(q_i)$ – единственная (по теореме 2.) точка равновесия дифференциальных уравнений (1.9), (1.10), $G = diag(g_i)$, $q_i = g_i/(c_i\lambda)$, где $c_i = -2a_i - \lambda$, $A = diag(a_i)$. Можно легко проверить, что (3.12) можно переписать в виде

$$f(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{b_i + \mu} - \frac{1}{\lambda + \mu} = 0, \tag{3.13}$$

где $0 < b_1 \leq \ldots \leq b_n$, и

$$\mathrm{sign}(d_i) = \mathrm{sign}(mb_i - (m+1)\lambda). \tag{3.14}$$

Ввиду (3.14) можно записать

$$f(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i'}{b_i' + \mu}, \tag{3.15}$$

где $0 < b_1' \leq \ldots \leq b_n'$ и d_i' отрицательны, пока i не превосходит некоторого I и положительны при $i > I$. Рассмотрим точки $-b_j'$ и ∞ на проективной прямой. Они разбивают прямую на $n + 2$ интервала. Назовем такой интервал положительным, если знаки функции f в концах интервала различны и отрицательным в противном случае. В силу (3.15) имеется не более двух отрицательных интервалов и один из них – это интервал

$(-b'_n, +\infty)$. Каждый положительный интервал, разумеется, содержит корень уравнения (3.13). Таким образом, имеется по крайней мере n вещественных отрицательных решений этого уравнения. Но это в точности означает, что все собственные значения матрицы T линеаризованных эллипсоидальных уранений – вещественные и отрицательные.

В частности, T устойчива.

Подведем итоги в следующем утверждении.

Теорема 4.. Пусть A – устойчивая матрица, G –положительно определенная симметрическая матрица, а L –монотонный функционал. Тогда уравнения равновесия (2.1) обладают *единственным* положительно определенным *устойчивым* решением Q в следующих случаях:

a) $L(Q) = \mathrm{Tr}(CQ)$, где C –положительно определенная симметрическая матрица;

b) $L(Q) = \det(Q)$ и $\mathrm{Tr}(A)/n > 2 \sup \mathrm{Re}\, Spec\, A$;

c) $L(Q) = \mathrm{Tr}(Q^n), n > 1$, а A и G –диагональные матрицы.

4. Связи между устойчивостью и единственностью

В этом разделе используются некоторые простые аналитические и топологические соображения для установления связей между предыдущими результатами. В частности, очевидная аналогия теорем 4. и 2. оказывается совершенно неслучайной. Основная идея содержится в известном принципе Бернштейна продолжения по параметру. Заметим, что пространство параметров A, G, L, входящих в наши задачи,–связно, и даже выпукло.

Предположим,что нужно решить наши основные задачи об асимптотическом поведении эллипсоидов, связанных с точкой A, G, L этого пространства. Для этого можно выбрать особенно удобную точку A_0, G_0, L_0, решить наши задачи в этой точке и рассмотреть интервал

$$I = \{\xi_t = (1-t)(A_0, G_0, L_0) + t(A, G, L),\ t \in [0,1]\}$$

в пространстве параметров, соединяющий

$$\xi_0 = (A_0, G_0, L_0) \qquad \xi_1 = (A, G, L).$$

Если сможем показать, что решения наших задач всегда продолжаются из любой точки ξ_t на всех ее соседей $\xi_\tau,\ |\tau - t| < \varepsilon$ с некоторым фиксированным $\varepsilon > 0$, то все будет сделано.

Рассмотрим, например, задачу о существовании и единственности стационарных эллипсоидов, т.е. о существовании и единственности решений уравнений (2.1). Эти уравнения могут быть представлены в виде

$$F(\xi; Q) = 0, \tag{4.16}$$

где $\xi = (A, G, L)$ является параметром. Предположим, что из (4.16) можно получить “*априорные* оценки” вида $Q \in S$, где S –это компакт в пространстве положительно определенных симметрических матриц (другими словами, $|Q| \le C, |Q^{-1}| \le C$ для некоторой константы C, не зависящей от $\xi \in I$). Допустим также, что выполнены условия теоремы о неявной функции

$$\det(\frac{\partial F}{\partial Q}(\xi, Q)) \neq 0. \tag{4.17}$$

Тогда можно применить принцип Бернштейна и придти к заключению, что если (4.16) имеет единственное решение при $\xi = \xi_0$, то так же будет и при $\xi = \xi_1$. Заметим теперь, что условие (4.17) означает в точности, что $\mu = 0$ не является корнем уравнения (3.2) или (3.7). В этом и состоит связь между на первый взгляд независимыми результатами предыдущих разделов. Более конкретно, можем, используя эти соображения, вывести из утверждений a),c) теоремы 4. утверждения a),d) теоремы 2..

Действительно, условие (4.17) следует из теоремы 2. и остается доказать *априорные оценки* для решений уравнения (2.1). В нашем случае это нетрудно и укажем лишь кратко, как это делается для случая $L = \mathrm{Tr}(Q^m)$, $m \geq 1$ и A , G –диагональные матрицы. Возьмем в качествег ξ_0 точку (A_0, G_0, L_0), где A_0 и G_0 –единичные матрицы, а $L_0 = L$. Тогда задача (4.16) при $\xi = \xi_0$ решается без труда. Из определения $\lambda = \sqrt{(\mathrm{Tr}(Q^{m-1})/\mathrm{Tr}(Q^m)}$ следует, что $C'|Q|^{-1/2} \leq \lambda \leq C|Q|^{-1/2}$, $C'|Q|^{1/2} \leq \lambda^{-1} \leq C|Q|^{1/2}$ для подходящих абсолютных постоянных C, C' и любой матричной норме $|\cdot|$. Теперь из первого уравнения (2.1) получается неравенство

$$C'|Q|^{1/2} \leq |\{A, Q\}| \leq C|Q|^{1/2}$$

с другими абсолютными постоянными C, C'. Но $-\alpha' Q \leq \{A, Q\} \leq -\alpha Q$ с положительными константами α, α' . (Здесь использовано предположение о диагональности). Поэтому, $C'|Q|^{1/2} \leq |Q| \leq C|Q|^{1/2}$ и получаем нужную *априорную* оценку.$\diamondsuit$

Заметим, что в случае $L(Q) = \det(Q)$, A –произвольная устойчивая, а G –произвольная положительно определенная симметрическая матрица, условие (4.17) выполнено. Тем не менее приведенные выше соображения не проходят из-за отсутствия *априорных* оценок. Такова основная причина необходимости условия $\mathrm{Tr}(A)/n > 2 \sup \mathrm{Re}\, Spec\, A$ в теореме 2..

5. Пример

В этом разделе разбирается по сути единственная ситуация, в которой предельное поведение локально оптимальных эллипсоидов при $t \to \infty$ полностью понято. Именно, рассмотрим двумерный пример, в котором $L(Q) = \mathrm{Tr}(Q)$, A – устойчивая *диагональная* матрица, а G –единичная матрица. Тот же метод проходит, если $L(Q) = \mathrm{Tr}(CQ)$, а A, G, C –диагональные матрицы. Наша задача состоит в изучении предельного поведения положительных решений системы

$$\begin{gathered} \dot{x_i} = -a_i x_i + \lambda x_i + \lambda^{-1}, i = 1, \dots, n \\ \lambda = \sqrt{n / \sum x_i}, \end{gathered} \tag{5.18}$$

где $n = 2$, а a_i –некоторые положительные числа. Результат состоит в следующем.

Теорема 5.. Все положительные решения системы (5.18) стремятся к единственной точке равновесия $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ при $t \to \infty$.

Уже показано, что (5.18) обладает единственной точкой равновесия. Далее, при помощи простых вычислений, аналогичных доказательству *априорных* оценок предыдущего раздела находим, что точки $x = x(t)$ лежат в некотором подкомпакте открытого первого квадранта $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, если t достаточно велико. Другими словами, можно считать, что $0 < c \leq x_i \leq C, i = 1, 2$ с подходящими константами c, C. Из теории Пуанкаре–Бендиксона следует, что достаточно доказать, что все решения со временем попадают в некоторую инвариантную область, где фазовый поток уменьшает объемы. Действительно, такое свойство противоречит наличию предельных циклов. Прямое вычисление дивергенции векторного поля (5.18) показывает, что область Ω уменьшения объема характеризуется неравенством

$$\sum_{i=1}^{2}(-a_i+\lambda)<0. \tag{5.19}$$

Нам нужно предъявить такую инвариантную область ω внутри Ω, что все решения попадают в нее при $t\to\infty$. Пусть $a_1>a_2$. Возьмем в качестве ω область $\{x_1<x_2\}\cap\Omega$. Докажем во-первых, что ω–инвариантная область. Действительно, ввиду дифференциального неравенства

$$\frac{d}{dt}(x_1-x_2)=(-a_2+\lambda)(x_1-x_2)+(a_2-a_1)x_1<(-a_2+\lambda)(x_1-x_2),$$

область $\{x_1<x_2\}$ является инвариантной.

Чтобы доказать инвариантность $\omega=\{x_1<x_2\}\cap\Omega$ вычислим производную левой части (5.19) в силу системы (5.18). Результат имеет вид

$$2\frac{d}{dt}\lambda=-\frac{1}{4}\lambda^3\Big(\sum(-a_i+2\lambda)x_i\Big). \tag{5.21}$$

Можно проверить, что $\sum(-a_i+2\lambda)x_i\geq\sum(-a_i+2\lambda)(\sum x_i)/2$, поскольку $-a_1+2\lambda<-a_2+2\lambda$ и $x_1<x_2$. Таким образом, производная левой части (5.19) отрицательна на дополнении к Ω в области $\{x_1<x_2\}$ и инвариантность ω доказана.

Докажем теперь, что область ω являтся глобально притягивающей, в том смысле, что каждая траектория системы (5.19) когда–нибудь попадает в ω. Покажем вначале, что область $\Theta=\{-a_2+\lambda<0\}$ глобально притягивающая. Действительно, в дополнении Θ' области Θ правая часть (5.21) отрицательна. Тем самым, это дополнение недоступно для траекторий, проходящих через Θ. С другой стороны, для $x\in\Theta'$ из (5.18) следует, что $\dot{x}=(\dot{x}_1,\dot{x}_2)\geq(\lambda^{-1},\lambda^{-1})$. Ввиду *априорных* оценок решений системы

(5.18) отсюда следует, что любое решение рано или поздно покидает Θ' и все доказано.

Поэтому можно считать, что любое решение $x \in \Theta$. Теперь, если $x_1 \geq x_2$, то ввиду первого уравнения (5.20), приходим к выводу, что x когда–нибудь попадет в область $\{x_1 < x_2\}$. Соображения, изложенные после (5.21), показывают, что траектория $x(t)$ не может вечно оставаться вне Ω, что завершает доказательство теоремы.$\diamondsuit$

В заключение подчеркнем, что общая картина предельного поведения оптимальных эллипсоидов довольно неопределенная. Изложенные результаты получены сравнительно элементарными и трудоемкими методами, которые не дают полных ответов на естественные вопросы. Таким образом, еще предстоит достичь настоящего понимания предмета.

Я благодарю своих коллег Ю.Н.Решетняка и Ф.Л. Черноусько за полезные обсуждения материала этой главы.

Глава 5

Асимптотическое поведение областей достижимости и их эллипсоидальных аппроксимаций

1 Введение

В этой работе устанавливаются некоторые фундаментальные асимптотические свойства линейных управляемых систем. Основная идея состоит в том, что при правильном понимании некоторые характерные свойства *устойчивых* систем распространяются на линейные системы общего вида.

2 Области достижимости и супердостижимости

Рассмотрим линейные управляемые системы следующего (наипростейшего) типа

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u \in U, x(0) \in M \tag{2.1}$$

Здесь вектор состояния $x \in V(= \mathbf{R}^n)$ принадлежит конечномерному (вещественному) векторному пространству, U и M — выпуклые компакты. Предполагается, что если явно не сказано противное, то множества U, M центрально симметричны с центром в $0 \in V$. Изучаются области достижимости

$$D(T) = D(T, 0; M) = \{x(T) \in V; x \ (2.1)\} \tag{2.2}$$

для динамической системы (2.1). В обозначениях (2.2) можно выразить основное (полугрупповое) свойство областей достижимости:

$$D(t, \tau; D(\tau)) = D(t) \tag{2.3}$$

где $0 \leq \tau \leq t$ — произвольные моменты времени.

В следующем определении выделено важное понятие теории оценивания (сверху) областей достижимости.

Определение. Семейство $\Omega(t),\ t \geq 0$ подмножеств $\Omega(t) \in V$ называется семейством областей (множеств) супердостижимости для системы (2.1), если выполнено включение

$$D(t, \tau; \Omega(\tau)) \in \Omega(t) \tag{2.4}$$

для любого такого момента τ, что $0 \leq \tau \leq t$.

Ясно, что если $M \in \Omega(0)$, то $D(t) \in \Omega(t)$ для любого $t > 0$.

3 Эллипсоидальное оценивание

В этом разделе собраны некоторые основные понятия теории оптимальных эллипсоидальных областей супердостижимости. Используются стандартные обозначения

$$E(a, Q) = \{x \in V = \mathbf{R}; (Q^{-1}(x - a), x - a) \leq 1\} \tag{3.1}$$

$$E(Q) = E(0, Q).$$

Здесь $Q = Q^*$ — симметрическая положительно определенная матрица, $a \in V$ — центр эллипсоида, $*$ обозначает транспонирование. Будут рассмотрены оптимальные эллипсоидальные области супердостижимости $\mathcal{E}(t)$ следующих двух типов.

Пусть задан некоторый функционал $\mathcal{E} \mapsto L(\mathcal{E})$ на множестве эллипсоидов, гладко зависящий от параметров a, Q. Скажем тогда, что семейство $\mathcal{E}(t)$ является

a) локально оптимальным если $\forall t \geq 0$ оно доставляет решение экстремальной задачи
$$\frac{d}{dt}|_{t=\tau} L(\mathcal{E}(t) \to \min \tag{3.2}$$
где минимум берется по всем таким эллипсоидальным семействам областей супердостижимости $\mathcal{E}'(t)$, что
$$\mathcal{E}'(\tau) = \mathcal{E}(\tau);$$

b) глобально оптимальным если для фиксированного $T \geq 0$ оно доставляет решение экстремальной задачи
$$L(\mathcal{E}(T)) \to \min \tag{3.3}$$

4 Уравнения для оптимальных эллипсоидов

Оказывается для линейных управляемых систем (2.1) с *эллипсоидальными* ограничениями
$$x = Ax + u, u \in E(G), \quad x(0) \in E(Q(0)) \tag{4.1}$$
можно получить довольно явное представление оптимальных эллипсоидов (см. [77] и главу 3 настоящей работы). Пусть целевая функция L зависит

только от матрицы $Q, L = L(Q)$ и является гладкой и строго монотонной (иными словами, градиент $\partial L/\partial Q$ является положительно определенным (> 0)).

Примеры.

1. $L(Q) = \mathrm{Tr}(CQ), C > 0$ — положительно определенная симметрическая матрица.

2. $L(Q) = \mathrm{vol}E(Q) = c_n(\det Q)^{1/2}$, где c_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

Тогда параметры оптимальных эллипсоидов супердостижимости удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\dot{Q} = \{A, Q\} + \lambda Q + \lambda^{-1} G \tag{4.2}$$

$$\lambda = \sqrt{\mathrm{Tr}(PG)/\mathrm{Tr}(PQ)}$$

где фигурируют скобки Йордана $\{A, Q\} = AQ + QA^*$, а матрица P задается следующими соотношениями.

a) В локально оптимальном случае

$$\dot{P} = \partial L/\partial Q. \tag{4.3}$$

b) В глобально оптимальном случае

$$\dot{P} = -\{A, P\}, P(T) = \partial L/\partial Q(Q(T)). \tag{4.4}$$

Итак, нахождение локально оптимальных эллипсоидов сводится к решению задачи Коши, а глобально оптимальных к решению краевой задачи.

5 Асимптотика областей достижимости

Предположим, что для уравнения (2.1) выполнены условия Калмана полной управляемости, в том смысле, что если множество U допустимых управлений заменить на порожденное им векторное пространство $[U]$ то получится вполне управляемая система (эквивалентная переформулировка состоит в том, что минимальное A-инвариантное векторное пространство, содержащее U, совпадает с V).

Тогда для любого момента $T > 0$ область достижимости $D(T)$ является симметричным выпуклым *телом* (т.е., имеет непустую внутренность) с центром в $0 \in V$. Хорошо известно, что пространство B имеет метрику с хорошими свойствами, которая инвариантна относительно естественного действия группы $GL(V)$ невырожденных матриц.

Определение. Пусть $\Omega_1, \Omega_2 \in V$ — симметричные выпуклые тела, $t(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{t \geq 1; t\Omega_1 \supset \Omega_2\}$. Тогда формула

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \log(t(\Omega_1, \Omega_2)t(\Omega_2, \Omega_1)) \tag{5.1}$$

задает метрику (расстояние Банаха–Мазура) в пространстве B.

Пример. Пусть $V = \mathbf{R}^2$, а $\mathcal{L}$ — подпространство в B, состоящее из эллипсов $E(Q)$ единичной площади ($\det Q = 1/\pi$). Тогда метрическое пространство $(\mathcal{L}, \rho)$ совпадает с плоскостью Лобачевского. (В самом деле, $(\mathcal{L}, \rho)$ — симметрическое пространство с инволюцией $E(Q) \mapsto E(Q^{-1})$, соответствующей единичному кругу, взятому в качестве базисной точки).

В дальнейшем существенную роль сыграет пространство S “форм"выпуклых тел, которое по определению есть факторпространство $S = B/GL(V)$; при этом “формой"$Sh(\Omega) \in S$ выпуклого тела $\Omega \in B$ называется орбита

$$Sh(\Omega) = \{A\Omega; \det A \neq 0\} \quad \text{“точки” } \Omega \text{ под действием } GL(V). \tag{5.2}$$

Поскольку расстояние Банаха–Мазура является инвариантным относительно действия группы $GL(V)$, оно задает разумную метрику ρ на пространстве S. Пространство S можно трактовать как пространство банаховых структур (норм) на $\mathbf{R}^n$, рассматриваемых с точностью до изоморфизма.

Замечание. С точки зрения гомотопической топологии пространство S является классифицирующим пространством BG группы $G = GL_n(\mathbf{R})/\pm 1$, поскольку $S = B/G$, B — стягиваемое пространство, а действие группы G на B — свободное вне подпространства бесконечной коразмерности (ср. [88]).

Вернемся теперь к исходной системе (2.1) и выделим три связанные с нею управляемые линейные системы

$$\dot{x} = A_i x + u_i, u_i \in U, x_i(0) \in M (i = +, 0, -) \qquad (5.3)_i$$

где $x_i \in V$, а

$$A = A_+ \oplus A_0 \oplus A_- \qquad (5.4)$$

— каноническое разложение оператора A неустойчивую, нейтральную и устойчивую компоненты (в соответствии со знаком вещественной части собственных значений),

$$V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_- \qquad (5.5)$$

— соответствующее разложение пространства V; $U_i = P_i U$, $M_i = P_i M$, где $P_i : V \to V_i$ — естественная проекция. Заметим, что все системы $(5.3)_i$ удовлетворяют условию управляемости Калмана.

Во введенных обозначениях *качественный* вариант нашего основного результата выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Предельная форма* $\bar{D}(\infty) = \lim_{T\to\infty} D(t)$ *области достижимости* $D(T)$ *всегда существует в пространстве* S. *Она может быть "расщеплена"*

$$\bar{D}(\infty) = \bar{D}_+(\infty) \oplus \bar{D}_0(\infty) \oplus \bar{D}_-(\infty) \tag{5.6}$$

в соответствии с разложением (5.3) – (5.5). *Здесь* $D_i(\infty)$ — *предельная форма области достижимости для системы* $(5.3)_i$.

Для формулировки *количественного* варианта этого результаты потребуются дальнейшие обозначения. Пусть

$$A = D + N \tag{5.7}$$

— разложение Жордана, т. е., матрица D — диагонализуемая, N — нильпотентная матрица и $DN = ND$. Пусть матричная функция $F(N,T)$ линейна по N, коммутирует с операцией сопряжения матриц

$$F(CNC^{-1}, T) = CF(N,T)C^{-1}$$

$$F(N,T) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & T^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T^{-(n-1)} \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

и наконец

$$P(T) = e^{-A_+T} \oplus \frac{1}{T} F(N,T) \oplus id \tag{5.9}$$

Расщепление в формуле (5.9) согласовано с разложением (5.5), а id обозначает единичную матрицу. В этих обозначениях основная теорема выглядит следующим образом.

Теорема 2. a) *Существует предел* $\Omega_\infty = \lim_{T\to\infty} P(T)D(T)$ (*в пространстве* B).

b) *Имеется разложение* $\Omega_\infty = \Omega_+ \oplus \Omega_0 \oplus \Omega_-$, *где* Ω_i *соответствует системе* $(5.3)_i$ *в том же смысле, в котором* Ω_∞ *соответствует системе* (2.1).

Разумеется, связь между приведенными выше формулировками описывается формулами

$$\bar{D}(\infty) = Sh(\Omega_\infty), \bar{D}_i(\infty) = Sh(\Omega_i) \tag{5.10}$$

где использованы обозначения (5.2).

Замечание. Отметим, что для диагонализуемой матрицы A имеем $F(N,T) = id$.

Пример. Пусть A — кососимметрическая матрица “общего положения", а система (2.1) имеет вид

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad b \in V, \quad |u| \leq 1. \tag{5.11}$$

Здесь общность положения состоит в том, что

$$\mathrm{Spec}A = \{\pm\omega, \omega > 0, i = 1, ..., n = \mathrm{dim}V/2\}$$

и не существует нетривиальных соотношений вида

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i = 0, m_i \in \mathbf{Z}.$$

Иными словами, (5.11) — колебательная система без резонансов. Тогда предельная форма $D(\infty)$ области достижимости может быть описана следующей опорной функцией

$$H(\xi) = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \ |\sum |\xi_i| \cos\phi_i|\, d\phi_1 \dots d\phi_n, \tag{5.12}$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$. Это означает, что если рассмотреть любое тело Ω, формой которого является $\bar{D}(\infty)$, то существует такой изоморфизм $T : V^* \to \mathbf{C}^n$, что опорная функция $H_\Omega(\eta) = H(T\eta)$. Заметим, что в силу (5.12) предельная форма $\bar{D}(\infty)$ не зависит от матрицы A и вектора b если только эти данные "общего положения".

6 Асимптотическое поведение аппроксимирующих эллипсоидов

Основной результат этого раздела состоит в том, что предельное поведение некоторых оптимальных супердостижимых семейств эллипсоидов аналогично предельному поведению самих множеств достижимости. Рассмотрим глобально оптимальные эллипсоиды для системы (4.1), отвечающие целевой функции

$$L(Q(T)) = \mathrm{Tr}(CQ_{mod}(T)), \tag{6.1}$$

где

$$Q_{mod}(T) = P(T)Q(T)P^*(T) \tag{6.2}$$

в обозначениях (5.9). Другими словами, эллипсоиды $E(Q)$ преобразуются в

$$E_{mod}(Q) = P(T)(E(Q)) = E(Q_{mod}) \tag{6.3}$$

с помощью матрицы $P(T)$, а затем вычисляется след

$$\mathrm{Tr}\,(CQ_{mod}).$$

В дальнейшем будет удобно использовать обозначение

$$A(B) = ABA^* \tag{6.4}$$

для матриц A, B. Отметим, что функториальный смысл матрицы Q в стандартных эллипсоидальных обозначениях состоит в том, что это матрица квадратичной формы на двойственном пространстве V^* фазового пространства V. Формула (6.4) в точности выражает естественное действие оператора A (на V) на квадратичную форму B на V^*. Для формулировки окончательного результата нам потребуется разложение

$$V^* = V_+^* \oplus V_0^* \oplus V_-^*, \tag{6.5}$$

двойственное к (5.5), и упрощенные системы

$$\dot{x} = A_i x + u_i, u_i \in E(G_i), x_i(0) \in E(Q_i(0))(i = +, 0, -), \qquad (6.6)_i$$

связанные с системой (4.1) так же, как системы $(5.3)_i$ связаны с (2.1). Тогда асимптотическое поведение оптимальных эллипсоидов $E_T = E(Q(T))$ описывается следующим результатом.

Теорема 3. a) *Существует предел* $Q_\infty = \lim\limits_{T\to\infty} Q_{mod}(T)$.

b) *Квадратичная форма Q расщепляется в соответствии с разложением* (6.5)

$$Q = Q_+ \oplus Q_0 \oplus Q_- \tag{6.7}$$

c) *Каждая квадратичная форма Q_i отличается от квадратичной формы $Q_{i\infty}$, построенной по системе* $(6.6)_i$ *так же, как Q_∞ построена по системе* (4.1), *только скалярным множителем.*

Замечание. Полное описание этих скалярных множителей довольно длинное и мы ограничимся случаем диагонализуемой матрицы A_0 (в разложении (5.4)). Тогда справедливы следующие явные формулы

$$Q_+ = Q_+(0)\tfrac{\phi(\infty)}{\phi(0)} + \phi(\infty)\int_0^\infty \tfrac{e^{-A_+t}(G_+)dt}{\sqrt{\mathrm{Tr}\ e^{-A_+t}(G_+)}}$$

$$Q_0 = \phi(\infty)\mathrm{av}\tfrac{e^{A_0t}(G_0)dt}{\sqrt{\mathrm{Tr}\ e^{A_0t}(G_0)}} \tag{6.8}$$

$$Q_- = \phi(\infty)\int_0^\infty \tfrac{e^{A_-t}(G_-)dt}{\sqrt{\mathrm{Tr}\ e^{A_-t}(G_-)}}$$

где

$$\phi(0) = \sqrt{\mathrm{Tr}Q(0)_+} \tag{6.9}$$

$$\phi(\infty) = \phi(0) + \int_0^\infty \sqrt{\mathrm{Tr}\ e^{A_+t}(G_+)} + \int_0^\infty \sqrt{\mathrm{Tr}\ e^{A_-t}(G_-)} +$$

$$\mathrm{av}(\mathrm{Tr}\ e^{A_0t}(G_0))$$

а

$$\mathrm{av}(f(t)) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^\infty f(t)dt \tag{6.10}$$

Отметим, что в сделанных предположениях усредняемые функции из (6.8), (6.9) являются почти периодическими и потому усреднение — корректно определенная операция.

7 Доказательства

Все доказательства не слишком трудные и основаны на следующей простой лемме.

Лемма 1. *Последовательность Ω_n выпуклых тел с центром в $0 \in V$ сходится к Ω в пространстве выпуклых тел с метрикой Банаха–Мазура если и только если последовательность опорных функций $H_{\Omega_n}(\xi)$ сходится к $H_\Omega(\xi)$ поточечно и равномерно ограничена на сфере $\{|\xi| = 1\}$.*

Действительно, близость двух тел Ω и Ω' в метрике Банаха–Мазура означает, что $t^{-1}\Omega' \leq \Omega \leq t\Omega'$, где число $t \geq 1$ близко к 1. На языке опорных функций это значит, что $t^{-1}H_{\Omega'} \leq H_\Omega \leq tH_{\Omega'}$. Следовательно, сходимость Ω_n к Ω эквивалентна *равномерной* сходимости опорных функций, ограниченных на сферу $\{|\xi| = 1\}$. Отсюда немедленно вытекает необходимость указанных в лемме условий сходимости. Чтобы установить их достаточность нужно убедиться, что из равномерной ограниченности на сфере последовательности поточечно сходящихся опорных функций вытекает их равномерная сходимость. Это, однако, следует из того, что участвующие в деле опорные функции являются равномерно липшицевыми. В самом деле, если M — выпуклый компакт, то для субградиента $f = \frac{\partial H_M}{\partial \xi}(\xi)$ выполнено включение $f \in M$ (поскольку $(f, \eta - \xi) \leq H_M(\eta) - H_M(\xi)$ по определению субградиента $\forall \eta$, а $(f, \xi) = H_M(\xi)$ ввиду однородности функции $H_M(\xi)$). Поэтому, если функция $|H_M| \leq C$ на единичной сфере, то для субградиента выполнена оценка $|f| \leq C$ и такая же оценка выполнена для константы Липшица.

Теорема 1 является очевидным следствием теоремы 2. Доказательство теоремы 2 основано на явной формуле

$$H_{D(T)}(\xi) = H_M(e^{A^*T}\xi) + \int_0^T H_U(e^{A^*(T-t)}\xi)dt \tag{7.1}$$

для опорной функции области достижимости $D(T)$ для системы (2.1). Из нее следует, что опорная функция $H_T(\xi)$ модифицированной области достижимости $P(T)D(T)$ имеет вид

$$\begin{gathered} H_T(\xi) = H_M(\xi_+ \oplus \tfrac{1}{T}F(N,T)^*\xi_0 \oplus e^{A_-^*T}\xi_-)+ \\ \int_0^T H_U(e^{-A_+^*t}\xi_+ \oplus \tfrac{1}{T}\ e^{A_0^*(T-t)}F(N,T)^*\xi_0 \oplus e^{A_-^*(T-t)}\xi_-)dt \end{gathered} \tag{7.2}$$

где $\xi = \xi_+ \oplus \xi_0 \oplus \xi_-$ — разложение (6.5) вектора $\xi \in V^*$. Легко видеть, что первый член в правой части уравнения (7.2) стремится к $H_M(\xi_+)$ при $T \to \infty$. Обозначим через $f_T(t)$ интегранд в (7.2) и разобьем интервал интегрирования на три подинтервала

$$[0, T] = [0, \epsilon T] \cup [\epsilon T, (1-\epsilon)T] \cup [(1-\epsilon)T, T] = I_+(\epsilon) \cup I_0(\epsilon) \cup I_-(\epsilon).$$

Тогда с точностью до малой ошибки $f_T(t)$ совпадает с

$$f_+(t) = H_U(e^{-A_+^* t}\xi_+),$$

$$f_0(t) = H_U(\tfrac{1}{T}\ e^{A_0^*(T-t)} F(N,T)^* \xi_0),$$

$$f_- = H_U(e^{A_-^*(T-t)}\xi_-)$$

на соответствующих интервалах I_+, I_0, I_-, так что

$$\int_0^T f_T(t)dt = \int_{I_+} f_+(t)dt + \int_{I_0} f_0(t)dt + \int_{I_-} f_-(t)dt + o(1) \qquad (7.3)$$

при $T \to \infty$. Кроме того,

$$\int_{I_j} f_j(t)dt = \int_0^T f_j(t)dt + o(1), j = +, 0, - \qquad (7.4)$$

при $\epsilon \to 0$. После этого остается доказать, что существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f_j(t)dt, j = +, 0, -. \qquad (7.5)$$

Тот факт, что

$$\begin{aligned} \lim\nolimits_{T\to\infty} \textstyle\int_0^T f_+(t)dt &= \textstyle\int_0^\infty H_U(e^{-A_+^* t}\xi_+)dt \\ \lim\nolimits_{T\to\infty} \textstyle\int_0^T f_-(t)dt &= \textstyle\int_0^\infty H_U(e^{A_-^* t}\xi_-)dt \end{aligned} \qquad (7.6)$$

вытекает просто из того, что интеграндами в обоих случаях являются экспоненциально быстро убывающие функции. Исследование предела $\lim_{T\to\infty}\int_0^T\ f_0(t)dt$ требует некоторых соображений из теории почти периодических функций типа леммы Римана–Лебега.

В самом деле, пространство V_0^* можно естественным образом отождествить с пространством квазимногочленов вида $\xi=\sum p_j\exp i\omega_j\tau$, где фиксированы частоты $\omega_j\in\mathbf{R}$ и степени многочленов p_j. Линейный оператор $F(N,T)^*$ при этом переводит вектор $\xi=\sum p_j(\tau)\exp i\omega_j t$ в $F(N,T)^*\xi=1/T\sum p_j(\tau/T)\exp i\omega_j\tau$, а матрица $\exp(A^*t)$ задает оператор T_t сдвига аргумента τ на t. Предел, существование которого нам нужно установить, сводится к

$$\lim_{T\to\infty}\tfrac{1}{T}\int_0^T\ H_U\left(\sum p_j(\tau/T)\exp i\omega_j\tau\right)d\tau=$$
$$\lim_{T\to\infty}\int_0^1\ H_U\left(\sum T_t(p_j)\exp i\omega_j tT\right)dt$$

Ясно, что под интегралом стоит функция вида $H(t,\phi)$, $\phi_j=\omega_j tT$, непрерывная по совокупности аргументов $t\in\mathbf{R}$ и $\phi\in\mathbf{R}^n/\mathbf{2}\pi\mathbf{Z}^n$. Нам нужно убедиться, что для функций такого вида всегда существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^1\ H(t,\omega tT)\,dt. \tag{7.1}$$

Этот факт хорошо известен в случае, когда $H(t,\phi)=H(\phi)$ (см., например, первоисточник [127] или [3] с. 251–254). К счастью, практически то же рассуждение, которое использовано в [3] для доказательства упомянутого частного случая, проходит и в нашей более общей ситуации.

Так же, как в [3], вопрос достаточно разрешить для функций вида $H(t,\phi)=a(t)\exp i(k,\phi)$, где $k\in\mathbf{Z}^n$. Общий случай получается отсюда с помощью приближения функции $\phi\mapsto H(t,\phi)$ конечными тригонометрическими суммами. Однако, для функций вида $a(t)\exp i(k,\phi)$ интересующий нас предел сводится к

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^1 a(t)\exp(i\lambda tT)\,dt,$$

что по лемме Римана–Лебега равно нулю, если $\lambda = (k,\omega) \neq 0$, а если $\lambda = 0$, то этот предел, очевидно, есть $\int_0^1 a(t)\,dt$.

Отметим, что ссылка на лемму Римана–Лебега, по существу, единственное место где рассуждения отличаются от использованных в [3]. Эта ссылка заменена там явным вычислением.

В результате мы приходим такому же выводу, что и в [3]: "временное среднее" (7.1) равно "пространственному"

$$\int_0^1\int_{\mathcal{T}} H(t,\phi)\,dtd\phi,$$

где $\mathcal{T}$ — замыкание в торе $\mathbf{R}^n/\mathbf{2}\pi\mathbf{Z}^n$ прямолинейной обмотки $\phi_j = \omega_j t$, а $d\phi$ — нормированная мера Хаара на $\mathcal{T}$.

Чтобы доказать часть a) теоремы 2 остается заметить, что предел $\lim_{T\to\infty}\int_0^T f_j(t)dt$ является опорной функцией $H_{\Omega'_j}(\xi_j)$ некоторого выпуклого тела Ω'_j из пространства V_j. Отсюда получаем, что

$$H_T(\xi) = H_M(\xi_+) + H_{\Omega'_+}(\xi_+) + H_{\Omega'_0}(\xi_0) + H_{\Omega'_-}(\xi_-) + o(1) \tag{7.7}$$

при $T\to\infty$. Положим $\Omega_+ = P_+M + \Omega'_+, \Omega_j = \Omega'_j, j = 0, -$. Тогда из (7.7) вытекает часть b) теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 проводится в аналогичном стиле и основано на явных интегральных формулах для матриц аппроксимирующих эллипсоидов и последующем разбиении интервала интегрирования.

Глава 6

Особенности границ областей достижимости и задачи наблюдаемости

Изучаются особенности, т.е., подмножества границ областей достижимости, где эти границы перестают быть C^1-гладкими. Рассматриваются исключительно автономные линейные управляемые системы. Изучается локальное и глобальное по времени поведение этих особенностей. Устанавливается связь этих вопросов с так называемым свойством проективной наблюдаемости и на этой основе устанавливаются необходимые и достаточные условия для отсутствия особенностей (в любой положительный момент времени). Эти условия совпадают с условиями наблюдаемости Калмана для некоторой линейной системы, получаемой из исходной с помощью стандартных операций линейной алгебры. Показано также, что бывают случаи когда особенности исчезают по истечении достаточно большого интервала времени.

1 Гладкие выпуклые тела

Начнем с критерия отсутствия C^1-особенностей у границ выпуклых тел. При этом мы ограничимся случаем тел, имеющих C^1-гладкую опорную функцию, т.е. будем рассматривать выпуклые компакты Ω в конечномерном вещественном векторном пространстве V, внутренность которых непуста (выпуклые тела), а их опорные функции $H_\Omega(\xi) = \sup_{x\in\Omega}(x,\xi)$ являются C^1-гладкими по аргументу ξ, пробегающему двойственное векторное пространство V^*. Скобки (x,ξ) в определении опорной функции обозначают естественное спаривание пространств V и V^*. В дальнейшем, однако, пространства V и V^* обычно отождествляются с евклидовым пространством $\mathbf{R}^n$, а упомянутые скобки со стандартным скалярным произведением в $\mathbf{R}^n$. Мы не будем рассматривать какие-либо типы гладкости, выходящие за C^1-рамки. Этот вопрос требует отдельного исследования. Нашей основной заботой является, однако структура областей достижимости, которые весьма редко могут быть даже C^2-гладкими. Для начала уточним понятие C^1-особенности. Будем придерживаться следующего стандартного определения.

Определение 4 *Локально замкнутое подмножество F пространства V называется C^1-гладкой гиперповерхностью, если оно задается в виде $F = \{x \in V' : \ \phi(x) = 0\}$, где ϕ — такая непрерывно дифференцируемая функция в окрестности V' множества F, что $\frac{\partial\phi}{\partial x} \neq 0$ на F. Если точка $x \in F$ такова, что множество $F \cap U$ гладкое для некоторой окрестности U точки x, то такая точка x называется гладкой, а в противном случае особой.*

Несколько пренебрегая точностью будем говорить, что компакт M с непустой внутренностью является гладким если такова его граница ∂M. Заметим, что подмножество особенностей любого локально замкнутого множества F замкнуто, тогда как подмножество гладких точек открыто. Следующее фундаментальное утверждение, вероятно, хорошо известно, но для удобства читателя мы приведем доказательство.

Предложение 1 *Граница $\partial\Omega$ выпуклого тела Ω является C^1-гладкой в том и только в том случае, если в каждой точке границы имеется единственная опорная гиперплоскость.*

Поскольку граница выпуклого тела локально может быть представлена как график выпуклой функции наше утверждение, очевидно, эквивалентно следующему.

Утверждение 2 *Предположим, что субградиент (см. [17]) ∂f выпуклой функции f является однозначным отображением. Тогда функция f является C^1-гладкой.*

Чтобы доказать это утверждение рассмотрим отображение $x \longmapsto A(x) = \partial f(x)$ и заметим, что

- Для любых векторов $x, y \in V$ функция $\lambda \longmapsto (A(x+\lambda y), y)$ является непрерывной,

и что

- A — монотонное отображение, т.е., $(A(x) - A(y), x - y) \geq 0 \ \forall x, y$.

Первое утверждение следует из довольно очевидного одномерного варианта утверждения 2. Действительно, $(A(x + \lambda y), y) = \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x + \lambda y)$, а субградиент выпуклой функции $\phi(\lambda) = f(x + \lambda y)$ скалярного аргумента λ совпадает с отображением $\lambda \longmapsto [\phi'(\lambda - 0), \phi'(\lambda + 0)]$, которое является однозначным только если ϕ' — непрерывная функция.

Второе утверждение вытекает из приведенной ниже выкладки. А именно, по определению субградиента получаем

$$(A(y), x - y) \geq f(y) - f(x) \geq (A(x), x - y). \tag{1.1}$$

Теперь можно доказать, что отображение A непрерывно. Действительно, это отображение локально ограничено в силу неравенства

$$f(x+h) - f(x) \geq (A(x), h) \geq f(x) - f(x-h),$$

из которого следует, что

$$\sup_{x \in B(\epsilon)} |A(x)| \leq (1/\delta) \sup_{y \in B(\epsilon+\delta)} |f(y)|,$$

где через $B(r)$ обозначен шар радиуса r, а ϵ, δ — положительные числа. Остается показать, что если имеется такая последовательность $x_j \to x$, что последовательность $A(x_j)$ сходится к вектору A_*, то $A_* = A(x)$. Переходя к пределу в неравенстве $(A(x_j) - A(y), x_j - y) \geq 0$ получим, что $(A_* - A(y), x - y) \geq 0$ для любого вектора y. Полагая $y = x + \lambda h, \lambda > 0$ мы видим, что $(A_* - A(x + \lambda h), h) \geq 0$ для любого вектора h. Но уже доказано, что $(A(x + \lambda h), h) \to (A(x), h)$ при $\lambda \to 0$, $(A_* - A(x), h) \geq 0$ для любого вектора h и, следовательно, $A_* = A(x)$. ∎

Теперь можно получить рабочий критерий гладкости.

Предложение 2 *Пусть опорная функция $H_\Omega(\xi)$ выпуклого тела Ω является непрерывно дифференцируемой по $\xi \neq 0$. Тогда граница $\partial\Omega$ тела Ω является C^1-гладкой в том и только в том случае, если из условия*

$$\frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi') = \frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi'') \text{ следует, что } \xi' = \lambda \xi'',\ \lambda > 0. \qquad (1.2)$$

Замечание. Другими словами множество Ω — неособое если и только если из $\frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi') = \frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi'')$ следует что векторы ξ', ξ'' *сферически эквивалентны.*

Чтобы доказать предложение заметим для начала, что отображение $f : \xi \longmapsto \frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi)$ переводит единичную сферу $S^{n-1} = \{\xi \in V^* = \mathbf{R}^n :$

$|\xi| = 1\}$ в границу $\partial\Omega$. В самом деле, вектор $\frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi)$ лежит в опорной гиперплоскости $\{y \in V : (\xi, y) = H_\Omega(\xi)\}$ ввиду тождества Эйлера и принадлежит множеству Ω в силу следующего неравенства: $(\frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi), \eta) \leq H_\Omega(\eta)$, $\forall \eta$. Это неравенство представляет собой замаскированную форму более известного неравенства $H_\Omega(\xi) + (\frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi), \eta - \xi) \leq H_\Omega(\eta)$, в точности выражающего выпуклость опорной функции. Таким образом, $\xi \longmapsto \frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi)$ является непрерывным отображением единичной сферы $S^{n-1} = \{\xi \in V^* = \mathbf{R}^n : |\xi| = 1\}$ в $\partial\Omega$. Во всяком случае ξ задает опорную гиперплоскость к $\partial\Omega$ в точке $\frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi)$. Поэтому, если условие (1.2) не выполнено, то получаются две различные опорные гиперплоскости $\{(\xi', y) = H_\Omega(\xi')\}$ и $\{(\xi'', y) = H_\Omega(\xi'')\}$ в одной граничной точке $\frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi') = \frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi'')$, которая, тем самым, не может быть гладкой в силу предыдущего предложения. Наоборот, если условие (1.2) выполнено, то существует непрерывное отображение $g : \partial\Omega \to S^{n-1}$, обратное к f, которое сопоставляет каждой точке $x \in \partial\Omega$ опорную гиперплоскость в этой точке. (В самом деле, инъективное непрерывное отображение двух компактных топологических многообразий одинаковой размерности является гомеоморфизмом. Это, в свою очередь, следует из существования *фундаментальных классов гомологий* (см, например, [96]).)

Нам нужно показать, что в каждой точке $x \in \partial\Omega$ имеется единственная опорная гиперплоскость. Это утверждение, однако, очевидным образом сводится к следующему.

Пусть ϕ — такая выпуклая функция, что имеется **непрерывное** *отображение $x \longmapsto A(x) \in \partial\phi(x)$ во всех точках x. Тогда ϕ является C^1-функцией и $A(x) = \partial\phi(x)$.*

Действительно соображения, использованные при доказательстве утверждения (2), позволяют сделать вывод о том, что функция ϕ — дифференцируема по Гато, а ее дифференциал Гато совпадает с A и, следовательно, непрерывен. Поэтому, в силу хорошо известной теоремы анализа (см, например, [120]) получаем, что $\phi \in C^1$ и доказательство завершено. ■

Предложение 2 делает естественным следующее определение.

Определение 5 *Вектор ξ' называется особой (сингулярной) нормалью к множеству Ω если условие (1.2) для него не выполнено.*

Замечание. Из использованной выше теории *фундаментальных классов гомологий* следует, что отображение $\xi \longmapsto \frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi)$ всегда сюръективно, даже если условие (1.2) не выполнено. Действительно, это отображение является гомотопической эквивалентностью, поскольку прообраз любой точки представляет собой пересечение выпуклого конуса в $\mathbf{R}^n$ с S^{n-1} и, потому, является стягиваемым. Тем самым, отображение $\xi \longmapsto \frac{\partial H_\Omega}{\partial \xi}(\xi)$ задает параметризацию границы $\partial\Omega$.

2 Линейные управляемые системы

Теперь займемся областями достижимости автономных линейных управляемых систем. Пусть задана система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; u \in U, \; x(0) = 0 \tag{2.1}$$

где $x \in V, \; u \in U \subset W$, W — конечномерное векторное пространство, а A и B — фиксированные линейные операторы (матрицы). Будем считать, что U — *строго гладкое* выпуклое тело в пространстве W. Это по определению означает, что функция $h(\eta) = H_U(\eta)$ удовлетворяет следующему условию.

Утверждение 3 *Функция h дважды дифференцируема всюду вне начала координат, а ее гессиан $\partial^2 h/\partial\eta^2(\eta)$ задает строго положительно определенную квадратичную форму на ортогональном дополнении к вектору η.*

Из этого условия очевидным образом вытекает условие 1.2 из предыдущего раздела и, потому, граница ∂U является гладкой.

Наша конечная цель — изучение областей достижимости $D(t)$ для системы (2.1), но начнем мы с вычисления $\partial^2 h/\partial\eta^2$ в точке 0. Разумеется, эта производная не существует в классическом смысле и должна пониматься как обобщенная функция.

Предложение 3 *Обобщенная функция $\partial^2 h/\partial\eta^2$ (со значениями в пространстве квадратичных форм) является положительной мерой на пространстве W, чья сингулярная компонента совпадает с*

$$(\int_{\{h(\eta)=1\}} \partial h/\partial\eta \otimes \partial h/\partial\eta \, d\sigma(\eta))\,\delta. \tag{2.2}$$

(Здесь δ обозначает δ-функцию Дирака с носителем в начале координат, $\partial h/\partial\eta \otimes \partial h/\partial\eta$ это квадратичная форма $w \longmapsto (\partial h/\partial\eta(\eta), w)^2$, а $d\sigma(\eta)$ — поверхностная мера поляры $U^\circ = \{\eta \in W : h(\eta) = 1\}$ множества U.)

В силу теоремы Стокса доказательство сводится к вычислению предела

$$\begin{gathered} I = \lim_{\epsilon\to 0}[-\int_{B(\epsilon)}(\partial h/\partial\eta(\eta), w)(\partial\phi/\partial\eta(\eta), w)d\eta + \\ \int_{\partial B(\epsilon)}(\partial h/\partial\eta(\eta), w)\phi(w) i_w(d\eta)] \end{gathered} \tag{2.3}$$

для любой гладкой функции ϕ, где $B(\epsilon)$ — шар радиуса ϵ с центром в нуле и $i_w(d\eta)$ обозначает внутреннее произведение (свертку) вектора w с формой объема $d\eta = d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_m$. Ясно, что первый член выражения (2.3) стремится к нулю, тогда как второй сходится к

$$\phi(0) \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial B(\epsilon)} (\partial h/\partial\eta(\eta), w) i_w(d\eta). \tag{2.4}$$

Последний интеграл не зависит от ϵ и, кроме того, поверхность интегрирования $\partial B(\epsilon)$ можно заменить на любой гомологичный цикл в $W \backslash \{0\}$, в частности, на поляру $U^\circ = \{\eta \in W : h(\eta) = 1\}$. Ясно, однако, что ограничение формы $i_w(d\eta)$ на поверхность U° совпадает с формой $(\partial h/\partial\eta(\eta), w) d\sigma(\eta)$. Поэтому

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{B(\epsilon)} h(\eta) \partial^2\phi/\partial\eta^2(\eta)(w,w) d\eta =$$

$$\phi(0) \int_{\{h(\eta)=1\}} (\partial h/\partial\eta(\eta), w)^2 \, d\sigma(\eta)$$

и все доказано. ■

Замечание. Наиболее существенное для нас обстоятельство, связанное с формулой (2.2) состоит в том, что

$$\int_{\{h(\eta)=1\}} \partial h/\partial\eta \otimes \partial h/\partial\eta \, d\sigma(\eta)(w,w) =$$

$$\int_{\{h(\eta)=1\}} (\partial h/\partial\eta(\eta), w)^2 \, d\sigma(\eta)$$

есть *строго* положительно определенная квадратичная форма.

Теперь напомним что, по определению, область достижимости $D(T)$ это множество концов $x(T)$ допустимых траекторий $t \longmapsto x(t)$ системы (2.1) (стартующих из нуля). Любое такое множество является выпуклым компактом. В дальнейшем мы работаем исключительно с опорными функциями множеств $D(T)$. Поэтому, следующее хорошо известное утверждение является весьма важным.

Предложение 4 *Опорная функция $\xi \longmapsto H_{D(T)}(\xi)$ области достижимости $D(T)$ задается формулой*

$$H_{D(T)}(\xi) = \int_0^T h(B^* e^{A^* t}\xi)dt, \tag{2.5}$$

где h — опорная функция множества U допустимых управлений, а $*$ обозначает сопряжение операторов (транспонирование).

Действительно, $H_{D(T)}(\xi)$ есть, по определению, $\sup(x(T), \xi)$, где sup берется по всем допустимым траекториям. Согласно формуле Коши $x(T) = \int_0^T e^{A(T-t)}Bu(t)dt$ и

$$\sup(x(T), \xi) = \sup \int_0^T (e^{A(T-t)}Bu(t), \xi)dt =$$
$$\sup \int_0^T (u(t), B^* e^{A^*(T-t)}\xi)dt.$$

Теорема об измеримом выборе позволяет поставить sup под знак интеграла и тогда последнее выражение сведется к $\int_0^T h(B^* e^{A^*(T-t)}\xi)dt = \int_0^T h(B^* e^{A^* t}\xi)dt.\Box$

С этого момента будем считать, что $D(T)$ — выпуклое *тело.* Хорошо известно, что это условие можно выразить многими способами. А именно, оно эквивалентно

- Управляемости системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ u \in W, \tag{2.6}$$

  которая отличается от (2.1) только тем, что множество U заменено на W. (Иными словами, любые две точки V можно соединить допустимой траекторией.)

- Наблюдаемости системы

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A^* \xi \\ \eta &= B^* \xi. \end{aligned} \tag{2.7}$$

(Иными словами, ξ-траекторию можно восстановить по η-траектории.)

- Условию Калмана: составная матрица

$$(B, AB, \dots, A^{n-1}B) \tag{2.8}$$

имеет максимально возможный ранг $n = \dim V$, или, что эквивалентно, составная матрица

$$(B^*, B^*A^*, \dots, B^*A^{*(n-1)}) \tag{2.9}$$

имеет максимально возможный ранг $n = \dim V$.

- Любое A-инвариантное подпространство в V, содержащее BW совпадает с V.

- И так далее ...

Эти эквивалентные допущения не ограничивают общность существенным образом, поскольку, если они не выполняются, можно заменить фазовое пространство V на его подпространство, где эти предположения выполнены.

В любом случае, теперь можно применить результаты предыдущего раздела.

3 Сферическая и проективная наблюдаемость

Оказывается вопрос о гладкости областей достижимости тесно связан с некоторыми задачами о наблюдаемости. Примем следующее определение.

Определение 6 *Система* (2.1) *называется сферически наблюдаемой на временном интервале* $\mathcal{T}$ *если и только если можно восстановить сферический класс* ξ*-траектории системы* (2.7) *по сферическому классу* η*-траектории. Это означает, что если* $\eta_1(t)$ *и* $\eta_2(t)$ *— две такие* η*-траектории системы* (2.7)*, что* $\eta_1(t) = \lambda(t)\eta_2(t)$*,* $\dot{\lambda} > 0$*, при* $t \in \mathcal{T}$ *, то* $\xi_1(t) = \mu(t)\xi_2(t)$*,*$\mu > 0$*, при* $t \in \mathcal{T}$ *или, другими словами, можно восстановить траекторию* $\xi/|\xi|$ *по* $\eta/|\eta|$*.*

Аналогичным образом определяется более сильное условие проективной наблюдаемости.

Определение 7 *Система* (2.1) *называется проективно наблюдаемой если и только если можно восстановить проективный класс* ξ*-траектории системы* (2.7) *по проективному классу* η*-траектории. Это означает, что если* $\eta_1(t)$ *и* $\eta_2(t)$ *— две такие* η*-траектории системы* (2.7)*, что* $\eta_1(t) = \lambda(t)\eta_2(t)$*, то* $\xi_1(t) = \mu(t)\xi_2(t)$*.*

Замечание. Мы не указываем интервал $\mathcal{T}$ во втором определении, поскольку проективные классы ξ- и η-траекторий являются аналитическими функциями времени и принцип аналитического продолжения показывает, что если эти классы совпадают на некотором интервале, то они совпадают всюду. В отличие от этого, сферические траектории $\xi/|\xi|(t)$ и $\eta/|\eta|(t)$, вообще говоря, разрывны. Обычно они меняют знак в нулях исходной траектории. Стоит отметить, что множители $\mu(t)$ в обоих определениях, в действительности, не зависят от времени t если имеет место наблюдаемость.

Основной результат этого раздела состоит в следующем.

Теорема 1. *Область достижимости* $D(T)$ *системы* (2.1) *является* C^1-*гладкой если и только если эта система сферически наблюдаема на интервале времени* $[0,T]$.

Действительно, согласно результатам раздела 6.1 для изучения вопроса о гладкости нужно рассмотреть отображение $\xi \longmapsto \frac{\partial H_{D(T)}}{\partial \xi}(\xi) = \int_0^T \frac{\partial h}{\partial \xi}(B^* e^{A^* t}\xi)dt$ и выяснить когда оно взаимно-однозначно. Имеем

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{\partial H}{\partial \xi}(\xi+\zeta) - \tfrac{\partial H}{\partial \xi}(\xi), \zeta\right) = \\ &\int_0^1 \int_0^T \tfrac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(B^* e^{A^* t}(\xi+\tau\zeta))(\zeta(t),\zeta(t))dtd\tau, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $H = H_{D(T)},\ \zeta(t) = B^* e^{A^* t}\zeta$. Обобщенная функция

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(B^* e^{A^* t}(\xi+\tau\zeta))(\zeta(t),\zeta(t))$$

— это положительная мера, которая является *строго положительной* если либо

- траектория $B^* e^{A^* t}\zeta$ не является проективно эквивалентной кривой $B^* e^{A^* t}(\xi+\tau\zeta) \neq 0$, $\forall \tau \in [0,1]$,

либо

- вектор $B^* e^{A^* t}\zeta$ не обращается в нуль если $B^* e^{A^* t}(\xi+\tau\zeta)$ обращается в нуль $\forall \tau \in [0,1]$.

Первое утверждение следует из условия (3), а последнее из замечания после предложения (3).

Предположим теперь, что $\frac{\partial H_{D(T)}}{\partial \xi}(\xi+\zeta) = \frac{\partial H_{D(T)}}{\partial \xi}(\xi)$. Тогда левая часть уравнения (3.1) равна нулю и, следовательно,

- траектория $B^*e^{A^*t}\zeta$ проективно эквивалентна

$$B^*e^{A^*t}(\xi+\tau\zeta)\neq 0,\ \forall\tau\in[0,1]$$

и

- вектор $B^*e^{A^*t}\zeta$ обращается в нуль если $B^*e^{A^*t}(\xi+\tau\zeta)$ обращается в нуль для некоторого $\tau\in[0,1]$.

Поэтому, сферический класс векторов $B^*e^{A^*t}(\xi+\tau\zeta)$ не зависит от $\tau\in[0,1]$. В частности, сферический класс векторов $B^*e^{A^*t}(\xi)$ и $B^*e^{A^*t}(\xi+\zeta)$ один и тот же при всех $t\in[0,T]$. Если система (2.1) сферически наблюдаема, то можно заключить, что векторы ξ и $\xi+\zeta$ имеют одинаковый сферический класс. Предложение (2) теперь показывает, что множество $D(T)$ — гладкое.
Наоборот, предположим, что сферический класс векторов $B^*e^{A^*t}(\xi)$ и $B^*e^{A^*t}(\xi+\zeta)$ совпадает при $t\in[0,T]$. Тогда

$$\frac{\partial H_{D(T)}}{\partial\xi}(\xi)=\int_0^T\frac{\partial h}{\partial\xi}(B^*e^{A^*t}\xi)dt=$$
$$\int_0^T\frac{\partial h}{\partial\xi}(B^*e^{A^*t}(\xi+\zeta))dt=\frac{\partial H_{D(T)}}{\partial\xi}(\xi+\zeta)$$

и если множество $D(T)$ — гладкое, то из предложения (2) вытекает, что сферические классы векторов ξ и $\xi+\zeta$ одинаковые. Последнее утверждение, однако, очевидно эквивалентно сферической наблюдаемости. ∎

На самом деле вопрос о сферической наблюдаемости — довольно тонкий. Он родствен классическому аналитическому вопросу о восстановлении квазиполинома по известному множеству его нулей на некотором интервале. Ответ может существенно зависеть от протяженности интервала. Ниже мы покажем, что аналогичное поведение бывает и у областей достижимости: они могут иметь особенности для малых времен и становиться гладкими при больших временах.

Вопрос о проективной наблюдаемости значительно проще. Он скорее алгебраический, чем аналитический. Связь между проективной наблюдаемостью и гладкостью областей достижимости проясняется в следующей теореме.

Теорема 2. *Области достижимости $D(t)$ системы (2.1) являются C^1-гладкими $\forall t > 0$ если и только если эта система проективно наблюдаема.*

Ввиду предшествующих результатов это утверждение сводится к следующему факту. Можно восстановить с точностью до знака росток при $t = 0$ сферического класса кривой $t \longmapsto B^* e^{A^* t}\xi$ по наблюдению за проективным классом этой кривой. Это так, поскольку проективное пространство и сфера локально изоморфны, а сферический класс кривой $t \longmapsto B^* e^{A^* t}\xi$ *непрерывен* для малых $t > 0$. ■

Чтобы проиллюстрировать результаты этого раздела рассмотрим специальный случай системы (2.1) когда пространство W одномерно. Тогда проективное пространство PW становится точкой и условие проективной наблюдаемости не накладывает никаких ограничений. Следовательно области достижимости $D(t)$ должны иметь особенности при малых $t > 0$. Это классический результат А. М. Формальского [59], послуживший исходной точкой для данной работы.

4 Критерий Калмана для проективной наблюдаемости

Перейдем теперь к переформулировке условия проективной наблюдаемости на более простом языке. Оказывается, что проективная наблюдаемость для системы (2.1) совпадает с обычной наблюдаемостью для некоторой линейной системы, получаемой из системы (2.1) с помощью хорошо известных конструкций линейной алгебры.

Рассмотрим вторую внешнюю степень $\widetilde{V} = \wedge^2 V$ фазового пространства V. Напомним, что элементами этого пространства служат формальные суммы $\sum \lambda_i (v_i' \wedge v_i'')$, где $v_i', v_i'' \in V, \lambda_i \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие соотношениям $(v' + v'') \wedge v''' = v' \wedge v''' + v'' \wedge v''', (\lambda v') \wedge v''' = \lambda(v' \wedge v''')$ and $v' \wedge v'' = -v'' \wedge v'$. Нам также потребуется пространство $\widetilde{W} = \wedge^2 W$. Оператор $\widetilde{B} = \wedge^2 B : \widetilde{W} \longrightarrow \widetilde{V}$ определен равенствами $\widetilde{B}(x \wedge y) = Bx \wedge By$, а оператор $\widetilde{A} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{V}$ задан равенством $\widetilde{A}(x \wedge y) = Ax \wedge y + x \wedge Ay$. Можно образовать линейную систему

$$\dot{x} = \widetilde{A}x + \widetilde{B}u, \ x \in \widetilde{V}, u \in \widetilde{W}, \tag{4.1}$$

аналогичную системе (2.6).

Основной результат этого раздела следующий.

Теорема 3. *Система* (2.1) *проективно наблюдаема в том и только в том случае, если система* (4.1) *— управляемая.*

Импликация *система (4.1) управляема ⇒система (2.1) проективно наблюдаема* доказывается проще, чем обратная импликация, и мы начнем с нее. Предположим, что v_i', ξ'' — такие неколлинеарные векторы пространства V^*, что векторы $B^* e^{A^* t}\xi', \ B^* e^{A^* t}\xi''$ коллинеарны. Это в точности означает, что вектор $\xi' \wedge \xi'' \in \wedge^2 V^*$ — ненулевой, тогда как $\widetilde{\eta}(t) = B^* e^{A^* t}\xi' \wedge B^* e^{A^* t}\xi'' \equiv 0$. Остается заметить, что этот вектор удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{\xi}} &= \widetilde{A}^* \widetilde{\xi} \\ \widetilde{\eta} &= \widetilde{B}^* \widetilde{\xi}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

которая, таким образом, не может быть наблюдаемой и, следовательно, система (4.1) не управляема. Остается установить импликацию *система (2.1) проективно наблюдаема* $\Rightarrow$ *система (4.1) управляема.* Рассмотрим множество S_{proj} таких пар (A, B), что система (2.1) *не является* проективно наблюдаемой. Легко видеть, что подмножество $S' \subset S_{proj}$, состоящее из таких пар (A, B), что спектр $\{\lambda_i\}$ матрицы A вещественный и удовлетворяет условию $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_k + \lambda_l \Rightarrow \{ij\} = \{kl\}$ плотно в in S_{proj} в топологии Зарисского. Обозначим через S_K множество таких пар (A, B), что система (4.1) — *не* управляемая, а через $S'' \subset S_K$ плотное по Зарисскому подмножество, где выполнены указанные выше спектральные условия. Уже доказано, что $S_{proj} \subset S_K$. Мы установим "обратное" неравенство $S'' \subset S'$ и тем самым докажем, что $S_{proj} = S_K$ поскольку множества S_{proj}, S_K замкнуты в топологии Зарисского. Предположим теперь, что $(A, B) \in S''$. Тогда, если $\{e_j \in V^*\}$ — полный набор собственных векторов оператора A^*, то множество $\{e_i \wedge e_j\}$ есть полный набор собственных векторов оператора $\widetilde{A}^*$. Если $(A, B) \in S''$, то найдется такой вектор $\widetilde{\xi} \in \widetilde{V}^* = \wedge^2 V^*$, что $\widetilde{B}^* e^{\widetilde{A}^* t} \widetilde{\xi} \equiv 0$. Если $\widetilde{\xi} = \sum a_{ij} e_i \wedge e_j$, то $\widetilde{B}^* e^{\widetilde{A}^* t} \widetilde{\xi} = \sum a_{ij} \widetilde{B}^* e^{(\lambda_i + \lambda_j)t} e_i \wedge e_j$. Поэтому, $\widetilde{B}^* e^{(\lambda_i + \lambda_j)t} e_i \wedge e_j \equiv 0$ для любых таких индексов i, j, что $a_{ij} \neq 0$. Если мы выберем такую пару $\{ij\}$, что $a_{ij} \neq 0$, то тогда векторы $B^* e^{A^* t} e_i,\ B^* e^{A^* t} e_j$ коллинеарны. В частности, это означает, что $(A, B) \in S'$. ■

Эта теорема, в частности, показывает, что все области достижимости для системы (2.1) *общего положения* являются гладкими если $\dim W > 1$. Мы уже видели, что это не так в случае $\dim W = 1$.

5 Гладкие пределы областей достижимости

Теперь перейдем к вопросу о предельном поведении особенностей областей достижимости $D(T)$ при $T \to \infty$. Для этого напомним теорию *предельных форм* областей достижимости, развитую в [112] (см. главу 5). Наше изложение несколько более общее, чем в [112]: мы не ограничиваемся случаем центрально симметричных выпуклых тел с центром в начале координат. Такое обобщение в действительности не требует каких-либо существенных изменений в утверждениях и доказательствах работы [112].

Определение 8 *Формой $Sh(\Omega)$ выпуклого тела $\Omega \subset V$ называется орбита $Aff(V)\Omega$ в пространстве выпуклых тел под действием группы обратимых аффинных преобразований.*

Другими словами, если отождествить все тела, получаемые из одного с помощью применения невырожденной матрицы и сдвига, то получится *форма* этого тела.

Множество форм S выпуклых тел является хорошим метрическим пространством, метрика которого индуцирована так называемым расстоянием Банаха–Мазура:

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \log(t(\Omega_1, \Omega_2)t(\Omega_2, \Omega_1)),$$

где $\Omega_1, \Omega_2 \in V$ — такие тела, что $\Omega_1 \cap \Omega_2$ имеет непустую внутренность, а $t(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{t \geq 1; t\Omega_1 \supset \Omega_2\}$.

Основной результат теории предельных форм состоит в том, что формы областей достижимости $D(T)$ всегда *сходятся* в пространстве S к определенному пределу $\overline{D}(\infty)$ при $T \to \infty$ и этот предел допускает разложение специального вида. А именно, из исходной системы (2.1) можно получить три связанные с ней системы

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, u_i \in U, x_i(0) = 0\,(i = +, 0, -) \tag{5.1}$$

где $x_i \in V_i$,

$$A = A_+ \oplus A_0 \oplus A_- \tag{5.2}$$

— каноническое разложение оператора A на неустойчивую, нейтральную и устойчивую компоненты (в соответствии со знаками вещественных частей собственных значений),

$$V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_- \tag{5.3}$$

— соответствующее разложение пространства V; $U_i = P_i U$, $M_i = P_i M$, где $P_i : V \to V_i$ — естественный проектор. Заметим , что все системы (5.1) удовлетворяют условию управляемости Калмана.

Тогда качественный вариант основного результата [112] состоит в следующем.

Теорема 4. *Предельная форма* $\bar{D}(\infty) = \lim\limits_{T\to\infty} Sh(D(t))$ *областей достижимости* $D(T)$ *существует (в пространстве* S*) и расщепляется*

$$\bar{D}(\infty) = \bar{D}_+(\infty) \oplus \bar{D}_0(\infty) \oplus \bar{D}_-(\infty) \tag{5.4}$$

в соответствии с разложениями (5.1)–(5.3)*. Здесь* $\overline{D}_i(\infty)$ *— предельная форма областей достижимости для системы* (5.1)*.*

Заметим, что из-за разложения (5.4) сама форма $\bar{D}(\infty)$ не может быть гладкой если в (5.4) присутствует более одного слагаемого. Ее граница при этом имеет особенность типа угла. Однако, поскольку форма выпуклого тела содержит всю информацию о его особенностях, естественно думать, что особенности формы $\bar{D}(\infty)$ тесно связаны с особенностями $D(T)$ при больших T. Следующее утверждение показывает, что это действительно так, если в разложении (5.4) присутствует единственное слагаемое.

Теорема 5. *Предположим, что в разложении* (5.4) *присутствует единственное слагаемое. Тогда области достижимости $D(T)$ являются C^1-гладкими при больших T если и только если предельная форма $\overline{D}(\infty)$ — гладкая.*

Начнем доказательство теоремы 5. со следующего общего *принципа компактности.*

Утверждение 4 *Пусть задано семейство $\Omega(T), T \geq 0$ таких выпуклых тел, что соответствующие множества*

$$S(T) \subset S^{n-1}$$

сингулярных нормалей (см. определение 5*) образуют убывающую систему с пустым пересечением. Тогда существует такой момент T_0, что $S(T)$ пусто при $T \geq T_0$.*

Это ясно, поскольку $S(T)$ — компакт.

Нам также потребуется следующий аналог теоремы 1..

Теорема 6. *Предельная форма $\overline{D}_i(\infty)$, где i это либо $+, 0$, либо $-$ является C^1-гладкой в том и только в том случае, если соответствующая система* (5.1) *сферически наблюдаема на интервале $[0, \infty)$. Последнее условие эквивалентно сферической наблюдаемости на интервале $[0, T]$, где время T достаточно велико.*

К сожалению, чтобы доказать теорему 6. нужно использовать детали конструкции предельной формы $\overline{D}_i(\infty)$. В своей основе доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 1.. Будем считать эту теорему установленной.

Теперь предположим, что область достижимости $D(T)$ — гладкая при достаточно больших временах T. Согласно теореме 1. это означает, что система (2.1) сферически наблюдаема на интервале $[0, T]$. В частности, все системы (5.1) должны быть сферически наблюдаемыми на этом интервале. В силу теоремы 6., предельная форма $\overline{D}(\infty)$ является гладкой.

Наоборот, предположим, что предельная форма $\overline{D}(\infty) = \overline{D}_j(\infty)$ является гладкой. Тогда, в силу теоремы 6., система (5.1), совпадающая с (2.1) должны быть сферически наблюдаемыми на некотором интервале $[0, T]$. Если области достижимости $D(T)$ не являютсяt C^1-гладкими для любого T, то, ввиду теоремы 1., система (2.1) не является сферически наблюдаемой и мы приходим к противоречию. ▪

6 Пропадающие особенности

Покажем, наконец, что существуют такие системы (2.1), что соответствующие области достижимости $D(T)$ имеют особенности для малых времен T и являются гладкими при больших временах T. Именно так обстоит дело, если A — нейтральная матрица “общего положения”, а система (2.1) имеет вид form

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad b \in V, \quad |u| \leq 1. \tag{6.1}$$

Здесь, общность положения означает, что спектр матрицы A имеет вид

$$\mathrm{Spec} A = \{\pm i\omega_j, \omega > 0, j = 1, ..., n = \mathrm{dim} V/2\} \tag{6.2}$$

и что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i \neq 0, \text{ если } (m_1, \ldots m_n) \neq 0 \in \mathbf{Z}^n. \tag{6.3}$$

Другими словами, (6.1) — колебательная система без резонансов. Тогда предельная форма $D(\infty)$ области достижимости может быть описана следующей опорной функцией

$$H(\xi) = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \left| \sum |\xi_i| \cos\phi_i \right| d\phi_1 \ldots d\phi_n,$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$. Это означает, что если рассмотреть любое тело Ω, формой которого является $\bar{D}(\infty)$, то существует такой изоморфизм $T : V^* \to \mathbf{C}^n$, что опорная функция $H_\Omega(\eta) = H(T\eta)$. Мы уже знаем, что области достижимости $D(t)$ системы (6.1) имеют особенности при малых временах t (см. [59] и раздел 6.3). Чтобы доказать, что области достижимости $D(T)$ — гладкие при больших T, нужно, в силу теорем 5. и 6., показать что система (6.1) является сферически наблюдаемой на бесконечном интервале времени. Это очевидно эквивалентно следующему утверждению.

Функция вида $t \mapsto Re\sum \xi_j \exp i\omega_j t, \xi_j \in \mathbf{C}$ *однозначно с точностью до постоянного множителя определяется своими нулями нечетного порядка.*

Рассмотрим множество N таких векторов $z(t) \in \mathbf{C}^n$ с компонентами $z_j = \exp -i\omega_j t$, что

$$(\xi, z(t)) = Re \sum \xi_j \exp i\omega_j t = 0.$$

Утверждается, что *замыкание* этого множества совпадает с множеством N_1 таких векторов $z \in \mathbf{C}^n$ с компонентами $z_j = \exp -i\phi_j$, $\phi_j \in \mathbf{R}$, что $(\xi, z) = 0$.

Действительно, пусть

$$N_2 = N_1 \setminus \{z \in \mathbf{C}^n : \ Re \sum \omega_j t \xi_j \exp i\phi_j \neq 0\}.$$

Очевидно, достаточно показать, что замыкание N содержит N_2 поскольку N_1 совпадает с замыканием N_2.

Воспользуемся предположением об отсутствии резонансов, которое по теореме Кронекера означает в точности, что замыкание однопараметрической подгруппы

$$z(t) = (\exp -i\omega_j t)$$

совпадает со всем тором

$$T^n = \{z(t) \in \mathbf{C}^n : \ z_j = \exp -i\phi_j, \ \phi_j \in \mathbf{R}\}.$$

Пусть $z \in N_2$. Возьмем достаточно малое число $\epsilon > 0$ и достаточно близкую к z точку на торе, такую что

$$|Re \sum \omega_j t \xi_j \bar{z}_j| > \epsilon > 0.$$

После этого можно взять сколь угодно близкую к z точку $z(t) = (\exp -i\omega_j t)$ из нашей однопараметрической подгруппы. Поскольку величина $d/dt(\xi, z(t))$ близка к $Re \sum \omega_j t \xi_j \bar{z}_j$, то мы получим, что при некотором t', близком к t, $(\xi, z(t')) = 0$. Однако точки $z \in N_2$ и $z(t') \in N$ сколь угодно близки друг к другу, что и доказывает утверждение о том, что замыкание N содержит N_2.

Теперь утверждение о сферической наблюдаемости на бесконечном интервале времени вытекает из следующего.

Функция вида $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \longmapsto Re \sum \xi_j \exp i\phi_j, \xi_j \in \mathbf{C}$ *однозначно с точностью до постоянного множителя определяется своими (вещественными) нулями.*

С помощью сдвига $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \longmapsto (\phi_1+\alpha_1, \ldots, \phi_n+\alpha_n)$ это утверждение можно свести к аналогичному факту для функций вида $(\phi_1, \ldots, \phi_n) \longmapsto \sum \xi_j \cos\phi_j, \xi_j \in \mathbf{R}$. Положим $x_j = \cos\phi_j$. Наше утверждение теперь становится эквивалентным следующему очевидному факту.

Гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$ однозначно задается своим пересечением с кубом $[-1,1]^n \subset \mathbf{R}^n$. ∎

Замечание. Стоит отметить следующее чисто аналитическое следствие доказанной гладкости областей $D(T)$ при больших T.

Предположим, что выполнено условие (6.3). Тогда существует такое $T = T(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, что если задан любой интервал длины большей чем T, то любая функция вида $t \longmapsto Re \sum \xi_j \exp i\omega_j t, \xi_j \in \mathbf{C}$ однозначно с точностью до постоянного множителя определяется своими нулями нечетного порядка на этом интервале.

Заключение

В диссертации изучен комплекс вопросов теории управления, группирующихся вокруг понятия области достижимости. Рассмотрены применения областей достижимости как внутри теории управления, так и вне ее. Исследованы вопросы аппроксимации областей достижимости и некоторые задачи о качественном поведении этих областей и их аппроксимаций.

Решены следующие основные задачи.

1. С помощью техники областей достижимости получено обобщение теоремы Ли–Янга из теории фазовых переходов в ферромагнетиках.

2. Найдено конструктивное решение задачи о полной управляемости линейной системы с ограниченными управлениями, которое сводит построение соответствующих управлений к решению системы линейных уравнений. В качестве приложения получена оценка времени успокоения для системы многих маятников на управляемой тележке.

3. Получено новое необходимое условие полной управляемости типа Калмана для аналитических управляемых систем на аналитических многообразиях, первое число Бетти которых равно нулю. Установлена связь этой задачи с вопросом об аналитической гипоэллиптичности некоторого дифференциального оператора второго порядка.

4. Введено новое понятие теории оценивания областей достижимости — понятие области супердостижимости (а также области субдостижимости). Установлено взаимно-однозначное соответствие между *вязкими* решениями некоторого нелинейного уравнения в частных производных первого порядка, называемого двойственным уравнением Беллмана, и минимальными выпуклыми областями супердостижимости. В некоторых случаях установлено соответствие

между решениями дифференциальных неравенств и выпуклыми областями супердостижимости.

5. Получена теорема существования выпуклых вязких решений эволюционного нелинейного уравнения первого порядка с выпуклой правой частью.

6. Построены явные дифференциальные уравнения для параметров *оптимальных* в смысле разнообразных критериев качества эллипсоидов суб- и супердостижимости линейных управляемых систем.

7. Изучен вопрос о предельном поведении некоторых *локально оптимальных* эллипсоидов супердостижимости для *устойчивых* линейных управляемых систем. В некоторых случаях доказана основная гипотеза, состоящая в том, что такой предел при времени движения, стремящемся к бесконечности, всегда существует.

8. Построена асимптотика при времени движения, стремящемся к бесконечности, для некоторых *глобально оптимальных* эллипсоидов супердостижимости линейных автономных управляемых систем.

9. Построена теория *форм* областей достижимости и на этой основе найдена асимптотика областей достижимости при времени движения, стремящемся к бесконечности. Показано, что предельные формы областей достижимости распадаются в произведение трех тел, связанных с тремя "подсистемами" исходной системы, соответствующим строго устойчивому, строго неустойчивому и нейтральному подпространству матрицы системы.

10. Изучены особенности границ областей достижимости линейных *автономных* управляемых систем и на этой основе получено обобщение теории двойственности Калмана. Сформулированы задачи о *проективной* и *сферической* наблюдаемости. Показано, что если эти задачи разрешимы, то отсюда вытекает гладкость границ областей достижимости за определенный

интервал времени. Получен аналог рангового критерия управляемости Калмана для задачи о гладкости границы областей достижимости за любой интервал времени и/или о проективной наблюдаемости.

11. Получен критерий гладкости границ *предельных форм* областей достижимости.

Литература

[1] Андреев В. Д. *Теория инерциальной навигации*, — М.: Наука, 1967.

[2] Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, — М.: Наука, 1984, 271 с.

[3] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*, — М: Наука, 1989. — 472 с.

[4] Атья М. *Лекции по K-теории*, — М.: Мир, 1967.

[5] Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е. *Определение и коррекция движения*, — М.:Наука, 1980.

[6] Беллман Р. *Динамическое программирование*, — Пер. с англ., — М.: ИЛ, 1960.

[7] Берже М. *Геометрия*, — М.: Наука, 1984.

[8] Благодатских В. И. О выпуклости сфер достижимости, Дифференциальные уравнения, Т. **8**, №12, (1972).

[9] Благодатских В. И. Некоторые результаты по теории дифференциальных включений, Summer school on ordinary differential equations, — Brno, 1975.

[10] Благодатских В. И. *Теория дифференциальных включений*, — М.: Изд-во Московского ун-та, 1979.

[11] Браммер К., Зифлинг Г. *Фильтр Калмана-Бьюси*, — Пер. с нем. — М.: Наука, 1982.

[12] Бушенков В. А., Лотов А. В. *Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости*, — М.: Вычислительный центр АН СССР, 1982.

[13] Васильев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач*, — М.: Наука, 1988.

[14] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*, — М.: Наука, 1988.

[15] Давыдов А. А. Особенности границы достижимости в двумерных управляемых системах, Успехи мат. наук. (1982), т. 37, вып.3, стр. 225.

[16] Загускин В. Л. Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема, Успехи мат. наук, (1958), Т. 13, № 6, стр. 64.

[17] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. *Теория экстремальных задач*, — М.: Наука, 1974, 479 с.

[18] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем*, — М. “Мир” 1971, 400 стр.

[19] Калинин В. Н., Шикин Е. В. О построении эллипсоидов экстремального объема, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика (1987), № 4.

[20] Ким Ю. В., Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н. Сравнение алгоритмов стохастического и гарантированного оценивания. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика (1992), № 1

[21] Кириченко Н. Ф., Наконечный А. Г. Минимаксный подход к рекуррентному оцениванию состояния линейных динамических систем, Кибернетика (1977),№ 4.

[22] Кириченко Н. Ф., Наконечный А. Г. К минимаксным оценкам состояний линейных динамических систем, ДАН УССР, Сер. А. (1978), № 1.

[23] Кириченко Н. Ф., Наконечный А. Г., Навродский В. А. Минимаксные рекуррентные оценки параметров, ДАН УССР, Сер. А.-1978, № 11.

[24] Клепфиш Б. Р. Численное построение эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика (1983), № 4.

[25] Клепфиш Б. Р. Метод получения двусторонней оценки времени преследования, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.-1984.- № 4.

[26] Клепфиш Б. Р., Овсеевич А. И Асимптотика эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.-1984, № 2.

[27] Комаров В. А. Оценки множества достижимости и построение допустимых управлений для линейных систем, ДАН СССР.-1983.- Т.268, № 3.

[28] Комаров В. А. Оценки множеств достижимости линейных неавтономных систем, Изв. АН СССР. Сер. мат.-1984, № 4.

[29] Комаров В. А. Локально оптимальные оценки множеств достижимости нелинейных систем, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.- 1985, № 3.

[30] Кострикин А. И., Манин Ю. И. *Линейная алгебра и геометрия.* — М.: Наука, 1986.

[31] Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем, ПММ.-1964.-Т.28, вып.1.

[32] Красовский Н. Н. *Теория управления движением*, — М.: Наука, 1968, 475 с.

[33] Красовский Н. Н. *Игровые задачи о встрече движений*, — М.: Наука, 1970.

[34] Красовский Н. Н. *Управление динамической системой*, — М.: Наука, 1985.

[35] Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление, Дифференциальные уравнения, т. **11**, № 11 (1975) с. 1967–1979.

[36] Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* — М.: Наука, 1977.

[37] Куржанский А. Б. Информационные множества управляемых систем, Дифференциальные уравнения, Т. 13, № 1 (1977).

[38] Куржанский А. Б. Об информационных множествах управляемых систем, ДАН СССР.-1978.-Т.240, № 1.

[39] Куржанский А. Б., Пищулина И. Я. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях, Дифференциальные уравнения Т. 12, № 8, 9, 12 (1976).

[40] Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* — Пер. с нем. — М.: Наука, 1985.

[41] Лотов А. В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями, Ж. вычислит. мат. и мат. физ., 1975, Т. 15, № 1.

[42] Лотов А. В. О сходимости методов численной аппроксимации множеств достижимости для линейных дифференциальных систем с выпуклыми фазовыми ограничениями, Ж. вычислит. мат. и мат. физ., 1979, Т. 19, № 1.

[43] Лотов А. В. О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем, ДАН СССР.-1980. -Т.250, № 5.

[44] Лотов А. В. *Введение в экономико-математическое моделирование.* — М.:Наука, 1984.

[45] Меликян А. А., Черноусько Ф. Л. Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией, ПММ.-1971.-Т.35, вып.6.

[46] Овсеевич А. И. Локальный принцип Беллмана в задачах оптимального управления. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика (1984), № 4.

[47] Овсеевич А. И. О полной управляемости линейных динамических систем, ПММ.-1989.-Т.53, вып.5.

[48] Овсеевич А. И., Трущенков В. Л., Решетняк Ю. Н., Янгин А. А. Гарантированное оценивание состояния линейных динамических управляемых систем с помощью эллипсоидов, Алгоритмы и программы / Информ. бюллетень Гос. ФАП.-1987, № 12.

[49] Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л. Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем, ПММ, Т. 46, вып. 2 (1982).

[50] Овсеевич А. И. Экстремальные свойства эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости, Проблемы управления и теории информации.-1983.-Т.12, № 1.

[51] Овсеевич А. И., Трущенков В. Л., Черноусько Ф. Л. Уравнения непрерывного гарантированного оценивания состояния динамических систем, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.-1984, № 4.

[52] Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н. Аппроксимация пересечения эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.-1988, № 4.

[53] Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н., Асимптотическое поведение

эллипсоидальных оценок областей достижимости, Изв. РАН, Техническая кибернетика, №. 2, с. 90–100, 1992.

[54] Овсеевич А. И. Об одном необходимом условии управляемости нелинейной системы, ПММ (1992)

[55] Овсеевич А. И. Локальное асимптотическое поведение эллипсоидов ограничивающих области достижимости. Автоматика и телемеханика, № 12 (1994)

[56] Тамура И. *Топология слоений*, — М. "Мир" 1979, 317 стр.

[57] Тихомиров В. М. *Теория приближений*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: Наука, 1987, т. 14, с. 103–260.

[58] Формальский А. М. *Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами*, — М.: Наука, 1974, 368 с.

[59] А. М. Формальский, Об угловых точках границ множеств достижимости, ПММ, **47,** № 4, 566–574, 1983.

[60] Панасюк А. И. Уравнения областей достижимости и их применение в задачах оптимального управления, Автоматика и телемеханика.- 1982, № 5.

[61] Панасюк А. И. Уравнение множеств достижимости, Сибирский матем. журнал.-1984.-Т.25, № 4.

[62] Панасюк А. И., Панасюк В. И. *Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления.* — Минск: Изд-во БГУ, 1977.

[63] Панасюк А. И., Панасюк В. И. *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем.* — Минск: Наука и техника, 1986.

[64] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* — М.: Наука, 1983.

[65] Пшеничный Б. Н., Покотило В. Г. Минимаксный подход к оценке параметров линейной регрессии, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.-1983, № 2.

[66] Пшеничный Б. Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* — М.: Наука, 1980.

[67] Решетняк Ю. Н. Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания, ПММ.-1989, № 2.

[68] Решетняк Ю. Н. Метод эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания, Шестая Всесоюзн. конф. по упр. в мех. системах, Тезисы докл. — Львов, 1988.

[69] Решетняк Ю. Н., Янгин А. А. Некоторые методы гарантированного эллипсоидального оценивания, Труды Всесоюзн. студенческой конф. XVII Королевские чтения, Московский физ.-техн. ин-т. — М., 1986, Рукопись деп. в ВИНИТИ 23 янв. 1987, № 548-В87.

[70] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*, Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.

[71] Субботин А. И. Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка, УМН, т. 51, вып. 2(308), стр. 105–138, 1996.

[72] Трущенков В. Л. Некоторые способы аппроксимации пересечения эллипсоидов в задачах гарантированного оценивания, Аэрофизика и геокосмические исследования.-М., 1983. /Сб. науч. тр./ Московский физ.-техн. ин-т.

[73] Трущенков В. Л. Гарантированная фильтрация в динамических системах, основанная на эллипсоидальной аппроксимации, Аэрофизика и геокосмические исследования.-М., 1984. /Сб. науч. тр./ Московский физ.-техн. ин-т.

[74] Трущенков В. Л. Численное моделирование задач гарантированной фильтрации с помощью эллипсоидов, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.-1987, №6.

[75] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с многозначной разрывной правой частью, ДАН СССР.-1963.-Т.151,N 1.

[76] Хонин В. А. Гарантированные оценки состояния линейных систем с помощью эллипсоидов, Эволюционные системы в задачах оценивания, — Свердловск: Уральский научный центр АН СССР, 1985.

[77] Черноусько Ф. Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* — М.: Наука, 1988.

[78] Черноусько Ф. Л. Гарантированные оценки неопределенных величин при помощи эллипсоидов, ДАН СССР.-1980.-Т.252, № 1.

[79] Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей при помощи эллипсоидов, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.-1980, № 3, 4, 5.

[80] Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемых систем, ПММ.-1981.-Т.45, вып.1.

[81] Черноусько Ф. Л. Оценки множеств достижимости управляемых динамических систем, Теоретична и приложна механика. Четвърти нац. конгресс по теорет. и прил. мех., Варна, Доклади, Кн.1. — София: Изд-во Болгарской АН, 1981.

[82] Черноусько Ф. Л., Овсеевич А. И., Клепфиш Б. Р., Трущенков В. Л. Эллипсоидальное оценивание состояния управляемых динамических систем.-М., 1983. /Препринт/ Ин-т проблем механики АН СССР: № 224.

[83] Черноусько Ф. Л., Овсеевич А. И., Решетняк Ю. Н., Трущенков В. Л., Янгин А. А. Алгоритмы гарантированного эллипсоидального оценивания и фильтрации для динамических систем. — М., 1987 /Препринт/ Ин-т проблем механики АН СССР: № 293.

[84] Черноусько Ф. Л., Янгин А. А. Аппроксимация множеств достижимости при помощи пересечений и объединений эллипсоидов, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика (1987) № 4.

[85] Шор Н. З., Гершович В. И. Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования, Кибернетика, № 4 (1979).

[86] Шориков А. Ф. Об одном классе нелинейных многошаговых задач управления-наблюдения.-1., Изв. АН СССР Техническая кибернетика (1982) № 4.

[87] Яковенко Г. Н., Кутепов С. А. О структуре множества достижимости, VII Всес. совещание по проблемам управления. Тезисы докладов. Кн.1. Таллин, 1980.

[88] Atiayh M. F., Bott R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Proc. R. Soc. London **A, 308**, (1982), 523–615.

[89] Aubin J.–P., Cellina A. *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York and Tokyo, 1984.

[90] Bertsekas D. P., Rhodes I. B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty, IEEE Trans. Automat. Control. V. AC-16, № 2 (1971).

[91] Brammer R. F. Controllabibity of linear autonomous systems with positive passive controllers. SIAM J. on Control, v. 10, No 2 (1972) p. 339–353.

[92] Chernousko F. L. Ellipsoidal bounds for sets of attainability and uncertainty in control problems, Optimal Control Applications and Methods.-1982.-V.3, № 2.

[93] Chernousko F. L. On equations of ellipsoids approximating reachable sets, Problems of Control and Information Theory.-1983.-V.12, № 2.

[94] Chernousko, F.L., *State Estimation of Dynamic Systems*, SRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1994.

[95] M. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull. Am. Math. Soc., vol. 27, № 1 (1992).

[96] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1972 [имеется перевод: Дольд А. *Лекции по алгебраической топологии*, — М.: "Мир" 1976, 463 с.]

[97] F. Dunlop, C. M. Newman, Multicomponent Field Theories and classical Rotators. Comm. Math. Phys. 44 (1975), 223–235.

[98] Eaton J. H. An interative solution to time optimal control, J. of Math. Anal. and Appl., V. 5, № 2 (1962).

[99] Fisher M. E., Gayek J. E. Estimating reachable sets for two-dimensional discrete systems, J. of Optimization Theory and Appl.-1988.-V.56, № 1.

[100] Haefliger A. Varietes feulletees. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 16 (1962), 367–397.

[101] Haynes G. W., Hermes H. Non-linear controllability via Lie theory. SIAM J. of Control, 8 (1970) 450–460.

[102] Hörmander L. Hypoelliptic second order differential equations, Acta. Math., v. **119**, p. 147–171 (1967) [имеется перевод: Сб. “Математика” 12:2, стр. 88–109 (1968)]

[103] Jacobs M. Attainable sets in systems with unbounded controls, J. of Diff. Equations.-1968.-V.4, № 3.

[104] John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday, New York: Interscience Publishers, 1948.

[105] Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, ser. D, V. **82**, № 1 (1960).

[106] N. J. Korevaar, Convex solutions to nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems, Indiana Univ. Math. J., vol. 32, № 4 (1983)

[107] Kurzhanski A. B., Valyi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and control*, Birkhäuser, 1966.

[108] E. H. Lieb, A. D. Socal, A general Lee–Yang theorem for one-component and multicomponent ferromagnets, Comm. Math. Phys.80 (1981), 153–179

[109] Lobry C. Controllabilite des systems non-lineares. SIAM J. of Control, **8** (1970), 573–605.

[110] Lobry C. Controllability of non-linear systems on compact manifolds. SIAM J. of control, vol. 12, № 1, 1974, 1–4.

[111] C. M. Newman, Zeroes of the partition function for generalized Ising system, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 143–159

[112] Ovseevich, A.I., *Asymptotic behavior of attainable and superattainable sets*, Proceedings of the Conference on Modeling, Estimation and Filtering of Systems with Uncertainty, Sopron, Hungary, 1990, Birkhaüser, Basel, Switzerland, pp. 324–333, 1991.

[113] Ovseevich A. I. Generalization of the Lee – Yang theorem. Russian Journ. Math. Phys., vol. **2**, № 2 (1994)

[114] Ovseevich A. I. Limit behavior of ellipsoids bounding attainable sets. Journ. Opt. Theory Apps. May 1995

[115] Ovseevich A. I., and Selig J. M. Manipulating robots along helical trajectories. J. M. Selig. Robotica, vol. 14, pp. 261–267 (1996)

[116] Ovseevich A. I. Singularities of attainable sets. Russian Journ. Math. Phys. 1996

[117] Ovseevich A. I. Diffusion approximations to the dual Bellman equation, unpublished

[118] Pescvardi T., Arenda K. S. Reachable sets for linear dynamic systems, Information and Control, V. **19**, № 4 (1971).

[119] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, vol. 2, Academic Press, New York – San Francisco – London, 1978 [имеется перевод: Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики, т. 2*, — М.: “Мир” 1978, 393 с.]

[120] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis.* McGrow-Hill, New-York San-Francisco Toronto London 1964 [имеется перевод: Рудин У. *Основы математического анализа*, — М.: "Мир" 1966, 319 с.]

[121] Schlaepfer F. M., Schweppe F. C. Continuous-time state estimation under disturbances bounded by convex sets, IEEE Trans. Automat. Control, V. AC-17, № 2 (1972).

[122] Schweppe F. C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs, IEEE Trans. Automat. Control, V. AC-13, № 1 (1968).

[123] Schweppe F. C. *Uncertain dynamic systems.* — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1973.

[124] M. E. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1981 [имеется перевод: Тейлор М. *Псевдодифференциальные операторы*, — М.: "Мир" 1985, 466 с.]

[125] Usoro P. B., Schweppe D. N., Wormley D. N., Gould L. A. Ellip- soidal set-theoretic control synthesis, J. Dynam. Systems, measur. & Control., Vol. 104, p. 331–336 (1982).

[126] Watanabe S., Ikeda N. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland, Amsterdam - Oxford - New York, 1981 [имеется перевод: Ватанабэ С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, — М.: Наука, 1986, 448 с.]

[127] Veyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann., Bd. 77, S. 313–352 (1916) [имеется перевод: Вейль Г. *Избранные труды*, — М.: Наука, 1984, 510 с.]

[128] Witsenhausen H. S. A minimax control problem for sampled linear systems, IEEE Trans. Automat. Control., V. AC-13, № 1 (1968).

[129] Witsenhausen H. S. Sets of possible states of linear systems given perturbed observations, IEEE Trans. Automat. Control., V. AC-13, № 5 (1968).

[130] C. N. Yang, T. D. Lee, Statistical theory of equations of state and phase transitions. II, Phys. Rev. 87 (1952), 410–419

Содержание