Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

На правах рукописи

УДК 517.925

Проневич Андрей Францевич

$\mathbb{R}$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Научный руководитель

кандидат физико-математических наук,

профессор Горбузов Виктор Николаевич

Гродно, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации изучаются $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы и последние множители Якоби систем уравнений в полных дифференциалах. Исследуется аналитическая структура первых интегралов и строятся интегральные базисы линейных автономных многомерных и обыкновенных дифференциальных систем.

В значительный временной промежуток произошло становление такого направления в теории интегралов, как построение первых интегралов обыкновенных дифференциальных систем, систем уравнений в полных дифференциалах и линейных систем уравнений в частных производных.

К настоящему времени наиболее развита теория интегралов обыкновенных дифференциальных систем, где возникли в своей постановке и нашли отражение в решениях такие задачи, как:

— изучение возможных видов интегралов и методы отыскания интегралов заданного вида (основы заложены J.Liouville [1, 2]);

— построение общего интеграла посредством известных первых интегралов (основы заложены G. Jacobi [3, 4]);

— теория интегрирующего множителя Эйлера и последнего множителя Якоби;

— построение общего интеграла на основании известных частных интегралов (основы заложены G. Darboux [5]);

— теория инфинитезимальных преобразований (основы заложены S. Lie [6 – 10]);

— качественный анализ дифференциальных систем при наличии интегралов или интегрирующих множителей специальных видов (H. Poincare [11], А.М. Ляпунов [12], I. Bendixson [13], М.В. Долов [14]);

— обратные задачи построения дифференциальных систем посредством известных интегралов и по интегральным свойствам (Н.П. Еругин [15], А.С. Галиуллин [16,17]).

Данные задачи и методы, разработанные для их решения, стали или послужили источником для создания самостоятельных направлений в теории дифференциальных уравнений, в частности, — теории интегралов многомерных дифференциальных систем.

Среди исследований систем уравнений в полных дифференциалах на современном этапе развития выделяются общая теория, теория линейных систем, теория устойчивости и аналитическая теория. В Беларуси эти исследования прежде всего связаны с именами И.В. Гайшуна, Н.А. Изобова, Э.И. Грудо и их учеников. В монографиях [18 — 20] отражено не только современное состояние решения задач для многомерных дифференциальных систем, но и приведён подробный обзор литературы.

Выполненные в диссертации исследования относятся к общей и аналитической теории интегралов, а также к теории линейных многомерных дифференциальных систем.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Изучение свойств интегралов и последних множителей систем уравнений в полных дифференциалах является основополагающим для многих разделов теории дифференциальных уравнений, механики и естествознания. Такими, например, являются изучение интегралов и интегральных многообразий автономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем.

Основы теории интегралов были заложены в работах J. Liouville, J. Jacobi, O. Hesse, G. Darboux, Ф.Г. Миндинга, В. П. Ермакова, В.Г. Имшенецкого, Н.М. Гюнтера, П.В. Пфейффера, А.Н. Коркина. Дальнейшее развитие она получила в исследованиях Н.П. Еругина, К.С. Сибирского, А.С. Галиуллина, М.В. Долова, В.И. Мироненко и др. В настоящее время теория интегралов развивается благодаря тесным связям с механикой и естествознанием.

В исследованиях В.И. Мироненко для обыкновенных неавтономных дифференциальных систем была решена задача наличия стационарных интегралов. Приложения теории интегралов в качественной теории обыкновенных дифференциальных систем разрабатываются М.В. Доловым в связи с наличием предельных циклов и в окрестности состояний равновесия, а также А.С. Шубэ для решения задачи различения центра и фокуса.

Исследованию теории $\mathbb{R}$-дифференцируемых решений систем дифференциальных уравнений посвящены работы И.Н. Векуа, Г.Н. Положего, Л. Берса, А. Гельбарта, Т. Карлемана, А.И. Маркушевича, Б.В. Шабата. В Беларуси она связана прежде всего с исследованиями Э.И. Грудо. Теория $\mathbb{R}$-дифференцируемых функций получает дальнейшее своё развитие благодаря широким приложениям в математической физике, осесимметрической теории упругости, теории фильтрации, безмоментной теории оболочек и теории концентрации напряжений при кручении тел вращения.

Таким образом, всякий прогресс в развитии теории интегралов важен не только как решение чисто математической задачи, но и с точки зрения многих прикладных проблем. Актуальность и недостаточная разработанность вышеуказанного вопроса и предопределили выбор темы диссертации.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертация выполнена на кафедре математического анализа Учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» в рамках научно-исследовательской темы «Аналитические свойства нелинейных дифференциальных уравнений» (ГР № 20014844), предусмотренной республиканскими программами по математическим структурам и динамическим системам, в рамках которых ведутся исследования на математическом факультете Учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы состоит в разработке способов исследования аналитических свойств $\mathbb{R}$-дифференцируемых интегралов и последних множителей систем уравнений в полных дифференциалах и интегралов автономных линейных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем.

Для этого решаются следующие задачи: о существовании $\mathbb{R}$-дифференцируемых (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных частных интегралов, первых интегралов и последних множителей у систем уравнений в полных дифференциалах; построение базиса первых интегралов вполне разрешимой автономной линейной системы в полных дифференциалах; построение базиса первых интегралов обыкновенной линейной однородной стационарной дифференциальной системы.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются системы уравнений в полных дифференциалах и обыкновенные линейные стационарные дифференциальные системы.

Предметом исследования являются $\mathbb{R}$-дифференцируемые частные интегралы, первые интегралы и последние множители этих систем.

Методология и методы проведённого исследования. В диссертации используются методы общей теории обыкновенных и многомерных дифференциальных систем: метод частных интегралов построения первых интегралов и последних множителей, спектральный метод, а также, операторные методы теории производных Ли.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все результаты данной диссертации являются новыми.

Получены необходимые условия и критерии существования $\mathbb{R}$-дифференцируемых (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных частных интегралов, первых интегралов и последних множителей систем уравнений в полных дифференциалах.

Построены $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы вполне разрешимой автономной $\mathbb{R}$-линейной системы в полных дифференциалах. Найдены первые интегралы вполне разрешимой вещественной автономной линейной системы в полных дифференциалах и обыкновенной линейной однородной стационарной дифференциальной системы.

Практическая значимость полученных результатов. Работа имеет теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в общей, качественной и аналитической теориях дифференциальных уравнений.

С научно-методической точки зрения полученные в диссертации результаты могут найти применение при чтении спецкурсов по теории дифференциальных уравнений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Необходимые условия и критерии существования $\mathbb{R}$-дифференцируемых (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных интегралов и последних множителей систем уравнений в полных дифференциалах.

2. Построение базиса $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов вполне разрешимой автономной $\mathbb{R}$-линейной системы уравнений в полных дифференциалах.

3. Построение интегрального базиса вещественных многомерных и обыкновенных автономных линейных дифференциальных систем.

Личный вклад соискателя. В диссертации включены только те результаты, которые получены лично соискателем.

Роль научного руководителя, в соавторстве с которым написаны три статьи, состояла в постановке задачи, анализе полученных результатов и в совместной разработке методов решения задач.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертационной работы докладывались на:

IV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2001);

Международной математической конференции «Еругинские чтения-IX» (Витебск, 2003); «Еругинские чтения-X» (Могилёв, 2005);

четвёртой Международной конференции «Tools for mathematical modelling» (Санкт-Петербург, 2003);

шестой Казанской Международной летней школе-конференции (Казань, 2003);

математической конференции «Герценовские чтения — 2004» (Санкт-Петербург, 2004); «Герценовские чтения — 2005» (Санкт-Петербург, 2005);

IX Белорусской математической конференции (Гродно, 2004);

IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» (Москва, 2005).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 работах, среди которых 8 журнальных статей, 3 статьи в материалах конференций, 6 тезисов докладов. Общее количество страниц опубликованных материалов — 121.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, основной части, которая подразделяется на три главы, заключения и списка использованных источников.

Объём диссертации — 95 страниц; количество использованных источников — 109.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследования J. Liouville [1, 2], первоначально посвящённые проблемам интегрирования в квадратурах, привели к такой, ставшей классической, постановке задачи в теории интегралов, как изучение возможных видов интегралов и методов их нахождения. Работы J. Jacobi [3, 4] послужили отправным пунктом построения общего интеграла посредством известных первых его интегралов. Им же был введён [4] метод последнего множителя при построении общего интеграла. Французский математик G. Darboux [5] для рационального обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка применил метод, суть которого состоит в построении общего интеграла по известному количеству частных интегралов. Этот метод составил основу целого направления в теории построения интегралов. В работе [21] М. Лагутинский в развёрнутой форме изложил данный метод для обыкновенных дифференциальных систем специальных видов, которые в настоящее время принято называть системами типа Дарбу [22]. Исследования, ставшие фундаментом всей теории интегралов, принадлежат Ф. Миндингу [23], А.В. Летникову [24], В.Г. Имшенецкому [25], Г.В. Пфейфферу [26], Н.М. Гюнтеру [27], А.Н. Коркину [28], В.П. Ермакову [29, 30]

Н.П. Еругиным в работе [15] была решена обратная задача о построении всего множества обыкновенных дифференциальных систем второго порядка с заданной интегральной кривой. Развитие и приложения обратных задач в теории дифференциальных уравнений и механике было дано А.С. Галиуллиным [16, 17]. Целое направление составили задачи, когда наличие того или иного количества интегральных многообразий оказывает влияние на решение задач качественной теории обыкновенных дифференциальных систем: поведение траекторий в целом (А.И. Яблонский [31, 32], Н.А. Лукашевич [33 – 35], Л.А. Черкас [36], В.В. Амелькин [33], П.С. Белевец [37], Л.С. Лавринович [38], В.Ф. Филипцов [39], В.Н. Горбузов [22, 40, 41] и др.); различие центра и фокуса (К.С. Сибирский [42], Н.И. Вулпе [43], А.С. Шубэ [44], А.П. Садовский [33] и др.); наличие предельных циклов (Л.А. Черкас [45], М.В. Долов и его ученики [46 – 53], В.Н. Горбузов [54]). Построение первых интегралов, интегрирующих и последних множителей обыкновенных дифференциальных систем проведено в работах [55 – 58].

Во второй половине девятнадцатого века S. Lie был развит алгебраический метод анализа дифференциальных уравнений, основанный на теории инфинитезимальных преобразований [7, 8]. Это дало возможность не только получить основу для классификации дифференциальных уравнений [10], но и позволило создать их единую теорию интегрирования. Обзор последних результатов в этих направлениях можно найти, например, в монографии П. Олвера [59]. Отметим, что данные подходы нашли приложения в математической физике [60 – 62].

В настоящее время ведутся исследования интегралов и последних множителей обыкновенных дифференциальных систем [54, 56, 63, 64], систем уравнений в полных дифференциалах [65 – 70] и линейных однородных систем уравнений в частных производных [71]. На основании этих подходов в третьей главе диссертации разработан спектральный метод решения задачи Дарбу о построении первых интегралов автономных линейных дифференциальных систем (обыкновенных и многомерных). Отметим, что предложенный метод является альтернативным к известному методу Якоби построения базиса первых интегралов для рассматриваемого класса систем [27]. Если метод Якоби указывает только путь поэтапного построения первых интегралов, то спектральный метод указывает ещё и виды интегралов.

В статье [72], а затем в монографии [73] В.И. Мироненко была решена задача нахождения автономных первых интегралов у неавтономных обыкновенных дифференциальных систем. Она нашла приложение в теории преобразований, заданных посредством обыкновенных дифференциальных систем, и в теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи автономности частных интегралов и последних множителей обыкновенных дифференциальных систем [74] расширило возможности приложения. На этом пути в диссертации решена задача о наличии у системы уравнений в полных дифференциалах $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов, последних множителей и частных интегралов, которые зависят от части независимых и зависимых переменных ((s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы, последние множители и частные интегралы). Были получены признаки и критерии наличия (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов (параграф 2.1), последних множителей (параграф 2.2) и частных интегралов (параграф 2.3), а также, установлены условия их функциональной независимости.

В двадцатом веке развитие теории $\mathbb{R}$-дифференцируемых решений систем дифференциальных уравнений прежде всего связано с работами И.Н. Векуа [75], Г.Н. Положего [76], Л. Берса [77], Л. Берса и А. Гельбарта [78], Т. Карлемана [79], А.И. Маркушевича [80], Б.В. Шабата [81]. В настоящее время данная теория развивается благодаря широким приложениям в математической физике, осесимметрической теории упругости, теории фильтрации, безмоментной теории оболочек и теории концентрации напряжений при кручении тел вращения [75, 76].

Определение 1.1. [82, с. 21]. Функцию $l\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ будем называть $\mathbb{R}$-линейной (соответственно $\mathbb{C}$-линейной), если выполняются условия:

а) $l(z' + z'') = l(z') + l(z'')$, $\forall z', z'' \in \mathbb{C}^n$;

б) $l(\lambda z) = \lambda\, l(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (соответственно $\forall \lambda \in \mathbb{C}$).

Теорема 1.1 [82, с. 21]. Любая $\mathbb{R}$-линейная функция $l\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ имеет вид

$$l\colon z \to \sum_{\xi=1}^{n}(a_\xi z_\xi + b_\xi \overline{z}_\xi),\ \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

где коэффициенты a_ξ и b_ξ, $\xi = \overline{1,n}$, из поля $\mathbb{C}$.

Теорема 1.2 [82, с. 21]. Любая $\mathbb{C}$-линейная функция $l\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ имеет вид

$$l\colon z \to \sum_{\xi=1}^{n} a_\xi z_\xi,\ \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

где a_ξ, $\xi = \overline{1,n}$, — комплексные постоянные.

Определение 1.2 [82, с. 22]. Функцию $f\colon U \to \mathbb{C}$, где U — окрестность точки $z \in \mathbb{C}^n$, назовём $\mathbb{R}$-дифференцируемой (соответственно $\mathbb{C}$-дифференцируемой) в точке z, если

$$f(z+h) - f(z) = l(h) + o(h),$$

где l — некоторая $\mathbb{R}$-линейная функция (соответственно $\mathbb{C}$-линейная функция), а $o(h)/|h| \to 0$ при $h \to 0$.

Теорема 1.3 (теорема 1 из [82, с. 22]). Для того, чтобы $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке $z \in \mathbb{C}^n$ функция f была $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке, необходимо и достаточно выполнения условий Коши-Римана

$$\partial_{\overline{z}_\xi} f(z) = 0,\ \xi = \overline{1,n}.$$

В случае одного комплексного переменного $\mathbb{R}$-дифференцируемая скалярная функция [83, с. 34] $w\colon V \to \mathbb{C}$ при выполнении условий Коши-Римана $\partial_{\overline{z}}\, w(z) = 0$, $\forall z \in V$, является голоморфной ($\mathbb{C}$-дифференцируемой) на области $V \subset \mathbb{C}$, а при $\partial_z w(z) = 0$, $\forall z \in V$, — антиголоморфной [83, с. 42], где $\partial_z = \dfrac{1}{2}\big(\partial_x - i\partial_y\big)$ и $\partial_{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)$ есть операторы дифференцирования по Коши (формальные операторы). Если

$$[p(x,y) - iq(x,y)]\partial_{\overline{z}} \operatorname{Re} w(z) + i\partial_{\overline{z}} \operatorname{Im} w(z) = 0,\ \forall (x,y) \in V,$$

где p и q — заданные скалярные функции переменных x, y на V, причём функция p — определённоположительна, то w является (p,q)-аналитической [76] на области V. Если

$$\partial_{\overline{z}}\, w(z) + A(z)w(z) + B(z)\,\overline{w}(z) = C(z),\ \forall z \in V,$$

где A, B и C — заданные функции комплексного переменного z на области V, то w — обобщённая аналитическая функция [75] на V.

Э.И. Грудо в работе [84] для эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных с особой точкой в начале координат (аналог уравнения Брио и Буке) было проведено исследование существования и единственности $\mathbb{R}$-голоморфного решения.

В многомерном случае для вполне разрешимого уравнения в полных дифференциалах проведена классификация $\mathbb{R}$-особых точек решений [85] и получены достаточные условия отсутствия подвижных неалгебраических $\mathbb{R}$-особых точек (аналог теорем Фукса и Пенлеве об отсутствии подвижных критических особых точек [86]), а для вполне разрешимых системы уравнений в полных дифференциалах с $\mathbb{R}$-голоморфной правой частью [87] и системы уравнений с частными производними [88] доказано существование и единственность $\mathbb{R}$-голоморфного решения (аналог теоремы Коши).

В диссертационной работе (глава 2) основываясь на этих подходах решаются вопросы существования у системы уравнений в полных дифференциалах $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов, последних множителей Якоби и частных интегралов.

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dw = X_1(z,w)dz + X_2(z,w)d\,\overline{z}\,, \tag{1.1}$$

где w и z — точки пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно, векторы $dw = \operatorname{colon}(dw_1,\ldots,dw_n), dz = \operatorname{colon}(dz_1,\ldots,dz_m), d\,\overline{z} = \operatorname{colon}(d\,\overline{z}_1,\ldots,d\,\overline{z}_m)$, $\overline{z}_j$ комплексно сопряжено к z_j, а элементами матриц $X_1(z,w) = \|X_{ij}(z,w)\|$ и $X_2(z,w) = \|X_{i,m+j}(z,w)\|$ являются $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области $G \subset \mathbb{C}^{m+n}$, достаточное число раз, скалярные функции векторного аргумента $X_{il}\colon G \to \mathbb{C}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $l=\overline{1,2m}$.

При выполнении условий Фробениуса

$$\partial_{z_\zeta} X_{ij} + \sum_{\xi=1}^{n}\bigl[X_{\xi\zeta}\,\partial_{w_\xi} X_{ij} + \overline{X}_{\xi,m+\zeta}\,\partial_{\overline{w}_\xi} X_{ij}\bigr] =$$

$$= \partial_{z_j} X_{i\zeta} + \sum_{\xi=1}^{n}\bigl[X_{\xi j}\,\partial_{w_\xi} X_{i\zeta} + \overline{X}_{\xi,m+j}\,\partial_{\overline{w}_\xi} X_{i\zeta}\bigr],$$

$$\partial_{\overline{z}_\zeta} X_{i,m+j} + \sum_{\xi=1}^{n}\bigl[X_{\xi,m+\zeta}\,\partial_{w_\xi} X_{i,m+j} + \overline{X}_{\xi\zeta}\,\partial_{\overline{w}_\xi} X_{i,m+j}\bigr] =$$

$$= \partial_{\overline{z}_j} X_{i,m+\zeta} + \sum_{\xi=1}^{n} \bigl[X_{\xi,m+j}\, \partial_{w_\xi} X_{i,m+\zeta} + \overline{X}_{\xi j}\, \partial_{\overline{w}_\xi} X_{i,m+\zeta}\bigr], \tag{1.2}$$

$$\partial_{z_\zeta} X_{i,m+j} + \sum_{\xi=1}^{n} \bigl[X_{\xi\zeta}\, \partial_{w_\xi} X_{i,m+j} + \overline{X}_{\xi,m+\zeta}\, \partial_{\overline{w}_\xi} X_{i,m+j}\bigr] =$$

$$= \partial_{\overline{z}_j} X_{i\zeta} + \sum_{\xi=1}^{n} \bigl[X_{\xi,m+j}\, \partial_{w_\xi} X_{i\zeta} + \overline{X}_{\xi j}\, \partial_{\overline{w}_\xi} X_{i\zeta}\bigr],$$

$$\forall (z,w) \in G,\ \ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ \zeta = \overline{1,m},$$

которые являются уточнением условий из [85, 87], система уравнений в полных дифференциалах (1.1) вполне разрешима [18, с. 21] на области G.

Условия Фробениуса (1.2) посредством линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(z,w) = \partial_{z_j} + \sum_{i=1}^{n} \bigl(X_{ij}(z,w)\partial_{w_i} + \overline{X}_{i,m+j}(z,w)\partial_{\overline{w}_i}\bigr),\ j = \overline{1,m}, \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{X}_{m+j}(z,w) = \partial_{\overline{z}_j} + \sum_{i=1}^{n} \bigl(X_{i,m+j}(z,w)\partial_{w_i} + \overline{X}_{ij}(z,w)\partial_{\overline{w}_i}\bigr),\ j = \overline{1,m}, \tag{1.4}$$

индуцированных на области G системой уравнений в полных дифференциалах (1.1), с помощью скобок Пуассона выражаются системой тождеств

$$\bigl[\mathfrak{X}_k(z,w), \mathfrak{X}_l(z,w)\bigr] = \mathfrak{O},\ \forall (z,w) \in G,\ \ k = \overline{1,2m},\ l = \overline{1,2m}. \tag{1.5}$$

Для системы (1.1) будем изучать $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы, частные интегралы и последние множители.

Основываясь на понятии первого интеграла [89, с. 337], введём

Определение 1.3. $\mathbb{R}$-дифференцируемую на подобласти G' области G функцию $F\colon G' \to \mathbb{C}$ назовём первым интегралом на области G' системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), если производные Ли в силу системы (1.1) функции F тождественно равны нулю на этой области:

$$\mathfrak{X}_l F(z,w) = 0,\ \forall (z,w) \in G',\ l = \overline{1,2m}. \tag{1.6}$$

Так как при каждом фиксированном индексе $j,\ j = \overline{1,m},$ линейные дифференциальные операторы (1.4) являются комплексно сопряжёнными к операторам (1.3), то имеет место следующая закономерность.

Свойство 1.1. Если $\mathbb{R}$-дифференцируемая на области G' скалярная функция $F\colon G' \to \mathbb{C}$ является первым интегралом системы (1.1), то комплексно сопряжённая ей $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\overline{F}\colon G' \to \mathbb{C}$ также является первым интегралом дифференциальной системы (1.1).

Доказательство. Если $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $F\colon G' \to \mathbb{C}$ является первым интегралом системы (1.1), то выполняется система тождеств (1.6). Отсюда, с учётом того, что

$$\overline{\mathfrak{X}}_j(z,w) = \mathfrak{X}_{m+j}(z,w),\ \ \overline{\mathfrak{X}}_{m+j}(z,w) = \mathfrak{X}_j(z,w),\ \forall (z,w)\in G,\ j=\overline{1,m},$$

получаем:

$$\mathfrak{X}_j\overline{F}(z,w) = \overline{\mathfrak{X}}_{m+j}\overline{F}(z,w) = \overline{\mathfrak{X}_{m+j}F(z,w)} = 0,\ \forall (z,w)\in G',\ j=\overline{1,m},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j}\overline{F}(z,w) = \overline{\mathfrak{X}}_j\overline{F}(z,w) = \overline{\mathfrak{X}_jF(z,w)} = 0,\ \forall (z,w)\in G',\ j=\overline{1,m}.$$

Следовательно, в соответствии с определением 1.3, $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\overline{F}\colon G' \to \mathbb{C}$ является первым интегралом системы (1.1). ■

Следуя подходам разработанным в [70], введём понятие $\mathbb{R}$-дифференцируемого частного интеграла.

Определение 1.4. $\mathbb{R}$-дифференцируемую на подобласти G' области G функцию $f\colon G' \to \mathbb{C}$ назовём частным интегралом на области G' системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), если производные Ли в силу системы (1.1) функции f равны

$$\mathfrak{X}_l f(z,w) = \Phi_l(z,w),\ \forall (z,w)\in G',\ l=\overline{1,2m}, \tag{1.7}$$

где функции $\Phi_l\colon G' \to \mathbb{C},\ l=\overline{1,2m},$ таковы что

$$\Phi_l(z,w)\Big|_{f(z,w)=0} = 0,\ l=\overline{1,2m}. \tag{1.8}$$

Аналогично свойству 1.1 доказывается

Свойство 1.2. Если $\mathbb{R}$-дифференцируемая на области G' скалярная функция $f\colon G' \to \mathbb{C}$ является частным интегралом системы (1.1), то комплексно сопряжённая ей $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\overline{f}\colon G' \to \mathbb{C}$ также будет частным интегралом дифференциальной системы (1.1).

Основываясь на понятии последнего множителя [89, с. 341], введём

Определение 1.5. $\mathbb{R}$-дифференцируемую на подобласти G' области G функцию $\mu\colon G' \to \mathbb{C}$ назовём последним множителем на области G' системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), если производные Ли в силу системы (1.1) функции μ равны

$$\mathfrak{X}_l\mu(z,w) = -\,\mu(z,w)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_l(z,w),\ \forall (z,w)\in G',\ l=\overline{1,2m}. \tag{1.9}$$

Как и при доказательстве свойства 1.1 устанавливаем

Свойство 1.3. Если $\mathbb{R}$-дифференцируемая на области G' скалярная функция $\mu\colon G'\to\mathbb{C}$ является последним множителем системы (1.1), то комплексно сопряжённая ей $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\overline{\mu}\colon G'\to\mathbb{C}$ также будет последним множителем дифференциальной системы (1.1).

Сопоставляя определения 1.4 и 1.5, на основании тождеств (1.9) и тождеств (1.7) при условиях (1.8) заключаем о такой связи между последним множителем и частным интегралом системы (1.1).

Свойство 1.4. $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель $\mu\colon G'\to\mathbb{C}$ системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) является $\mathbb{R}$-дифференцируемым на G' частным интегралом этой системы.

Основываясь на определении 1.3 и определении 1.5, относительно последних множителей и первого интеграла системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) устанавливаем следующую закономерность.

Свойство 1.5. Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G' функции $\mu_1\colon G'\to\mathbb{C}$ и $\mu_2\colon G'\to\mathbb{C}$ есть последние множители системы уравнений в полных дифференциалах (1.1). Тогда $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция

$$J\colon (z,w)\to \frac{\mu_1(z,w)}{\mu_2(z,w)},\ \forall (z,w)\in G_2',\ G_2'\subset G', \tag{1.10}$$

является первым интегралом на области G_2' системы (1.1), где область G_2' из множества $\{(z,w)\colon \mu_2(z,w)\neq 0\}$.

Действительно, с учётом тождеств (1.9) на случаи последних множителей $\mu_1\colon G'\to\mathbb{C}$ и $\mu_2\colon G'\to\mathbb{C}$:

$$\mathfrak{X}_l\,\mu_1(z,w) = -\,\mu_1(z,w)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_l(z,w),\ \forall (z,w)\in G',\ l=\overline{1,2m},$$

$$\mathfrak{X}_l\,\mu_2(z,w) = -\,\mu_2(z,w)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_l(z,w),\ \forall (z,w)\in G',\ l=\overline{1,2m},$$

производные Ли в силу системы (1.1)

$$\mathfrak{X}_l\,J(z,w) = \frac{\mu_2(z,w)\,\mathfrak{X}_l\mu_1(z,w) - \mu_1(z,w)\,\mathfrak{X}_l\mu_2(z,w)}{\mu_2^2(z,w)} =$$

$$= \frac{-\,\mu_2(z,w)\mu_1(z,w)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_l(z,w) + \mu_1(z,w)\mu_2(z,w)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_l(z,w)}{\mu_2^2(z,w)} = 0,$$

$$\forall (z,w)\in G_2',\ \ l=\overline{1,2m},$$

где область G_2' из множества $\{(z,w)\colon \mu_2(z,w)\neq 0\}$.

В соответствии с определением 1.3 функция (1.10) является $\mathbb{R}$-дифференцируемым на области G_2' первым интегралом системы (1.1). ■

Свойство 1.5 будем называть свойством Якоби последних множителей системы в полных дифференциалах по аналогии с подобным свойством для обыкновенных дифференциальных систем (см., например [90, с. 269]).

Свойство 1.6. Если $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\mu_2\colon G \to \mathbb{C}$ является последним множителем на области G системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), а функции $F_i\colon G' \to \mathbb{C},\ i = \overline{1,k},$ образуют базис первых интегралов на области G' этой системы, то $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\mu_1\colon G'' \to \mathbb{C}$ будет последним множителем на подобласти G'' области G' системы (1.1) тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\mu_1(z,w) = \mu_2(z,w)\,\Phi(F(z,w)),\ \forall(z,w) \in G'', \tag{1.11}$$

где векторная функция

$$F\colon (z,w) \to (F_1(z,w),\ldots,F_k(z,w)),\ \forall(z,w) \in G',$$

а Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{E}(F)$ функция.

Доказательство. Необходимость. Если μ_1 и μ_2 — последние множители системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), то по свойству Якоби последних множителей (свойство 1.5) $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция (1.10) является первым интегралом на подобласти G_2 области G этой системы. Так как функции $F_i\colon G' \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1,k},$ образуют базис первых интегралов на области G' системы (1.1), то функция J на области $G'' = G_2 \cap G'$ представима в виде

$$J(z,w) = \Phi(F(z,w)),\ \forall(z,w) \in G'',$$

где Φ — некоторая непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{E}(F)$ функция.

Достаточность устанавливаем непосредственным вычислением, показав, что для $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции $\mu_1\colon G'' \to \mathbb{C}$, заданной формулой (1.11), с учётом тождеств (1.9) для последнего множителя $\mu_2\colon G \to \mathbb{C}$ и тождеств (1.6) для первых интегралов $F_i\colon G' \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1,k},$ выполняются на области G'' тождества

$$\mathfrak{X}_l\,\mu_1(z,w) = \mathfrak{X}_l\bigl[\mu_2(z,w)\,\Phi(F(z,w))\bigr] =$$

$$= \Phi(F(z,w))\,\mathfrak{X}_l\,\mu_2(z,w) + \mu_2(z,w)\sum_{s=1}^{k}\partial_{F_s}\Phi(F)_{|F=F(z,w)}\,\mathfrak{X}_l\,F_s(z,w) =$$

$$= -\,\mu_2(z,w)\,\Phi(F(z,w))\,\mathrm{div}\,\mathfrak{X}_l(z,w) = -\,\mu_1(z,w)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{X}_l(z,w),\ l = \overline{1,2m},$$

соответствующие (1.9) на случай $\mu\colon (z,w) \to \mu_1(z,w),\ \forall(z,w) \in G''$. ■

Известно [27, с. 123 − 129], что вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах имеет базис первых интегралов размерности n. Поэтому на основании свойства 1.6 получаем

Следствие 1.1. Если $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\mu_2\colon G \to \mathbb{C}$ является последним множетелем на области G вполне разрешимой $\mathbb{R}$-голоморфной системы (1.1), то $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\mu_1\colon G'' \to \mathbb{C}$ будет последним множетелем на подобласти G'' области G' этой системы тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\mu_1(z,w) = \mu_2(z,w)\,\Phi(F_1(z,w),\ldots,F_n(z,w)),\ \forall (z,w)\in G'',$$

где $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции $F_i\colon G' \to \mathbb{C},\ i=\overline{1,n},$ суть функционально независимые первые интегралы на области G' вполне разрешимой системы (1.1), а Φ — некоторая $\mathbb{R}$-голоморфная функция.

В разделе 3.1 рассматривается $\mathbb{R}$-линейная однородная автономная система уравнений в полных дифференциалах

$$dw = X_1(w)dz + X_2(w)d\,\overline{z}\,, \tag{1.12}$$

где $w = \operatorname{colon}(w_1,\ldots,w_n)$ и $z = \operatorname{colon}(z_1,\ldots,z_m)$ — точки пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$, векторы $dw = \operatorname{colon}(dw_1,\ldots,dw_n)$, $dz = \operatorname{colon}(dz_1,\ldots,dz_m)$ и $d\,\overline{z} = \operatorname{colon}(d\,\overline{z}_1,\ldots,d\,\overline{z}_m)$, $\overline{z}_j$ комплексно сопряжено к z_j, элементами матриц $X_1(w) = \|X_{ij}(w)\|$ и $X_2(w) = \|X_{i,m+j}(w)\|$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, являются $\mathbb{R}$-линейные функции

$$X_{ik}\colon w \to \sum_{\xi=1}^{n}\bigl(a_{ik\xi}w_\xi + a_{ik,n+\xi}\overline{w}_\xi\bigr),\ \forall w\in\mathbb{C}^n,\ k=\overline{1,2m},\ i=\overline{1,n},$$

с коэффициентами $a_{ik\varrho}\in\mathbb{C}$, $\varrho=\overline{1,2n}$, $k=\overline{1,2m}$, $i=\overline{1,n}$. Система (1.12) индуцирует автономные линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{x}_j(w) = \sum_{\xi=1}^{n}\bigl(X_{\xi j}(w)\partial_{w_\xi} + \overline{X}_{\xi,m+j}(w)\partial_{\overline{w}_\xi}\bigr),\ \forall w\in\mathbb{C}^n,\ j=\overline{1,m}, \tag{1.13}$$

и

$$\mathfrak{x}_{m+j}(w) = \sum_{\xi=1}^{n}\bigl(X_{\xi,m+j}(w)\partial_{w_\xi} + \overline{X}_{\xi j}(w)\partial_{\overline{w}_\xi}\bigr),\ \forall w\in\mathbb{C}^n,\ j=\overline{1,m}, \tag{1.14}$$

которые не являются линейно связанными [91, с. 113 − 114] на пространстве $\mathbb{C}^n$. При этом по необходимости $m<n$.

Условия Фробениуса полной разрешимости (1.5) для системы (1.12) посредством операторов (1.13) и (1.14) примут вид

$$\bigl[\mathfrak{x}_k(w),\mathfrak{x}_l(w)\bigr] = \mathfrak{O},\ \forall w\in\mathbb{C}^n,\ k=\overline{1,2m},\ l=\overline{1,2m}. \tag{1.15}$$

Интегральный базис вполне разрешимой системы (1.12) на области из $\mathbb{C}^{m+n}$ состоит из n первых интегралов, которые являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми функциями. Кроме того, у вполне разрешимой система (1.12) всегда можно выделить $n-m$ автономных $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов, функционально независимых на области из пространства $\mathbb{C}^n$ (доказывается как в [27, с. 70, 128]).

Для вполне разрешимой $\mathbb{R}$-линейной автономной системы уравнений в полных дифференциалах (1.12) в разделе 3.1 разработан спектральный метод построения $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов.

В разделе 3.2 рассматривается вещественная линейная однородная автономная система уравнений в полных дифференциалах

$$dx = A(x)dt, \tag{1.16}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $t = (t_1, \ldots, t_m)$ — точки пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, векторы-столбцы $dx = \operatorname{colon}(dx_1, \ldots, dx_n)$ и $dt = \operatorname{colon}(dt_1, \ldots, dt_m)$, элементами матрицы $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ (n строк, m столбцов) являются линейные однородные функции

$$a_{ij} \colon x \to \sum_{\xi=1}^{n} a_{ij\xi} x_{\xi}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

с коэффициентами $a_{ij\xi} \in \mathbb{R}$, $\xi = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$. Система (1.16) индуцирует автономные линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{p}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) \partial_{x_i}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ j = \overline{1,m},$$

которые не являются линейно связанными на арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом по необходимости $m < n$.

Условия Фробениуса [18, с. 20 − 26; 89, с. 491 − 493, 527 − 530]

$$[\mathfrak{p}_j(x), \mathfrak{p}_\zeta(x)] = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ j = \overline{1,m}, \ \zeta = \overline{1,m},$$

полной разрешимости системы (1.16) равносильны перестановочности матриц [19, с. 24; 20, с. 73]:

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, \ j = \overline{1,m}, \ \zeta = \overline{1,m},$$

где квадратные матрицы n-го порядка $A_j = \|a_{\xi j i}\|$, $j = \overline{1,m}$.

Для вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1.16) в разделе 3.2 разработан спектральный метод построения автономного и неавтономного базисов первых интегралов.

В разделе 3.3 рассматривается обыкновенная линейная однородная стационарная дифференциальная система

$$dx = Ax\,dt, \tag{1.17}$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, \ldots, x_n)$, а у квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n элементами являются числа из поля $\mathbb{R}$.

Для системы (1.17) в разделе 3.3 предложен спектральный метод построения автономного и неавтономного базисов первых интегралов.

ГЛАВА 2

АВТОНОМНОСТЬ И ЦИЛИНДРИЧНОСТЬ $\mathbb{R}$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПОСЛЕДНИХ МНОЖИТЕЛЕЙ СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

2.1. $\mathbb{R}$-дифференцируемые (s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные первые интегралы

Определение 2.1. Первый интеграл $F\colon G' \to \mathbb{C}$ системы (1.1), $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G', назовём (s_1, s_2)-неавтономным, если функция $\overset{*}{F}$, полученная из F посредством соответствия

$$z_j \to x_j,\ \overline{z}_j \to y_j,\ j = \overline{1, m},\ \ w_i \to u_i,\ \overline{w}_i \to v_i,\ i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

зависит от $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ и только от s_1, $0 \leqslant s_1 \leqslant m$, переменных $x_1, \ldots, x_m$ и s_2, $0 \leqslant s_2 \leqslant m$, переменных $y_1, \ldots, y_m$. При $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ первый интеграл $F\colon w \to F(w)$, $\forall w \in \Omega'$, где область $\Omega' \subset \mathbb{C}^n$, будем называть автономным.

Иначе говоря, первый интеграл F системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), антиголоморфный по $m{-}s_1$ и голоморфный по $m{-}s_2$ независимым переменным, является (s_1, s_2)-неавтономным.

Определение 2.2. Первый интеграл $F\colon G' \to \mathbb{C}$ системы (1.1), $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G', назовём $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричным, если функция $\overset{*}{F}$, полученная из F посредством соответствия (2.1), зависит от $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и только от k_1, $0 \leqslant k_1 \leqslant n$, переменных $u_1, \ldots, u_n$ и k_2, $0 \leqslant k_2 \leqslant n$, переменных $v_1, \ldots, v_n$.

Иначе говоря, первый интеграл F системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), антиголоморфный по $n - k_1$ и голоморфный по $n - k_2$ зависимым переменным, является $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричным.

Пусть система (1.1) имеет (s_1, s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' первый интеграл

$$F\colon (z, w) \to F({}^{s}z, {}^{k}w),\ \forall (z, w) \in G', \tag{2.2}$$

где для удобства записи принято сокращение $s = (s_1, s_2), k = (n{-}k_1, n{-}k_2)$. Не умаляя общности, будем считать, что функция F является антиголоморфной по независимым $z_{s_1+1},\ldots,z_m$ и зависимым $w_{k_1+1},\ldots,w_n$ переменным и голоморфной по независимым $z_{j_{s_2+1}},\ldots,z_{j_m}$, $j_\beta\in\{1,\ldots,m\}$, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, и зависимым $w_{\zeta_{k_2+1}},\ldots,w_{\zeta_n},\zeta_\delta\in\{1,\ldots,n\}$, $\delta=\overline{k_2+1,n}$, переменным. Тогда, согласно определению 1.3, выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{lsk}F({}^s\!z,{}^k\!w)=0,\ \forall(z,w)\in G',\ l=\overline{1,2m}, \tag{2.3}$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_{\theta sk}(z,w)=\partial_{z_\theta}+\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi\theta}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau,m+\theta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},$$

$$\mathfrak{X}_{\eta sk}(z,w)=\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi\eta}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau,m+\eta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_g,sk}(z,w)=\partial_{\overline{z}_{j_g}}+\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_g}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_g}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_\nu,sk}(z,w)=\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_\nu}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_\nu}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},\ \forall(z,w)\in G,$$

$$\theta=\overline{1,s_1},\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},$$

индексы $\zeta_\tau\in\{1,\ldots,n\},\tau=\overline{1,k_2}$, $j_g\in\{1,\ldots,m\},g=\overline{1,s_2}$, $j_\nu\in\{1,\ldots,m\}$, $\nu=\overline{s_2+1,m}$ (при этом, если множество $J_g=\{j_g\colon g=\overline{1,s_2}\}$, а множество $J_\nu=\{j_\nu\colon \nu=\overline{s_2+1,m}\}$, то $J_g\cap J_\nu=\varnothing$, а $\operatorname{Card} J_g\cup J_\nu=m$).

Пусть выполняются тождества (2.3). Тогда в каждой из совокупностей

$$\begin{gathered}\bigl\{1,X_{1\theta}(z,w),\ldots,X_{k_1\theta}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1,m+\theta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\theta}(z,w)\bigr\},\\ \bigl\{X_{1\eta}(z,w),\ldots,X_{k_1\eta}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1,m+\eta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\eta}(z,w)\bigr\},\\ \bigl\{1,X_{1,m+j_g}(z,w),\ldots,X_{k_1,m+j_g}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1 j_g}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_g}(z,w)\bigr\},\\ \bigl\{X_{1,m+j_\nu}(z,w),\ldots,X_{k_1,m+j_\nu}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1 j_\nu}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_\nu}(z,w)\bigr\},\\ \theta=\overline{1,s_1},\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\end{gathered} \tag{2.4}$$

функции: при всяких фиксированных значениях переменных z_j, $j=\overline{1,m}$, $j\neq\alpha$, и w являются линейно связанными с помощью антиголоморфных функций по переменной z_α на области G; при фиксированных значениях переменных z_j, $j=\overline{1,m}$, $j\neq j_\beta$, и w линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной z_{j_β} на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i=\overline{1,n}$, $i\neq\gamma$ линейно связаны с помощью антиголоморфных функций по переменной w_γ на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i=\overline{1,n}$, $i\neq\zeta_\delta$ линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной w_{ζ_δ} на области G. Это имеет место при каждом фиксированном $\alpha=\overline{s_1+1,m}$, j_β, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, $\gamma=\overline{k_1+1,n}$, ζ_δ, $\delta=\overline{k_2+1,n}$. Поэтому вронскианы по z_α, $\alpha=\overline{s_1+1,m}$, по $\overline{z}_{j_\beta}$, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, по w_γ, $\gamma=\overline{k_1+1,n}$, и по $\overline{w}_{\zeta_\delta}$, $\delta=\overline{k_2+1,n}$, каждой из совокупностей (2.4) тождественно равны нулю на области G, то есть, выполняется система тождеств

$$
\begin{gathered}
W_{z_\alpha}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \ \alpha=\overline{s_1+1,m}\,,\\
W_{z_\alpha}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ \alpha=\overline{s_1+1,m}\,,\\
W_{z_\alpha}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \alpha=\overline{s_1+1,m}\,,\\
W_{z_\alpha}\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \ \alpha=\overline{s_1+1,m}\,,\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \ \beta=\overline{s_2+1,m}\,,\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ \beta=\overline{s_2+1,m}\,,\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \beta=\overline{s_2+1,m}\,,\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \beta=\overline{s_2+1,m}\,,\\
W_{w_\gamma}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \ \gamma=\overline{k_1+1,n}\,,\\
W_{w_\gamma}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ \gamma=\overline{k_1+1,n}\,,\\
W_{w_\gamma}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \gamma=\overline{k_1+1,n}\,,\\
W_{w_\gamma}\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \ \gamma=\overline{k_1+1,n}\,,\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \ \delta=\overline{k_2+1,n}\,,\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ \delta=\overline{k_2+1,n}\,,\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \delta=\overline{k_2+1,n}\,,
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

$$W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\big({}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big)=0,\ \forall(z,w)\in G,\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \ \delta=\overline{k_2+1,n}\,,$$

где число $\lambda=k_1+k_2$, вектор-функции

$${}^{\lambda}X^{j}\colon (z,w)\to \big(X_{1j}(z,w),\dots,X_{k_1j}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1,m+j}(z,w),\dots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},\,m+j}(z,w)\big),$$

$${}^{\lambda}X^{m+j}\colon (z,w)\to\big(X_{1,m+j}(z,w),\dots,X_{k_1,m+j}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1j}(z,w),\dots,\overline{X}_{\zeta_{k_2}\,j}(z,w)\big),$$

$$\forall(z,w)\in G,\ \ j=\overline{1,m},$$

а W_{z_α}, $W_{\overline{z}_{j_\beta}}$, W_{w_γ} и $W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}$ — вронскианы по переменным z_α, $\overline{z}_{j_\beta}$, w_γ и $\overline{w}_{\zeta_\delta}$ соответственно.

Отсюда получаем следующий необходимый признак существования (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла у системы (1.1).

Теорема 2.1. Для того, чтобы система (1.1) имела (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' первый интеграл (2.2), необходимо выполнение системы тождеств (2.5).

Следствие 2.1. Система тождеств (2.5) при $s_2=0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) голоморфного на области G' по независимым переменным $(s_1,0)$-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2.2).

Следствие 2.2. Система тождеств (2.5) при $s_1=0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) антиголоморфного на области G' по независимым переменным $(0,s_2)$-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2.2).

Следствие 2.3. Система тождеств (2.5) при $k_2=0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) голоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2.2).

Следствие 2.4. Система тождеств (2.5) при $k_1=0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) антиголоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1,s_2)-неавтономного $(n,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2.2).

Следствие 2.5. Система тождеств (2.5) при $s_2=0$, $k_2=0$ является необходимым условием наличия $(s_1,0)$-неавтономного $(n-k_1,n)$-цилиндричного голоморфного на области G' первого интеграла (2.2) у системы (1.1).

Следствие 2.6. Система тождеств (2.5) при $s_1=0$, $k_1=0$ является необходимым условием наличия $(0,s_2)$-неавтономного $(n,n-k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области G' первого интеграла (2.2) у системы (1.1).

Следствие 2.7. Для того, чтобы система уравнений в полных дифференциалах (1.1) имела автономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области Ω' из пространства $\mathbb{C}^n$ первый интеграл

$$F\colon w \to F({}^k w),\ \forall w \in \Omega',\ \ \Omega' \subset \mathbb{C}^n, \tag{2.6}$$

необходимо выполнение системы тождеств

$$\begin{aligned} W_{z_j}\big({}^\lambda X^l(z,w)\big) &= 0,\ \forall (z,w) \in G,\ l = \overline{1,2m},\ j = \overline{1,m}\,, \\ W_{\overline{z}_j}\big({}^\lambda X^l(z,w)\big) &= 0,\ \forall (z,w) \in G,\ l = \overline{1,2m},\ j = \overline{1,m}\,, \\ W_{w_\gamma}\big({}^\lambda X^l(z,w)\big) &= 0,\ \forall (z,w) \in G,\ l = \overline{1,2m},\ \gamma = \overline{k_1+1,n}\,, \\ W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\big({}^\lambda X^l(z,w)\big) &= 0,\ \forall (z,w) \in G,\ l = \overline{1,2m},\ \delta = \overline{k_2+1,n}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Следствие 2.8. Система тождеств (2.7) при $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) автономного $(n-k_1, n)$-цилиндричного голоморфного на области Ω' первого интеграла (2.6).

Следствие 2.9. Система тождеств (2.7) при $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) автономного $(n, n-k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области Ω' первого интеграла (2.6).

Из свойства 1.1 и понятия (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого первого интеграла вытекает

Свойство 2.1. Если у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) существует (s_1, s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' первый интеграл (2.2), то тогда она также имеет (s_2, s_1)-неавтономный $(n-k_2, n-k_1)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на G' первый интеграл $\overline{F}\colon (z,w) \to \overline{F}({}^s z, {}^k w),\ \forall (z,w) \in G'$.

Система $\overline{(2.5)}$, сопряжённая к системе (2.5), является необходимым условием существования (s_2, s_1)-неавтономного $(n-k_2, n-k_1)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого первого интеграла у системы в полных дифференциалах (1.1). Из равносильности систем (2.5) и $\overline{(2.5)}$ следует

Следствие 2.10. Необходимым условием наличия (s_2, s_1)-неавтономного $(n-k_2, n-k_1)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла $F\colon (z,w) \to F({}^{(s_2,s_1)}z, {}^{(k_2,k_1)}w),\ \forall (z,w) \in G',$ у системы (1.1) является выполнение системы тождеств (2.5).

Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G, достаточное число раз, функции $X_{il}\colon G \to \mathbb{C},\ i = \overline{1,n},\ l = \overline{1,2m},$ удовлетворяют условиям (2.4). Составим функциональную систему

$$
\begin{gathered}
\psi_{\theta s_1} + {}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = 0,\ \theta=\overline{1,s_1},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \alpha=\overline{s_1+1,m},\ \theta=\overline{1,s_1}\,,\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\ \theta=\overline{1,s_1}\,,\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\ \theta=\overline{1,s_1},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\ \theta=\overline{1,s_1},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = 0,\ \eta=\overline{s_1+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \alpha=\overline{s_1+1,m},\ \eta=\overline{s_1+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\ \eta=\overline{s_1+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\ \eta=\overline{s_1+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\ \eta=\overline{s_1+1,m},\\
\psi_{g s_2} + {}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\big]^T = 0,\ g=\overline{1,s_2},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \alpha=\overline{s_1+1,m},\ g=\overline{1,s_2},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\ g=\overline{1,s_2},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\ g=\overline{1,s_2},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\ g=\overline{1,s_2},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^T = 0,\ \nu=\overline{s_2+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \alpha=\overline{s_1+1,m},\ \nu=\overline{s_2+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\ \nu=\overline{s_2+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\ \nu=\overline{s_2+1,m},\\
{}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^T = 0,\ p=\overline{1,\lambda-1},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\ \nu=\overline{s_2+1,m},
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

где T — знак транспонирования, $\mathbb{R}$-дифференцируемые на G функции

$$\psi_{\theta s_1}\colon (z,w)\to \psi_{\theta s_1}({}^s z, {}^k w),\ \forall (z,w)\in G,\ \theta=\overline{1,s_1},$$

$$\psi_{g s_2}\colon (z,w)\to \psi_{g s_2}({}^s z, {}^k w),\ \forall (z,w)\in G,\ g=\overline{1,s_2},$$

являются координатами векторных функций ${}^{s_1}\psi$ и ${}^{s_2}\psi$ соответственно, векторная функция

$${}^{\lambda}\varphi\colon (z,w)\to ({}^{k_1}\varphi(z,w), {}^{k_2}\varphi(z,w)),\ \forall (z,w)\in G,$$

имеет координатные функции

$${}^{k_1}\varphi\colon (z,w)\to (\varphi_{1k_1}({}^s z, {}^k w),\ldots,\varphi_{k_1 k_1}({}^s z, {}^k w)),\ \forall (z,w)\in G,$$

$${}^{k_2}\varphi\colon (z,w)\to (\varphi_{1k_2}({}^s z, {}^k w),\ldots,\varphi_{k_2 k_2}({}^s z, {}^k w)),\ \forall (z,w)\in G.$$

Введём в рассмотрение уравнение Пфаффа

$${}^{s_1}\psi({}^s z, {}^k w)d\,{}^{s_1}z + {}^{s_2}\psi({}^s z, {}^k w)d\,\overline{{}^{s_2}z} + {}^{k_1}\varphi({}^s z, {}^k w)d\,{}^{k_1}w + {}^{k_2}\varphi({}^s z, {}^k w)d\,\overline{{}^{k_2}w} = 0, \qquad (2.9)$$

где векторы $d\,{}^{s_1}z = \operatorname{colon}(dz_1,\ldots,dz_{s_1})$, $d\,\overline{{}^{s_2}z} = \operatorname{colon}\bigl(d\,\overline{z}_{j_1},\ldots,d\,\overline{z}_{j_{s_2}}\bigr)$, $d\,{}^{k_1}w = \operatorname{colon}(dw_1,\ldots,dw_{k_1})$, $d\,\overline{{}^{k_2}w} = \operatorname{colon}\bigl(d\,\overline{w}_{\zeta_1},\ldots,d\,\overline{w}_{\zeta_{k_2}}\bigr)$ и докажем следующий критерий существования (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого первого интеграла у системы (1.1).

Теорема 2.2. Для того, чтобы система (1.1) имела (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' первый интеграл (2.2), необходимо и достаточно существования векторов-функций ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ и ${}^{\lambda}\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе (2.8), таких, что функция (2.2) является общим $\mathbb{R}$-дифференцируемым интегралом уравнения Пфаффа (2.9) на области G^r, $r=\overset{*}{s}+\overset{*}{k}$, являющейся естественной проекцией области G' на координатное подпространство $O\,{}^{\overset{*}{s}}z\,{}^{\overset{*}{k}}w$, где $\overset{*}{s}$ и $\overset{*}{k}$ есть соответственно число независимых и зависимых переменных, от которых зависит функция (2.2).

Доказательство. Необходимость. Пусть у системы в полных дифференциалах (1.1) существует (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' первый интеграл (2.2). Тогда выполняются тождества (2.3):

$$\partial_{z_\theta}F({}^s z, {}^k w) + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\theta}(z,w)\partial_{w_\xi}F({}^s z, {}^k w) + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau, m+\theta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}F({}^s z, {}^k w) = 0,$$

$$\partial_{\overline{z}_{j_g}}F({}^s z, {}^k w) + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi, m+j_g}(z,w)\partial_{w_\xi}F({}^s z, {}^k w) + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau j_g}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}F({}^s z, {}^k w) = 0,$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\eta}(z,w)\partial_{w_\xi}F({}^s\!z,{}^k\!w)+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau,m+\eta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}F({}^s\!z,{}^k\!w)=0,$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi,m+j_\nu}(z,w)\partial_{w_\xi}F({}^s\!z,{}^k\!w)+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_\nu}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}F({}^s\!z,{}^k\!w)=0,$$

$$\forall (z,w)\in G',\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ g=\overline{1,s_2},\ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \nu=\overline{s_2+1,m}\,.$$

Дифференцируя первые s_1+s_2 тождеств λ раз по $z_{s_1+1},\dots,z_m$, по $\overline{z}_{j_{s_2+1}},\dots,\overline{z}_{j_m}$, по $w_{k_1+1},\dots,w_n$, по $\overline{w}_{\zeta_{k_2+1}},\dots,\overline{w}_{\zeta_n}$, а остальные $2m-s_1-s_2$ тождеств дифференцируя $\lambda-1$ раз по $z_{s_1+1},\dots,z_m$, по $\overline{z}_{j_{s_2+1}},\dots,\overline{z}_{j_m}$, по $w_{k_1+1},\dots,w_n$ и по $\overline{w}_{\zeta_{k_2+1}},\dots,\overline{w}_{\zeta_n}$, убеждаемся, что продолжения на область G' вектор-функций

$${}^{s_1}\psi\colon ({}^s\!z,{}^k\!w)\to\partial_{{}^{s_1}\!z}F({}^s\!z,{}^k\!w),\ \ {}^{s_2}\psi\colon ({}^s\!z,{}^k\!w)\to\partial_{\overline{{}^{s_2}\!z}}F({}^s\!z,{}^k\!w),\ \forall({}^s\!z,{}^k\!w)\in G^r,$$

$${}^{k_1}\varphi\colon ({}^s\!z,{}^k\!w)\to\partial_{{}^{k_1}\!w}F({}^s\!z,{}^k\!w),\ \ {}^{k_2}\varphi\colon ({}^s\!z,{}^k\!w)\to\partial_{\overline{{}^{k_2}\!w}}F({}^s\!z,{}^k\!w),\ \forall({}^s\!z,{}^k\!w)\in G^r,$$

является решением системы (2.8), где операторы $\partial_{{}^{s_1}\!z}=(\partial_{z_1},\dots,\partial_{z_{s_1}})$, $\partial_{\overline{{}^{s_2}z}}=$ $=\bigl(\partial_{\overline{z}_{j_1}},\dots,\partial_{\overline{z}_{j_{s_2}}}\bigr)$, $\partial_{{}^{k_1}\!w}=(\partial_{w_1},\dots,\partial_{w_{k_1}})$, $\partial_{\overline{{}^{k_2}w}}=\bigl(\partial_{\overline{w}_{\zeta_1}},\dots,\partial_{\overline{w}_{\zeta_{k_2}}}\bigr)$.

Отсюда также следует, что функция (2.2) является общим интегралом на области G^r уравнения Пфаффа (2.9).

Достаточность. Пусть векторы-функции

$${}^{s_1}\psi\colon (z,w)\to{}^{s_1}\psi({}^s\!z,{}^k\!w),\ \ {}^{s_2}\psi\colon (z,w)\to{}^{s_2}\psi({}^s\!z,{}^k\!w),\ \forall(z,w)\in G',$$

$${}^{k_1}\varphi\colon (z,w)\to{}^{k_1}\varphi({}^s\!z,{}^k\!w),\ \ {}^{k_2}\varphi\colon (z,w)\to{}^{k_2}\varphi({}^s\!z,{}^k\!w),\ \forall(z,w)\in G',$$

являются решением системы (2.8), а уравнение Пфаффа (2.9), составленное на его основании, имеет $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G^r общий интеграл (2.2). Тогда на области G^r выполняется система тождеств

$$\begin{gathered}\partial_{{}^{s_1}\!z}F({}^s\!z,{}^k\!w)-{}^{s_1}\psi({}^s\!z,{}^k\!w)=0,\ \ \partial_{\overline{{}^{s_2}z}}F({}^s\!z,{}^k\!w)-{}^{s_2}\psi({}^s\!z,{}^k\!w)=0,\\ \partial_{{}^{k_1}\!w}F({}^s\!z,{}^k\!w)-{}^{k_1}\varphi({}^s\!z,{}^k\!w)=0,\ \ \partial_{\overline{{}^{k_2}w}}F({}^s\!z,{}^k\!w)-{}^{k_2}\varphi({}^s\!z,{}^k\!w)=0.\end{gathered}\tag{2.10}$$

Учитывая, что функции ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$, ${}^{k_1}\varphi$ и ${}^{k_2}\varphi$ являются решением функциональной системы (2.8), получаем систему тождеств (2.3), и следовательно, $\mathbb{R}$-дифференцируемая на области G' функция (2.2) является (s_1,s_2)-неавтономным $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричным первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (1.1). ■

Предложенный в теореме 2.2 метод нахождения (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых на области G' первых интегралов системы (1.1) может быть использован для построения некоторого количества функционально независимых (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных первых интегралов системы (1.1).

Теорема 2.3. Пусть система (2.8) имеет q не являющихся линейно связанными на области G' решений

$$\begin{gathered} {}^{s_1}\psi^\varepsilon\colon (z,w) \to {}^{s_1}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),\ \ {}^{s_2}\psi^\varepsilon\colon (z,w) \to {}^{s_2}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \\ {}^\lambda\varphi^\varepsilon\colon (z,w) \to {}^\lambda\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),\ \forall (z,w) \in G',\ \varepsilon = \overline{1,q}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

а построенные на их основании уравнения Пфаффа

$$\begin{gathered} {}^{s_1}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, d\,{}^{s_1}z \,+\, {}^{s_2}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, d\,\overline{{}^{s_2}z} \,+ \\ +\, {}^{k_1}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, d\,{}^{k_1}w \,+\, {}^{k_2}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w)\, d\,\overline{{}^{k_2}w} \,=\, 0,\ \varepsilon = \overline{1,q}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

имеют соответственно общие $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы

$$F_\varepsilon\colon ({}^s z, {}^k w) \to F_\varepsilon({}^s z, {}^k w),\ \forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r,\ \ \varepsilon = \overline{1,q}, \tag{2.13}$$

на области G^r, являющейся естественной проекцией области G' на координатное подпространство $O\,{}^{\overset{*}{s}}z\,{}^{\overset{*}{k}}w$, где $\overset{*}{s}$ и $\overset{*}{k}$ — соответственно число независимых и зависимых переменных, от которых зависят функции (2.13). Тогда эти общие интегралы функционально независимы на области G^r.

Доказательство. В силу тождеств (2.10) на области G^r получаем, что

$$\partial_{{}^{s_1}z} F_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{s_1}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{{}^{s_2}z}} F_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{s_2}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),$$

$$\partial_{{}^{k_1}w} F_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{k_1}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{{}^{k_2}w}} F_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{k_2}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),\ \ \varepsilon = \overline{1,q}.$$

Поэтому матрица Якоби

$$J(F_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = \left\| {}^{s_1}\Psi({}^s z, {}^k w)\ {}^{s_2}\Psi({}^s z, {}^k w)\ {}^{k_1}\Phi({}^s z, {}^k w)\ {}^{k_2}\Phi({}^s z, {}^k w) \right\|,$$

где блочная матрица $\left\| {}^{s_1}\Psi\ {}^{s_2}\Psi\ {}^{k_1}\Phi\ {}^{k_2}\Phi \right\|$ составлена из $(q \times s_1)$-матрицы ${}^{s_1}\Psi({}^s z, {}^k w) = \left\| \psi_{\varepsilon\theta s_1}({}^s z, {}^k w) \right\|$, $(q \times s_2)$-матрицы ${}^{s_2}\Psi({}^s z, {}^k w) = \left\| \psi_{\varepsilon g s_2}({}^s z, {}^k w) \right\|$, $(q \times k_1)$-матрицы ${}^{k_1}\Phi({}^s z, {}^k w) = \left\| \varphi_{\varepsilon\xi k_1}({}^s z, {}^k w) \right\|$ и $(q \times k_2)$-матрицы ${}^{k_2}\Phi({}^s z, {}^k w) = \left\| \varphi_{\varepsilon\tau k_2}({}^s z, {}^k w) \right\|$.

Ввиду линейной несвязанности векторов-функций (2.11) на области G^r ранг матрицы Якоби $\operatorname{rank} J(F_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = q$ для всех $({}^s z, {}^k w)$ из области G^r, за исключением, быть может, множества r-мерной меры нуль.

Следовательно, общие интегралы (2.13) уравнений Пфаффа (2.12) являются функционально независимыми на области G^r. ■

Пример 2.1. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= \frac{2}{\overline{z}}\, w_2\, dz - \Big(\frac{1}{\overline{z}}\, w_1 + 2w_2^2 + 2z\, w_2\, \overline{w}_1\Big) d\,\overline{z}\,, \\ dw_2 &= \ - dz + \overline{z}\, (w_2 + z\, \overline{w}_1)\, d\,\overline{z} \end{aligned} \tag{2.14}$$

такова, что вронскианы по $\overline{z}$, w_1 и w_2 совокупностей

$$\Big\{1,\ -\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 - 2\,\overline{w}\,{}^2_2 - 2\,\overline{z}\, w_1\, \overline{w}_2, z(\,\overline{z}\, w_1 + \overline{w}_2)\Big\} \quad \text{и} \quad \Big\{\,\frac{2\,\overline{w}_2}{z}\,,\ -1\Big\}$$

равны нулю на области G из множества $V = \{(z,w)\colon\, z \neq 0\}$.

Следовательно, выполняются необходимые условия для существования у системы уравнений в полных дифференциалах (2.14) (1,0)-неавтономного (2,0)-цилиндричного (голоморфного по независимой переменной и антиголоморфного по зависимым переменным) первого интеграла (теорема 2.1).

Составим функциональную систему (2.8)

$$\psi_1 - \Big(\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}\,{}^2_2 + 2\,\overline{z}\, w_1\, \overline{w}_2\Big)\varphi_1 + z(\,\overline{z}\, w_1 + \overline{w}_2)\varphi_2 = 0,$$

$$-\,\partial^p_{\overline{z}}\Big(\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}\,{}^2_2 + 2\,\overline{z}\, w_1\, \overline{w}_2\Big)\varphi_1 + \partial^p_{\overline{z}}\big[z(\,\overline{z}\, w_1 + \overline{w}_2)\big]\varphi_2 = 0,$$

$$-\,\partial^p_{w_\gamma}\Big(\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}\,{}^2_2 + 2\,\overline{z}\, w_1\, \overline{w}_2\Big)\varphi_1 + \partial^p_{w_\gamma}\big[z(\,\overline{z}\, w_1 + \overline{w}_2)\big]\varphi_2 = 0,$$

$$\partial^q_{\overline{z}}\Big(\frac{2}{z}\,\overline{w}_2\Big)\varphi_1 + \partial^p_{\overline{z}}(\,-1)\,\varphi_2 = 0, \quad \partial^q_{w_\gamma}\Big(\frac{2}{z}\,\overline{w}_2\Big)\varphi_1 + \partial^p_{w_\gamma}(\,-1)\,\varphi_2 = 0,$$

$$\forall (z,w) \in G,\ \ p = \overline{1,2},\ q = \overline{0,1},\ \gamma = 1,\ \gamma = 2,$$

или

$$\psi_1 - \Big(\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}\,{}^2_2 + 2\,\overline{z}\, w_1\, \overline{w}_2\Big)\varphi_1 + z(\,\overline{w}_2 + \overline{z}\, w_1)\varphi_2 = 0,$$

$$-\,2w_1\, \overline{w}_2\, \varphi_1 + zw_1\, \varphi_2 = 0, \quad -\,2\,\overline{z}\,\overline{w}_2\, \varphi_1 + z\,\overline{z}\,\varphi_2 = 0, \quad \frac{2}{z}\,\overline{w}_2\, \varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$

которая имеет решение

$$\psi_1\colon\, (z,w) \to \overline{w}_1, \quad \varphi_1\colon\, (z,w) \to z, \quad \varphi_2\colon\, (z,w) \to 2\,\overline{w}_2,\ \forall (z,w) \in G.$$

Построенное на основании этого решения уравнение Пфаффа

$$\overline{w}_1\, dz + z\, d\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2\, d\,\overline{w}_2 = 0$$

имеет общий интеграл $\widetilde{F}\colon (z,w) \to z\,\overline{w}_1 + \overline{w}_2^{\,2},\ \forall (z,w) \in \mathbb{C}^3.$

Следовательно, система (2.14) имеет $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G (1,0)-неавтономный (2,0)-цилиндричный первый интеграл

$$F\colon (z,w) \to z\,\overline{w}_1 + \overline{w}_2^{\,2},\ \forall (z,w) \in G. \tag{2.15}$$

Скобки Пуассона линейных дифференциальных операторов первого порядка индуцированных системой (2.14)

$$\mathfrak{X}_1(z,w) = \partial_z + \frac{2}{\overline{z}}\,w_2\,\partial_{w_1} - \partial_{w_2} - \Big(\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2^{\,2} + 2\,\overline{z}\,w_1\,\overline{w}_2\Big)\partial_{\overline{w}_1} + z(\,\overline{z}\,w_1 + \overline{w}_2)\partial_{\overline{w}_2}$$

и

$$\mathfrak{X}_2(z,w) = \partial_{\overline{z}} - \Big(\frac{1}{\overline{z}}\,w_1 + 2w_2^2 + 2z\,w_2\,\overline{w}_1\Big)\partial_{w_1} + \overline{z}\,(w_2 + z\,\overline{w}_1)\partial_{w_2} + \frac{2}{z}\,\overline{w}_2\,\partial_{\overline{w}_1} - \partial_{\overline{w}_2}$$

равны

$$\big[\mathfrak{X}_1(z,w), \mathfrak{X}_2(z,w)\big] = \big(1 + 2z\,\overline{w}_2(\,\overline{z}\,w_1 + \overline{w}_2\,)\big)\big(2w_2\,\partial_{w_1} - \overline{z}\,\partial_{w_2}\big) \ -$$

$$- \big(1 + 2\,\overline{z}\,w_2(w_2 + z\,\overline{w}_1)\big)\big(2\,\overline{w}_2\,\partial_{\overline{w}_1} - z\,\partial_{\overline{w}_2}\big)\,,\ \forall (z,w) \in G.$$

Значит, система (2.14) не является вполне разрешимой ни на какой области G из множества V пространства $\mathbb{C}^3$. Поэтому её интегральный базис состоит не более, чем из одного первого интеграла.

Стало быть, $\mathbb{R}$-дифференцируемый первый интеграл (2.15) образует интегральный базис системы уравнений в полных дифференциалах (2.14) на любой области G из множества V пространства $\mathbb{C}^3$.

2.2. $\mathbb{R}$-дифференцируемые (s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные последние множители

Определение 2.3. $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель $\mu\colon G' \to \mathbb{C}$ системы (1.1) назовём (s_1,s_2)-неавтономным, если функция $\overset{*}{\mu}$, полученная из μ посредством соответствия (2.1) зависит от $u = (u_1,\ldots,u_n)$, $v = (v_1,\ldots,v_n)$ и только от s_1, $0 \leqslant s_1 \leqslant m$, переменных $x_1,\ldots,x_m$ и s_2, $0 \leqslant s_2 \leqslant m$, переменных $y_1,\ldots,y_m$. При $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ последний множитель $\mu\colon w \to \mu(w)$, $\forall w \in \Omega'$, где область $\Omega' \subset \mathbb{C}^n$, будем называть автономным.

Иначе говоря, последний множитель μ системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), антиголоморфный по $m - s_1$ и голоморфный по $m - s_2$ независимым переменным, является (s_1,s_2)-неавтономным.

Определение 2.4. $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель $\mu\colon G' \to \mathbb{C}$ системы (1.1) назовём $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричным, если функция $\overset{*}{\mu}$, полученная из μ посредством соответствия (2.1), зависит от $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$ и только от k_1, $0\leqslant k_1\leqslant n$, переменных $u_1,\ldots,u_n$ и k_2, $0\leqslant k_2\leqslant n$, переменных $v_1,\ldots,v_n$.

Иначе говоря, последний множитель μ системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), антиголоморфный по $n-k_1$ и голоморфный по $n-k_2$ зависимым переменным, является $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричным.

Пусть система (1.1) имеет (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель

$$\mu\colon (z,w)\to \mu({}^{s}z, {}^{k}w),\ \forall (z,w)\in G', \tag{2.16}$$

где для удобства записи принято сокращение $s=(s_1,s_2), k=(n-k_1,n-k_2)$. Не умаляя общности, будем считать, что функция μ является антиголоморфной по независимым $z_{s_1+1},\ldots,z_m$ и зависимым $w_{k_1+1},\ldots,w_n$ переменным и голоморфной по независимым $z_{j_{s_2+1}},\ldots,z_{j_m}$, $j_\beta\in\{1,\ldots,m\}$, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, и зависимым $w_{\zeta_{k_2+1}},\ldots,w_{\zeta_n},\zeta_\delta\in\{1,\ldots,n\}$, $\delta=\overline{k_2+1,n}$, переменным. Тогда, согласно определению 1.5, выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{lsk}\mu({}^{s}z,{}^{k}w)+\mu({}^{s}z,{}^{k}w)\,\mathrm{div}\mathfrak{X}_l(z,w)=0,\ \forall(z,w)\in G'\subset G,\ l=\overline{1,2m}. \tag{2.17}$$

Пусть выполняются тождества (2.17). Тогда в каждой из совокупностей

$$\begin{gathered}
\bigl\{1, X_{1\theta}(z,w),\ldots, X_{k_1\theta}(z,w), \overline{X}_{\zeta_1,m+\theta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\theta}(z,w), \mathrm{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w)\bigr\},\\
\bigl\{X_{1\eta}(z,w),\ldots, X_{k_1\eta}(z,w), \overline{X}_{\zeta_1,m+\eta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\eta}(z,w), \mathrm{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w)\bigr\},\\
\bigl\{1, X_{1,m+j_g}(z,w),\ldots, X_{k_1,m+j_g}(z,w), \overline{X}_{\zeta_1 j_g}(z,w),\ldots,\\
\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_g}(z,w), \mathrm{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w)\bigr\},\\
\bigl\{X_{1,m+j_\nu}(z,w),\ldots, X_{k_1,m+j_\nu}(z,w), \overline{X}_{\zeta_1 j_\nu}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_\nu}(z,w),\\
\mathrm{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w)\bigr\},\ \theta=\overline{1,s_1},\ \eta=\overline{s_1+1,m},\ g=\overline{1,s_2},\ \nu=\overline{s_2+1,m},
\end{gathered}\tag{2.18}$$

функции: при всяких фиксированных значениях переменных z_j, $j=\overline{1,m}$, $j\neq\alpha$, и w являются линейно связанными с помощью антиголоморфных функций по переменной z_α на области G; при фиксированных значениях переменных z_j, $j=\overline{1,m}$, $j\neq j_\beta$, и w линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной z_{j_β} на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i=\overline{1,n}$, $i\neq\gamma$ линейно связаны с помощью антиголоморфных функций по переменной w_γ на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i=\overline{1,n}$, $i\neq\zeta_\delta$ линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной w_{ζ_δ} на области G. Это имеет место при каждом фиксированном $\alpha=\overline{s_1+1,m}$, j_β, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, $\gamma=\overline{k_1+1,n}$, ζ_δ, $\delta=\overline{k_2+1,n}$. Поэтому вронскианы по z_α, $\alpha=\overline{s_1+1,m}$, по $\overline{z}_{j_\beta}$, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, по w_γ, $\gamma=\overline{k_1+1,n}$, и по $\overline{w}_{\zeta_\delta}$, $\delta=\overline{k_2+1,n}$, каждой из совокупностей (2.18) тождественно равны нулю на области G, то есть, выполняется система тождеств

$$
\begin{gathered}
W_{z_\alpha}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w)\bigr)=0,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \alpha=\overline{s_1+1,m},\\
W_{z_\alpha}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w)\bigr)=0,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \alpha=\overline{s_1+1,m}\,,\\
W_{z_\alpha}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \alpha=\overline{s_1+1,m},\\
W_{z_\alpha}\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \alpha=\overline{s_1+1,m},\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w)\bigr)=0,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w)\bigr)=0,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\\
W_{w_\gamma}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w)\bigr)=0,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{w_\gamma}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w)\bigr)=0,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{w_\gamma}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{w_\gamma}\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w)\bigr)=0,\ \ \theta=\overline{1,s_1},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w)\bigr)=0,\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ \ g=\overline{1,s_2},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w),\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \delta=\overline{k_2+1,n}.
\end{gathered}
\tag{2.19}
$$

Следовательно, для системы (1.1) имеет место необходимый признак существования (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' последнего множителя.

Теорема 2.4. Для того, чтобы система (1.1) имела (s_1, s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель (2.16), необходимо выполнение системы тождеств (2.19).

Следствие 2.11. Система тождеств (2.19) при $s_2 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) голоморфного на области G' по независимым переменным $(s_1, 0)$-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' последнего множителя (2.16).

Следствие 2.12. Система тождеств (2.19) при $s_1 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) антиголоморфного на области G' по независимым переменным $(0, s_2)$-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на G' последнего множителя (2.16).

Следствие 2.13. Система тождеств (2.19) при $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) голоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' последнего множителя (2.16).

Следствие 2.14. Система тождеств (2.19) при $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) антиголоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1, s_2)-неавтономного $(n, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' последнего множителя (2.16).

Следствие 2.15. Система тождеств (2.19) при $s_2 = 0,\ k_2 = 0$ является необходимым условием наличия $(s_1, 0)$-неавтономного $(n-k_1, n)$-цилиндричного голоморфного на области G' последнего множителя (2.16) у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1).

Следствие 2.16. Система тождеств (2.19) при $s_1 = 0,\ k_1 = 0$ является необходимым условием наличия $(0, s_2)$-неавтономного $(n, n-k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области G' последнего множителя (2.16) у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1).

Следствие 2.17. Для того, чтобы система уравнений в полных дифференциалах (1.1) имела автономый $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области Ω' пространства $\mathbb{C}^n$ последний множитель

$$\mu\colon w \to \mu({}^k w),\ \forall w \in \Omega',\ \ \Omega' \subset \mathbb{C}^n, \tag{2.20}$$

необходимо выполнение системы тождеств

$$W_{z_j}\big({}^\lambda X^l(z,w), \operatorname{div}\mathfrak{X}_l(z,w)\big) = 0,\ \forall (z,w) \in G,\ l = \overline{1,2m},\ j = \overline{1,m}\,,$$

$$W_{\overline{z}_j}\big({}^\lambda X^l(z,w), \operatorname{div}\mathfrak{X}_l(z,w)\big) = 0,\ \forall (z,w) \in G,\ l = \overline{1,2m},\ j = \overline{1,m}\,, \tag{2.21}$$

$$W_{w_\gamma}\big({}^\lambda X^l(z,w), \operatorname{div}\mathfrak{X}_l(z,w)\big) = 0,\ \forall (z,w) \in G,\ l = \overline{1,2m},\ \gamma = \overline{k_1+1,n}\,,$$

$$W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\big({}^{\lambda}X^{l}(z,w), \operatorname{div}\mathfrak{X}_l(z,w)\big) = 0,\ \forall (z,w)\in G,\ l=\overline{1,2m},\ \delta=\overline{k_2+1,n}\,.$$

Следствие 2.18. Система тождеств (2.21) при $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) автономного $(n-k_1,n)$-цилиндричного голоморфного на области Ω' последнего множителя (2.20).

Следствие 2.19. Система тождеств (2.21) при $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) автономного $(n, n-k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области Ω' последнего множителя (2.20).

Из свойства 1.3 и понятия (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого последнего множителя вытекает

Свойство 2.2. Если у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) существует (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель (2.16), то тогда она также имеет (s_2,s_1)-неавтономный $(n-k_2,n-k_1)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый последний множитель $\overline{\mu}\colon (z,w)\to \overline{\mu}({}^{s}z, {}^{k}w),\ \forall (z,w)\in G'$.

Система $\overline{(2.19)}$, сопряжённая к системе (2.19), является необходимым условием существования (s_2,s_1)-неавтономного $(n-k_2,n-k_1)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' последнего множителя у системы (1.1). Из равносильности систем (2.19) и $\overline{(2.19)}$ следует

Следствие 2.20. Необходимым условием наличия (s_2,s_1)-неавтономного $(n-k_2,n-k_1)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' последнего множителя $\mu\colon (z,w)\to \mu({}^{(s_2,s_1)}z, {}^{(k_2,k_1)}w),\ \forall (z,w)\in G'$, у системы (1.1) является выполнение системы тождеств (2.19).

Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G, достаточное число раз, функции $X_{il}\colon G\to\mathbb{C},\ i=\overline{1,n},\ l=\overline{1,2m}$, удовлетворяют условиям (2.19). Составим функциональную систему

$$\psi_{\theta s_1} + {}^{\lambda}\!\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^{T} = -\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w),$$

$${}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^{T} = -\,\partial^{p}_{z_\alpha}\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda+1},$$

$${}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^{T} = -\,\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda+1},$$

$${}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^{T} = -\,\partial^{p}_{w_\gamma}\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda+1},$$

$${}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^{T} = -\,\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda+1},$$

$${}^{\lambda}\!\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^{T} = -\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w),$$

$${}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^{T} = -\,\partial^{p}_{z_\alpha}\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda},$$

$$
\begin{gathered}
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}\!X^{\eta}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{\eta}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}\!X^{\eta}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{w_\gamma}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{\eta}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}\!X^{\eta}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{\eta}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda},\\
\psi_{gs_2}+{}^{\lambda}\!\varphi\big[{}^{\lambda}\!X^{m+j_g}(z,w)\big]^{T} = \,-\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w),\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_g}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{z_\alpha}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda+1},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_g}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda+1},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_g}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{w_\gamma}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda+1},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_g}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda+1},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[{}^{\lambda}\!X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^{T} = \,-\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w),\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{z_\alpha}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{w_\gamma}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\!\varphi\big[\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}\!X^{m+j_\nu}(z,w)\big]^{T} = \,-\,\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w),\;\; p=\overline{1,\lambda},\\
\alpha=\overline{s_1+1,m},\;\; \beta=\overline{s_2+1,m},\;\; \gamma=\overline{k_1+1,n},\;\; \delta=\overline{k_2+1,n},\\
\theta=\overline{1,s_1},\;\; \eta=\overline{s_1+1,m},\;\; g=\overline{1,s_2},\;\; \nu=\overline{s_2+1,m}.
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

Тогда имеет место следующий критерий существования (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого последнего множителя у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1).

Теорема 2.5. Для того, чтобы система (1.1) имела (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель (2.16), необходимо и достаточно существования векторов-функций ${}^{s_1}\!\psi$, ${}^{s_2}\!\psi$ и ${}^{\lambda}\!\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе (2.22), таких, что составленное на их основании уравнение Пфаффа (2.9) является точным на области G^r, $r=\overset{*}{s}+\overset{*}{k}$, являющейся естественной проекцией области G' на координатное подпространство $O^{\overset{*}{s}}z^{\overset{*}{k}}w$, где $\overset{*}{s}$ и $\overset{*}{k}$ есть соответственно число независимых и зависимых переменных, от которых зависит функция (2.16). При этом последний множитель (2.16) системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) имеет вид

$$\mu\colon (z,w)\to \exp g({}^{s}z, {}^{k}w),\ \forall (z,w)\in G', \tag{2.23}$$

где

$$g({}^{s}z, {}^{k}w) = \int {}^{s_1}\psi({}^{s}z, {}^{k}w)d^{s_1}z + {}^{s_2}\psi({}^{s}z, {}^{k}w)d\,\overline{{}^{s_2}z} + {}^{k_1}\varphi({}^{s}z, {}^{k}w)d^{k_1}w + {}^{k_2}\varphi({}^{s}z, {}^{k}w)d\,\overline{{}^{k_2}w},$$
$$\forall ({}^{s}z, {}^{k}w)\in G^{r}. \tag{2.24}$$

Доказательство. Необходимость. Если у системы в полных дифференциалах (1.1) существует (s_1, s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель (2.16), то выполняется система тождеств (2.17):

$$\partial_{z_\theta}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\theta}(z,w)\partial_{w_\xi}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau, m+\theta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) +$$
$$+\mu({}^{s}z, {}^{k}w)\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w) = 0,\ \forall (z,w)\in G',\ \theta=\overline{1,s_1},$$

$$\partial_{\overline{z}_{j_g}}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi, m+j_g}(z,w)\partial_{w_\xi}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau j_g}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) +$$
$$+\mu({}^{s}z, {}^{k}w)\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w) = 0,\ \forall (z,w)\in G',\ g=\overline{1,s_2},$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\eta}(z,w)\partial_{w_\xi}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau, m+\eta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) +$$
$$+\mu({}^{s}z, {}^{k}w)\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w) = 0,\ \forall (z,w)\in G',\ \eta=\overline{s_1+1,m},$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi, m+j_\nu}(z,w)\partial_{w_\xi}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \sum_{\tau=1}^{k_2} \overline{X}_{\zeta_\tau j_\nu}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\mu({}^{s}z, {}^{k}w) +$$
$$+\mu({}^{s}z, {}^{k}w)\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w) = 0,\ \forall (z,w)\in G',\ \nu=\overline{s_2+1,m}.$$

Выполнив почленное деление каждого тождества на $\mu({}^{s}z, {}^{k}w)$, получим новую систему тождеств

$$\partial_{z_\theta}\ln\mu({}^{s}z, {}^{k}w) + \sum_{\xi=1}^{k_1} X_{\xi\theta}(z,w)\partial_{w_\xi}\ln\mu({}^{s}z, {}^{k}w) +$$

$$+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau,m+\theta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+\operatorname{div}\mathfrak{X}_\theta(z,w)=0,\ \forall(z,w)\in G'_0,\ \theta=\overline{1,s_1},$$

$$\partial_{\overline{z}_{j_g}}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_g}(z,w)\partial_{w_\xi}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+$$

$$+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_g}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_g}(z,w)=0,\ \forall(z,w)\in G'_0,\ g=\overline{1,s_2},$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi\eta}(z,w)\partial_{w_\xi}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau,m+\eta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+$$

$$+\operatorname{div}\mathfrak{X}_\eta(z,w)=0,\ \forall(z,w)\in G'_0,\ \eta=\overline{s_1+1,m},$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_\nu}(z,w)\partial_{w_\xi}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_\nu}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}}\ln\mu({}^s z,{}^k w)+$$

$$+\operatorname{div}\mathfrak{X}_{m+j_\nu}(z,w)=0,\ \forall(z,w)\in G'_0,\ \nu=\overline{s_2+1,m},$$

где область $G'_0\subset G'$, устанавливается так, чтобы последний множитель $\mu({}^s z,{}^k w)\neq 0,\ \forall(z,w)\in G'_0$.

Дифференцируя первые s_1+s_2 тождеств $\lambda+1$ раз по $z_{s_1+1},\dots,z_m$, по $\overline{z}_{j_{s_2+1}},\dots,\overline{z}_{j_m}$, по $w_{k_1+1},\dots,w_n$, по $\overline{w}_{\zeta_{k_2+1}},\dots,\overline{w}_{\zeta_n}$, а остальные $2m-s_1-s_2$ дифференцируя λ раз по $z_{s_1+1},\dots,z_m$, по $\overline{z}_{j_{s_2+1}},\dots,\overline{z}_{j_m}$, по $w_{k_1+1},\dots,w_n$ и по $\overline{w}_{\zeta_{k_2+1}},\dots,\overline{w}_{\zeta_n}$, убеждаемся, что продолжения на область G' функций

$$\begin{aligned}&{}^{s_1}\psi\colon({}^s z,{}^k w)\to\partial_{{}^{s_1}z}\ln\mu({}^s z,{}^k w),\quad {}^{s_2}\psi\colon({}^s z,{}^k w)\to\partial_{\overline{{}^{s_2}z}}\ln\mu({}^s z,{}^k w),\\&{}^{k_1}\varphi\colon({}^s z,{}^k w)\to\partial_{{}^{k_1}w}\ln\mu({}^s z,{}^k w),\quad {}^{k_2}\varphi\colon({}^s z,{}^k w)\to\partial_{\overline{{}^{k_2}w}}\ln\mu({}^s z,{}^k w),\end{aligned}\tag{2.25}$$

являются решением системы (2.22) с $\mathrm{D}({}^s\psi)=\mathrm{D}({}^\lambda\varphi)=G_0^r$, где область G_0^r является естественной проекцией области G'_0 на пространство $O\,{}^{\overset{*}{s}}z\,{}^{\overset{*}{k}}w$.

Уравнение Пфаффа (2.9), составленное из функций (2.25), является точным на области G_0^r.

Из задания вектор-функций (2.25) следует, что (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' последний множитель μ системы (1.1) строится на основании решений системы (2.22) по формуле (2.23) при (2.24).

Достаточность. Пусть векторы-функции ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ и ${}^\lambda\varphi$ являются решением системы (2.22), а уравнение Пфаффа (2.9), составленное на их основании, является точным на области G^r. Тогда выполняется система тождеств

$$\partial_{s_{1z}} g({}^s z, {}^k w) = {}^{s_1}\psi({}^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{s_{2z}}} g({}^s z, {}^k w) = {}^{s_2}\psi({}^s z, {}^k w), \ \forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r,$$

$$\partial_{k_{1w}} g({}^s z, {}^k w) = {}^{k_1}\varphi({}^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{k_{2w}}} g({}^s z, {}^k w) = {}^{k_2}\varphi({}^s z, {}^k w), \ \forall ({}^s z, {}^k w) \in G^r.$$

Учитывая, что функции ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$, ${}^{k_1}\varphi$ и ${}^{k_2}\varphi$ являются решением функциональной системы (2.22), получаем, что относительно функции (2.23) при (2.24) выполняется система тождеств (2.17). Следовательно, функция (2.23) при (2.24) является (s_1, s_2)-неавтономным $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричным $\mathbb{R}$-дифференцируемым на области G' последним множителем системы уравнений в полных дифференциалах (1.1). ■

Разработанный метод позволяет строить функционально независимые (s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G' последние множители системы (1.1).

Теорема 2.6. Пусть система (2.22) имеет q не являющихся линейно связанными на области G' решений (2.11), для которых соответствующие уравнения Пфаффа (2.12) являются точными на области G^r. Тогда (s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G' последние множители системы (1.1)

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon \colon (z, w) \to \exp\Big[\int {}^{s_1}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w) d^{s_1} z + {}^{s_2}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w) d\,\overline{{}^{s_2} z} + \\ + {}^{k_1}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w) d^{k_1} w + {}^{k_2}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w) d\,\overline{{}^{k_2} w} \Big], \ \forall (z, w) \in G', \ \ \varepsilon = \overline{1, q}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

являются функционально независимыми на области G'.

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.5 (s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G' последние множители системы (1.1) имеют виды (2.26). А поскольку на G^r

$$\partial_{s_{1z}} \ln \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{s_1}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{s_{2z}}} \ln \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{s_2}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),$$

$$\partial_{k_{1w}} \ln \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{k_1}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \ \ \partial_{\overline{k_{2w}}} \ln \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = {}^{k_2}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w), \ \varepsilon = \overline{1, q},$$

то матрица Якоби

$$J(\ln \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = \left\| {}^{s_1}\Psi({}^s z, {}^k w) \ {}^{s_2}\Psi({}^s z, {}^k w) \ {}^{k_1}\Phi({}^s z, {}^k w) \ {}^{k_2}\Phi({}^s z, {}^k w) \right\|,$$

где блочная матрица $\left\| {}^{s_1}\Psi \ {}^{s_2}\Psi \ {}^{k_1}\Phi \ {}^{k_2}\Phi \right\|$ составлена из $(q \times s_1)$-матрицы ${}^{s_1}\Psi({}^s z, {}^k w) = \left\| \psi_{\varepsilon\theta s_1}({}^s z, {}^k w) \right\|$, $(q \times s_2)$-матрицы ${}^{s_2}\Psi({}^s z, {}^k w) = \left\| \psi_{\varepsilon g s_2}({}^s z, {}^k w) \right\|$,

$(q\times k_1)$-матрицы ${}^{k_1}\Phi({}^s z, {}^k w) = \left\|\varphi_{\varepsilon\xi k_1}({}^s z, {}^k w)\right\|$ и $(q\times k_2)$-матрицы ${}^{k_2}\Phi({}^s z, {}^k w) = = \left\|\varphi_{\varepsilon\tau k_2}({}^s z, {}^k w)\right\|$.

Ввиду линейной несвязанности векторов-функций (2.11) на области G' ранг матрицы Якоби $\operatorname{rank} J(\ln\mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = q$ почти везде на области G^r, за исключением, быть может, множества r-мерной меры нуль.

Следовательно, последние множители (2.26) системы (1.1) являются функционально независимыми на области G'. ■

Пример 2.2. Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= w_1(1+2\,\overline{w}_2)\,dz + w_1(1+2w_2)\,d\,\overline{z}, \\ dw_2 &= w_2(w_1-1)\,dz - w_2(w_2+\overline{w}_1)\,d\,\overline{z}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

которая индуцирует автономные дифференциальные операторы на $\mathbb{C}^2$

$$\mathfrak{X}_1(w) = w_1(1+2\,\overline{w}_2)\,\partial_{w_1} + w_2(w_1-1)\,\partial_{w_2} + \overline{w}_1(1+2\,\overline{w}_2)\,\partial_{\overline{w}_1} - \overline{w}_2(w_1+\overline{w}_2)\,\partial_{\overline{w}_2}$$

и

$$\mathfrak{X}_2(w) = w_1(1+2w_2)\,\partial_{w_1} - w_2(w_2+\overline{w}_1)\,\partial_{w_2} + \overline{w}_1(1+2w_2)\,\partial_{\overline{w}_1} + \overline{w}_2(\,\overline{w}_1-1)\,\partial_{\overline{w}_2}.$$

Для системы (2.27) построим автономный голоморфный на области Ω из пространства $\mathbb{C}^2$ последний множитель вида $\mu\colon w \to \mu(w_1),\ \forall w\in\Omega$.

Расходимости

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathfrak{X}_1(w) &= \partial_{w_1}\big[w_1(1+2\,\overline{w}_2)\big] + \partial_{w_2}\big[w_2(w_1-1)\big] + \partial_{\overline{w}_1}\big[\,\overline{w}_1(1+2\,\overline{w}_2)\big] - \\ &\quad - \partial_{\overline{w}_2}\big[\,\overline{w}_2(w_1+\overline{w}_2)\big] = 1+2\,\overline{w}_2,\ \forall w\in\mathbb{C}^2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathfrak{X}_2(w) &= \partial_{w_1}\big[w_1(1+2w_2)\big] - \partial_{w_2}\big[w_2(w_2+\overline{w}_1)\big] + \partial_{\overline{w}_1}\big[\,\overline{w}_1(1+2w_2)\big] + \\ &\quad + \partial_{\overline{w}_2}\big[\,\overline{w}_2(\,\overline{w}_1-1)\big] = 1+2w_2,\ \forall w\in\mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

У совокупностей $\big\{w_1(1+2\,\overline{w}_2), 1+2\,\overline{w}_2\big\}$ и $\big\{w_1(1+2w_2), 1+2w_2\big\}$ вронскианы по $z,\ \overline{z},\ w_2,\ \overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$ равны нулю на пространстве $\mathbb{C}^3$. Это означает, что выполняются необходимые условия существования у системы (2.27) автономного (1,2)-цилиндричного последнего множителя (теорема 2.4).

Составим функциональную систему (2.22)

$$\partial^p_{\overline{w}_2}\big[w_1(1+2\,\overline{w}_2)\big]\varphi = \,-\,\partial^p_{\overline{w}_2}(1+2\,\overline{w}_2),$$

$$\partial^p_{w_2}\big[w_1(1+2w_2)\big]\varphi = \,-\,\partial^p_{w_2}(1+2w_2),\ \forall w\in\mathbb{C}^2,\ \ p=\overline{0,1},$$

или

$$w_1(1+2\,\overline{w}_2)\,\varphi = \,-\,(1+2\,\overline{w}_2),\ \ 2w_1\,\varphi = \,-\,2,\ \ w_1(1+2w_2)\,\varphi = \,-\,(1+2w_2),$$

из которой находим, что $\varphi\colon w \to -\dfrac{1}{w_1},\ \forall w \in V,\ V = \{w\colon w_1 \neq 0\}$.

Тогда автономный голоморфный последний множитель (по формуле (2.23) в соответствии с теоремой 2.5) системы (2.27) имеет вид

$$\mu(w) = \exp \int -\frac{dw_1}{w_1} = -\frac{1}{w_1},\ \forall w \in \Omega,$$

на любой области Ω из множества V пространства $\mathbb{C}^2$.

2.3. $\mathbb{R}$-дифференцируемые (s_1, s_2)-неавтономные $(n - k_1, n - k_2)$-цилиндричные частные интегралы

Определение 2.5. Частный интеграл $f\colon G' \to \mathbb{C}$ системы (1.1), $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G', будем называть (s_1, s_2)-неавтономным, если функция $\overset{*}{f}$, полученная из f посредством соответствия (2.1) зависит от $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ и только от s_1, $0 \leqslant s_1 \leqslant m$, переменных $x_1, \ldots, x_m$ и s_2, $0 \leqslant s_2 \leqslant m$, переменных $y_1, \ldots, y_m$. При $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ частный интеграл $f\colon w \to f(w)$, $\forall w \in \Omega'$, где область Ω' из пространства $\mathbb{C}^n$, назовём автономным.

Иначе говоря, частный интеграл f системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), антиголоморфный по $m - s_1$ и голоморфный по $m - s_2$ независимым переменным, является (s_1, s_2)-неавтономным.

Определение 2.6. Частный интеграл $f\colon G' \to \mathbb{C}$ системы (1.1), $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G', назовём $(n - k_1, n - k_2)$-цилиндричным, если функция $\overset{*}{f}$, полученная из f посредством соответствия (2.1), зависит от $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и только от k_1, $0 \leqslant k_1 \leqslant n$, переменных $u_1, \ldots, u_n$ и k_2, $0 \leqslant k_2 \leqslant n$, переменных $v_1, \ldots, v_n$.

Иначе говоря, частный интеграл f системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), антиголоморфный по $n - k_1$ и голоморфный по $n - k_2$ зависимым переменным, является $(n - k_1, n - k_2)$-цилиндричным.

Пусть система (1.1) имеет (s_1, s_2)-неавтономный $(n - k_1, n - k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' частный интеграл

$$f\colon (z, w) \to f({}^{s}z, {}^{k}w),\ \forall (z, w) \in G', \tag{2.28}$$

где для удобства записи принято сокращение $s = (s_1, s_2)$, $k = (n - k_1, n - k_2)$. Не умаляя общности, будем считать, что функция f является антиголоморфной по независимым $z_{s_1+1}, \ldots, z_m$ и зависимым $w_{k_1+1}, \ldots, w_n$ переменным и голоморфной по независимым $z_{j_{s_2+1}}, \ldots, z_{j_m}$, $j_\beta \in \{1, \ldots, m\}$, $\beta = \overline{s_2+1, m}$, и зависимым $w_{\zeta_{k_2+1}}, \ldots, w_{\zeta_n}, \zeta_\delta \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta = \overline{k_2+1, n}$, переменным. Тогда, согласно определению 1.4, выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{lsk}\, f({}^s\!z, {}^k\!w) = \Phi_l(z, w),\ \forall (z, w) \in G' \subset G,\ \ l = \overline{1, 2m}, \tag{2.29}$$

где функции $\Phi_l \colon G' \to \mathbb{C}$ таковы, что $\Phi_l(z, w)\big|_{f({}^s\!z, {}^k\!w)=0} = 0$, $l = \overline{1, 2m}$.

Пусть выполняются тождества (2.29). Тогда в каждой из совокупностей (2.4) функции на интегральном многообразии

$$f({}^s\!z, {}^k\!w) = 0 \tag{2.30}$$

при всяких фиксированных значениях переменных z_j, $j = \overline{1, m}$, $j \neq \alpha$, и w являются линейно связанными с помощью антиголоморфных функций по переменной z_α на области G; при фиксированных значениях переменных z_j, $j = \overline{1, m}$, $j \neq j_\beta$, и w линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной z_{j_β} на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i = \overline{1, n}$, $i \neq \gamma$ линейно связаны с помощью антиголоморфных функций по переменной w_γ на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i = \overline{1, n}$, $i \neq \zeta_\delta$ линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной w_{ζ_δ} на области G. Это имеет место при каждом фиксированном $\alpha = \overline{s_1+1, m}$, j_β, $\beta = \overline{s_2+1, m}$, $\gamma = \overline{k_1+1, n}$, ζ_δ, $\delta = \overline{k_2+1, n}$. Поэтому вронскианы по z_α, $\alpha = \overline{s_1+1, m}$, по $\overline{z}_{j_\beta}$, $\beta = \overline{s_2+1, m}$, по w_γ, $\gamma = \overline{k_1+1, n}$, и по $\overline{w}_{\zeta_\delta}$, $\delta = \overline{k_2+1, n}$, каждой из совокупностей (2.4) тождественно равны нулю на интегральном многообразии (2.30), то есть, на области G выполняется система тождеств

$$W_{z_\alpha}\big(1, {}^\lambda X^\theta(z, w)\big) = \overset{*}{\Psi}_{\theta\alpha}(z, w),\ \theta = \overline{1, s_1},\ \alpha = \overline{s_1+1, m},$$

$$W_{z_\alpha}\big({}^\lambda X^\eta(z, w)\big) = \overset{*}{\Psi}_{\eta\alpha}(z, w),\ \eta = \overline{s_1+1, m},\ \alpha = \overline{s_1+1, m},$$

$$W_{z_\alpha}\big(1, {}^\lambda X^{m+j_g}(z, w)\big) = \overset{*}{\Psi}_{m+j_g,\alpha}(z, w),\ g = \overline{1, s_2},\ \alpha = \overline{s_1+1, m},$$

$$W_{z_\alpha}\big({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z, w)\big) = \overset{*}{\Psi}_{m+j_\nu,\alpha}(z, w),\ \nu = \overline{s_2+1, m},\ \alpha = \overline{s_1+1, m},$$

$$W_{\overline{z}_{j_\beta}}\big(1, {}^\lambda X^\theta(z, w)\big) = \overset{**}{\Psi}_{\theta j_\beta}(z, w),\ \theta = \overline{1, s_1},\ \beta = \overline{s_2+1, m},$$

$$W_{\overline{z}_{j_\beta}}\big({}^\lambda X^\eta(z, w)\big) = \overset{**}{\Psi}_{\eta j_\beta}(z, w),\ \eta = \overline{s_1+1, m},\ \beta = \overline{s_2+1, m},$$

$$
\begin{gathered}
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl(1, {}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr) = \overset{**}{\Psi}_{m+j_g, j_\beta}(z,w),\ g=\overline{1,s_2},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\\
W_{\overline{z}_{j_\beta}}\bigl({}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr) = \overset{**}{\Psi}_{m+j_\nu, j_\beta}(z,w),\ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \beta=\overline{s_2+1,m},\\
W_{w_\gamma}\bigl(1, {}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\bigr) = \overset{\star}{\Psi}_{\theta\gamma}(z,w),\ \theta=\overline{1,s_1},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{w_\gamma}\bigl({}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\bigr) = \overset{\star}{\Psi}_{\eta\gamma}(z,w),\ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{w_\gamma}\bigl(1, {}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr) = \overset{\star}{\Psi}_{m+j_g,\gamma}(z,w),\ g=\overline{1,s_2},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{w_\gamma}\bigl({}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr) = \overset{\star}{\Psi}_{m+j_\nu,\gamma}(z,w),\ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl(1, {}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\bigr) = \overset{\star\star}{\Psi}_{\theta\zeta_\delta}(z,w),\ \theta=\overline{1,s_1},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl({}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\bigr) = \overset{\star\star}{\Psi}_{\eta\zeta_\delta}(z,w),\ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl(1, {}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr) = \overset{\star\star}{\Psi}_{m+j_g,\zeta_\delta}(z,w),\ g=\overline{1,s_2},\ \delta=\overline{k_2+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\bigl({}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr) = \overset{\star\star}{\Psi}_{m+j_\nu,\zeta_\delta}(z,w),\ \nu=\overline{s_2+1,m},\ \delta=\overline{k_2+1,n},
\end{gathered}
\tag{2.31}
$$

где $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции $\overset{*}{\Psi}_{l\alpha}\colon G\to\mathbb{C}$, $\overset{**}{\Psi}_{lj_\beta}\colon G\to\mathbb{C}$, $\overset{\star}{\Psi}_{l\gamma}\colon G\to\mathbb{C}$ и $\overset{\star\star}{\Psi}_{l\zeta_\delta}\colon G\to\mathbb{C}$ таковы, что $\overset{*}{\Psi}_{l\alpha}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $\overset{**}{\Psi}_{lj_\beta}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $\overset{\star}{\Psi}_{l\gamma}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $\overset{\star\star}{\Psi}_{l\zeta_\delta}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $l=\overline{1,2m}$, $\alpha=\overline{s_1+1,m}$, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, $\gamma=\overline{k_1+1,n}$, $\delta=\overline{k_2+1,n}$.

Отсюда следует необходимый признак существования (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' частного интеграла у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1).

Теорема 2.7. Для того, чтобы система (1.1) имела (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' частный интеграл (2.28), необходимо выполнение системы тождеств (2.31).

Следствие 2.21. Система тождеств (2.31) при $s_2=0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) голоморфного на области G' по независимым переменным $(s_1,0)$-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' частного интеграла (2.28).

Следствие 2.22. Система тождеств (2.31) при $s_1=0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) антиголоморфного на области G' по независимым переменным $(0, s_2)$-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на G' частного интеграла (2.28).

Следствие 2.23. Система тождеств (2.31) при $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) голоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' частного интеграла (2.28).

Следствие 2.24. Система тождеств (2.31) при $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) антиголоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1, s_2)-неавтономного $(n, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' частного интеграла (2.28).

Следствие 2.25. Система тождеств (2.31) при $s_2 = 0,\ k_2 = 0$ является необходимым условием наличия $(s_1, 0)$-неавтономного $(n-k_1, n)$-цилиндричного голоморфного на области G' частного интеграла (2.28) у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1).

Следствие 2.26. Система тождеств (2.31) при $s_1 = 0,\ k_1 = 0$ является необходимым условием наличия $(0, s_2)$-неавтономного $(n, n-k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области G' частного интеграла (2.28) у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1).

Следствие 2.27. Система тождеств

$$
\begin{aligned}
W_{z_j}\big({}^{\lambda}X^l(z,w)\big) &= \overset{*}{\Psi}_{lj}(z,w),\ l=\overline{1,2m},\ j=\overline{1,m},\\
W_{\overline{z}_j}\big({}^{\lambda}X^l(z,w)\big) &= \overset{**}{\Psi}_{lj}(z,w),\ l=\overline{1,2m},\ j=\overline{1,m},\\
W_{w_\gamma}\big({}^{\lambda}X^l(z,w)\big) &= \overset{\star}{\Psi}_{l\gamma}(z,w),\ l=\overline{1,2m},\ \gamma=\overline{k_1+1,n},\\
W_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\big({}^{\lambda}X^l(z,w)\big) &= \overset{\star}{\Psi}_{l\zeta_\delta}(z,w),\ l=\overline{1,2m},\ \delta=\overline{k_2+1,n},
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

где скалярные функции $\overset{*}{\Psi}_{lj}$, $\overset{**}{\Psi}_{lj}$, $\overset{\star}{\Psi}_{l\gamma}$ и $\overset{\star\star}{\Psi}_{l\zeta_\delta}$ такие, что $\overset{*}{\Psi}_{lj}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $\overset{**}{\Psi}_{lj}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $\overset{\star}{\Psi}_{l\gamma}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $\overset{\star\star}{\Psi}_{l\zeta_\delta}(z,w)\big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0$, $j=\overline{1,m}$, $\gamma = \overline{k_1+1,n}$, $\delta = \overline{k_2+1,n}$, $l = \overline{1,2m}$, является необходимым условием существования у системы (1.1) автономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области Ω' частного интеграла

$$
f\colon w \to f({}^{k}w),\ \forall w \in \Omega',\ \ \Omega' \subset \mathbb{C}^n. \tag{2.33}
$$

Следствие 2.28. Система тождеств (2.32) при $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) автономного $(n-k_1, n)$-цилиндричного голоморфного на области Ω' частного интеграла (2.33).

Следствие 2.29. Система тождеств (2.32) при $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1.1) автономного $(n, n-k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области Ω' частного интеграла (2.33).

Из свойства 1.2 и понятия (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого частного интеграла вытекает

Свойство 2.3. Если у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) существует (s_1, s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' частный интеграл (2.28), то тогда она также имеет (s_2, s_1)-неавтономный $(n-k_2, n-k_1)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на G' частный интеграл $\overline{f}\colon (z,w) \to \overline{f}({}^{s}z, {}^{k}w)$, $\forall (z,w) \in G'$.

Система $\overline{(2.31)}$, сопряжённая к системе (2.31), является необходимым условием существования (s_2, s_1)-неавтономного $(n-k_2, n-k_1)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' частного интеграла у системы (1.1). Из равносильности систем (2.31) и $\overline{(2.31)}$ следует

Следствие 2.30. Необходимым условием наличия (s_2, s_1)-неавтономного $(n-k_2, n-k_1)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' частного интеграла $f\colon (z,w) \to f({}^{(s_2,s_1)}z, {}^{(k_2,k_1)}w)$, $\forall (z,w) \in G'$, у системы (1.1) является выполнение системы тождеств (2.31).

Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G, достаточное число раз, функции $X_{il}\colon G \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,2m}$, удовлетворяют условиям (2.31). Составим функциональную систему

$$\psi_{\theta s_1} + {}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = H_\theta(z,w),$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = \partial^p_{z_\alpha} H_\theta(z,w), \ \ p = \overline{1,\lambda},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = \partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}} H_\theta(z,w), \ \ p = \overline{1,\lambda},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = \partial^p_{w_\gamma} H_\theta(z,w), \ \ p = \overline{1,\lambda},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{\theta}(z,w)\big]^T = \partial^p_{\overline{w}_{\zeta_\delta}} H_\theta(z,w), \ \ p = \overline{1,\lambda},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = H_\eta(z,w),$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = \partial^p_{z_\alpha} H_\eta(z,w), \ \ p = \overline{1,\lambda-1},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = \partial^p_{\overline{z}_{j_\beta}} H_\eta(z,w), \ \ p = \overline{1,\lambda-1},$$

$${}^{\lambda}\varphi\big[\partial^p_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\big]^T = \partial^p_{w_\gamma} H_\eta(z,w), \ \ p = \overline{1,\lambda-1},$$

$$
\begin{gathered}
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{\eta}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}} H_{\eta}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda-1},\\
\psi_{gs_2} + {}^{\lambda}\varphi\bigl[{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr]^{T} = H_{m+j_g}(z,w),\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{z_\alpha} H_{m+j_g}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}} H_{m+j_g}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{w_\gamma} H_{m+j_g}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_g}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}} H_{m+j_g}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda},\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr]^{T} = H_{m+j_\nu}(z,w),\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{z_\alpha}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{z_\alpha} H_{m+j_\nu}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda-1},\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{\overline{z}_{j_\beta}} H_{m+j_\nu}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda-1},\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{w_\gamma}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{w_\gamma} H_{m+j_\nu}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda-1},\\
{}^{\lambda}\varphi\bigl[\partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}}\,{}^{\lambda}X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr]^{T} = \partial^{p}_{\overline{w}_{\zeta_\delta}} H_{m+j_\nu}(z,w),\ \ p=\overline{1,\lambda-1},\\
\alpha=\overline{s_1+1,m},\ \ \beta=\overline{s_2+1,m},\ \ \gamma=\overline{k_1+1,n},\ \ \delta=\overline{k_2+1,n},\\
\theta=\overline{1,s_1},\ \ \eta=\overline{s_1+1,m},\ \ g=\overline{1,s_2},\ \ \nu=\overline{s_2+1,m},
\end{gathered}
\tag{2.34}
$$

где функции $H_l\colon G\to\mathbb{C},\ l=\overline{1,2m},$ таковы, что

$$
H_l(z,w)\Big|_{f({}^{s}z,{}^{k}w)=0} = 0,\ \ l=\overline{1,2m}. \tag{2.35}
$$

При этом имеет место следующий критерий существования (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого частного интеграла у системы уравнений в полных дифференциалах (1.1).

Теорема 2.8. Для того, чтобы система (1.1) имела (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' частный интеграл (2.28), необходимо и достаточно существования векторов-функций ${}^{s_1}\psi,\ {}^{s_2}\psi$ и ${}^{\lambda}\varphi,$ удовлетворяющих функциональной системе (2.34), а также скалярных функций $H_l,\ l=\overline{1,2m},$ при условии (2.35), таких, что уравнение Пфаффа (2.9) имеет интегрирующий множитель, после умножения на который получаем точное уравнение Пфаффа с общим интегралом (2.28) на области $G^r,\ r=\overset{*}{s}+\overset{*}{k},$ являющейся естественной проекцией области G' на координатное подпространство $O\,{}^{\overset{*}{s}}z\,{}^{\overset{*}{k}}w,$ где $\overset{*}{s}$ и $\overset{*}{k}$ есть соответственно число независимых и зависимых переменных, от которых зависит функция (2.28).

Доказательство. Необходимость. Пусть у системы в полных дифференциалах (1.1) существует (s_1, s_2)-неавтономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' частный интеграл (2.28). Тогда выполняется система тождеств (2.29). Дифференцируя тождества λ раз по $z_{s_1+1}, \ldots, z_m$, по $\overline{z}_{j_{s_2+1}}, \ldots, \overline{z}_{j_m}$, по $w_{k_1+1}, \ldots, w_n$, по $\overline{w}_{\zeta_{k_2+1}}, \ldots, \overline{w}_{\zeta_n}$ при $\theta = \overline{1, s_1}$, $g = \overline{1, s_2}$, и $\lambda - 1$ раз по $z_{s_1+1}, \ldots, z_m$, по $\overline{z}_{j_{s_2+1}}, \ldots, \overline{z}_{j_m}$, по $w_{k_1+1}, \ldots, w_n$, по $\overline{w}_{\zeta_{k_2+1}}, \ldots, \overline{w}_{\zeta_n}$ при $\eta = \overline{s_1+1, m}$, $\nu = \overline{s_2+1, m}$, убеждаемся, что векторные функции

$$^{s_1}\psi\colon (z,w) \to \partial_{s_1 z} f(^s z, {}^k w), \quad ^{s_2}\psi\colon (z,w) \to \partial_{\overline{s_2 z}} f(^s z, {}^k w), \ \forall (z,w) \in G',$$

$$^{k_1}\varphi\colon (z,w) \to \partial_{k_1 w} f(^s z, {}^k w), \quad ^{k_2}\varphi\colon (z,w) \to \partial_{\overline{k_2 w}} f(^s z, {}^k w), \ \forall (z,w) \in G',$$

являются решением системы (2.34) при $H_l\colon (z,w) \to \Phi_l(z,w)$, $\forall (z,w) \in G'$, $l = \overline{1, 2m}$. Отсюда следует, что функция (2.28) есть общий интеграл на области G^r уравнения Пфаффа (2.9).

Достаточность. Пусть векторы-функции $^{s_1}\psi$, $^{s_2}\psi$ и $^{\lambda}\varphi$ являются решением функциональной системы (2.34), а уравнение Пфаффа (2.9), составленное на их основании, имеет при условии (2.30) интегрирующий множитель $\mu\colon (^s z, {}^k w) \to \mu(^s z, {}^k w)$ и соответствующий этому множителю общий интеграл (2.28) на области G^r. Тогда выполняется система тождеств

$$\begin{aligned}
&\partial_{s_1 z} f(^s z, {}^k w) - \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{s_1}\psi(^s z, {}^k w) = 0, \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r,\\
&\partial_{\overline{s_2 z}} f(^s z, {}^k w) - \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{s_2}\psi(^s z, {}^k w) = 0, \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r,\\
&\partial_{k_1 w} f(^s z, {}^k w) - \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{k_1}\varphi(^s z, {}^k w) = 0, \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r,\\
&\partial_{\overline{k_2 w}} f(^s z, {}^k w) - \mu(^s z, {}^k w)\, {}^{k_2}\varphi(^s z, {}^k w) = 0, \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Отсюда в силу (2.34) получаем, что имеет место система тождеств (2.29), для которой $\Phi_l(z,w) = \mu(^s z, {}^k w) H_l(z,w)$, $\forall (z,w) \in G'$, $l = \overline{1, 2m}$, и, следовательно, (2.28) есть частный интеграл системы (1.1). ■

Теорема 2.9. Пусть h систем (2.34) имеет q не являющихся линейно связанными на области G' решений (2.11), для которых соответствующие уравнения Пфаффа (2.12) имеют $\mathbb{R}$-дифференцируемые на G^r общие интегралы

$$f_\varepsilon\colon (^s z, {}^k w) \to f_\varepsilon(^s z, {}^k w), \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r, \ \varepsilon = \overline{1, q}. \tag{2.37}$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимы на области G^r.

Доказательство. В силу тождеств (2.36) при $f = f_\varepsilon$, $\varepsilon = \overline{1, q}$, имеем

$$\partial_{s_{1z}} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\,{}^{s_1}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),\ \ \partial_{\overline{s_{2z}}} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\,{}^{s_2}\psi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),$$

$$\partial_{k_{1w}} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\,{}^{k_1}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),\ \ \partial_{\overline{k_{2w}}} f_\varepsilon({}^s z, {}^k w) = \mu_\varepsilon({}^s z, {}^k w)\,{}^{k_2}\varphi^\varepsilon({}^s z, {}^k w),$$

$$\forall({}^s z, {}^k w) \in G^r,\ \ \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Поэтому матрица Якоби

$$J(f_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = \left\| {}^{s_1}\Psi({}^s z, {}^k w)\,{}^{s_2}\Psi({}^s z, {}^k w)\,{}^{k_1}\Phi({}^s z, {}^k w)\,{}^{k_2}\Phi({}^s z, {}^k w) \right\|, \forall({}^s z, {}^k w) \in G^r,$$

где матрица $\left\|{}^{s_1}\Psi\,{}^{s_2}\Psi\,{}^{k_1}\Phi\,{}^{k_2}\Phi\right\|$ составлена из $(q \times s_1)$-матрицы ${}^{s_1}\Psi = \left\|\mu_\varepsilon \psi_{\varepsilon\theta s_1}\right\|$, $(q \times s_2)$-матрицы ${}^{s_2}\Psi = \left\|\mu_\varepsilon \psi_{\varepsilon g s_2}\right\|$, $(q \times k_1)$-матрицы ${}^{k_1}\Phi = \left\|\mu_\varepsilon \varphi_{\varepsilon\xi k_1}\right\|$ и $(q \times k_2)$-матрицы ${}^{k_2}\Phi = \left\|\mu_\varepsilon \varphi_{\varepsilon\tau k_2}\right\|$.

Ввиду линейной несвязанности векторов-функций (2.11) на области G' ранг матрицы Якоби $\operatorname{rank} J(f_\varepsilon({}^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = q$ почти везде на области G^r, за исключением, быть может, множества r-мерной меры нуль. Следовательно, общие интегралы (2.37) уравнений Пфаффа (2.12) являются функционально независимыми на области G^r. ■

Пример 2.3. Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= (w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2)\,dz + [w_1 w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}]\,d\overline{z}\,, \\ dw_2 &= [w_2\,\overline{w}_1 - (1+z)w_2^2]\,dz + \overline{w}_1(w_2 + \overline{w}_2)\,d\overline{z}\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Вронскианы по z, $\overline{z}$, w_2 и $\overline{w}_1$ совокупностей $\left\{w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2, w_1(w_2 + \overline{w}_2)\right\}$ и $\left\{w_1 w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}, w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}\right\}$:

$$W_z\big(w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2, w_1(w_2 + \overline{w}_2)\big) = 0,\ \ W_{\overline{z}}\big(w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2, w_1(w_2 + \overline{w}_2)\big) = 0,$$

$$W_{w_2}\big(w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2, w_1(w_2 + \overline{w}_2)\big) = w_1(w_1 - \overline{w}_2)(w_1 + \overline{w}_2),$$

$$W_{\overline{w}_1}\big(w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2, w_1(w_2 + \overline{w}_2)\big) = 0,\ \forall(z, w) \in \mathbb{C}^3;$$

$$W_z\big(w_1 w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}, w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}\big) = 0,$$

$$W_{\overline{z}}\big(w_1 w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}, w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}\big) =$$

$$= -\,\overline{w}_2^{\,2}(w_2 + \overline{w}_2)(w_1 + \overline{w}_2),$$

$$W_{w_2}\big(w_1 w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}, w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}\big) =$$

$$= -\,(w_1 + \overline{w}_2)[w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}],$$

$$W_{\overline{w}_1}\big(w_1 w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}, w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z})\,\overline{w}_2^{\,2}\big) = 0,\ \forall(z, w) \in \mathbb{C}^3,$$

обращаются в нуль на интегральном многообразии $w_1 + \overline{w}_2 = 0$, и, следовательно, выполняются необходимые условия существования у системы уравнений в полных дифференциалах (2.38) автономного (1,2)-цилиндричного частного интеграла (теорема 2.7).

Составим функциональную систему (2.34)

$$\partial^p_{w_2}\big[w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2\big]\,\varphi_1 + \partial^p_{w_2}\big[w_1(w_2+\overline{w}_2)\big]\,\varphi_2 = \partial^p_{w_2}H_1(z,w),$$

$$\partial^p_{\overline{z}}\big[w_1w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z}\,)\,\overline{w}\,{}_2^2\,\big]\,\varphi_1 + \partial^p_{\overline{z}}\big[w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z}\,)\,\overline{w}\,{}_2^2\,\big]\,\varphi_2 = \partial^p_{\overline{z}}H_2(z,w),$$

$$\partial^p_{w_2}\big[w_1w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z}\,)\,\overline{w}\,{}_2^2\,\big]\,\varphi_1 + \partial^p_{w_2}\big[w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z}\,)\,\overline{w}\,{}_2^2\,\big]\,\varphi_2 = \partial^p_{w_2}H_2(z,w),$$

$$\forall (z,w)\in\mathbb{C}^3,\ \ p=0,\ p=1,$$

или

$$(w_1^2 + w_2\,\overline{w}_2)\,\varphi_1 + w_1(w_2+\overline{w}_2)\,\varphi_2 = (w_1+\overline{w}_2)(w_1+w_2),$$

$$\overline{w}_2\,\varphi_1 + w_1\,\varphi_2 = w_1 + \overline{w}_2,$$

$$\big[w_1w_2 + w_2\,\overline{w}_2 + (2+\overline{z}\,)\,\overline{w}\,{}_2^2\,\big]\,\varphi_1 + \big[w_1\,\overline{w}_2 - (1+\overline{z}\,)\,\overline{w}\,{}_2^2\,\big]\,\varphi_2 = \tag{2.39}$$

$$= (w_1+\overline{w}_2)(w_2+\overline{w}_2),$$

$$\overline{w}\,{}_2^2\,\varphi_1 - \overline{w}\,{}_2^2\,\varphi_2 = 0, \quad (w_1+\overline{w}_2)\,\varphi_1 = w_1 + \overline{w}_2,$$

где считаем, что

$$H_1\colon (z,w)\to (w_1+\overline{w}_2)(w_1+w_2),\ \forall (z,w)\in\mathbb{C}^3,$$

$$H_2\colon (z,w)\to (w_1+\overline{w}_2)(w_2+\overline{w}_2),\ \forall (z,w)\in\mathbb{C}^3.$$

Система (2.39) имеет решение

$$\varphi_1\colon (z,w)\to 1,\ \forall (z,w)\in\mathbb{C}^3, \quad \varphi_2\colon (z,w)\to 1,\ \forall (z,w)\in\mathbb{C}^3.$$

Уравнение Пфаффа

$$dw_1 + d\,\overline{w}_2 = 0$$

имеет интегрирующий множитель $\mu\colon w\to 1,\ \forall w\in\mathbb{C}^2,$ и общий интеграл

$$f\colon w\to w_1+\overline{w}_2,\ \forall w\in\mathbb{C}^2. \tag{2.40}$$

Следовательно, система уравнений в полных дифференциалах (2.38) имеет автономный (1,1)-цилиндричный частный интеграл (2.40).

Краткие выводы по главе 2

Решены задачи о существовании у системы уравнений в полных дифференциалах $\mathbb{R}$-дифференцируемых на области первых интегралов, последних множителей и частных интегралов, которые зависят от части независимых и зависимых переменных ((s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы, (s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные $\mathbb{R}$-дифференцируемые последние множители и (s_1, s_2)-неавтономные $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричные $\mathbb{R}$-дифференцируемые частные интегралы).

Каждая из этих трёх задач решается следующим образом:

1) доказываются необходимые признаки существования у системы в полных дифференциалах (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого первого интеграла (теорема 2.1), (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого последнего множителя (теорема 2.4) и (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого частного интеграла (теорема 2.7);

2) доказываются критерии существования у системы уравнений в полных дифференциалах (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого первого интеграла (теорема 2.2), (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого последнего множителя (теорема 2.5) и (s_1, s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого частного интеграла (теорема 2.8).

Для системы в полных дифференциалах получены достаточные условия функциональной независимости (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых на области первых интегралов (теорема 2.3), (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых на области последних множителей (теорема 2.6) и (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых на области частных интегралов (теорема 2.9).

ГЛАВА 3
ИНТЕГРАЛЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

3.1. $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах

3.1.1. $\mathbb{R}$-линейный частный интеграл

$\mathbb{R}$-линейная функция $p\colon w \to \sum\limits_{\xi=1}^{n}\bigl(b_{\xi} w_{\xi} + b_{n+\xi}\overline{w}_{\xi}\bigr),\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ (b_{\varrho} \in \mathbb{C},\ \varrho = \overline{1,2n}\,)$ будет частным интегралом системы (1.12), если и только если выполняется система тождеств $\mathfrak{x}_k p(w) = p(w)\lambda^k,\ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ \lambda^k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1,2m}$. Эта система тождеств распадается на линейную однородную систему

$$\bigl(A_k - \lambda^k E\bigr)b = 0,\ k = \overline{1,2m}, \tag{3.1}$$

где $b = \operatorname{colon}(b_1, \ldots, b_{2n})$, E — единичная матрица, а матрицы $2n$-го порядка $A_j = \|a_{1j} \ldots a_{nj}\, \overline{a}_{1,m+j} \ldots \overline{a}_{n,m+j}\|$ и $A_{m+j} = \|a_{1,m+j} \ldots a_{n,m+j}\, \overline{a}_{1j} \ldots \overline{a}_{nj}\|$, $j = \overline{1,m}$, составлены на основании векторов $a_{ik} = \operatorname{colon}(a_{ik1}, \ldots, a_{ik,2n})$, $\overline{a}_{ik} = \operatorname{colon}(\overline{a}_{ik,n+1}, \ldots, \overline{a}_{ik,2n}, \overline{a}_{ik1}, \ldots, \overline{a}_{ikn})$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,2m}$.

Систему $\det\bigl(A_k - \lambda^k E\bigr) = 0$, $k = \overline{1,2m}$, назовём интегральной характеристической системой, а её корни будем называть интегральными характеристическими корнями дифференциальной системы (1.12).

Условие (1.15) полной разрешимости системы (1.12) равносильно перестановочности матриц [19, с. 24; 20, с. 73]: $A_k A_l = A_l A_k$, $k = \overline{1,2m}$, $l = \overline{1,2m}$. Это определяет связи [92, с. $193-194$] между собственными числами и собственными векторами матриц A_k, $k = \overline{1,2m}$, на основании которых для системы уравнений в полных дифференциалах (1.12) доказываем основополагающее для дальнейших рассуждений утверждение

Лемма 3.1. Пусть $\nu \in \mathbb{C}^{2n}$ — общий собственный вектор матриц A_k, $k = \overline{1,2m}$. Тогда $\mathbb{R}$-линейная функция $p\colon w \to \nu\gamma$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, где вектор $\gamma = \operatorname{colon}(w_1, \ldots, w_n, \overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n)$, является частным интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (1.12).

Действительно, если ν — общий собственный вектор матриц A_k, $k = \overline{1,2m}$, то он является решением линейной однородной системы (3.1), где λ^k — собственные числа соответственно матриц A_k, $k = \overline{1,2m}$, которым соответствует собственный вектор ν. Тогда выполняется система тождеств $\mathfrak{x}_k(\nu\gamma) = \lambda^k \nu\gamma$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $k = \overline{1,2m}$, и $\mathbb{R}$-линейная функция p является частным интегралом системы (1.12). ■

3.1.2. Автономные $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы

3.1.2.1. *Построение $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов по общим собственным векторам.* Если матрицы $A_k,\ k=\overline{1,2m},$ имеют $2m+1$ общих линейно независимых собственных векторов, то по ним можно построить первый интеграл системы (1.12) основываясь на следующей

Теорема 3.1. Пусть $\nu^\theta,\ \theta=\overline{1,2m+1},$ — общие собственные векторы матриц $A_k,\ k=\overline{1,2m}.$ Тогда автономным первым интегралом у системы (1.12) будет $\mathbb{R}$-дифференцируемая фукция

$$F\colon w\to \prod_{\theta=1}^{2m+1}\bigl(\nu^\theta\gamma\bigr)^{h_\theta},\ \forall w\in\Omega,\ \ \Omega\subset \mathrm{D}(F), \tag{3.2}$$

где показатели степени $h_1,\dots,h_{2m+1}$ суть нетривиальное решение линейной системы $\sum\limits_{\theta=1}^{2m+1}\lambda_\theta^k h_\theta=0,\ k=\overline{1,2m},$ с коэффициентами λ_θ^k являющимися собственными числами матриц $A_k,$ которым соответствуют собственные векторы $\nu^\theta,\ \theta=\overline{1,2m+1},\ k=\overline{1,2m}.$

Доказательство. Пусть $\nu^\theta,\ \theta=\overline{1,2m+1},$ — общие собственные векторы матриц $A_1,\dots,A_{2m}.$ Тогда у этих матриц существуют собственные числа $\lambda_\theta^k,\ \theta=\overline{1,2m+1},\ k=\overline{1,2m},$ которым соответствуют собственные векторы $\nu^\theta,\ \theta=\overline{1,2m+1}.$ Согласно лемме 3.1 $\mathbb{R}$-линейные функции $w\to\nu^\theta\gamma,\ \forall w\in\mathbb{C}^n,\ \theta=\overline{1,2m+1},$ являются частными интегралами дифференциальной системы (1.12), и выполняется система тождеств

$$\mathfrak{x}_k\,\nu^\theta\gamma=\lambda_\theta^k\,\nu^\theta\gamma,\ \forall w\in\mathbb{C}^n,\ k=\overline{1,2m},\ \ \theta=\overline{1,2m+1}. \tag{3.3}$$

Составим функцию $F\colon w\to\prod\limits_{\theta=1}^{2m+1}\bigl(\nu^\theta\gamma\bigr)^{h_\theta},\ \forall w\in\Omega,$ где Ω есть область из пространства $\mathbb{C}^n,$ а $h_\theta,\ \theta=\overline{1,2m+1},$ — комплексные числа, одновременно не равные нулю. Производные Ли этой функции в силу системы (1.12):

$$\mathfrak{x}_kF(w)=\prod_{\theta=1}^{2m+1}\bigl(\nu^\theta\gamma\bigr)^{h_\theta-1}\sum_{\theta=1}^{2m+1}h_\theta\prod_{l=1,l\ne\theta}^{2m+1}(\nu^l\gamma)\,\mathfrak{x}_k\,\nu^\theta\gamma,\ \forall w\in\Omega,\ \ k=\overline{1,2m}.$$

С учётом тождеств (3.3) получаем, что $\mathfrak{x}_kF(w)=\sum\limits_{\theta=1}^{2m+1}\lambda_\theta^k h_\theta\,F(w),\ \forall w\in\Omega,$ $k=\overline{1,2m}.$ Если $\sum\limits_{\theta=1}^{2m+1}\lambda_\theta^k h_\theta=0,\ k=\overline{1,2m},$ то скалярная функция (3.2) будет $\mathbb{R}$-дифференцируемым автономным первым интегралом на области Ω из пространства $\mathbb{C}^n$ системы уравнений в полных дифференциалах (1.12). ■

Следствие 3.1. Пусть ν^θ, $\theta = \overline{1, 2m+1}$, — общие собственные векторы матриц A_k, $k = \overline{1, 2m}$. Тогда автономным первым интегралом системы (1.12) будет $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция

$$F_{12\ldots 2m(2m+1)} \colon w \to \prod_{\theta=1}^{2m} \bigl(\nu^\theta \gamma\bigr)^{-\delta_\theta} \bigl(\nu^{2m+1}\gamma\bigr)^{\delta}, \ \forall w \in \Omega, \ \Omega \subset \mathrm{D}(F_{12\ldots 2m(2m+1)}),$$

где определитель $\bigl|\lambda_\theta^k\bigr| = \delta$, а определители δ_θ, $\theta = \overline{1, 2m}$, получены заменой θ-го столбца в определителе δ на $\mathrm{colon}\bigl(\lambda_{2m+1}^1, \ldots, \lambda_{2m+1}^{2m}\bigr)$, λ_θ^k — собственные числа матриц A_k, которым соответствуют собственные векторы ν^θ, $\theta = \overline{1, 2m+1}$, $k = \overline{1, 2m}$.

Пример 3.1. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} dw_1 &= [2w_1 - i(w_2 + \overline{w}_1) + (1-i)\overline{w}_2]dz + [w_1 + (2-i)(w_2 + \overline{w}_1) + (1-i)\overline{w}_2]d\,\overline{z}, \\ dw_2 &= -[(2+i)(w_1 + \overline{w}_2) + iw_2]dz - [i(w_1 + \overline{w}_2) + (i-1)w_2]d\,\overline{z} \end{aligned} \tag{3.4}$$

такова, что построенные на её основе матрицы

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 2 & -2-i & 2+i & 0 \\ -i & -i & 1+i & i \\ -i & 0 & 1 & i \\ 1-i & -2-i & 2+i & 1+i \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & -i & i & 0 \\ 2-i & 1-i & 1+i & -2+i \\ 2-i & 0 & 2 & -2+i \\ 1-i & -i & i & i \end{Vmatrix}$$

перестановочны. Значит, система уравнений в полных дифференциалах (3.4) вполне разрешима на расширенном пространстве $\mathbb{C}^3$.

Собственными числами матриц A_1 и A_2 являются $\lambda_1^1 = 1+i$, $\lambda_2^1 = -i$, $\lambda_3^1 = 1$, $\lambda_4^1 = 2$ и $\lambda_1^2 = i$, $\lambda_2^2 = 1-i$, $\lambda_3^2 = 2$, $\lambda_4^2 = 1$, которые находим как корни интегральных характеристических уравнений

$$\det(A_1 - \lambda^1 E) = 0 \iff (\lambda^1 - 1 - i)(\lambda^1 + i)(\lambda^1 - 1)(\lambda^1 - 2) = 0$$

и

$$\det(A_2 - \lambda^2 E) = 0 \iff (\lambda^2 - i)(\lambda^2 - 1 + i)(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Матрицы A_1 и A_2 приведём к жордановым нормальным формам

$$J_1 = \mathrm{diag}\{1+i, -i, 1, 2\} \quad \text{и} \quad J_2 = \mathrm{diag}\{i, 1-i, 2, 1\}$$

так, чтобы в представлениях $A_1 = B_1 J_1 B_1^{-1}$ и $A_2 = B_2 J_2 B_2^{-1}$ матрицы перехода B_1 и B_2 были равными, например:

$$B_1 = B_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Поэтому общими линейно независимыми собственными векторами матриц A_1 и A_2 будут $\nu^1=(0,1,1,1)$, $\nu^2=(1,1,0,1)$, $\nu^3=(0,1,1,0)$, $\nu^4=(1,0,0,1)$.

Числа h_1, h_2 и h_3 найдём из системы

$$\begin{cases}(1+i)h_1 - ih_2 + h_3 = 0,\\ ih_1 + (1-i)h_2 + 2h_3 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}h_1 = -(1+i)h_3,\\ h_2 = -(2+i)h_3.\end{cases}$$

Например, $h_1 = 1+i$, $h_2 = 2+i$ и $h_3 = -1$.

Тогда по теореме 3.1 $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция

$$F\colon w \to \frac{(w_2+\overline{w}_1+\overline{w}_2)^{1+i}(w_1+w_2+\overline{w}_2)^{2+i}}{w_2+\overline{w}_1}, \ \forall w \in \Omega, \qquad (3.5)$$

где Ω — область из множества $W = \{w\colon w_2+\overline{w}_1 \neq 0\}$, является автономным первым интегралом вполне разрешимой системы (3.4) на области Ω.

$\mathbb{R}$-дифференцируемый первый интеграл (3.5) образует автономный интегральный базис дифференциальной системы (3.4) на любой области Ω из множества W пространства $\mathbb{C}^2$.

3.1.2.2. *Построение $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов по собственным и присоединённым векторам.* Пусть хотя бы одна из матриц A_k, $k=\overline{1,2m}$, имеет кратный элементарный делитель. Тогда из системы (1.12) произвольным образом выделим обыкновенную дифференциальную систему

$$dw_i = X_{i\zeta}(w)\,dz_\zeta + X_{i,m+\zeta}(w)\,d\,\overline{z}_\zeta, \ \ i=\overline{1,n},$$

со свойством: у матрицы A_ζ число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j, $j=\overline{1,m}$.

Определение 3.1. Пусть λ_l^ζ — собственное число матрицы A_ζ, которому соответствует элементарный делитель кратности s и собственный вектор ν^{0l}. Тогда вектор $\nu^{\eta l}$, координатами которого являются решения линейной системы уравнений

$$\big(A_\zeta - \lambda_l^\zeta E\big)\mathrm{colon}\big(\nu_1^{\eta l},\ldots,\nu_{2n}^{\eta l}\big) = \eta\,\mathrm{colon}\big(\nu_1^{\eta-1,l},\ldots,\nu_{2n}^{\eta-1,l}\big), \eta=\overline{1,s-1}, \quad (3.6)$$

назовём η-ым присоединённым вектором матрицы A_ζ, соответствующим собственному числу λ_l^ζ.

Теорема 3.2. Пусть общие собственные векторы ν^{0l}, $l=\overline{1,r}$, матриц $A_k, k=\overline{1,2m}$, и присоединённые векторы $\nu^{\eta l}$, $\eta=\overline{1,s_l-1}$, $l=\overline{1,r}$, матрицы A_ζ соответствуют собственным числам λ_l^ζ, $l=\overline{1,r}$, матрицы A_ζ, имеющим элементарные делители кратности s_l при $\sum\limits_{l=1}^{r} s_l \geqslant 2m+1$. Тогда автономным первым интегралом вполне разрешимой системы (1.12) является $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция

$$F\colon w \to \prod_{\xi=1}^{\alpha} \bigl(\nu^{0\xi}\gamma\bigr)^{h_{0\xi}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi} \Psi_q^{\xi}(w), \ \ \forall w \in \Omega, \tag{3.7}$$

где Ω — область из множества определения $\mathrm{D}(F)$, Ψ_q^{ξ} — $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции такие, что

$$\nu^{\tau\xi}\gamma = \sum_{q=1}^{\tau} \tbinom{\tau-1}{q-1}\, \Psi_q^{\xi}(w)\, \nu^{\tau-q,\,\xi}\gamma, \ \forall w \in \Omega, \ \tau = \overline{1,\varepsilon_\xi}, \ \ \xi = \overline{1,\alpha}, \tag{3.8}$$

при $\sum\limits_{\xi=1}^{\alpha} \varepsilon_\xi = 2m - \alpha + 1, \ \varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1, \ \xi = \overline{1,\alpha}, \ \alpha \leqslant r,$ а также

$$\mathfrak{x}_k\, \Psi_q^{\xi}(w) = \mu_q^{\xi k}, \ \mu_q^{\xi k} = \mathrm{const}, \ \ k = \overline{1,2m}, \ \ q = \overline{1,\varepsilon_\xi}, \ \ \xi = \overline{1,\alpha};$$

числа $h_{q\xi}$, $q = \overline{0,\varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1,\alpha}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы $\sum\limits_{\xi=1}^{\alpha}\bigl(\lambda_\xi^k h_{0\xi} + \sum\limits_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_q^{\xi k} h_{q\xi}\bigr) = 0, \ k = \overline{1,2m},$ где λ_ξ^k суть собственные числа матриц A_k, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi}$, $\xi = \overline{1,\alpha}$, $k = \overline{1,2m}$.

Доказательство. На основании системы равенств (3.6) и леммы 3.1 устанавливаем, что

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}_\zeta\bigl(\nu^{0l}\gamma\bigr) = \lambda_l^{\zeta}\, \nu^{0l}\gamma, \ \forall w \in \mathbb{C}^n, \ \ l = \overline{1,r}, \\ \mathfrak{x}_\zeta\bigl(\nu^{\eta l}\gamma\bigr) = \lambda_l^{\zeta}\, \nu^{\eta l}\gamma + \eta\, \nu^{\eta-1,\,l}\gamma, \ \forall w \in \mathbb{C}^n, \ \ \eta = \overline{1, s_l - 1}, \ l = \overline{1,r}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Систему (3.8) при каждом фиксированном индексе ξ, $\xi = \overline{1,\alpha}$, всегда можно разрешить относительно Ψ_q^{ξ}, так как её определитель равен $\bigl(\nu^{0\xi}\gamma\bigr)^{\varepsilon_\xi}$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, и отличен от тождественного нуля на области Ω из $\mathbb{C}^n$.

Докажем, что для функций Ψ_q^{l} справедливы тождества

$$\mathfrak{x}_\zeta \Psi_q^{l}(w) = \begin{bmatrix} 1, \ \ \forall w \in \Omega, \ \ \text{при } \ q = 1, \\ 0, \ \ \forall w \in \Omega, \ \ \text{при } \ q = \overline{2, s_l - 1}, \ l = \overline{1,r}. \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Соотношения (3.10) при $q = 1$ и $q = 2$ непосредственно проверяются на основании тождеств (3.9). Доказательство для случаев $q \geqslant 3$ проведём методом математической индукции. Предположим, что тождества (3.10) выполняются при $q = \overline{1, \varepsilon - 1}$. Вычислим действие линейного дифференциального оператора $\mathfrak{x}_\zeta$ на $\mathbb{R}$-линейную функцию $p\colon w \to \nu^{\varepsilon l}\gamma$, $\forall w \in \mathbb{C}^n$, с учётом соотношений (3.8), (3.9) и (3.10) при $q = \overline{1, \varepsilon - 1}$ на области Ω:

$$\mathfrak{x}_\zeta\bigl(\nu^{\varepsilon l}\gamma\bigr) = \lambda_l^\zeta \sum_{q=1}^{\varepsilon} \tbinom{\varepsilon-1}{q-1}\, \Psi_q^l(w)\, \nu^{\varepsilon-q,\,l}\gamma \,+$$

$$+\,(\varepsilon-1)\sum_{q=1}^{\varepsilon-1} \tbinom{\varepsilon-2}{q-1}\, \Psi_q^l(w)\, \nu^{\varepsilon-q-1,\,l}\gamma \,+\, \nu^{\varepsilon-1,\,l}\gamma \,+\, \nu^{0l}\gamma\, \mathfrak{x}_\zeta \Psi_\varepsilon^l(w).$$

Отсюда, в силу соотношений (3.8) при $\tau=\varepsilon-1$ и $\tau=\varepsilon$, соотношений (3.9) при $\eta=\varepsilon$ и того, что $\nu^{0l}\gamma\not\equiv 0$ на $\mathbb{C}^n$ получаем: $\mathfrak{x}_\zeta\, \Psi_\varepsilon^l(w)=0, \forall w\in\Omega$.

Пусть

$$\Psi_0^l(w) = \ln\bigl(\nu^{0l}\gamma\bigr),\ \forall w\in\Omega,\ l=\overline{1,r}. \tag{3.11}$$

Тогда из соотношений (3.9) и (3.10) получаем, что

$$\mathfrak{x}_\zeta\, \Psi_0^l(w) = \lambda_l^\zeta,\ \forall w\in\Omega,\ \ l=\overline{1,r}, \tag{3.12}$$

$$\mathfrak{x}_\zeta\, \Psi_1^l(w) = 1,\ \forall w\in\Omega,\ \ l=\overline{1,r}, \tag{3.13}$$

$$\mathfrak{x}_\zeta\, \Psi_q^l(w) = 0,\ \forall w\in\Omega,\ \ q=\overline{2,s_l-1},\ \ l=\overline{1,r}. \tag{3.14}$$

Так как матрицы $A_k,\ k=\overline{1,2m},$ имеют r общих собственных векторов, то согласно лемме 3.1 выполняются тождества

$$\mathfrak{x}_k\Psi_0^l(w) = \lambda_l^k,\ \forall w\in\Omega,\ \ k=\overline{1,2m},\ \ l=\overline{1,r}. \tag{3.15}$$

Учитывая, что линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{x}_k,\ k=\overline{1,2m},$ симметричны, из соотношений (3.13) и (3.14) получаем, что на области Ω

$$\mathfrak{x}_k\Psi_q^l(w) = \mu_q^{lk},\ k=\overline{1,2m},\ k\neq\zeta,\ \ q=\overline{1,s_l-1},\ \ l=\overline{1,r}. \tag{3.16}$$

Следовательно, существуют $\sum\limits_{l=1}^{r} s_l$ функций $\Psi_q^l\colon \Omega\to\mathbb{C},\ q=\overline{0,s_l-1},$ $l=\overline{1,r},$ заданных соотношениями (3.8) и (3.11), относительно которых выполняются условия (3.10), (3.12) − (3.16) и которые, учитывая способ их построения, функционально независимы.

Построим функцию $\overset{*}{F}\colon w\to \sum\limits_{\xi=1}^{\alpha}\sum\limits_{q=0}^{\varepsilon_\xi} h_{q\xi}\Psi_q^\xi(w),\ \forall w\in\Omega,$ и вычислим действия операторов (1.13) и (1.14) на неё:

$$\mathfrak{x}_k\overset{*}{F}(w) = \sum_{\xi=1}^{\alpha}\Bigl(\lambda_\xi^k h_{0\xi} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_q^{\xi k} h_{q\xi}\Bigr),\ \forall w\in\Omega,\ \ k=\overline{1,2m}.$$

Если $\sum\limits_{\xi=1}^{\alpha}\bigl(\lambda_\xi^k h_{0\xi} + \sum\limits_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_q^{\xi k} h_{q\xi}\bigr)=0,\ k=\overline{1,2m},$ то $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $\overset{*}{F}$ является автономным первым интегралом дифференциальной системы (1.12) на области Ω из пространства $\mathbb{C}^n$.

Полагая $F\colon w \to \exp \overset{*}{F}(w),\ \forall w \in \Omega,$ получаем автономный первый интеграл вида (3.7) вполне разрешимой системы (1.12). ■

Пример 3.2. Система уравнений в полных дифференциалах

$$
\begin{aligned}
&dw_1 = [(1+i)w_1 + iw_2 - \overline{w}_1 - \overline{w}_2]dz + (w_1 + iw_2 - \overline{w}_1 - \overline{w}_2)d\,\overline{z},\\
&dw_2 = (w_2 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2)dz + [(1-i)w_2 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2]d\,\overline{z},\\
&dw_3 = (\,-w_1 + w_2 + w_3 - i\,\overline{w}_2)dz + [\,-w_1 + w_2 + (1-i)w_3 - i\,\overline{w}_2]d\,\overline{z}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

вполне разрешима. На основании собственных чисел $\lambda_1^1 = 1+i$ и $\lambda_2^1 = 1$, которым соответствуют трёхкратные элементарные делители $(\lambda^1 - 1 - i)^3$ и $(\lambda^1 - 1)^3$, собственных векторов $\nu^{01} = (1,1,0,0,0,0)$, $\nu^{02} = (0,0,0,1,1,0)$ и присоединённых векторов $\nu^{11} = (0,0,0,0,1,0)$, $\nu^{21} = (0,1,0,0,0,1)$, $\nu^{12} = (0,1,0,0,0,0)$, $\nu^{22} = (0,0,1,0,1,0)$, составим функции

$$
\Psi_1^1\colon w \to \frac{\overline{w}_2}{w_1 + w_2}\,,\ \forall w \in \Omega, \text{ и } \Psi_2^1\colon w \to \frac{(w_1 + w_2)(w_2 + \overline{w}_3) - \overline{w}_2^{\,2}}{(w_1 + w_2)^2}\,,\ \forall w \in \Omega,
$$

где Ω — область из множества $W = \{w\colon w_1 + w_2 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{C}^3$. По теореме 3.2 строим $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы

$$
F_1\colon w \to \Psi_2^1(w),\ \forall w \in \Omega,
\tag{3.18}
$$

и

$$
F_2\colon w \to \frac{\overline{w}_1 + \overline{w}_2}{w_1 + w_2}\ \exp\Bigl(i\,\frac{\overline{w}_2}{w_1 + w_2}\Bigr),\ \forall w \in \Omega,
\tag{3.19}
$$

которые, будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов системы (3.17) на любой області Ω из множества W.

3.1.3. Неавтономные $\mathbb{R}$-дифференцируемые первые интегралы

Система уравнений в полных дифференциалах (1.12) индуцирует на расширенном пространстве $\mathbb{C}^{m+n}$ линейные дифференциальные операторы

$$
\mathfrak{X}_j(z,w) = \partial_{z_j} + \mathfrak{x}_j(w) \ \text{ и } \ \mathfrak{X}_{m+j}(z,w) = \partial_{\overline{z}_j} + \mathfrak{x}_{m+j}(w),\ j = \overline{1,m}.
$$

С целью построения неавтономного базиса $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (1.12) достаточно к базису автономных первых интегралов этой системы добавить m таких неавтономных первых интегралов системы (1.12), что полученная совокупность n первых интегралов будет функционально независимой на некоторой области из пространства $\mathbb{C}^{m+n}$. Такая процедура всякий раз может быть осуществлена на основании следующих закономерностей.

Теорема 3.3. Пусть ν — общий собственный вектор матриц $A_k, k = \overline{1, 2m}$. Тогда первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (1.12) будет $\mathbb{R}$-дифференцируемая на пространстве $\mathbb{C}^{m+n}$ функция

$$F\colon (z, w) \to (\nu\gamma) \exp\Big[-\sum_{j=1}^{m} (\lambda^j z_j + \lambda^{m+j}\, \overline{z}_j)\Big], \ \forall (z, w) \in \mathbb{C}^{m+n}, \qquad (3.20)$$

где λ^k — собственные числа матриц A_k, $k = \overline{1, 2m}$, которым соответствует собственный вектор ν.

Действительно, с учётом леммы 3.1 производные Ли в силу системы (1.12) $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции (3.20) равны:

$$\mathfrak{X}_j F(z, w) = \partial_{z_j} F(z, w) + \mathfrak{x}_j F(z, w) = (-\lambda^j + \lambda^j\,) F(z, w) = 0,$$

$$\mathfrak{X}_{m+j} F(z, w) = \partial_{\overline{z}_j} F(z, w) + \mathfrak{x}_{m+j} F(z, w) =$$

$$= (-\lambda^{m+j} + \lambda^{m+j}\,) F(z, w) = 0, \ \forall (z, w) \in \mathbb{C}^{m+n}, \ \ j = \overline{1, m}.$$

Следовательно, функция (3.20) является $\mathbb{R}$-дифференцируемым на пространстве $\mathbb{C}^{m+n}$ первым интегралом системы (1.12). ■

Пример 3.3 (продолжение примера 3.1). На основании собственных чисел $\lambda_1^1 = 1 + i$ и $\lambda_1^2 = i$ матриц A_1 и A_2, и соответствующего им общего собственного вектора $\nu^1 = (0, 1, 1, 1)$, по теореме 3.3 строим $\mathbb{R}$-дифференцируемый на $\mathbb{C}^3$ первый интеграл системы (3.4)

$$F\colon (z, w) \to (w_2 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2) \exp[-(1 + i) z - i\, \overline{z}], \ \forall (z, w) \in \mathbb{C}^3. \qquad (3.21)$$

$\mathbb{R}$-дифференцируемые функции (3.5) и (3.21) образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (3.4) на областях $\mathbb{C} \times \Omega$, где область Ω из множества $\{w\colon w_2 + \overline{w}_1 \neq 0\}$.

Теорема 3.4. Пусть общий собственный вектор ν^0 матриц A_k, $k = \overline{1, 2m}$, и присоединённые векторы ν^η, $\eta = \overline{1, s-1}$, матрицы A_ζ, соответствуют собственному числу λ^ζ матрицы A_ζ, имеющему элементарный делитель кратности $s \geqslant 2$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.12) являются $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции

$$F_q\colon (z, w) \to \Psi_q^\zeta(w) - \sum_{j=1}^{m} \big(\mu_q^{\zeta j} z_j + \mu_q^{\zeta, m+j} \overline{z}_j\big), \ \forall (z, w) \in G, \ \ q = \overline{1, s-1}, \qquad (3.22)$$

где G — область из $\mathbb{C}^{m+n}$, функции Ψ_q^ζ находятся из системы (3.8), числа $\mu_q^{\zeta k} = \mathfrak{x}_k \Psi_q^\zeta(w)$, $\forall w \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $q = \overline{1, s-1}$, $k = \overline{1, 2m}$.

Доказательство. Вычислим действие линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{X}_k,\ k=\overline{1,2m},$ на $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции (3.22):

$$\mathfrak{X}_k F_q(z,w) = \,-\,\mu_q^{\zeta k} + \mathfrak{x}_k\Psi_q^{\zeta}(w),\ \forall (z,w)\in\mathbb{C}^m\times\Omega,\ k=\overline{1,2m},\ \ q=\overline{1,s-1}.$$

С учётом того, что $\mathfrak{x}_k\Psi_q^{\zeta}(w)=\mu_q^{\zeta k},\ \forall w\in\Omega,\ k=\overline{1,2m},\ q=\overline{1,s-1},$ получаем, что $\mathbb{R}$-дифференцируемые функции (3.22) являются первыми интегралами системы (1.12) на области $\mathbb{C}^m\times\Omega$ из пространства $\mathbb{C}^{m+n}$. ■

Пример 3.4 (продолжение примера 3.2). По теореме 3.4, с учётом того, что $\mu_1^{11}=1,\ \mu_1^{12}=1,$ строим $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области $\mathbb{C}\times\Omega$ первый интеграл вполне разрешимой системы (3.17)

$$F\colon (z,w)\to \frac{\overline{w}_2}{w_1+w_2} - z-\overline{z}\,,\ \forall (z,w)\in\mathbb{C}\times\Omega. \tag{3.23}$$

$\mathbb{R}$-дифференцируемые функции (3.18), (3.19) и (3.23) образуют базис первых интегралов системы (3.17) на областях $\mathbb{C}\times\Omega$ пространства $\mathbb{C}^4$, где Ω есть область из множества $\{w\colon w_1+w_2\neq 0\}$.

3.2. Интегралы вещественной линейной автономной системы уравнений в полных дифференциалах

3.2.1. Линейный частный интеграл

Для того, чтобы комплекснозначная линейная однородная функция

$$p\colon x\to\sum_{i=1}^{n} b_i x_i,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \ (b_i\in\mathbb{C}, i=\overline{1,n}\,)$$

была частным интегралом системы (1.16), необходимо и достаточно выполнения системы тождеств

$$\mathfrak{p}_j\, p(x) = p(x)\lambda^j,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \ \lambda^j\in\mathbb{C},\ j=\overline{1,m}. \tag{3.24}$$

Система тождеств (3.24) имеет место тогда и только тогда, когда совместна линейная однородная система $\big(A_j-\lambda^j E\big)b=0,\ j=\overline{1,m},$ где вектор $b=\operatorname{colon}(b_1,\ldots,b_n),\ E$ — единичная матрица, квадратные матрицы n-го порядка $A_j=\big\|a_{\xi ji}\big\|,\ j=\overline{1,m}.$

Методом доказательства аналогичным рассмотренному в лемме 3.1 доказывается

Лемма 3.2. Пусть ν — общий собственный вектор, $\nu\in\mathbb{C}^n$, матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}.$ Тогда линейная однородная функция $p\colon x\to\nu x,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,$ является частным интегралом дифференциальной системы (1.16).

3.2.2. Автономные первые интегралы

3.2.2.1. *Построение первых интегралов по вещественным общим собственным векторам.* Если матрицы $A_j,\ j=\overline{1,m},$ имеют $m+1$ общих вещественных линейно независимых собственных векторов, то по ним можно построить автономный первый интеграл системы уравнений в полных дифференциалах (1.16) основываясь на следующей закономерности.

Теорема 3.5. Пусть $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1},$ — общие вещественные собственные векторы матриц $A_j, j=\overline{1,m}$. Тогда функция $F\colon x \to \prod\limits_{k=1}^{m+1}\left|\nu^k x\right|^{h_k}, \forall x\in \mathfrak{X},$ где вещественные числа $h_k,\ k=\overline{1,m+1},$ являются нетривиальным решением линейной системы $\sum\limits_{k=1}^{m+1}\lambda_k^j h_k=0,\ j=\overline{1,m},$ а λ_k^j — вещественные собственные числа матриц $A_j,$ которым соответствуют собственные векторы $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1},\ j=\overline{1,m},$ на любой области $\mathfrak{X}$ из множества определения $\mathrm{D}(F)$ будет первым интегралом вполне разрешимой системы (1.16).

Доказательство теоремы 3.5 основано на тех же принципах, что и доказательство теоремы 3.1.

Следствие 3.2. Пусть $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1},$ — общие вещественные собственные векторы матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}.$ Тогда автономным первым интегралом вполне разрешимой системы (1.16) будет скалярная функция

$$F_{12\ldots m(m+1)}\colon x\to\prod_{k=1}^{m}\left|\nu^k x\right|^{-\triangle_k}\left|\nu^{m+1}x\right|^{\triangle},\ \forall x\in\mathfrak{X},\ \ \mathfrak{X}\subset \mathrm{D}(F_{12\ldots m(m+1)}),$$

где определитель $\triangle=\left|\lambda_k^j\right|,$ а определители $\triangle_k,\ k=\overline{1,m},$ — получены заменой $k-$го столбца в определителе $\triangle$ на столбец $\mathrm{colon}\left(\lambda_{m+1}^1,\ldots,\lambda_{m+1}^m\right),$ λ_k^j — вещественные собственные числа матриц $A_j,$ которым соответствуют собственные векторы $\nu^k,\ k=\overline{1,m+1},\ j=\overline{1,m}.$

Пример 3.5. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} &dx_1=\ -x_1\,dt_2, && dx_2=2(x_3+x_4)\,dt_1+x_2\,dt_2,\\ &dx_3=x_2\,dt_1+x_4\,dt_2, && dx_4=x_2\,dt_1+x_3\,dt_2 \end{aligned}\tag{3.25}$$

такова, что матрицы

$$A_1=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&2&0&0\\ 0&2&0&0 \end{Vmatrix}\quad \text{и}\quad A_2=\begin{Vmatrix} -1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{Vmatrix}$$

перестановочны. Значит, система (3.25) вполне разрешима. Собственными числами матриц A_1 и A_2 соответственно являются $\lambda_1^1 = -2$, $\lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 0$, $\lambda_4^1 = 2$ и $\lambda_1^2 = 1$, $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = -1$, $\lambda_4^2 = 1$, которые находим как корни интегральных характеристических уравнений

$$\det(A_1 - \lambda^1 E) = 0 \iff (\lambda^1 + 2)(\lambda^1)^2(\lambda^1 - 2) = 0$$

и

$$\det(A_2 - \lambda^2 E) = 0 \iff (\lambda^2 + 1)^2(\lambda^2 - 1)^2 = 0.$$

Матрицы A_1 и A_2 приведём к жордановым нормальным формам

$$J_1 = \operatorname{diag}\{-2, 0, 0, 2\} \quad \text{и} \quad J_2 = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, 1\}$$

так, чтобы в представлениях $A_1 = B_1 J_1 B_1^{-1}$ и $A_2 = B_2 J_2 B_2^{-1}$ матрицы перехода B_1 и B_2 были равными, например:

$$B_1 = B_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Поэтому общими вещественными собственными векторами матриц A_1 и A_2 будут $\nu^1 = (0, -1, 1, 1)$, $\nu^2 = (1, 0, 0, 0)$, $\nu^3 = (0, 0, 1, -1)$, $\nu^4 = (0, 1, 1, 1)$.

Определители:

$$\triangle = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \triangle_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \triangle_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\triangle_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \triangle_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тогда скалярные функции (следствие 3.2)

$$F_{123} \colon x \to \frac{(x_3 - x_4)^2}{x_1^2}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.26}$$

и

$$F_{124} \colon x \to x_1^4 \, [x_2^2 - (x_3 + x_4)^2\,]^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.27}$$

будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов системы (3.25) на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x \colon x_1 \neq 0\}$.

3.2.2.2. *Построение первых интегралов по комплексным общим собственным векторам.* В случае, когда p — комплекснозначный частный интеграл дифференциальной системы (1.16), система тождеств (3.24) распадается на вещественную систему тождеств

$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Re} p(x) = \operatorname{Re} p(x) \overset{*}{\lambda}{}^j - \operatorname{Im} p(x) \overset{\sim}{\lambda}{}^j, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mathfrak{p}_j \operatorname{Im} p(x) = \operatorname{Re} p(x) \overset{\sim}{\lambda}{}^j + \operatorname{Im} p(x) \overset{*}{\lambda}{}^j, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda^j = \overset{*}{\lambda}{}^j + \overset{\sim}{\lambda}{}^j\, i, \ j = \overline{1,m}. \tag{3.28}$$

Тем самым, получаем критерий существования комплекснозначного частного интеграла.

Лемма 3.3. Линейная функция p является комплекснозначным частным интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (1.16) тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств (3.28).

С учётом этого критерия устанавливаем следующие закономерности относительно комплекснозначного частного интеграла системы (1.16).

Свойство 3.1. Если система (1.16) имеет комплекснозначный частный интеграл p, то комплексно сопряжённая функция $\overline{p}$ также является частным интегралом системы (1.16). При этом, наряду с системой тождеств (3.24), имеет место и система тождеств $\mathfrak{p}_j\, \overline{p}(x) = \overline{p}(x)\, \overline{\lambda^j}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m},$ где числа $\overline{\lambda^j}$ комплексно сопряжены с числами $\lambda^j, \ j = \overline{1,m}.$

Свойство 3.2. Если система (1.16) имеет комплекснозначный частный интеграл p, то вещественный полином

$$P\colon x \to \operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.29}$$

является частным интегралом системы (1.16) и на пространстве $\mathbb{R}^n$ выполняется система тождеств

$$\mathfrak{p}_j \left[\operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x) \right] \equiv 2 \left[\operatorname{Re}^2 p(x) + \operatorname{Im}^2 p(x) \right] \overset{*}{\lambda}{}^j, \ \ j = \overline{1,m}, \tag{3.30}$$

где числа $\lambda^j, \ j = \overline{1,m},$ находятся из тождеств (3.24).

Свойство 3.3. Пусть дифференциальная система (1.16) имеет комплекснозначный частный интеграл p. Тогда производные Ли в силу системы (1.16) экспоненциальной функции $\psi\colon x \to \exp \varphi(x), \ \forall x \in \mathcal{X},$ при

$$\varphi(x)\colon x \to \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} p(x)}{\operatorname{Re} p(x)}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.31}$$

равны

$$\mathfrak{p}_j\, \psi(x) = \psi(x)\, \overset{\sim}{\lambda}{}^j, \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \ j = \overline{1,m}, \tag{3.32}$$

где числа $\lambda^j, \ j = \overline{1,m},$ находятся из тождеств (3.24), область $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$ такова, что её дополнение до $\mathbb{R}^n$ включает множество всех нулей функции $\operatorname{Re} p$.

Из тождеств (3.32) следует формула вычисления производных Ли в силу системы (1.16) функции аргумента (3.31) комплекснозначного частного интеграла p этой системы:

$$\mathfrak{p}_j\,\varphi(x)=\widetilde{\lambda}^j,\ \forall x\in\mathcal{X},\ \ j=\overline{1,m}. \tag{3.33}$$

Свойство 3.4. Произведение u_1u_2 полиномов $u_1\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ и $u_2\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — поле вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел, является частным интегралом (вещественным или комплекснозначным) системы (1.16) тогда и только тогда, когда его сомножители u_1 и u_2 являются частными интегралами дифференциальной системы (1.16).

Свойство 3.5. Вещественный полином (3.29) является частным интегралом системы (1.16), если и только если система (1.16) имеет комплекснозначный частный интеграл p (или комплексно сопряжённый ему).

Теорема 3.6. Пусть $\nu^k=\overset{*}{\nu}{}^k+\widetilde{\nu}^k\,i,\ k=\overline{1,s},\ s\leqslant(m+1)/2$, и ν^θ, $\theta=\overline{s+1,m+1-s}$, — соответственно общие комплексные (среди которых нет комплексно сопряжённых) и вещественные собственные векторы матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$. Тогда автономным первым интегралом вполне разрешимой системы (1.16) является скалярная функция

$$F\colon x\to\prod_{k=1}^{s}[P_k(x)]^{\overset{*}{h}_k}\exp\Big[-2\,\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\Big]\prod_{\theta=s+1}^{m+1-s}\big|\nu^\theta x\big|^{h_\theta},\ \forall x\in\mathcal{X}, \tag{3.34}$$

где $\mathcal{X}$ есть область из множества определения $\mathrm{D}(F)$, скалярные функции $P_k\colon x\to\big(\overset{*}{\nu}{}^kx\big)^2+\big(\widetilde{\nu}^kx\big)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \ \varphi_k\colon x\to\operatorname{arctg}\dfrac{\widetilde{\nu}^kx}{\overset{*}{\nu}{}^kx},\ \forall x\in\mathcal{X},\ k=\overline{1,s}$, а вещественные числа $\overset{*}{h}_k,\ \widetilde{h}_k,\ k=\overline{1,s},\ h_\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}$, составляют нетривиальное решение системы $2\sum\limits_{k=1}^{s}\big(\overset{*}{\lambda}{}^j_k\,\overset{*}{h}_k-\widetilde{\lambda}^j_k\,\widetilde{h}_k\big)+\sum\limits_{\theta=s+1}^{m+1-s}\lambda^j_\theta h_\theta=0,\ j=\overline{1,m}$, где $\lambda^j_k=\overset{*}{\lambda}{}^j_k+\widetilde{\lambda}^j_k\,i$ и λ^j_θ — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^k,\ k=\overline{1,s}$, и $\nu^\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}$.

Доказательство. Пусть $\nu^k=\overset{*}{\nu}{}^k+\widetilde{\nu}^k\,i,\ k=\overline{1,s},\ s\leqslant(m+1)/2$, и ν^θ, $\theta=\overline{s+1,m+1-s}$, — соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$. Тогда у этих матриц существуют комплексные собственные числа λ^j_k и вещественные собственные числа λ^j_θ, которым соответствуют собственные векторы $\nu^k,\ k=\overline{1,s}$, и $\nu^\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s},\ j=\overline{1,m}$. При этом согласно лемме 3.2 линейные функции $p_k\colon x\to\nu^kx,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ k=\overline{1,m+1-s}$, являются частными интегралами системы (1.16). Отсюда, с учётом свойства 3.2 заключаем, что на пространстве $\mathbb{R}^n$ выполняется система тождеств

$$\mathfrak{p}_j\big[\big(\overset{*}{\nu}{}^k x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}^k x\big)^2\big]=2\big[\big(\overset{*}{\nu}{}^k x\big)^2+\big(\widetilde{\nu}^k x\big)^2\big]\overset{*}{\lambda}{}_k^j,\ j=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,s},$$
$$\mathfrak{p}_j\,\nu^\theta x\ =\ \lambda_\theta^j\,\nu^\theta x,\ \ j=\overline{1,m},\ \ \theta=\overline{s+1,m+1-s}. \tag{3.35}$$

Составим функцию $F\colon x\ \to\ \prod\limits_{k=1}^{s}\,[P_k(x)]^{\overset{*}{h}_k}\exp\Big[-2\,\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\Big]\prod\limits_{\theta=s+1}^{m+1-s}\big|\nu^\theta x\big|^{h_\theta},$ $\forall x\in\mathfrak{X},$ где $\mathfrak{X}$ — область из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, а $\overset{*}{h}_k,\ \widetilde{h}_k,$ $k=\overline{1,s},\ h_\theta,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s},$ — вещественные числа одновременно не равные нулю. Производные Ли в силу системы (1.16):

$$\mathfrak{p}_jF(x)=\bigg\{\prod_{k=1}^{s}\big[P_k(x)\big]^{\overset{*}{h}_k-1}\exp\Big[-2\,\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\Big]\sum_{k=1}^{s}\overset{*}{h}_k\prod_{l=1,l\neq k}^{s}P_l(x)\,\mathfrak{p}_jP_k(x)+$$

$$+\prod_{k=1}^{s}\big[P_k(x)\big]^{\overset{*}{h}_k}\exp\Big[-2\,\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\Big]\sum_{k=1}^{s}\mathfrak{p}_j\Big[-2\,\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\Big]\bigg\}\prod_{\theta=s+1}^{m+1-s}\big|\nu^\theta x\big|^{h_\theta}+$$

$$+\prod_{k=1}^{s}\big[P_k(x)\big]^{\overset{*}{h}_k}\exp\Big[-2\,\widetilde{h}_k\,\varphi_k(x)\Big]\prod_{\theta=s+1}^{m+1-s}\big|\nu^\theta x\big|^{h_\theta-1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\theta=s+1}^{m+1-s}\operatorname{sgn}\big(\nu^\theta x\big)\,h_\theta\prod_{l=s+1,l\neq\theta}^{m+1-s}\big|\nu^l x\big|\,\mathfrak{p}_j\big(\nu^\theta x\big),\ \forall x\in\mathfrak{X},\ \ j=\overline{1,m}.$$

Отсюда на основании тождеств (3.35), свойств 3.2 и 3.3 получаем:

$$\mathfrak{p}_jF(x)=\bigg[\sum_{k=1}^{s}2\big(\overset{*}{\lambda}{}_k^j\,\overset{*}{h}_k-\widetilde{\lambda}{}_k^j\,\widetilde{h}_k\big)+\sum_{\theta=s+1}^{m+1-s}\lambda_\theta^j h_\theta\bigg]F(x),\ \forall x\in\mathfrak{X},\ \ j=\overline{1,m}.$$

Если $2\sum\limits_{k=1}^{s}\big(\overset{*}{\lambda}{}_k^j\,\overset{*}{h}_k-\widetilde{\lambda}{}_k^j\,\widetilde{h}_k\big)+\sum\limits_{\theta=s+1}^{m+1-s}\lambda_\theta^j h_\theta\ =\ 0,\ j\ =\ \overline{1,m},$ то функция (3.34) будет автономным первым интегралом системы (1.16). ■

Пример 3.6. Для вполне разрешимой системы

$$dx_1=x_1\,dt_1+x_2\,dt_2,\quad dx_2=x_2\,dt_1-x_1\,dt_2,\quad dx_3=x_3\,dt_1-x_3\,dt_2 \tag{3.36}$$

по собственным числам $\lambda_1^1=\lambda_2^1=\lambda_3^1=1;\ \lambda_1^2=\ -i,\ \lambda_2^2=i,\ \lambda_3^2=\ -1$ и общим собственным векторам $\nu^1=(1,i,0),\ \nu^2=(1,\ -i,0),\ \nu^3=(0,0,1)$ строим (теорема 3.6) базис автономных первых интегралов

$$F\colon x\to\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}\ \exp\Big[2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\Big],\ \forall x\in\mathfrak{X}, \tag{3.37}$$

на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1 \neq 0,\ x_3 \neq 0\}$.

Теорема 3.7. Пусть $\nu^{\tau} = \overset{*}{\nu}{}^{\tau} + \widetilde{\nu}^{\tau}\, i,\ \nu^{s+\tau} = \overset{*}{\nu}{}^{\tau} - \widetilde{\nu}^{\tau}\, i,\ \tau = \overline{1,s},\ s \leqslant m/2,$ $\nu^{2s+1} = \overset{*}{\nu}{}^{2s+1} + \widetilde{\nu}^{2s+1}\, i$, и $\nu^{\theta},\ \theta = \overline{2s+2, m+1}$, — соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц $A_j,\ j = \overline{1,m}$. Тогда первыми интегралами системы (1.16) являются функции

$$F_1\colon x \to \prod_{k=1}^{s} \bigl[P_k(x)\bigr]^{\overset{*}{h}_k + \overset{*}{h}_{s+k}} \exp\Bigl[-2\bigl(\widetilde{h}_k - \widetilde{h}_{s+k}\bigr)\varphi_k(x)\Bigr] \cdot$$
$$\cdot \bigl[P_{2s+1}(x)\bigr]^{\overset{*}{h}_{2s+1}} \exp\Bigl[-2\,\widetilde{h}_{2s+1}\,\varphi_{2s+1}(x)\Bigr] \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \bigl(\nu^{\theta}x\bigr)^{2\overset{*}{h}_{\theta}},\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.38}$$

$$F_2\colon x \to \prod_{k=1}^{s} \bigl[P_k(x)\bigr]^{\widetilde{h}_k + \widetilde{h}_{s+k}} \exp\Bigl[2\bigl(\overset{*}{h}_k - \overset{*}{h}_{s+k}\bigr)\varphi_k(x)\Bigr] \cdot$$
$$\cdot \bigl[P_{2s+1}(x)\bigr]^{\widetilde{h}_{2s+1}} \exp\Bigl[2\,\overset{*}{h}_{2s+1}\,\varphi_{2s+1}(x)\Bigr] \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \bigl(\nu^{\theta}x\bigr)^{2\widetilde{h}_{\theta}},\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.39}$$

где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2)$, скалярные функции $P_k\colon x \to \bigl(\overset{*}{\nu}{}^{k}x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}^{k}x\bigr)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_k\colon x \to \operatorname{arctg} \dfrac{\widetilde{\nu}^{k}x}{\overset{*}{\nu}{}^{k}x},\ \forall x \in \mathcal{X},\ k = \overline{1,s},$ $k = 2s+1$, а комплексные числа $h_k = \overset{*}{h}_k + \widetilde{h}_k i,\ k = \overline{1, m+1}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k = 0,\ j = \overline{1,m},$ где $\lambda_{\tau}^j = \overset{*}{\lambda}{}_{\tau}^j + \widetilde{\lambda}_{\tau}^j\, i,\ \lambda_{s+\tau}^j = \overset{*}{\lambda}{}_{\tau}^j - \widetilde{\lambda}_{\tau}^j\, i,\ \tau = \overline{1,s},\ \lambda_{2s+1}^j = \overset{*}{\lambda}{}_{2s+1}^j + \widetilde{\lambda}_{2s+1}^j\, i$, и $\lambda_{\theta}^j,\ \theta = \overline{2s+2, m+1}$, — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j = \overline{1,m}$, которым соответствуют общие собственные векторы $\nu^k,\ k = \overline{1, m+1}$.

Доказательство. Построим две функции

$$\overset{*}{F}\colon x \to \prod_{k=1}^{2s} \bigl(\nu^{k}x\bigr)^{h_k} \bigl(\nu^{2s+1}x\bigr)^{h_{2s+1}} \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \bigl(\nu^{\theta}x\bigr)^{h_{\theta}},\ \forall x \in \mathcal{X},$$

и

$$\overset{**}{F}\colon x \to \prod_{k=1}^{2s} \bigl(\nu^{k}x\bigr)^{l_k} \bigl(\overline{\nu^{2s+1}}x\bigr)^{l_{2s+1}} \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \bigl(\nu^{\theta}x\bigr)^{l_{\theta}},\ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $h_k,\ l_k,\ k = \overline{1, m+1}$, — некоторые комплексные числа. Функции $\overset{*}{F}$ и $\overset{**}{F}$

в общем случае представляют собой комплекснозначные функции вещественных аргументов. С учётом леммы 3.2 и свойства 3.1, действие операторов:

$$\mathfrak{p}_j \overset{*}{F}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j \, h_k \overset{*}{F}(x), \ \forall x \in \mathfrak{X}, \ \ j = \overline{1, m}\,;$$

$$\mathfrak{p}_j \overset{**}{F}(x) = \Bigg[\sum_{k=1}^{2s} \lambda_k^j \, l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j} \, l_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j \, l_\theta \Bigg] \overset{**}{F}(x), \ \forall x \in \mathfrak{X}, \ \ j = \overline{1, m}.$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k = 0, \ j = \overline{1, m},$ то функция $\overset{*}{F}\colon x \to \overset{*}{F}(x), \ \forall x \in \mathfrak{X},$ будет автономным первым интегралом системы (1.16).

Пусть $h_k = \overset{*}{h}_k + \widetilde{h}_k \, i, \ k = \overline{1, m+1},$ — решение этой системы. Тогда числа $l_k = \overset{*}{h}_{s+k} - \widetilde{h}_{s+k} \, i, \ l_{s+k} = \overset{*}{h}_k - \widetilde{h}_k \, i, \ k = \overline{1, s}, \ l_{2s+1} = \overset{*}{h}_{2s+1} - \widetilde{h}_{2s+1} \, i,$ $l_\theta = \overset{*}{h}_\theta - \widetilde{h}_\theta \, i, \ \theta = \overline{2s+2, m+1},$ являются решением линейной однородной системы $\sum\limits_{k=1}^{2s} \lambda_k^j \, l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j} \, l_{2s+1} + \sum\limits_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j \, l_\theta = 0, \ j = \overline{1, m}.$ При этом скалярная функция $\overset{**}{F}\colon x \to \overset{**}{F}(x), \ \forall x \in \mathfrak{X},$ будет автономным первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы (1.16).

Положив $F_1 = \overset{*}{F} \overset{**}{F}$ и $F_2 = \big(\overset{**}{F} / \overset{*}{F}\big)^i,$ получим соответственно автономные первые интегралы видов (3.38) и (3.39). ■

Пример 3.7. Для вполне разрешимой системы

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 \, dt_1 + x_3 \, dt_2, \quad & dx_2 &= \, - x_2 \, dt_1 + x_4 \, dt_2, \\ dx_3 &= x_3 \, dt_1 - x_1 \, dt_2, \quad & dx_4 &= \, - x_4 \, dt_1 - x_2 \, dt_2 \end{aligned} \tag{3.40}$$

на основании собственных чисел $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = -1, \ \lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 1; \ \lambda_1^2 = \lambda_3^2 = -i,$ $\lambda_2^2 = \lambda_4^2 = i$ и общих комплексных линейно независимых собственных векторов $\nu^1 = (0, -i, 0, 1), \ \nu^2 = (0, i, 0, 1), \ \nu^3 = (-i, 0, 1, 0)$ и $\nu^4 = (i, 0, 1, 0)$ строим (теорема 3.7) базис автономных первых интегралов на областях $\mathfrak{X}$ из множества $\{x\colon x_1 x_4 - x_2 x_3 \ne 0\}$ пространства $\mathbb{R}^4,$ состоящий из функций

$$F_1\colon x \to \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_1 x_4 - x_2 x_3}, \ \forall x \in \mathfrak{X}, \ \text{и} \ F_2\colon x \to (x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2), \ \forall x \in \mathbb{R}^4. \tag{3.41}$$

3.2.2.3. *Построение первых интегралов по собственным и присоединённым векторам.* Из системы уравнений в полных дифференциалах (1.16) произвольным образом выделим обыкновенную дифференциальную систему $dx = A^\zeta(x) \, dt_\zeta,$ где $A^\zeta(x) = \operatorname{colon}(a_{1\zeta}(x), \ldots, a_{n\zeta}(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$ со свойством: у матрицы A_ζ число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$.

Определение 3.2. Пусть λ_l^ζ — собственное число матрицы A_ζ, которому соответствует элементарный делитель кратности s и собственный вектор ν^{0l}. Вектор ν^{kl}, координатами которого являются решения системы

$$\bigl(A_\zeta-\lambda_l^\zeta E\bigr)\mathrm{colon}\bigl(\nu_1^{kl},\ldots,\nu_n^{kl}\bigr)=k\,\mathrm{colon}\bigl(\nu_1^{k-1,l},\ldots,\nu_n^{k-1,l}\bigr),\ k=\overline{1,s-1},$$

назовём k-ым присоединённым вектором матрицы A_ζ, соответствующим собственному числу λ_l^ζ.

Аналогично теореме 3.2 доказывается

Теорема 3.8. Пусть вещественные общие собственные векторы $\nu^{0l}, l=\overline{1,r}$, матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$, и присоединённые векторы $\nu^{\theta l},\ \theta=\overline{1,s_l-1},\ l=\overline{1,r}$, матрицы A_ζ, соответствуют собственным числам $\lambda_l^\zeta,\ l=\overline{1,r}$, матрицы A_ζ, имеющим элементарные делители кратности s_l при $\sum\limits_{l=1}^{r}s_l\geqslant m+1$. Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы (1.16) является функция

$$F\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k}\bigl(\nu^{0\xi}x\bigr)^{h_{0\xi}}\exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}h_{q\xi}v_{q\xi}(x),\ \forall x\in\mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ есть область из множества определения $\mathrm{D}(F)$, скалярные функции $v_{q\xi}\colon\mathcal{X}\to\mathbb{R}$, такие, что

$$\nu^{i\xi}x=\sum_{q=1}^{i}\tbinom{i-1}{q-1}\,v_{q\xi}(x)\,\nu^{i-q,\xi}x,\ \forall x\in\mathcal{X},\ i=\overline{1,\varepsilon_\xi},\ \ \xi=\overline{1,k},\tag{3.42}$$

при $\sum\limits_{\xi=1}^{k}\varepsilon_\xi=m-k+1,\ \varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1,\ \xi=\overline{1,k},\ k\leqslant r$, а также

$$\mathfrak{p}_j\,v_{q\xi}(x)=\mu_{q\xi}^j,\ \ \mu_{q\xi}^j=\mathrm{const},\ j=\overline{1,m},\ q=\overline{1,\varepsilon_\xi},\ \xi=\overline{1,k}\,;$$

числа $h_{q\xi},\ q=\overline{0,\varepsilon_\xi},\ \xi=\overline{1,k}$, составляют нетривиальное решение системы

$$\sum_{\xi=1}^{k}\bigl(\lambda_\xi^j\,h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\bigr)=0,\ \ j=\overline{1,m},$$

где λ_ξ^j суть вещественные собственные числа матриц A_j, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi},\ \xi=\overline{1,k},\ j=\overline{1,m}$.

Пример 3.8. Для вполне разрешимой системы

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= x_2\,dt_1 + (2x_1 - x_3)\,dt_2,\\
dx_2 &= (2x_2 - x_3 - x_4)\,dt_1 + (\,-x_1 + 2x_2 + x_4)\,dt_2,\\
dx_3 &= (x_1 - x_4)\,dt_1 + (\,-x_1 + 3x_3 + x_4)\,dt_2,\\
dx_4 &= (\,-x_1 + 2x_3 + 2x_4)\,dt_1 + (x_2 - 3x_3 + x_4)\,dt_2
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

по собственному числу $\lambda_1^1 = 1,$ которому соответствует элементарный делитель $(\lambda^1 - 1)^4,$ собственному вектору $\nu^0 = (-1, 1, -1, 0)$ и присоединённым векторам $\nu^1 = (1, 0, -1, -1),$ $\nu^2 = (1, -1, 3, 0),$ $\nu^3 = (-3, 0, 9, 9)$ строим скалярные функции

$$v_1\colon x \to \frac{x_1 - x_3 - x_4}{-x_1 + x_2 - x_3}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$v_2\colon x \to \frac{(\,-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + 3x_3) - (x_1 - x_3 - x_4)^2}{(\,-x_1 + x_2 - x_3)^2}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

$$v_3\colon x \to \frac{1}{(\,-x_1 + x_2 - x_3)^3}\,\big[(\,-3x_1 + 9x_3 + 9x_4)(\,-x_1 + x_2 - x_3)^2 -$$

$$-\,3(\,-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + 3x_3) + 2(x_1 - x_3 - x_4)^3\,\big],\ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — произвольная область из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + x_3 \neq 0\}.$ Тогда на области $\mathcal{X}$ функции (теорема 3.8)

$$F_1\colon x \to v_2(x),\ \ F_2\colon x \to (-x_1+x_2-x_3)^2 \exp\big[-2v_1(x)-v_3(x)\big],\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.44}$$

образуют базис автономных первых интегралов системы (3.43).

Доказательство теоремы 3.8 предусматривает также и случай, когда матрицы $A_j,\ j = \overline{1,m},$ имеют некоторое число общих комплексных собственных вектора $\nu^{0l},$ соответствующих собственным числам λ_l^ζ с элементарными делителями кратности $s_l.$ В данном случае, на основании определённой группировки $m+1$ функций $v_{ql},\ l = \overline{1,r},\ q = \overline{0, s_l - 1}$ всегда получим одну из двух возможностей.

1. В наборе из $m+1$ функций наряду с каждой комплекснозначной функцией вещественного аргумента содержится и комплексно сопряжённая.

2. В совокупности из $m+1$ функций имеется одна комплекснозначная функция вещественного аргумента, не имеющая комплесно сопряжённой.

В каждом из этих случаев дифференциальная система (1.16) будет иметь следующие автономные первые интегралы.

В первом случае это — функция

$$F\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\Bigl[\bigl(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\bigr)^2+\bigl(\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x\bigr)^2\Bigr]^{\overset{*}{h}_{0\xi}}\exp\Bigl[-2\,\tilde{h}_{0\xi}\operatorname{arctg}\frac{\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x}{\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x}+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\bigl(\overset{*}{h}_{q\xi}\,\overset{*}{v}_{q\xi}(x)-\tilde{h}_{q\xi}\,\tilde{v}_{q\xi}(x)\bigr)\Bigr]\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl|\nu^{0\theta}x\bigr|^{h_{0\theta}}\exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}h_{q\theta}\,v_{q\theta}(x)$$

на области $\mathcal{X}$ из множества определения $\mathrm{D}(F)$, где вещественные числа $\overset{*}{h}_{q\xi}$, $\tilde{h}_{q\xi}$ и $h_{q\theta}$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{k_1}2\Bigl[\bigl(\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j\,\overset{*}{h}_{0\xi}-\overset{\sim}{\lambda}{}_\xi^j\,\tilde{h}_{0\xi}\bigr)+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\bigl(\overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j\,\overset{*}{h}_{q\xi}-\overset{\sim}{\mu}{}_{q\xi}^j\,\tilde{h}_{q\xi}\bigr)\Bigr]+$$

$$+\sum_{\theta=1}^{k_2}\Bigl(\lambda_\theta^j\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j\,h_{q\theta}\Bigr)=0,\ \ j=\overline{1,m},$$

а $\lambda_\xi^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j+\overset{\sim}{\lambda}{}_\xi^j\,i$ и λ_θ^j — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi}=\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}+\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}\,i$, $\xi=\overline{1,k_1}$, и $\nu^{0\theta}$, $\theta=\overline{1,k_2}$. Числа

$$\overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j=\operatorname{Re}\bigl[\mathfrak{p}_j\,v_{q\xi}(x)\bigr],\ \ \overset{\sim}{\mu}{}_{q\xi}^j=\operatorname{Im}\bigl[\mathfrak{p}_j\,v_{q\xi}(x)\bigr],\ \ \mu_{q\theta}^j=\mathfrak{p}_j\,v_{q\theta}(x),\ \forall x\in\mathcal{X},$$

$$q=\overline{1,\varepsilon_k},\ k=\xi\ \text{или}\ k=\theta,\ \xi=\overline{1,k_1},\ \theta=\overline{1,k_2},\ \ j=\overline{1,m}.$$

Функции $v_{q\xi}=\overset{*}{v}_{q\xi}+\tilde{v}_{q\xi}\,i$ и v_q^θ находятся из системы (3.42), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\varepsilon_\xi+\sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\varepsilon_\theta=m-2k_1-k_2+1$ при $2k_1+k_2\leqslant r$, $\varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1$, $\theta=\overline{1,k_2}$, где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых собственных векторов, а k_2 — количество вещественных собственных векторов матриц $A_j, j=\overline{1,m}$.

Пример 3.9. Система в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1&=(3,-4,4,1,0,2)x\,dt_1+(0,-4,2,1,-1,1)x\,dt_2-(3,-2,4,3,0,2)x\,dt_3,\\
dx_2&=-(1,-3,3,0,2,3)x\,dt_1+(1,3,0,0,1,-1)x\,dt_2+(2,-3,3,3,-1,2)x\,dt_3,\\
dx_3&=-(3,-5,5,1,2,4)x\,dt_1-(0,-6,2,1,-2,1)x\,dt_2+(3,-3,5,4,0,2)x\,dt_3,\\
dx_4&=(3,-6,4,4,-1,5)x\,dt_1+(2,-6,2,3,-4,2)x\,dt_2-(3,-2,6,4,1,1)x\,dt_3,\\
dx_5&=(5,-5,8,3,3,6)x\,dt_1+(1,-6,3,2,-2,2)x\,dt_2-(3,-3,6,4,1,2)x\,dt_3,\\
dx_6&=-(2,-5,4,3,-1,2)x\,dt_1-(2,-4,3,3,-2,2)x\,dt_2+(2,-1,4,2,1,0)x\,dt_3
\end{aligned}\tag{3.45}$$

является вполне разрешимой. Собственному числу $\lambda_1^1 = 1{+}2i$ соответствует элементарный делитель $\bigl(\lambda^1 - 1 - 2i\bigr)^3$ кратности три, а также собственный вектор $\nu^0 = (1, 0, 1+i, 1, i, 1)$, первый и второй присоединённые векторы $\nu^1 = (1, 1+i, 0, 0, i, i)$ и $\nu^2 = (2+2i, 0, 2+2i, 0, 2i, 2i)$. По ним составляем скалярные функции

$$\overset{*}{v}_1\colon x \to \bigl[(x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6) \ + \ (x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6)\bigr]/P(x),$$

$$\widetilde{v}_1\colon x \to \bigl[(x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6) - (x_1+x_2)(x_3+x_5)\bigr]/P(x),$$

$$\overset{*}{v}_2\colon x \to \Bigl\{\bigl[(x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6) - (x_1+x_2)(x_3+x_5)\bigr]^2 + \\ + 2P(x)\bigl[(x_1+x_3)(x_1+x_3+x_4+x_6) + (x_3+x_5)(x_1+x_3+x_5+x_6)\bigr] - \\ - \bigl[(x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6) \ + \ (x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6)\bigr]^2\Bigr\}/P(x),$$

$$\widetilde{v}_2\colon x \to 2\bigl\{P(x)\bigl[(x_1+x_3+x_4+x_6)(x_1+x_3+x_5+x_6) - \\ - (x_1+x_3)(x_3+x_5)\bigr] + \bigl[(x_3+x_5)(x_1+x_2) - (x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6)\bigr]\cdot \\ \cdot\bigl[(x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6) + (x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6)\bigr]\bigr\}/P(x), \ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $P\colon x \to (x_1+x_3+x_4+x_6)^2 + (x_3+x_5)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^6.$ Тогда функции

$$F_1\colon x \to P(x)\exp\bigl[-4\varphi(x) + 6\,\overset{*}{v}_1(x) + 2\,\widetilde{v}_1(x)\bigr], \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.46}$$

$$F_2\colon x \to P^2(x)\exp\bigl[-2\varphi(x) + \overset{*}{v}_2(x) - \widetilde{v}_2(x)\bigr], \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.47}$$

и

$$F_3\colon x \to 2\,\widetilde{v}_1(x) - 2\,\overset{*}{v}_2(x) - \widetilde{v}_2(x), \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.48}$$

где функция $\varphi\colon x \to \operatorname{arctg}\dfrac{x_3+x_5}{x_1+x_3+x_4+x_6}, \ \forall x \in \mathcal{X},$ образуют базис автономных первых интегралов системы (3.45) на областях $\mathcal{X},$ содержащихся в множестве $\{x\colon x_1+x_3+x_4+x_6 \neq 0\}$ фазового пространства $\mathbb{R}^6.$

Во втором случае будем различать две возможности.

Случай а. Общий собственный вектор матриц $A_j, \ j = \overline{1,m},$ не имеет комплексно сопряжённого вектора. Тогда вполне разрешимая система (1.16) имеет автономные первые интегралы:

$$F_1\colon x \to \prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl[P_\xi(x)\bigr]^{\overset{*}{h}_{0\xi}+\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}}\exp\Bigl\{-2\bigl(\widetilde{h}_{0\xi} - \widetilde{h}_{0,(k_1+\xi)}\bigr)\varphi_\xi(x) + \\ + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\Bigl[\bigl(\overset{*}{h}_{q\xi} + \overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\bigr)\,\overset{*}{v}_{q\xi}(x) + \bigl(\widetilde{h}_{q,(k_1+\xi)} - \widetilde{h}_{q\xi}\bigr)\,\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr]\Bigr\}\cdot$$

$$\cdot \bigl[P_{2k_1+1}(x)\bigr]^{\overset{*}{h}_{0,(2k_1+1)}} \exp\Bigl[-2\,\widetilde{h}_{0,(2k_1+1)}\,\varphi_{2k_1+1}(x)\Bigr]\cdot$$

$$\cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} \bigl(\nu^{0\theta}x\bigr)^{2\overset{*}{h}_{0\theta}} \exp\Bigl[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \overset{*}{h}_{q\theta}\, v_{q\theta}(x)\Bigr], \ \ \forall x\in\mathcal{X},$$

и

$$F_2\colon x\to \prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl[P_\xi(x)\bigr]^{\widetilde{h}_{0\xi}+\widetilde{h}_{0,(k_1+\xi)}} \exp\Bigl\{2\bigl(\overset{*}{h}_{0\xi}-\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}\bigr)\,\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\Bigl[\bigl(\widetilde{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{q,(k_1+\xi)}\bigr)\,\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\overset{*}{h}_{q\xi}-\overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\bigr)\,\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr]\Bigr\}\cdot$$

$$\cdot \bigl[P_{2k_1+1}(x)\bigr]^{\widetilde{h}_{0,(2k_1+1)}} \exp\Bigl[2\,\overset{*}{h}_{0,(2k_1+1)}\,\varphi_{2k_1+1}(x)\Bigr]\cdot$$

$$\cdot \prod_{\theta=1}^{k_2} \bigl(\nu^{0\theta}x\bigr)^{2\widetilde{h}_{0\theta}} \exp\Bigl[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \widetilde{h}_{q\theta}\, v_{q\theta}(x)\Bigr], \ \forall x\in\mathcal{X}, \ \ \mathcal{X}\subset \mathrm{D}(F_1)\cap \mathrm{D}(F_2),$$

где полиномы $P_\xi\colon x\to \bigl(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\bigr)^2+\bigl(\widetilde{\nu}{}^{0\xi}x\bigr)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, скалярные функции $\varphi_\xi\colon x\to \operatorname{arctg}\dfrac{\widetilde{\nu}{}^{0\xi}x}{\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x}$, $\forall x\in\mathcal{X}$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\xi=2k_1+1$. Числа $h_{q\xi}=\overset{*}{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{q\xi}\,i$, $h_{q\theta}=\overset{*}{h}_{q\theta}+\widetilde{h}_{q\theta}\,i$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,2k_1+1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1}\Bigl(\lambda_\xi^j h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j h_{q\xi}\Bigr)+\lambda_{2k_1+1}^j h_{0,(2k_1+1)}+\sum_{\theta=1}^{k_2}\Bigl(\lambda_\theta^j h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j h_{q\theta}\Bigr)=0,\, j=\overline{1,m},$$

где $\lambda_\xi^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j+\widetilde{\lambda}{}_\xi^j\,i$, $\lambda_{k_1+\xi}^j=\overline{\lambda_\xi^j}$, $\lambda_{2k_1+1}^j=\overset{*}{\lambda}{}_{2k_1+1}^j+\widetilde{\lambda}{}_{2k_1+1}^j\,i$, и λ_θ^j — комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, соответственно, которым соответствуют комплексные $\nu^{0\xi}=\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}+\widetilde{\nu}{}^{0\xi}\,i$, $\nu^{0,(k_1+\xi)}=\overline{\nu^{0\xi}}$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\nu^{0,(2k_1+1)}=\overset{*}{\nu}{}^{0,(2k_1+1)}+\widetilde{\nu}{}^{0,(2k_1+1)}\,i$, и вещественные $\nu^{0\theta}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, собственные векторы, а числа

$$\mu_{q\xi}^j=\mathfrak{p}_j\, v_{q\xi}(x),\ \ \overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j=\operatorname{Re}\mu_{q\xi}^j,\ \ \widetilde{\mu}{}_{q\xi}^j=\operatorname{Im}\mu_{q\xi}^j,\ \ \mu_{q\theta}^j=\mathfrak{p}_j\, v_{q\theta}(x),\ \forall x\in\mathcal{X},$$

при $q=\overline{1,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,2k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, $j=\overline{1,m}$. Функции $v_{q\xi}=\overset{*}{v}_{q\xi}+\widetilde{v}_{q\xi}i$ и $v_{q\theta}$, $q=\overline{1,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, находятся из системы (3.42), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\varepsilon_\xi+\sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\varepsilon_\theta=m-2k_1-k_2$ при $2k_1+1+k_2\leqslant r,\ \varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1,$ $\xi=\overline{1,k_1},\ \varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1,\ \theta=\overline{1,k_2},$ где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых собственных векторов, а k_2 — количество вещественных собственных векторов матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}.$

Пример 3.10. Система уравнений в полных дифференциалах

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= (1,-2,2,0,1,1)x\,dt_1+(0,2,0,0,1,1)x\,dt_2+\\
&\qquad +(3,0,0,0,-1,-1)x\,dt_3+(1,-2,4,0,2,2)x\,dt_4,\\
dx_2 &= (0,2,-2,0,-2,-2)x\,dt_1-(1,3,0,0,1,1)x\,dt_2+\\
&\qquad +(-1,2,0,0,1,1)x\,dt_3-(2,1,4,0,4,4)x\,dt_4,\\
dx_3 &= (0,3,-2,0,-2,-2)x\,dt_1-(1,3,1,0,2,2)x\,dt_2+\\
&\qquad +(-2,-1,2,0,1,1)x\,dt_3-(3,-2,7,0,5,5)x\,dt_4, \qquad (3.49)\\
dx_4 &= (0,-4,0,2,-2,2)x\,dt_1+(2,2,0,1,0,4)x\,dt_2+\\
&\qquad +(1,2,-2,1,-1,-1)x\,dt_3+(3,-4,10,2,7,7)x\,dt_4,\\
dx_5 &= (2,-3,4,2,2,4)x\,dt_1+(3,3,2,2,1,4)x\,dt_2+\\
&\qquad +(2,1,-1,0,0,-1)x\,dt_3+(3,-2,9,0,7,5)x\,dt_4,\\
dx_6 &= (-1,3,-2,-2,1,-1)x\,dt_1-(2,1,2,2,1,4)x\,dt_2+\\
&\qquad +(-1,-1,1,0,1,2)x\,dt_3+(1,4,-5,0,-4,-2)x\,dt_4
\end{aligned}
$$

вполне разрешима. На основании собственных чисел $\lambda_1^1=1+i,\ \lambda_2^1=2i,$ которым соответствуют элементарные делители $(\lambda^1-1-i)^2$ и $\lambda^1-2i,$ собственных $\nu^{01}=(1,1+i,0,0,i,i),\ \nu^{02}=(1,0,1+i,1,i,1)$ и присоединённого $\nu^{11}=(1+i,0,1+i,0,i,i)$ векторов, строим функции

$$\overset{*}{v}_1\colon x\to\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_2+x_5+x_6)(x_1+x_3+x_5+x_6)}{P_1(x)},\ \forall x\in\mathcal{X},$$

$$\widetilde{v}_1\colon x\to\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_3+x_5+x_6)-(x_1+x_3)(x_2+x_5+x_6)}{P_1(x)},\ \forall x\in\mathcal{X},$$

где $P_1\colon x\to(x_1+x_2)^2+(x_2+x_5+x_6)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^6.$ Автономный интегральный базис системы (3.49) образуют скалярные функции

$$F_1\colon x\to P_1(x)\big[P_2(x)\big]^2\exp\big[-10\varphi_1(x)+8\overset{*}{v}_1(x)+6\,\widetilde{v}_1(x)\big],\ \forall x\in\mathcal{X}, \qquad (3.50)$$

и

$$F_2\colon x \to \bigl[P_1(x)\bigr]^3 \exp\bigl[-10\varphi_1(x)-4\varphi_2(x)+12\overset{*}{v}_1(x)+14\tilde{v}_1(x)\bigr],\ \forall x\in\mathcal{X}, \quad (3.51)$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\bigl\{x\colon x_1+x_2\neq 0,\ x_1+x_3+x_4+x_6\neq 0\bigr\}$, полином $P_2\colon x \to (x_1+x_3+x_4+x_6)^2+(x_3+x_5)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}^6$, функции $\varphi_1\colon x\to \operatorname{arctg}\dfrac{x_2+x_5+x_6}{x_1+x_2}$, $\varphi_2\colon x\to\operatorname{arctg}\dfrac{x_3+x_5}{x_1+x_3+x_4+x_6}$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

Случай б. Функция $v_{l\gamma},\ \gamma\in\{1,\dots,k_1\},\ l\in\{1,\dots,\varepsilon_\gamma\}$, не имеет комлексно сопряжённой функции. Тогда у дифференциальной системы (1.16) существуют автономные первые интегралы

$$F_1\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl[P_\xi(x)\bigr]^{\overset{*}{h}_{0\xi}+\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}}\exp\Bigl\{-2\bigl(\tilde{h}_{0\xi}-\tilde{h}_{0,(k_1+\xi)}\bigr)\,\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2(1-\delta_{ql}\delta_{\xi\gamma})\Bigl[\bigl(\overset{*}{h}_{q\xi}+\overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\bigr)\,\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\tilde{h}_{q,(k_1+\xi)}-\tilde{h}_{q\xi}\bigr)\,\tilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr]+$$

$$+2\Bigl(\overset{*}{h}_{l\gamma}\,\overset{*}{v}_{l\gamma}(x)-\tilde{h}_{l\gamma}\,\tilde{v}_{l\gamma}(x)\Bigr)\Bigr\}\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\nu^{0\theta}x\bigr)^{2\,\overset{*}{h}_{0\theta}}\exp\Bigl[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\overset{*}{h}_{q\theta}\,v_{q\theta}(x)\Bigr],\ \forall x\in\mathcal{X},$$

и

$$F_2\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl[P_\xi(x)\bigr]^{\tilde{h}_{0\xi}+\tilde{h}_{0,(k_1+\xi)}}\exp\Bigl\{2\bigl(\overset{*}{h}_{0\xi}-\overset{*}{h}_{0,(k_1+\xi)}\bigr)\,\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2(1-\delta_{ql}\delta_{\xi\gamma})\Bigl[\bigl(\tilde{h}_{q\xi}+\tilde{h}_{q,(k_1+\xi)}\bigr)\,\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\overset{*}{h}_{q\xi}-\overset{*}{h}_{q,(k_1+\xi)}\bigr)\,\tilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr]+$$

$$+2\bigl(\overset{*}{h}_{l\gamma}\,\tilde{v}_{l\gamma}(x)+\tilde{h}_{l\gamma}\,\overset{*}{v}_{l\gamma}(x)\bigr)\Bigr\}\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\nu^{0\theta}x\bigr)^{2\,\tilde{h}_{0\theta}}\exp\Bigl[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\tilde{h}_{q\theta}\,v_{q\theta}(x)\Bigr],\ \forall x\in\mathcal{X},$$

на области $\mathcal{X}$ из $\mathrm{D}(F_1)\cap\mathrm{D}(F_2)$, где функции $P_\xi\colon x\to\bigl(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\bigr)^2+\bigl(\tilde{\nu}^{\,0\xi}x\bigr)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\varphi_\xi\colon x\to\operatorname{arctg}\dfrac{\tilde{\nu}^{\,0\xi}x}{\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x}$, $\forall x\in\mathcal{X}$, $\xi=\overline{1,k_1}$, а δ — символ Кронекера. Числа $h_{q\xi}=\overset{*}{h}_{q\xi}+\tilde{h}_{q\xi}\,i$, $h_{q\theta}=\overset{*}{h}_{q\theta}+\tilde{h}_{q\theta}\,i$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,2k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1}\Bigl(\lambda_\xi^j h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j h_{q\xi}\Bigr)-\mu_{l,(k_1+\gamma)}^j h_{l,(k_1+\gamma)}+\sum_{\theta=1}^{k_2}\Bigl(\lambda_\theta^j h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j h_{q\theta}\Bigr)=0,\ j=\overline{1,m},$$

где $\lambda_\xi^j = \overset{*}{\lambda}{}_\xi^j + \widetilde{\lambda}{}_\xi^j i$, $\lambda_{k_1+\xi}^j = \overline{\lambda_\xi^j}$ и λ_θ^j — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j=\overline{1,m}$, которым соответствуют комплексные $\nu^{0\xi} = \overset{*}{\nu}{}^{0\xi} + \widetilde{\nu}^{\,0\xi} i$, $\nu^{0,(k_1+\xi)} = \overline{\nu^{0\xi}}$, $\xi=\overline{1,k_1}$, и вещественные $\nu^{0\theta}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, собственные векторы, а числа

$$\mu_{q\xi}^j = \mathfrak{p}_j\, v_{q\xi}(x),\ \ \overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j = \operatorname{Re}\mu_{q\xi}^j,\ \ \widetilde{\mu}{}_{q\xi}^j = \operatorname{Im}\mu_{q\xi}^j,\ \ \mu_{q\theta}^j = \mathfrak{p}_j\, v_{q\theta}(x)$$

при $q=\overline{1,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,2k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, $j=\overline{1,m}$. Функции $v_{q\xi} = \overset{*}{v}_{q\xi} + \widetilde{v}_{q\xi} i$ и $v_{q\theta}$, $q=\overline{1,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\theta=\overline{1,k_2}$, находятся из системы (3.42), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство $2\sum\limits_{\xi=1}^{k_1}\varepsilon_\xi + \sum\limits_{\theta=1}^{k_2}\varepsilon_\theta = m-2k_1-k_2+2$ при $2k_1+k_2\leqslant r$, $\varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1$, $\xi=\overline{1,k_1}$, $\varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1$, $\theta=\overline{1,k_2}$, где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов, а k_2 — количество общих вещественных собственных векторов матриц A_j, $j=\overline{1,m}$.

Пример 3.11. Система уравнений в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}
dx_1 &= (3,-4,4,1,0,2)x\,dt_1 + (0,-4,2,1,-1,1)x\,dt_2,\\
dx_2 &= (-1,3,-3,0,-2,-3)x\,dt_1 + (1,3,0,0,1,-1)x\,dt_2,\\
dx_3 &= (-3,5,-5,-1,-2,-4)x\,dt_1 + (0,6,-2,-1,2,-1)x\,dt_2,\\
dx_4 &= (3,-6,4,4,-1,5,)x\,dt_1 + (2,-6,2,3,-4,2)x\,dt_2,\\
dx_5 &= (5,-5,8,3,3,6)x\,dt_1 + (1,-6,3,2,-2,2)x\,dt_2,\\
dx_6 &= (-2,5,-4,-3,1,-2)x\,dt_1 + (-2,4,-3,-3,2,-2)x\,dt_2
\end{aligned}\tag{3.52}$$

является вполне разрешимой. На основании собственного числа $\lambda_1^1 = 1+2i$, которому соответствует элементарный делитель $(\lambda^1-1-2i)^3$ кратности три, собственного $\nu^0=(1,0,1+i,1,i,1)$ и присоединённых векторов $\nu^1=(1,1+i,0,0,i,i)$, $\nu^2=(2+2i,0,2+2i,0,2i,2i)$ строим функции

$$F_1\colon x\to P(x)\exp\bigl[-\varphi(x)-\widetilde{v}_1(x)\bigr],\ \forall x\in\mathcal{X},\tag{3.53}$$

$$F_2\colon x\to P(x)\exp\bigl[-2\varphi(x)+2\,\overset{*}{v}_1(x)\bigr],\ \forall x\in\mathcal{X},\tag{3.54}$$

$$F_3\colon x\to P^2(x)\exp\bigl[-2\varphi(x)-\widetilde{v}_2(x)\bigr],\ \forall x\in\mathcal{X},\tag{3.55}$$

и

$$F_4\colon x\to \overset{*}{v}_2(x),\ \forall x\in\mathcal{X},\tag{3.56}$$

где функции P, φ, $\widetilde{v}_1$, $\overset{*}{v}_1$, $\widetilde{v}_2$ и $\overset{*}{v}_2$ аналитически заданы в примере 3.9 и посредством которых построен интегральный базис системы (3.45). Скалярные функции (3.53) – (3.56), будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов дифференциальной системы (3.52) на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1+x_3+x_4+x_6\neq 0\}$.

3.2.3. Неавтономные первые интегралы

Теорема 3.9. Пусть ν — общий вещественный собственный вектор матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$. Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы (1.16) является скалярная функция

$$F\colon (t,x)\to (\nu x)\exp\Bigl[-\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\,t_j\Bigr],\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^{n+m},$$

где λ^j — вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$, которым соответствует собственный вектор ν.

Доказательство теоремы 3.9 основано на тех же принципах, что и доказательство теоремы 3.3.

Пример 3.12 (продолжение примера 3.5). На основании собсвенных чисел $\lambda_1^1=-2,\ \lambda_1^2=1$ и $\lambda_2^1=0,\ \lambda_2^2=-1$, и соответствующих им общих собстевенных векторов $\nu^1=(0,-1,1,1)$ и $\nu^2=(1,0,0,0)$ по теореме 3.9 строим первые интегралы $F_1\colon (t,x)\to(-x_2+x_3+x_4)\exp[2t_1-t_2],\ \forall(t,x)\in\mathbb{R}^6$, и $F_2\colon (t,x)\to x_1\exp t_2,\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^6$, системы (3.25). Функции (3.26), (3.27), F_1 и F_2 образуют базис первых интегралов системы (3.25) на областях $\mathbb{R}^2\times\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_1\neq 0\}$.

Следствие 3.3. Пусть $\nu=\overset{*}{\nu}+\widetilde{\nu}i$ — общий комплексный собственный вектор матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.16) являются скалярные функции

$$F_1\colon (t,x)\to\Bigl[\bigl(\overset{*}{\nu}x\bigr)^2+\bigl(\widetilde{\nu}x\bigr)^2\Bigr]\exp\Bigl[-2\sum_{j=1}^{m}\overset{*}{\lambda}{}^j\,t_j\Bigr],\ \forall (t,x)\in\mathbb{R}^{n+m},$$

и

$$F_2\colon (t,x)\to\operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}x}{\overset{*}{\nu}\,x}\ -\ \sum_{j=1}^{m}\widetilde{\lambda}{}^j\,t_j,\ \forall (t,x)\in\mathcal{D},\ \ \mathcal{D}\subset\mathbb{R}^{n+m},$$

где $\lambda^j=\overset{*}{\lambda}{}^j+\widetilde{\lambda}{}^j\,i$ — собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$, которым соответствует собственный вектор ν.

Пример 3.13 (продолжение примера 3.6). На основании собственных чисел $\lambda_1^1=1$ и $\lambda_1^2=-i$, и соответствующего им общего комплексного собственного вектора $\nu^1=(1,i,0)$, строим первые интегралы вполне разрешимой автономной системы (3.36): $F_1\colon (t,x)\to(x_1^2+x_2^2)\exp(-2t_1),\forall(t,x)\in\mathbb{R}^5$, и $F_2\colon (t,x) \to \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} + t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$ (следствие 3.3). Функции (3.37), F_1 и F_2, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (3.36) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_1 \neq 0,\ x_3 \neq 0\}$.

Пример 3.14 (продолжение примера 3.7). На основании собственных чисел $\lambda_1^1 = -1$ и $\lambda_1^2 = -i$, и соответствующего им общего комплексного собственного вектора $\nu^1 = (0, -i, 0, 1)$, строим (следствие 3.3) первые интегралы системы (3.40): $F_1\colon (t,x) \to (x_2^2 + x_4^2)\exp(2t_1),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^6$, и $F_2\colon (t,x) \to \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_4} - t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$. Скалярные функции (3.41), F_1 и F_2, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы (3.40) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0,\ x_4 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{R}^4$.

Аналогично теореме 3.4 доказывается

Теорема 3.10. Пусть ν^0 и ν^θ, $\theta = \overline{1, s-1}$, — общий вещественный собственный вектор матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ, которые соответствуют собственному числу λ^ζ, имеющему элементарный делитель кратности $s \geqslant 2$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.16) являются функции

$$F_q\colon (t,x) \to v_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^{m} \mu_{q\zeta}^j t_j,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X},\ \ q = \overline{1, s-1},$$

где скалярные функции $v_{q\zeta}\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ находятся из системы (3.42), а числа $\mu_{q\zeta}^j = \mathfrak{p}_j\, v_{q\zeta}(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\ \mu_{q\zeta}^j = \text{const},\ q = \overline{1, s-1},\ j = \overline{1,m}.$

Пример 3.15 (продолжение примера 3.8). По теореме 3.10, учитывая, что $\mu_1^1 = 1$, $\mu_3^1 = 0$, $\mu_1^2 = -1$, $\mu_3^2 = 6$, строим первые интегралы вполне разрешимой системы (3.43): $F_1\colon (t,x) \to v_1(x) - t_1 + t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, и $F_2\colon (t,x) \to v_3(x) - 6t_2,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$, где функции v_1 и v_3 аналитически заданы в примере 3.8 и посредством которых построен автономный базис системы (3.43), а $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + x_3 \neq 0\}$. Скалярнные функции (3.44), F_1 и F_2, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (3.43) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Следствие 3.4. Пусть ν^0 и ν^θ, $\theta = \overline{1, s-1}$, — общий комплексный собственный вектор матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ, которые соответствуют существенно комплексному собственному числу λ^ζ, имеющему элементарный делитель кратности $s \geqslant 2$. Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.16) являются скалярные функции

$$F_{1q}\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\mu}{}^{j}_{q\zeta}\, t_j,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X},\ \ q = \overline{1, s-1},$$

и

$$F_{2q}\colon (t,x) \to \widetilde{v}_{q\zeta}(x) - \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\mu}{}^{j}_{q\zeta}\, t_j,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{X},\ \ q = \overline{1, s-1},$$

где $\mathcal{X}$ — область из фазового пространства $\mathbb{R}^n$, скалярные функции $v_{q\zeta}\colon x \to \overset{*}{v}_{q\zeta}(x) + \widetilde{v}_{q\zeta}(x)\, i,\ \forall x \in \mathcal{X}$, находятся из системы (3.42), а вещественные числа $\overset{*}{\mu}{}^{j}_{q\zeta} = \mathfrak{p}_j\, \overset{*}{v}_{q\zeta}(x),\ \widetilde{\mu}{}^{j}_{q\zeta} = \mathfrak{p}_j\, \widetilde{v}_{q\zeta}(x),\ j = \overline{1,m},\ q = \overline{1, s-1}.$

Пример 3.16 (продолжение примера 3.9). Для системы (3.45) на основании следствия 3.4 строим первые интегралы: $F_{11}\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_1(x) - t_1 - t_2$, $F_{21}\colon (t,x) \to \widetilde{v}_1(x) + t_2 - t_3$ и $F_{12}\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_2(x) - 2t_3,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{X}$, где функции $\overset{*}{v}_1,\ \widetilde{v}_1$ и $\overset{*}{v}_2$ аналитически заданы в примере 3.9 и посредством которых построен автономный базис системы (3.45), а $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$. Скалярнные функции (3.46) — (3.48), $F_{11},\ F_{21}$ и F_{12}, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов дифференциальной системы (3.45) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

Пример 3.17 (продолжение примера 3.10). Для системы (3.49) на основании общего комплексного собственного вектора $\nu^{01} = (1, 1+i, 0, 0, i, i)$, соответствующего собственным числам $\lambda_1^1 = 1 + i,\ \lambda_1^2 = -1,\ \lambda_1^3 = 2$ и $\lambda_1^4 = -1 + 2i$ строим (следствие 3.3) первые интегралы

$$F_1\colon (t,x) \to \big[(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_5 + x_6)^2\big] \exp[-2t_1 + 2t_2 - 4t_3 + 2t_4]$$

и

$$F_2\colon (t,x) \to \operatorname{arctg} \frac{x_2 + x_5 + x_6}{x_1 + x_2} - t_1 - 2t_4,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ есть область из множества $\{x\colon x_1 + x_2 \neq 0,\ x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$. По следствию 3.4 строим первые интегралы системы (3.49)

$$F_3\colon (t,x) \to \overset{*}{v}_1(x) - t_1 + t_3 - t_4,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

и

$$F_4\colon (t,x) \to \widetilde{v}_1(x) - t_2 - t_4,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{X},$$

где функции $\overset{*}{v}_1$ и $\widetilde{v}_1$ аналитически заданы в примере 3.10 и посредством которых построен автономный базис дифференциальной системы (3.49).

Скалярнные функции (3.50), (3.51), $F_1, \ldots, F_4$, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (3.49) на областях $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{X}$.

Пример 3.18 (продолжение примера 3.11). Для вполне разрешимой системы (3.52) по следствию 3.4 строим первые интегралы

$$F_1 \colon (t, x) \to \overset{*}{v}_1(x) - t_1 - t_2,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

и

$$F_2 \colon (t, x) \to \widetilde{v}_1(x) + t_2,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X},$$

где функции $\overset{*}{v}_1$ и $\widetilde{v}_1$ аналитически заданы в примере 3.9 и посредством которых построен автономный базис дифференциальной системы (3.45), а $\mathcal{X}$ есть произвольная область из множества $\{x \colon x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$.

Скалярнные функции (3.53) — (3.56), F_1 и F_2, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов системы уравнений в полных дифференциалах (3.52) на областях $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}$.

3.3. Интегралы обыкновенной линейной однородной стационарной системы

3.3.1. Автономные первые интегралы

Пусть матрица B является транспонированной к матрице A.

Методами, аналогично применёнными для доказательства теорем из параграфов 3.1 и 3.2, устанавливаем следующие закономерности относительно дифференциальной системы (1.17).

Теорема 3.11. Если ν — собственный вектор матрицы B, то гиперплоскость $p = \{x \colon \nu x = 0\}$ является гиперплоскостью траекторий линейной однородной стационарной дифференциальной системы (1.17).

3.3.1.1. *Случай вещественных собстенных чисел.*

Теорема 3.12. Пусть ν^1 и ν^2 — вещественные собственные векторы матрицы B, соответствующие её различным собственным числам λ_1 и λ_2. Тогда автономным первым интегралом системы (1.17) является функция

$$F \colon x \to \left|\nu^1 x\right|^{h_1} \left|\nu^2 x\right|^{h_2},\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.57}$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества определения $\mathrm{D}(F)$, а вещественные числа h_1 и h_2 находятся из равенства $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 = 0$ при условии $|h_1| + |h_2| \neq 0$.

Следствие 3.5. Если ν — вещественный собственный вектор матрицы B, соответствующий её нулевому собственному числу, то функция

$$F \colon x \to \nu x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.58}$$

является автономным первым интегралом системы (1.17).

Следствие 3.6. Пусть $\lambda \neq 0$ — собственное число матрицы B, которому соответствуют линейно независимые вещественные собственные векторы ν^1 и ν^2. Тогда первым интегралом системы (1.17) является функция

$$F\colon x \to \frac{\nu^1 x}{\nu^2 x}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.59}$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon \nu^2 x \neq 0\}$.

Заметим, что первые интегралы (3.58) и (3.59) являются алгебраическими. Что касается интеграла (3.57), то его алгебраичность зависит от показателей степеней h_1 и h_2. Например, при рациональных h_1 и h_2 первый интеграл (3.57) алгебраический. Однако это условие не является необходимым для алгебраичности интеграла (3.57). Вместе с тем, имеет место

Свойство 3.6 (достаточное условие алгебраичности базиса автономных первых интегралов). Если у матрицы B все собственные числа рациональные и им соответствуют простые элементарные делители, то система (1.17) имеет автономный базис, состоящий из алгебраических первых интегралов.

Пример 3.19. Для стационарной дифференциальной системы

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 - x_4, \qquad && \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4,\\ &\frac{dx_3}{dt} = 2x_2 + x_3 + x_4, \qquad && \frac{dx_4}{dt} = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \end{aligned} \tag{3.60}$$

по собственным векторам $\nu^1 = (1,-1,1,-1), \nu^2 = (2,2,1,1), \nu^3 = (1,0,1,0)$, $\nu^4 = (0,2,0,1)$ и соответствующим им вещественным собственным числам $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 2$ строим автономные первые интегралы:

$$F_1\colon x \to x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ \forall x \in \mathbb{R}^4,\ \text{(следствие 3.5)} \tag{3.61}$$

$$F_{23}\colon x \to \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4}{x_1 + x_3}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}_1,\ \text{(следствие 3.6)} \tag{3.62}$$

$$F_{24}\colon x \to \frac{(2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)^2}{2x_2 + x_4}\,,\ \forall x \in \mathcal{X}_2,\ \text{(теорема 3.12)} \tag{3.63}$$

где $\mathcal{X}_1$ — любая область из множества $W_1 = \{x\colon x_1 + x_3 \neq 0\}$, а $\mathcal{X}_2$ — любая область из множества $W_2 = \{x\colon 2x_2 + x_4 \neq 0\}$. Интегралы $F_1,\ F_{23},\ F_{24}$, будучи функционально независимыми, образуют автономный интегральный базис системы (3.60) на любой области $\mathcal{X}$ из множества $W = W_1 \cap W_2$.

3.3.1.2. *Случай комплексных собстенных чисел.*

Теорема 3.13. Пусть $\lambda = \overset{*}{\lambda} + \overset{\sim}{\lambda} i$ — существенно комплексное собственное число $(\overset{\sim}{\lambda} \neq 0)$ матрицы B, которому соответствует собственный вектор $\nu = \overset{*}{\nu} + \overset{\sim}{\nu} i$. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \left[(\overset{*}{\nu} x)^2 + (\overset{\sim}{\nu} x)^2 \right] \exp\left[-2 \, \frac{\overset{*}{\lambda}}{\overset{\sim}{\lambda}} \operatorname{arctg} \frac{\overset{\sim}{\nu} x}{\overset{*}{\nu} x} \right], \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.64}$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon \overset{*}{\nu} x \neq 0\}$, является автономным первым интегралом дифференциальной системы (1.17) на области $\mathcal{X}$.

Трансцендентность первого интеграла (3.64) зависит от того, является ли собственное число $\lambda = \overset{*}{\lambda} + \overset{\sim}{\lambda} i$ чисто мнимым (если $\overset{*}{\lambda} = 0$, то первый интеграл будет алгебраическим).

Теорема 3.14. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \overset{\sim}{\nu}{}^1 i$ и ν^2 — комплексный и вещественный собственные векторы матрицы B, которые соответствуют её существенно комплексному собственному числу $\lambda_1 = \overset{*}{\lambda}_1 + \overset{\sim}{\lambda}_1 i$ и ненулевому вещественному собственному числу λ_2. Тогда автономным первым интегралом системы (1.17) является функция $F\colon x \to \nu^2 x \, \exp\left[-\dfrac{\lambda_2}{\overset{\sim}{\lambda}_1} \operatorname{arctg} \dfrac{\overset{\sim}{\nu}{}^1 x}{\overset{*}{\nu}{}^1 x} \right]$, $\forall x \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon \overset{*}{\nu}{}^1 x \neq 0\}$.

Пример 3.20. У стационарной дифференциальной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 - x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \tag{3.65}$$

базис автономных первых интегралов на любой области $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1 - x_3 \neq 0\}$ составляют функции

$$F_1\colon x \to \left[(x_1 - x_3)^2 + x_2^2 \right] \exp\left(-6 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1 - x_3} \right) \ \text{(теорема 3.13)} \tag{3.66}$$

и

$$F_2\colon x \to (3x_1 - x_2 - x_3) \exp\left(-2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1 - x_3} \right) \ \text{(теорема 3.14)} \tag{3.67}$$

которые построены на основании собственных чисел $\lambda_1 = 3 + i$, $\lambda_2 = 2$ и соответствующих им собственных векторов $\nu^1 = (1, i, -1)$, $\nu^2 = (3, -1, -1)$.

Теорема 3.15. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \overset{\sim}{\nu}{}^1 i$ и $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \overset{\sim}{\nu}{}^2 i$ — собственные векторы матрицы A, соответствующие её существенно комплексным собственным числам $\lambda_1 = \overset{*}{\lambda}_1 + \overset{\sim}{\lambda}_1 i$ и $\lambda_2 = \overset{*}{\lambda}_2 + \overset{\sim}{\lambda}_2 i$, причём $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_2}$. Тогда функция

$F\colon x \to \ \widetilde{\lambda}_1 \operatorname{arctg} \dfrac{\widetilde{\nu}^2 x}{\overset{*}{\nu}{}^2 x} \ - \ \widetilde{\lambda}_2 \operatorname{arctg} \dfrac{\widetilde{\nu}^1 x}{\overset{*}{\nu}{}^1 x}$, $\forall x \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — область из множества $\bigl\{x\colon \overset{*}{\nu}{}^2 x \neq 0 \wedge \overset{*}{\nu}{}^1 x \neq 0\bigr\}$, является автономным первым интегралом дифференциальной системы (1.17) на области $\mathcal{X}$.

Пример 3.21. У стационарной дифференциальной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4, \qquad & \frac{dx_2}{dt} &= 8x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -9x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4, \qquad & \frac{dx_4}{dt} &= 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 \end{aligned} \tag{3.68}$$

собственным числам $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = 2i$ соответствуют собственные векторы $\nu^1 = (1-i, -1+2i, 2i, 2)$ и $\nu^2 = (i, -1, i, 1+2i)$. Функционально независимые скалярные функции (теорема 3.13)

$$F_1\colon x \to (x_1 - x_2 + 2x_4)^2 + (-x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.69}$$

$$F_2\colon x \to (-x_2 + x_4)^2 + (x_1 + x_3 + 2x_4)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^4, \tag{3.70}$$

и (теорема 3.15)

$$F_3\colon x \to \operatorname{arctg} \frac{x_1 + x_3 + 2x_4}{-x_2 + x_4} - 2 \operatorname{arctg} \frac{-x_1 + 2x_2 + 2x_3}{x_1 - x_2 + 2x_4}, \ \forall x \in \mathcal{X}, \tag{3.71}$$

образуют автономный интегральный базис системы (3.68) на любой области $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + 2x_4 \neq 0 \wedge x_2 - x_4 \neq 0\}$.

3.3.1.3. *Случай кратных элементарных делителей.*

Определение 3.3. Пусть λ — собственное число матицы B, которому соответствуют элементарный делитель кратности m и собственный вектор ν^0. Вектор ν^k, координатами которого являются решения системы уравнений

$$(B - \lambda E)\operatorname{colon}(\nu_1^k, \dots, \nu_n^k) = k \cdot \operatorname{colon}(\nu_1^{k-1}, \dots, \nu_n^{k-1}), \ k = \overline{1, m-1},$$

назовём k-ым присоединенным вектором матрицы B соответствующим собственному числу λ.

Теорема 3.16. Пусть λ — собственное число матрицы B, которому соответствуют m-кратный $(m \geqslant 2)$ элементарный делитель, вещественные собственный ν^0 и первый присоединенный ν^1 векторы. Тогда функция

$$F\colon x \to \nu^0 x \, \exp\Bigl[-\lambda \frac{\nu^1 x}{\nu^0 x}\Bigr], \ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon \nu^0 x \neq 0\}$, является автономным первым интегралом дифференциальной системы (1.17) на области $\mathcal{X}$.

Следствие 3.7. Пусть $\lambda = \overset{*}{\lambda} + \widetilde{\lambda}\, i$ — существенно комплексное собственное число матрицы B, которому соответствуют m-кратный $(m \geqslant 2)$ элементарный делитель, собственный вектор $\nu^0 = \overset{*}{\nu}{}^0 + \widetilde{\nu}^{\,0}\, i$ и первый присоединенный вектор $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \widetilde{\nu}^1\, i$. Тогда скалярные функции

$$F_1 \colon x \to \Big[\big(\overset{*}{\nu}{}^0 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^{\,0} x\big)^2\Big] \exp\Bigg[-2\,\frac{\overset{*}{\lambda}\,\alpha(x) - \widetilde{\lambda}\,\beta(x)}{\big(\overset{*}{\nu}{}^0 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^{\,0} x\big)^2}\Bigg], \ \forall x \in \mathcal{X},$$

и

$$F_2 \colon x \to \operatorname{arctg}\frac{\widetilde{\nu}^{\,0} x}{\overset{*}{\nu}{}^0 x} \; - \; \frac{\widetilde{\lambda}\,\alpha(x) + \overset{*}{\lambda}\,\beta(x)}{\big(\overset{*}{\nu}{}^0 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^{\,0} x\big)^2}\,, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $\alpha \colon x \to \overset{*}{\nu}{}^0 x\, \overset{*}{\nu}{}^1 x + \widetilde{\nu}^{\,0} x\, \widetilde{\nu}^1 x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\beta \colon x \to \overset{*}{\nu}{}^0 x\, \widetilde{\nu}^1 x - \widetilde{\nu}^{\,0} x\, \overset{*}{\nu}{}^1 x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, являются автономными первыми интегралами дифференциальной системы (1.17) на любой области $\mathcal{X}$ из множества $\big\{x \colon \overset{*}{\nu}{}^0 x \neq 0\big\}$.

Следствие 3.8. Пусть нулевому собственному числу $\lambda_1 = 0$ матрицы B соответствуют m-кратный $(m \geqslant 2)$ элементарный делитель, вещественные собственный ν^0 и присоединенный ν^1 векторы, а собственному числу λ_2 соответствует вещественный собственный вектор ν^2. Тогда функция $F \colon x \to \nu^2 x \exp\Big[-\lambda_2\,\dfrac{\nu^1 x}{\nu^0 x}\Big], \ \forall x \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — область из $\{x \colon \nu^0 x \neq 0\}$, является автономным первым интегралом системы (1.17) на области $\mathcal{X}$.

Пример 3.22. У стационарной дифференциальной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 5x_2 + 2x_3, \ \ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 - 7x_2 + 3x_3, \ \ \frac{dx_3}{dt} = 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 \qquad (3.72)$$

собственным числам $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ и $\lambda_3 = 1$ соответствуют элементарные делители λ^2 и $\lambda - 1$, собственные векторы $\nu^1 = (1, -2, 1)$, $\nu^3 = (3, -3, 1)$ и первый присоединённый вектор $\nu^2 = (0, -1, 1)$. Скалярные функции

$$F_1 \colon x \to x_1 - 2x_2 + x_3, \ \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{теорема } 3.16) \qquad (3.73)$$

и (следствие 3.8)

$$F_2 \colon x \to (3x_1 - 3x_2 + x_3) \exp\frac{x_2 - x_3}{x_1 - 2x_2 + x_3}\,, \ \forall x \in \mathcal{X}, \qquad (3.74)$$

образуют базис автономных первых интегралов системы (3.72) на любой области $\mathcal{X}$, которая содержится в множестве $\{x \colon x_1 - 2x_2 + x_3 \neq 0\}$.

Следствие 3.9. Пусть нулевому собственному числу $\lambda_1 = 0$ матрицы B соответствуют m-кратный $(m \geqslant 2)$ элементарный делитель, вещественные собственный ν^0 и первый присоединенный ν^1 векторы, а существенно комплексному собственному числу $\lambda_2 = \overset{*}{\lambda}{}^2 + \widetilde{\lambda}{}^2\, i$ соответствует собственный вектор $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \widetilde{\nu}{}^2\, i.$ Тогда скалярные функции

$$F_1\colon x \to \Big[\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}{}^2 x\big)^2\Big] \exp\Big(-2\,\overset{*}{\lambda}_2\, \frac{\nu^1 x}{\nu^0 x}\Big),\ \forall x \in \mathcal{X},$$

и

$$F_2\colon x \to\ \operatorname{arctg} \frac{\widetilde{\nu}{}^2 x}{\overset{*}{\nu}{}^2 x}\ -\ \widetilde{\lambda}_2\, \frac{\nu^1 x}{\nu^0 x}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon \nu^0 x \ne 0,\ \overset{*}{\nu}{}^2 x \ne 0\}$, являются автономными первыми интегралами системы (1.17) на области $\mathcal{X}$.

Теорема 3.17. Пусть λ — собственное число матрицы B, которому соответствуют m-кратный $(m \geqslant 2)$ элементарный делитель, собственный вектор ν^0 и $(m-1)$-присоединенных векторов ν^k, $k = \overline{1, m-1}$. Тогда функционально независимые скалярные функции

$$F_g\colon x \to \Psi_g(x),\ \forall x \in \mathcal{X},\ \ g = \overline{2, m-1}, \tag{3.75}$$

где функции $\Psi_g\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ такие, что $\nu^k x = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} \Psi_i(x) \nu^{k-i} x,\ k = \overline{1, m-1},$ а $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon \nu^0 x \ne 0\}$, являются автономными первыми интегралами дифференциальной системы (1.17) на области $\mathcal{X}$.

Замечание 3.1. Теорема 3.17 предусматривает как случай вещественного собственного числа λ матрицы B, так и комплексного. При комплексном λ первые интегралы (3.75) распадаются на вещественнозначные первые интегралы $F_{g,1}\colon x \to \operatorname{Re}\Psi_g(x)$ и $F_{g,2}\colon x \to \operatorname{Im}\Psi_g(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $g = \overline{2, m-1}$, где $\mathcal{X}$ — область из множества $\big\{x\colon \big(\overset{*}{\nu}{}^0 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}{}^0 x\big)^2 \ne 0\big\}$.

Пример 3.23. У стационарной дифференциальной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 - x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_3 \tag{3.76}$$

собственному числу $\lambda_1 = 2$ соответствуют элементарный делитель $(\lambda-2)^3$, собственный вектор $\nu^0 = (1, -1, 1)$, первый $\nu^1 = (1, 0, -1)$ и второй $\nu^2 = (0, 0, 2)$ присоединённые векторы. Функции (теорема 3.16)

$$F_1\colon (x_1, x_2, x_3) \to (x_1 - x_2 + x_3) \exp\Big(-2\,\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2 + x_3}\Big) \tag{3.77}$$

и (теорема 3.17)

$$F_2\colon (x_1, x_2, x_3) \to \frac{(x_1 - x_3)^2 - 2x_3(x_1 - x_2 + x_3)}{(x_1 - x_2 + x_3)^2}\,,\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{X}, \tag{3.78}$$

будучи функционально независимыми, образуют базис автономных первых интегралов дифференциальной системы (3.76) на любой области $\mathcal{X}$, которая содержится в множестве $\{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 - x_2 + x_3 \neq 0\}$.

Пример 3.24. Линейная однородная дифференциальная система

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_6, && \frac{dx_2}{dt} = 3x_2 - x_3 - x_5 + 2x_6,\\
&\frac{dx_3}{dt} = -x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5, && \frac{dx_4}{dt} = -x_1 + x_4 + x_5 + x_6,\\
&\frac{dx_5}{dt} = x_1 + x_2 + x_5, && \frac{dx_6}{dt} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_6
\end{aligned} \tag{3.79}$$

имеет собственное число $\lambda_1 = 1 + i$, которому соответствуют элементарный делитель $(\lambda - 1 - i)^3$ кратности три, собственный вектор $\nu^0 = (1, 1, 0, 0, i, 0)$, первый $\nu^1 = (0, 1, 0, i, i, 1)$ и второй $\nu^2 = (0, 1, i, 0, i, 0)$ присоединённые векторы. Будучи функционально независимыми, скалярные функции

$$F_1 \colon x \to P(x)\, \exp[-2\varphi(x)],\ \forall x \in \mathcal{X},\ \text{(теорема 3.13)} \tag{3.80}$$

$$F_2 \colon x \to P(x) \exp\left[-2\,\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{P(x)}\right],\ \forall x \in \mathcal{X},\ \text{(следствие 3.7)} \tag{3.81}$$

$$F_3 \colon x \to \varphi(x) - \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{P(x)}\,,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \text{(следствие 3.7)} \tag{3.82}$$

$$F_4 \colon x \to \frac{\gamma(x)P(x) + \beta^2(x) - \alpha^2(x)}{P^2(x)},\ \forall x \in \mathcal{X},\ \text{(теорема 3.17)} \tag{3.83}$$

и

$$F_5 \colon x \to \frac{\delta(x)P(x) - 2\alpha(x)\beta(x)}{P^2(x)},\ \forall x \in \mathcal{X},\ \text{(теорема 3.17)} \tag{3.84}$$

где полиномы $P \colon x \to (x_1 + x_2)^2 + x_5^2$, $\alpha \colon x \to (x_1 + x_2)(x_2 + x_6) + x_5(x_4 + x_5)$, $\beta \colon x \to (x_1 + x_2)(x_4 + x_5) - x_5(x_2 + x_6)$, $\gamma \colon x \to x_2(x_1 + x_2) + x_5(x_3 + x_5)$, $\delta \colon x \to (x_1 + x_2)(x_3 + x_5) - x_2x_5, \forall x \in \mathbb{R}^6$, функция $\varphi \colon x \to \operatorname{arctg} \dfrac{x_5}{x_1 + x_2}\,$, $\forall x \in \mathcal{X}$, образуют базис автономных первых интегралов системы (3.79) на любой области $\mathcal{X}$, которая содержится в множестве $\{x \colon x_1 + x_2 \neq 0\}$.

3.3.2. Неавтономные первые интегралы

Теорема 3.18. Пусть ν — вещественный собственный вектор матрицы B, соответствующий собственному числу λ. Тогда первым интегралом системы (1.17) является функция $F \colon (t, x) \to\ \nu x\, \exp(-\lambda\, t)$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Пример 3.25 (продолжение примера 3.19). На основании собственного числа $\lambda_2 = 1$ и соответствующего ему собственного вектора $\nu^2 = (2, 2, 1, 1)$ строим первый интеграл $F\colon (t, x) \to (2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)\, e^{-t}, \ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^5$, (теорема 3.18) стационарной дифференциальной системы (3.60).

Первые интегралы (3.61) – (3.63) и F образуют интегральный базис системы (3.60) на области $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — любая область из множества $\{x\colon x_1 + x_3 \neq 0 \wedge 2x_2 + x_4 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{R}^4$.

Пример 3.26 (продолжение примера 3.20). Для стационарной системы (3.65) на основании собственного числа $\lambda_2 = 2$ и соответствующего ему собственного вектора $\nu^2 = (3, -1, -1)$ по теореме 3.18 строим первый интеграл $F\colon (t, x_1, x_2, x_3) \to (3x_1 - x_2 - x_3)\, e^{-2t}, \ \forall (t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$.

Будучи функционально независимыми, первые интегралы (3.66), (3.67) и F образуют базис первых интегралов системы (3.65) на области $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — произвольная область из множества $\{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 - x_3 \neq 0\}$.

Следствие 3.10. Пусть $\nu = \overset{*}{\nu} + \overset{\sim}{\nu}\, i$ — собственный вектор матрицы B, соответствующий существенно комплексному собственному числу $\lambda = \overset{*}{\lambda} + \overset{\sim}{\lambda}\, i$. Тогда функции $F_1\colon (t, x) \to \Big[\big(\overset{*}{\nu} x \big)^2 + \big(\overset{\sim}{\nu} x \big)^2 \Big] \exp\big(-2\overset{*}{\lambda}\, t \big), \ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и

$F_2\colon (t, x) \to \operatorname{arctg} \dfrac{\overset{\sim}{\nu} x}{\overset{*}{\nu} x} - \overset{\sim}{\lambda}\, t, \ \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — область из множества

$\big\{ x\colon \overset{*}{\nu} x \neq 0 \big\}$, являются первыми интегралами дифференциальной системы (1.17) соответственно на пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и области $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$.

Пример 3.27 (продолжение примера 3.21). Для стационарной системы (3.68) на основании собственного числа $\lambda_1 = i$ и соответствующего ему собственного вектора $\nu^1 = (1 - i, -1 + 2i, 2i, 2)$ строим первый интеграл $F\colon (t, x) \to \operatorname{arctg} \dfrac{-x_1 + 2x_2 + 2x_3}{x_1 - x_2 + 2x_4} - t, \ \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}_1$ (следствие 3.10), где $\mathcal{X}_1$ — область из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + 2x_4 \neq 0\}$.

Первые интегралы (3.69) – (3.71) и F образуют интегральный базис системы (3.68) на области $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — любая область из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + 2x_4 \neq 0 \wedge x_4 - x_2 \neq 0\}$ фазового пространства $\mathbb{R}^4$.

Теорема 3.19. Пусть λ — собственное число матрицы B, которому соответствуют m-кратный $(m \geqslant 2)$ элементарный делитель, вещественные собственный ν^0 и первый присоединённый ν^1 вектора. Тогда функция

$$F\colon (t, x) \to \frac{\nu^1 x}{\nu^0 x} - t, \ \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}, \tag{3.85}$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\{x\colon \nu^0 x \neq 0\}$, является первым интегралом дифференциальной системы (1.17) на области $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$.

Пример 3.28 (продолжение примера 3.22). На основании собственного числа $\lambda_1 = 0$ и соответствующих ему собственного $\nu^1 = (1,\,-2,1)$ и присоединённого $\nu^2 = (0,-1,1)$ векторов по теореме 3.19 строим первый интеграл стационарной дифференциальной системы (3.72)

$$F\colon (t,x_1,x_2,x_3) \to \frac{x_3 - x_2}{x_1 - 2x_2 + x_3} \,-\, t,\ \forall (t,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^4.$$

Первые интегралы (3.73), (3.74) и F образуют интегральный базис системы (3.72) на области $\mathbb{R}\times\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — любая область из множества $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1 - 2x_2 + x_3 \ne 0\}$ фазового пространства $\mathbb{R}^3$.

Пример 3.29 (продолжение примера 3.23). На основании собственного числа $\lambda_1 = 2$ и соответствующих ему собственного $\nu^0 = (1,\,-1,1)$ и присоединённого $\nu^1 = (1,0,-1)$ векторов по теореме 3.19 строим первый интеграл линейной однородной стационарной дифференциальной системы (3.76)

$$F\colon (t,x_1,x_2,x_3) \to \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2 + x_3} \,-\, t,\ \forall (t,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^4.$$

Первые интегралы (3.77), (3.78) и F образуют интегральный базис системы (3.76) на области $\mathbb{R}\times\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — любая область из множества $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1 - x_2 + x_3 \ne 0\}$ фазового пространства $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что при комплексном λ первый интеграл (3.85) распадается на два вещественнозначных первых интеграла

$$F_1\colon (t,x) \to \frac{\overset{*}{\nu}{}^0 x\,\overset{*}{\nu}{}^1 x + \widetilde{\nu}{}^0 x\,\widetilde{\nu}{}^1 x}{\bigl(\overset{*}{\nu}{}^0 x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}{}^0 x\bigr)^2} - t,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{X},$$

и

$$F_2\colon (t,x) \to \frac{\overset{*}{\nu}{}^0 x\,\widetilde{\nu}{}^1 x - \widetilde{\nu}{}^0 x\,\overset{*}{\nu}{}^1 x}{\bigl(\overset{*}{\nu}{}^0 x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}{}^0 x\bigr)^2},\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — область из множества $\bigl\{x\colon \bigl(\overset{*}{\nu}{}^0 x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}{}^0 x\bigr)^2 \ne 0\bigr\}$.

Пример 3.30 (продолжение примера 3.24). На основании собственного числа $\lambda_1 = 1 + i$ и соответствующих ему собственного $\nu^0 = (1,1,0,0,i,0)$ и присоединённого $\nu^1 = (0,1,0,i,i,1)$ векторов строим первый интеграл

$$F\colon (t,x) \to \frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_6) + x_5(x_4 + x_5)}{(x_1 + x_2)^2 + x_5^2} \,-\, t,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{X},$$

линейной однородной стационарной дифференциальной системы (3.79).

Скалярные функции (3.80) – (3.84) и F образуют базис первых интегралов стационарной системы (3.79) на области $\mathbb{R}\times\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — любая область из множества $\{x\colon x_1 + x_2 \ne 0\}$ фазового пространства $\mathbb{R}^6$.

Краткие выводы по главе 3

Для вполне разрешимых автономных $\mathbb{R}$-линейной и вещественной линейной систем уравнений в полных дифференциалах разработан спектральный метод построения базиса (автономного и неавтономного) первых интегралов (параграфы 3.1 и 3.2). В зависимости от собственных чисел и общих собственных векторов перестановочных матриц указаны виды интегралов. Тем самым, представляется возможность изучения как аналитических, так и топологических характеристик многообразий, определяемых этими системами.

Построение интегрального базиса (автономного и неавтономного) рассматриваемых систем основано на решении следующих задач:

— составление интегральной характеристической системы;

— выделение базовых $\mathbb{R}$-линейных частных интегралов по интегральным характеристическим корням и общим собственным векторам перестановочных матриц;

— построение первых интегралов по общим собственным векторам перестановочных матриц;

— построение первых интегралов по общим собственным и присоединённым векторам перестановочных матриц.

Предложен спектральный метод построения базиса первых интегралов обыкновенной линейной однородной стационарной системы (параграф 3.3). В зависимости от того являются ли собственные числа вещественными, комплексными или им соответствуют кратные элементарные делители, определяется аналитическая структура интегралов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены признаки и критерии существования (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов, (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых последних множителей и (s_1, s_2)-неавтономных $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричных $\mathbb{R}$-дифференцируемых частных интегралов у системы уравнений в полных дифференциалах [104 − 107, 109].

Разработан спектральный метод построения автономного и неавтономного базисов $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов для вполне разрешимой автономной $\mathbb{R}$-линейной системы уравнений в полных дифференциалах [100, 103, 108].

Разработан спектральный метод построения автономного и неавтономного базисов первых интегралов для вполне разрешимой вещественной автономной линейной однородной системы уравнений в полных дифференциалах [93 − 96, 98, 99, 102].

Предложен спектральный метод построения автономного и неавтономного базисов первых интегралов для обыкновенной линейной однородной стационарной системы [97, 101].

В работе приведены примеры в которых иллюстрируются теоретические исследования, выполненные в диссертации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Liouville J. Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites// J. math. pures et appl. – 1839. – Vol. 4. – P. 423 – 456.

2. Liouville J. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati// J. math. pures et appl. – 1841. – Vol. 6. – P. 1 – 13, 36.

3. Jacobi C.G.J. Theoria nova multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi// J. für reine und angew. Math. – 1844. – Vol. 27. – S. 199 – 268; 1845. – Vol. 29. – S. 213 – 279, 333 – 376.

4. Jacobi C.G.J. Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren// J. für reine und angew. Math. – 1827. – Bd. 2, H. 2. – S. 347 – 357.

5. Darboux G. Mémoire sur les équations differentielles algebriques du premier orde et du premier degré// Bull. des sci. math. – 1878. – Vol. 2. – P. 60 – 96; 125 – 144; 151 – 200.

6. Lie S. Über Gruppen von Transformationen// Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. – 1874. – Bd. 9. – S. 529 – 542.

7. Lie S. Zur Theorie des Integrabilitätsfactors// Förhandl. vid.-selsk. Christiania. – 1874 – 1875. – Bd. 8. – S. 242 – 254.

8. Lie S. Verallgemeinerung und neue Verwertung der Jacobischen Multiplicator-Theorie// Förhandl. vid.-selsk. Christiania. – 1874 – 1875. – Bd. 8. – S. 255 – 274.

9. Lie S. Theorie des Pfaff'schen Problems// Ark. math. og naturvidenskab. – 1877. – Bd. 2. – S. 338 – 379.

10. Lie S. Über gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestattet// Ark. math. og naturvidenskab. – 1882. – Bd. 7, H. 4. – S. 443 – 444.

11. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

12. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения// Собр. соч.: В 6 т. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 473 с.

13. Bendixson I. Sur les courbes definies par des équation différentielles// Acta math. – 1901. – Vol. 24. – P. 1 – 88 (Пер. на рус. яз. первой главы: Успехи мат. наук. – 1941. – Вып. 9. – С. 191 – 211).

14. Долов М.В. Канонические интегралы и предельные циклы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. – Горький, 1983. – 256 с.

15. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую// Прикл. мат. и мех. – 1952. – Т. 16, вып. 6. – С. 659 – 670.

16. Построение систем программного движения/ Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

17. Галиуллин А.С. Аналитическая динамика. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.

18. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983. – 272 с.

19. Гайшун И.В. Линейные уравнения в полных производных. – Минск: Наука и техника, 1989. – 256 с.

20. Амелькин В.В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. – Минск: Университетское, 1985. – 142 с.

21. Лагутинский М. Частные алгебраические интегралы. – Харьков: А. Дарре, 1908. – 211 с.

22. Горбузов В.Н., Самодуров А.А. Уравнение Дарбу и его аналоги. – Гродно: ГрГУ, 1985. – 94 с.

23. Minding F. Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung// Mem. de l'Acad. des Sci. de St.-Petersbourg VII-me série. – 1862. – Vol. 5, No. 1. – P. 1 – 95.

24. Летников А.В. Об условиях интегрируемости некоторых дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1866. – Т. 1. – С. 143 – 194.

25. Имшенецкий В.Г. Дополнение теории и одно приложение способа нахождения рациональных дробных решений линейных дифференциальных уравнений// Зап. Петерб. Акад. наук. Сер. 7. – 1888. – Т. 58. – С. 1 – 28.

26. Математика в СССР за сорок лет. 1917 – 1957. Т. 2. Библиография. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 820 с.

27. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – Л.; М.: ОНТИ, 1934. – 360 с.

28. Коркин А.Н. Изыскания о множителях дифференциальных уравнений первого порядка// Мат. сб. – 1903 – 1904. – Т. 24, № 2 – 3. – С. 194 – 416.

29. Грацианская Л.Н. Василий Петрович Ермаков// Историко-математические исследования. Вып. IX/ Под ред. Г.Ф. Рыбкина, А.П. Юшкевича. – М.: ГИТТЛ, 1956. – С. 667 – 690.

30. Латышева К.Я. О работах В.П. Ермакова по теории дифференциальных уравнений// Историко-математические исследования. Вып. IX/ Под ред. Г.Ф. Рыбкина, А.П. Юшкевича. – М.: ГИТТЛ, 1956. – С. 691 – 722.

31. Яблонский А.И. Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 10. – С. 1752 – 1760.

32. Яблонский А.И. О предельных циклах одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2, № 3. — С. 335 — 344.

33. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. — Минск: Изд-во БГУ, 1982. — 210 с.

34. Лукашевич Н.А. Качественная картина в целом для системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j$, $\dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j$, имеющей точку равновесия типа центр // Доклады Акад. наук БССР. — 1960. — Т. 4, № 12. — С. 497 — 500.

35. Лукашевич Н.А. К вопросу о предельных циклах для системы $\dfrac{dx}{dt} = y + P(x,y)$, $\dfrac{dy}{dt} = -x + Q(x,y)$, $P(tx,ty) = t^3P(x,y)$, $Q(tx,ty) = t^3Q(x,y)$, если $O(0,0)$ — особая точка типа центр. // Доклады Акад. наук БССР. — 1961. — Т. 5, № 10. — С. 424 — 426.

36. Черкас Л.А. Об алгебраических решениях уравнения $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P, Q — многочлены 2-й степени // Докл. Акад. наук БССР. — 1963. — Т. 7, № 11. — С. 732 — 735.

37. Белевец П.С. Качественное исследование в целом некоторых динамических систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Минск, 1969. — 131 с.

38. Лавринович Л.С. Качественное исследование специальных систем второго порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Минск, 1971. — 112 с.

39. Филипцов В.Ф. Качественное исследование в целом некоторых классов систем дифференциальных уравнений на плоскости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Минск, 1974. — 121 с.

40. Горбузов В.Н., Самодуров А.А. Уравнения Риккати и Абеля. — Гродно: ГрГУ, 1986. — 101 с.

41. Горбузов В.Н. О некоторых классах автономных систем с частным интегралом// Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 9. — С. 1685 — 1687.

42. Сибирский К.С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. — Кишинёв: Штиинца, 1976. — 270 с.

43. Вулпе Н.И. Полиномиальные базисы комитантов дифференциальных систем и их приложения в качественной теории. — Кишинёв: Штиинца, 1986. — 172 с.

44. Шубэ А.С. О структуре интегрирующего множителя одной кубической системы с особой точкой типа центра// Дифференц. уравнения, 1996. — Т. 32, № 5. — С. 713 — 715.

45. Черкас Л.А. Методы оценки числа предельных циклов автономных систем// Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 5. — С. 779 — 802.

46. Долов М.В. Об алгебраических предельных циклах одного дифференциального уравнения// Дифференц. уравнения, 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1469 – 1473.

47. Долов М.В., Косарев В.В. Интегралы Дарбу и аналитическая структура решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 4. – С. 697 – 700.

48. Долов М.В., Лисин Б.В. Интегрирующий множитель и предельные циклы // Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). – 1984. – С. 36 – 41.

49. Долов М.В., Упырина Е.С. К вопросу об алгебраической интегрируемости// Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). – 1985. – С. 106 – 107.

50. Долов М.В., Макарова Е.Н. Трансцендентные частные интегралы алгебраических дифференциальных уравнений// Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). – 1986. – С. 86 – 87.

51. Долов М.В., Филиппова Н.М. О трансцендентных частных интегралах алгебраических дифференциальных уравнений// Дифференц. и интегр. уравнения (Горький). – 1987. – С. 8 – 14.

52. Долов М.В., Честякова С.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с интегрирующим множителем типа Дарбу// Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 618 – 622.

53. Долов М.В. Интегрирующий множитель в окрестности узла// Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 155 – 160.

54. Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Матем. сб. – 1992. – Т. 183, № 3. – С. 76 – 94.

55. Самодуров А.А. О построении первого интеграла квадратичной системы по известным частным интегралам // Вестник БГУ. Сер. 1, физ., мат., мех. – 1986. – № 1. – С. 69 – 71.

56. Горбузов В.Н. К вопросу об интегрируемости в квадратурах // Докл. Акад. наук БССР. – 1981. – Т. 25, № 7. – С. 584 – 585.

57. Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н. К вопросу об интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. Акад. наук БССР. – 1984. – Т. 28, № 7. – С. 581 – 584.

58. Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н. К вопросу о построении первого интеграла или последнего множителя нелинейной системы дифференциальных уравнений // Докл. Акад. наук БССР. – 1986. – Т. 30, № 9. – С. 791 – 792.

59. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1989. – 640 с.

60. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 444 с.

61. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике// Успехи мат. наук. – 1992. – Т. 47, вып. 4(286). – С. 83 – 144.

62. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

63. Горбузов В.Н. О некоторых классах автономных систем с частным интегралом// Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 9. – С. 1685 – 1687.

64. Горбузов В.Н. Об одной дифференциальной системе второго порядка и её периодических решениях// Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 9. – С. 1487 – 1497.

65. Горбузов В.Н. К вопросу устойчивости компактных регулярных орбит// Докл. Акад. наук Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 4. – С. 40 – 43.

66. Горбузов В.Н., Павлючик П.Б. К вопросу устойчивости состояния равновесия многомерного дифференциального уравнения// Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 1997. – № 3. – С. 37 – 39.

67. Горбузов В.Н. Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем// Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 562 – 564.

68. Горбузов В.Н. Признаки ограниченности числа возможных компактных гиперповерхностей, определяемых дифференциальными системами// Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 30 – 37.

69. Горбузов В.Н. Признаки ограниченности числа компактных регулярных интегральных многообразий автономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 10. – С. 1325 – 1329.

70. Горбузов В.Н. Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения и процессы управления [Электрон. ресурс]. – 2000. – № 2. – С. 1 – 36. – Режим доступа: http://www.neva.ru.

71. Буслюк Д.В. Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: Дис. канд. ... физ.-мат. наук. 01.01.02 / Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 2000. – 95 с.

72. Мироненко В.И. Замечания о стационарных интегралах и о стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 864 – 868.

73. Мироненко В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.

74. Горбузов В.Н. Автономность интегралов и последних множителей обыкновенных дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 6. – С. 939 – 946.

75. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

76. Положий Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. – Киев: Из-во КГУ, 1965. – 444 с.

77. Bers L. The expansion theorem for sigma-monogetic functions// Amer. J. Math. – 1950. – V. 7. – P. 705 – 712.

78. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations// Trans. Amer. Soc. – 1944. – V. 56. – P. 67 – 93.

79. Carleman T. Sur les systemes liné aires aux dérivées partielles du premier ordre a'deux variables, C. R.// Acad. Sci. Paris. – 1933. – V. 197. – P. 471 – 474.

80. Петровский И.Г. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными// УМН. – 1946. – Т. 1, вып. 3 – 4 (13 –14). – С. 44 – 70.

81. Шабат Б.В. Об обобщённых решениях одной системы уравнений в частных производных// Мат. сб. – 1945. – Т. 17, № 2. – С. 193 – 210.

82. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных: Учебник: В 2-х ч. Ч. 2. – М.: Наука, 1985. – 464 с.

83. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного: Учебник: В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

84. Грудо Э.И. Об одной эллиптической системе дифференциальных уравнений в частных производных с особой точкой в начале координат// Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 485 – 495.

85. Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. ℝ-голоморфные решения уравнения в полных дифференциалах// Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 447 – 452.

86. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. – Мн.: Университетское, 1990. – 157 с.

87. Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Об ℝ-голоморфных решениях системы уравнений в полных дифференциалах// Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1999. – № 3. – С. 124 – 126.

88. Тыщенко В.Ю. Об ℝ-голоморфных решениях системы уравнений в частных производных// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўн-та. Сер. 2. – 2003. – № 1(19). – С. 9 – 11.

89. Гурса Э. Курс математического анализа. В 2 т. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – Т. 2. – 563 с.

90. Маркеев Н.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.

91. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

92. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 549 с.

93. Проневич А.Ф. Интегральный базис линейной системы в частных производных // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы IV респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 19 – 22 марта 2001 г./ Гомельский гос. ун-т. им. Ф. Скорины. – Гомель, 2001. – С. 113 – 114.

94. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных// Дифференц. уравнения и процессы управления [Электрон. ресурс]. – 2001. – № 3. – С. 17 – 45. – Режим доступа: http://www.neva.ru.

95. Проневич А.Ф. Интегралы якобиевой системы в комплексной области// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. – 2002. – № 1(9). – С. 19 – 25.

96. Проневич А.Ф. Автономные интегралы линейных систем в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – Минск, 2002. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.10.2002. – № 1667-В2002.

97. Проневич А.Ф. Базис автономных первых интегралов линейной системы третьего порядка в комплексной области// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. – 2002. – № 2(11). – С. 23 – 29.

98. Проневич А.Ф. Базис автономных интегралов линейной системы в полных дифференциалах// Еругинские чтения – IX: Тез. докл. Международной мат. конф., Витебск, 20 – 22 мая 2003 г. / Мин-во образования РБ. Бел. мат. об-во. Ин-т мат. Нац. Акад. наук Беларуси. Витеб. гос. ун-т. – Витебск, 2003. – С. 21 – 22.

99. Проневич А. Ф. Интегралы линейной многомерной системы простой матричной структуры// Tools for mathematical modelling: Тез. докл. четвёртой Международной конф., Санкт-Петербург, 23 – 28 июня 2003 г. / Санкт-Петербургский гос. политех. ун-т. – СПб., 2003. – С. 225.

100. Проневич А.Ф. Интегралы $\mathbb{R}$-линейной системы уравнений в полных дифференциалах // Теория функций, её приложения и смежные вопросы: Материалы шестой Казанской Международной летней школы-конф., Казань, 27 июня – 4 июля 2003 г. / Казанский гос. ун-т. НИИ мат. и мех. КГУ. Московский гос. ун-т. Акад. наук Респ. Татарстан. – Казань, 2003. – С. 171 – 172.

101. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Построение интегралов линейной дифференциальной системы // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. – 2003. – № 2(22). – С. 50 – 60.

102. Проневич А.Ф. Интегралы линейной многомерной системы простой матричной структуры// Mathematical research (Saint-Petrsburg). – 2003. – Vol. 10. – p. 143 – 152.

103. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Интегралы $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 49 – 52.

104. Проневич А.Ф. $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы систем уравнений в частных производных// Герценовские чтения – 2004 «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»: Материалы науч. конф., Санкт-Петербург, 12 – 16 апреля 2004 г. / Российский ГПУ им. А. И. Герцена. – СПб., 2004. – С. 65 – 70.

105. Проневич А.Ф. Об $\mathbb{R}$-дифференцируемых интегралах систем уравнений в полных дифференциалах// IX Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Международной мат. конф., Гродно, 3 – 6 ноября 2004 г./ Мин-во образ. Респ. Беларусь. Бел. мат. об-во. Ин-т мат. НАН Беларуси. Бел. гос. ун-т. Гродненск. гос. ун-т. – Гродно, 2004. – С. 169 – 171.

106. Проневич А.Ф. $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы обыкновенной дифференциальной системы// Идентификация систем и задачи управления: Труды IV Международной конф., Москва, 25 – 28 янв. 2005 г. / Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – М., 2005. – С. 457 – 464.

107. Проневич А.Ф. $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы многомерных дифференциальных систем// Герценовские чтения – 2005 «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования»: Материалы науч. конф., Санкт-Петербург, 18 – 22 апреля 2005 г. / Российский ГПУ им. А. И. Герцена. – СПб., 2005. – С. 86 – 92.

108. Проневич А.Ф. Интегралы систем уравнений в частных производных с $\mathbb{R}$-линейными коэффициентами// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. – 2005. – № 1(31). – С. 45 – 52.

109. Проневич А.Ф. Об интегралах систем уравнений в частных производных с $\mathbb{R}$-дифференцируемыми коэффициентами//Еругинские чтения–X: Тез. докл. Международной мат. конф., Могилёв, 24 – 26 мая 2005 г. / Мин-во образования РБ. Ин-т мат. НАН Беларуси. Могилёв. гос. ун-т. Бел. гос. ун-т. – Могилёв, 2005. – С. 169 – 170.