Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.3+517.5

ЗЛОБИН Сергей Алексеевич

Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы

Специальность 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН *НЕСТЕРЕНКО Юрий Валентинович*

Москва
2005

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Значения дзета-функции Римана в целых точках

Напомним, что дзета-функция Римана $\zeta(s)$ при $\mathrm{Re}\, s > 1$ определяется следующим рядом:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Одна из проблем теории трансцендентных чисел состоит в том, чтобы изучить арифметические свойства значений дзета-функции Римана в целых точках $s \geqslant 2$, т.е. выяснить, являются эти числа рациональными или иррациональными, алгебраическими или трансцендентными, а также найти все алгебраические соотношения между ними.

Еще Эйлер показал, что в четных точках дзета-функцию можно вычислить явно:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n},$$

где B_{2n} – числа Бернулли, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \qquad n \geqslant 1,$$

и начальному условию $B_0 = 1$. В 1882 г. Линдеман доказал трансцендентность числа π. Следовательно, при натуральном n число $\zeta(2n)$ трансцендентно.

Ситуация с числами $\zeta(2n+1)$ намного более сложная. Проблема арифметических свойств этих чисел поднималась еще в 1934 г. А.О. Гельфондом (см. заключение в [4]). Существует

Гипотеза. При любом натуральном n и для любого ненулевого многочлена $P(x_0, \dots, x_n)$ с целыми коэффициентами верно

$$P(\pi, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2n+1)) \neq 0.$$

Очевидно, доказательство этой гипотезы полностью бы решило проблему арифметических свойств значений дзета-функции Римана в целых точках. В частности, из этой гипотезы следует трансцендентность чисел $\zeta(2n+1)$. Однако она до сих пор не доказана и не опровергнута.

Первый шаг в изучении дзета-функции в нечетных точках сделал в 1978г. Р. Апери [27], доказав иррациональность $\zeta(3)$. Вкратце, его доказательство заключается в том, что строятся диофантовы приближения к $\zeta(3)$,

$$u_n\zeta(3) - v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

где для u_n и v_n выписываются явные формулы, из которых следует, что $u_n \in \mathbb{Z}$ и $D_n^3 v_n \in \mathbb{Z}$ (через D_n обозначено наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$). При этом справедлива оценка

$$0 < |u_n\zeta(3) - v_n| < c(\sqrt{2} - 1)^{4n}. \tag{1.2}$$

Умножая (1.2) на D_n^3, получим

$$0 < |D_n^3 u_n \zeta(3) - D_n^3 v_n| < cD_n^3(\sqrt{2} - 1)^{4n}.$$

Так как $D_n \leqslant 3^n$ и $3^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1$, то правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Откуда и следует иррациональность $\zeta(3)$.

Трансцендентность $\zeta(3)$ или иррациональность $\zeta(2n+1)$ при $n \geqslant 2$ пока не доказана. Однако после Апери, с помощью различных обобщений, были доказаны интересные результаты. Отметим, в частности, результат Т. Ривоаля [41] о бесконечности размерности линейного пространства над

$\mathbb{Q}$, порожденного значениями $\zeta(2n+1)$, а также результат В.В. Зудилина [11] об иррациональности по крайней мере одного из четырех чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$.

1.2 Интегральные представления аппроксимаций

Первым, кто рассмотрел кратные интегралы в связи диофантовыми приближениями, был К. Малер ([36]). Он использовал интегралы, которые можно записать в виде (см. [17])

$$\int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1\cdots x_i)^{c_i}} dx_1 \cdots dx_m$$

при специальном выборе параметров a_i, b_i, c_i, для оценки сверху линейных форм, приближающих значения биномов $(1-z)^{\omega}$.

После доказательства Апери иррациональности $\zeta(3)$ Ф. Бейкерс [29] в 1979г. предложил другое доказательство этого факта с помощью интеграла

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-z(1-xy))^{n+1}}\, dx\, dy\, dz. \tag{1.3}$$

Этот интеграл равен $2(u_n\zeta(3)-v_n)$, где u_n, v_n – те же, что и в (1.1). Также в [29] был рассмотрен интеграл

$$\int_{[0,1]^2} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx\, dy,$$

который может быть представлен в виде линейной формы от 1, $\zeta(2)$ с рациональными коэффициентами. С его помощью может быть доказана иррациональность $\zeta(2)$. Конечно, иррациональность (и даже трансцендентность) числа $\zeta(2) = \pi^2/6$ хорошо известна, однако с помощью интегралов Бейкерса и иного выбора их параметров доказаны наилучшие оценки показателя иррациональности чисел π^2 и $\zeta(3)$ (см. [39], [40]). Как обычно, показатель иррациональности числа α – это нижняя грань множества чисел μ, для которых неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{\mu}}$$

имеет конечное число решений в целых p и q с $q > 0$.

Существуют различные попытки обобщения интегралов Бейкерса с целью изучения дзета-функции в целых точках. Первая из них была в 1990г. [1] предпринята О.Н. Василенко, который рассмотрел интегралы

$$V_{m,n} = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^n (1-x_i)^n \, dx_1 dx_2 \dots dx_m}{(1 - x_1 + x_1 x_2 - \dots + (-1)^m x_1 x_2 \cdots x_m)^{n+1}}. \tag{1.4}$$

Интегралы $V_{2,n}$ и $V_{3,n}$ (после замены $x_3 \to 1 - x_3$) совпадают с интегралами Бейкерса. Василенко анонсировал некоторые тождества, выражающие рекуррентно $V_{m,0}$ через $V_{m-2k,0}$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2}$, и кратные дзета-значения

$$\zeta(s_1, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}}.$$

Это позволило ему доказать, что $V_{3,0} = 2\zeta(3)$, $V_{5,0} = 2\zeta(5)$, а также установить, что $V_{2m,0}$ есть линейная форма с рациональными коэффициентами от $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, …, $\zeta(2m)$.

Изучение интегралов этого вида продолжил Д.В. Васильев. В работе [2] с помощью производящих функций были установлены равенства

$$V_{2k,0} = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k), \quad V_{2k+1,0} = 2\zeta(2k+1)$$

для всех натуральных k. Далее, в [3] Васильев доказал, что при $m = 4$ и $m = 5$ интеграл (1.4) представляется в виде линейных форм с рациональными коэффициентами от 1, $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ и 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$ соответственно. Васильев также предположил, что при произвольном нечетном $m \geqslant 3$, интеграл представляется в виде линейной формы от 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$,…, $\zeta(m)$ с рациональными коэффициентами, а при нечетном m знаменатели этих коэффициентов делят D_n^m. Естественным обобщением (1.4) является интеграл

$$V(z) = V_m \left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m \\ b_1, b_2, \ldots, b_m \end{matrix} ; z \right]$$
$$= \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - zx_1 + zx_1x_2 - \cdots + (-1)^m zx_1x_2\cdots x_m)^{a_0}} dx_1 dx_2 \ldots dx_m.$$

В.В. Зудилин в [10] доказал, что при некоторых условиях на параметры, интеграл $V(1)$ равен значению гипергеометрической функции в точке $z = 1$, что доказывало представление $V(1)$ в виде линейной формы от 1 и $\zeta(k)$, где k — целые числа той же четности, что и m, $1 < k \leqslant m$. Тем самым гипотеза Васильева, за исключением утверждения о знаменателях коэффициентов линейной формы, была доказана. Оценка же знаменателя при нечетном $m = 2l + 1$ в [10] была хуже предполагаемой. То, что знаменатели коэффициентов делят D_n^{2l+1} при гипергеометрическом представлении является сложной задачей, которая была решена недавно Ривоалем и Краттенталером ([35, Théorème 1]). Гипотеза Васильева будет полностью доказана в разделе 3.6 без использования гипергеометрического представления $V_{2l+1,n}$.

В 1998г. В.Н. Сорокин [20] опубликовал иное доказательство иррациональности $\zeta(3)$, использующее интеграл

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n}{(1-x_1x_2)^{n+1}(1-x_1x_2x_3)^{n+1}} dx_1 dx_2 dx_3. \tag{1.5}$$

Оказывается, последний интеграл равен интегралу Бейкерса (1.3) (и интегралу (1.4) при $m = 3$). Этот факт независимо показан С. Фишлером ([31]) и автором (см. следствие 2.2).

Интегралы того же типа

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{n-\delta}(1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(\frac{z}{x_1x_2\ldots x_{2j-2}} - x_{2j-1}x_{2j})^{n+1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l}$$

использовались в [21] для оценки меры трансцендентности π^2. В диссертационной работе мы будем рассматривать следующее обобщение интегралов Сорокина:

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2\dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_m,$$
$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_l = m. \quad (1.6)$$

1.3 Обобщенные полилогарифмы и кратные дзета-функции

В работе большую роль играют обобщенные полилогарифмы, определяемые равенствами

$$\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}},$$

$$\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_l \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}},$$

где $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ – вектор с натуральными компонентами. В дальнейшем будут использоваться *длина* $l(\vec{s})$ вектора $\vec{s}$ — количество его координат и *вес* $w(\vec{s})$ — их сумма. Ряды, определяющие обобщенные полилогарифмы, сходятся при $|z| < 1$. Функции $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ и $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$ могут быть линейно выражены друг через друга. А именно (см. [23]):

$$\mathrm{Le}_{s_1,\dots,s_l}(z) = \sum_{\vec{p}} \mathrm{Li}_{\vec{p}}(z), \quad \mathrm{Li}_{s_1,\dots,s_l}(z) = \sum_{\vec{p}} (-1)^{\alpha(\vec{p})} \mathrm{Le}_{\vec{p}}(z),$$

где $\vec{p}$ пробегает все вектора вида $(s_1 * s_2 * \dots * s_l)$. Знак '$*$' может быть либо знаком '$+$', либо знаком ',', а $\alpha(\vec{p})$ равняется количеству знаков '$+$'. Для удобства положим $\mathrm{Li}_{\emptyset}(z) = \mathrm{Le}_{\emptyset}(z) = 1$. При $l = 1$ обобщенные полилогарифмы превращаются в классические полилогарифмы:

$$\mathrm{Li}_s(z) = \mathrm{Le}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}.$$

С обобщенными полилогарифмами тесно связано понятие кратной дзета-функции:

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}},$$

$$\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_l \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}.$$

Эти ряды сходятся при натуральных s_j и условии $s_1 > 1$ (если $s_1 = 1$, то ряд расходится). В этом случае из определения следует, что

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \mathrm{Li}_{s_1, s_2, \ldots, s_l}(1), \quad \widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \mathrm{Le}_{s_1, s_2, \ldots, s_l}(1).$$

Естественно, как и у обобщенных полилогарифмов, при фиксированных $s_1, s_2, \ldots, s_l$, значение $\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_l)$ выражается в виде линейной комбинации значений ζ от векторов того же веса, что и $\vec{s}$, и наоборот. Значения функции $\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_l)$ довольно хорошо изучены, между ними существуют различные линейные и алгебраические соотношения. Значения же $\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_l)$ (обозначение не является принятым) пока что остаются больше в тени. Однако, скажем, равенство $\widetilde{\zeta}(\{2\}_k, 1) = 2\zeta(2k+1)$ может быть использовано для изучения значений дзета-функции Римана в нечетных точках. Здесь и далее, $\{a\}_k$ означает k раз повторенное через запятую число a. При $l = 1$ оба варианта кратной дзета-функции превращаются в обычную дзета-функцию Римана.

1.4 Результаты диссертации

Оказывается, интеграл $V(z)$, при некоторых ограничениях на параметры может быть сведен к $S(z)$. Мы установим это в разделе 2.1, доказав более общее тождество.

Пусть даны натуральные числа $1 \leqslant r_1 < r_2 < \cdots < r_l = m$, $r_0 = 0$ и комплексные числа a_0 и a_i, b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Определим многочлены $Q_j(z, x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $1 \leqslant j \leqslant l$:

$$Q_0 = 1, \quad Q_j(z, x_1, x_2, \ldots, x_m) = Q_{j-1}(z, x_1, x_2, \ldots, x_m) - z(1 - x_{r_j}) \prod_{1 \leqslant i < r_j} x_i,$$

множество S и числа c_i:

$$S = \{r_j | 1 \leqslant j \leqslant l\}, \quad c_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \notin S, \\ a_{r_{j-1}}, & \text{если } i = r_j \in S. \end{cases}$$

Тогда справедлива

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathrm{Re}(a_0) > 0$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$ *при* $1 \leqslant i \leqslant m$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(c_i)$ *при* $i \in S$. *Тогда при* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ *выполняется равенство*

$$\int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_l(z, x_1, x_2, \ldots, x_m)^{a_0}} d\overline{x} = \frac{\Gamma(a_m)}{\Gamma(a_0)} \prod_{i \in S} \frac{\Gamma(b_i - a_i)}{\Gamma(b_i - c_i)} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{c_i-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i \in S}(1 - zx_1 \ldots x_i)^{b_i-a_i}} d\overline{x},$$

где $d\overline{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_m$ *и оба интеграла сходятся.*

Из этого интегрального тождества вытекает равенство интеграла $V(z)$ интегралу вида $S(z)$. Этот результат формулируется в виде двух теорем в зависимости от четности размерности интеграла $V(z)$.

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathrm{Re}(a_0) > 0$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$ *при* $1 \leqslant i \leqslant 2l+1$, $\mathrm{Re}(b_{2j}) > \mathrm{Re}(a_{2j-2})$ *при* $1 \leqslant j \leqslant l$, $\mathrm{Re}(b_{2l+1}) > \mathrm{Re}(a_{2l})$. *Тогда при* $|z| < 1$ *выполняется равенство*

$$V_{2l+1}\left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2l+1} \\ b_1, b_2, \ldots, b_{2l+1} \end{matrix}; z\right] = \frac{\Gamma(a_{2l+1})}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(b_{2l+1} - a_{2l+1})}{\Gamma(b_{2l+1} - a_{2l})} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(b_{2j} - a_{2j})}{\Gamma(b_{2j} - a_{2j-2})}$$
$$\times \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{l} x_{2i-1}^{a_{2i-1}-1}(1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i-2}-1}(1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i-2}-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1 \ldots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}}$$
$$\times \frac{x_{2l+1}^{a_{2l}-1}(1-x_{2l+1})^{b_{2l+1}-a_{2l}-1}}{(1 - zx_1 \ldots x_{2l+1})^{a_{2l+1}}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l+1},$$

причем оба интеграла сходятся.

Для четной размерности интеграла $V(z)$ справедлива аналогичная теорема 2.2. Из теоремы 2.3 следует равенство интеграла Бейкерса (1.3) интегралу Сорокина (1.5). Несколько другим способом С. Фишлер ([31]), независимо от автора, свел $V(1)$ к $S(1)$.

В разделе 2.2 получен явный вид кратной суммы, в которую раскладывается интеграл $S(z)$ при $|z| < 1$. Из этого результата следуют интегральные представления обобщенных полилогарифмов и кратных дзета-функций. Полученные интегралы продолжают обобщенные полилогарифмы в область $D = \mathbb{C} \backslash \{z : |\arg(1-z)| < \pi\}$.

Далее, в разделе 2.3 изучается действие преобразования $z \to -z/(1-z)$ на обобщенных полилогарифмах.

Лемма 2.6. *(О двойственности) Пусть* $z \in D = \mathbb{C}\backslash\{z : |\arg(1-z)| < \pi\}$ *Тогда выполняется равенство*

$$\mathrm{Le}_{\vec{s}}\left(-\frac{z}{1-z}\right) = -\,\mathrm{Le}_{\vec{s'}}(z)$$

для вектора $\vec{s'}$*, получаемого из* $\vec{s}$ *по некоторому правилу.*

Эта лемма используется в главе 3.

Васильев в работе [2] доказал равенство, которое можно записать в виде

$$\widetilde{\zeta}(\{2\}_k, 1) = 2\zeta(2k+1).$$

В разделе 2.4 мы доказываем обобщение этого равенства.

Теорема 2.8. *При натуральных* k*,* $s \geqslant 2$ *выполняется равенство*

$$\widetilde{\zeta}(\{2, \{1\}_{s-2}\}_k, 1) = s\zeta(sk+1).$$

Также в разделе 2.4 указываются другие связи ζ и $\widetilde{\zeta}$.

В разделе 2.5 обсуждаются арифметические свойства кратных дзета-значений. Доказывается, например, следующий результат.

Следствие 2.7. *Существует такое*

$$\vec{s_0} \in \{(2,3), (3,2), (2,2,3), (2,3,2), (3,2,2)\},$$

что числа 1, $\zeta(3)$ *и* $\zeta(\vec{s_0})$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$*.*

В главе 3 исследуется интеграл вида $S(z)$ и указываются его некоторые применения для арифметических результатов.

В разделе 3.1 доказывается общая теорема о представлении интеграла $S(z)$ в виде линейной формы с полиномиальными коэффициентами от обобщенных полилогарифмов. В ней используется обозначение: $\vec{u} \leqslant \vec{v}$, если длины векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равны и $u_i \leqslant v_i$ при любом $i = 1, \ldots, l(\vec{u}) = l(\vec{v})$. Знак '*' значит то же, что и в разделе 1.3.

Теорема 3.2. *Пусть параметры* a_i*,* b_i*,* c_j *– целые, причем* $b_i > a_i \geqslant 1$ *при* $i = 1, \ldots, m$ *и* $c_j \geqslant 1$*,* $c_1 + \cdots + c_j \leqslant q_1 + \cdots + q_j$*, где* $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i -$

a_i), $j = 1, \dots, l$; d_j – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $d_j \leqslant c_j$ при $j = 1, \dots, l$ и $\sum_{k=j}^{l+1} d_k < a_i$ при $j = 1, \dots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$.

Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ выполняется равенство

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1x_2\dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1dx_2\dots dx_m = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z),$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, удовлетворяющим условию $\vec{s} \leqslant (r_1 * (r_2 - r_1) * \dots * (r_l - r_{l-1}))$ (в частности, будут выполняться неравенства $l(\vec{s}) \leqslant l$, $w(\vec{s}) \leqslant m$), а $P_{\vec{s}}(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\deg P_{\vec{s}}(z) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i - 1$$

для любого вектора $\vec{s}$,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \dots + d_l, \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \dots + d_l + d_{l+1} + 1$$

для любого непустого вектора $\vec{s}$. Дополнительно, если существует j, что $d_j < c_j$, то

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \dots + d_l + 1.$$

Если для любого $j = 1, \dots, l$ выполняется неравенство $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j - 1$, то $P_{\vec{s}}(1) = 0$ для векторов $\vec{s}$ с $s_1 = 1$.

В некоторых случаях в линейной форме в действительности возникает много меньше обобщенных полилогарифмов, чем гарантируется этой теоремой, что важно в арифметических приложениях. В разделе 3.2 доказывается усиление общей теоремы при некоторых ограничениях на параметры. При этом используется определение: вектор $\vec{u}$ называется *подчиненным* вектору $\vec{v}$, если $\vec{u} \leqslant \vec{v}$ или $\vec{u} \leqslant \vec{v'}$ для некоторого вектора $\vec{v'}$, полученного из вектора $\vec{v}$ вычеркиванием нескольких компонент в произвольных местах.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены неравенства $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j$ и $a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geqslant 0$ при всех $j = 1, \dots, l$, $i_1 \in [r_{j-1}+1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ верно равенство $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$, где* *суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, подчиненным $(r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1})$. Дополнительно, если $c_1 \leqslant q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leqslant q_j$ при $j = 2, \dots, l$, то в этих векторах $\vec{s}$ выполняется $s_j > 1$ при $j > 1$.*

Подобная теорема справедлива и для полилогарифмов $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$ (см. теорему 3.5).

С помощью следствий теоремы 3.3, теоремы 2.1 и леммы 2.6 мы получаем представление интегралов $V(z)$ в виде линейной формы от обобщенных полилогарифмов.

Теорема 3.6. *Пусть параметры A_0, A_i, B_i, $i = 1, \dots, 2l+1$ – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$B_i > A_i > 0 \text{ при всех } i, B_1 > A_0, B_i > A_{i-2} \text{ при } i \geqslant 2, B_{2l+1} > A_{2l}, A_1 \geqslant A_0,$$

$$A_2 \geqslant A_1, A_4 \geqslant A_3, \dots, A_{2l} \geqslant A_{2l-1}, B_3 \geqslant B_2, B_5 \geqslant B_4, \dots, B_{2l-1} \geqslant B_{2l-2},$$

$$A_3 + B_2 \geqslant A_2 + B_1, A_5 + B_4 \geqslant A_4 + B_3, \dots, A_{2l+1} + B_{2l} \geqslant A_{2l} + B_{2l-1},$$

$\sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1} - A_{2j-1}) \geqslant A_0$. *Тогда*

$$\begin{aligned} V_{2l+1}(z) &= \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}\,dx_1dx_2\dots dx_{2l+1}}{(1 - zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \dots - zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}} \\ &= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\{2\}_k,1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z) + U(z^{-1}). \end{aligned}$$

Дополнительно, если $\sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1} - A_{2j-1}) > A_0$, то $T_k(1) = 0$ для любого $k = 1, \dots, l-1$.

Для четной размерности интеграла $V(z)$ формулируется аналогичная теорема 3.4. Из равенств $\mathrm{Le}_{\{2\}_k}(1) = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k)$ и $\mathrm{Le}_{\{2\}_k,1}(1) = 2\zeta(2k+1)$ следует, что в условиях теорем 3.4 и 3.6, интегралы $V_{2l}(1)$ и $V_{2l+1}(1)$ могут быть представлены в виде линейной формы от 1 и чисел $\zeta(k)$, где k соответствующей четности, с рациональными коэффициентами.

В разделах 3.3 и 3.4 исследуются знаменатели и оценка сверху коэффициентов линейных форм разложения $S(z)$.

В дальнейших разделах главы мы используем доказанные результаты для различных арифметических приложений. В разделах 3.5 и 3.6 иллюстрируется применение интеграла $S(z)$ для классических задач: в разделе 3.5 оценивается мера трансцендентности числа π^2, а в 3.6 доказывается оценка размерности линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного 1 и $\zeta(2j+1)$, $j = 1, \ldots, l$.

В разделе 3.7 мы обобщаем результат Ривоаля об оценке размерности линейного пространства, порожденного значениями полилогарифмов. При этом в области $\operatorname{Re} z \leqslant -1$ используется аналитическое продолжение полилогарифмов.

Теорема 3.12. *Для любого рационального α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое m_0, что при $m \geqslant m_0$ размерность линейного пространства (над $\mathbb{Q}$), порожденного $1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \mathrm{Li}_2(\alpha), \ldots, \mathrm{Li}_m(\alpha)$ не меньше, чем*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\ln 2} \ln m.$$

Ранее подобный результат был известен лишь при $|\alpha| < 1$. Из этой теоремы и леммы 2.6 получается

Следствие 3.12. *Для любого рационального α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое m_0, что при $m \geqslant m_0$ размерность линейного пространства (над $\mathbb{Q}$), порожденного $1, \mathrm{Le}_1(\alpha), \ldots, \mathrm{Le}_{\{1\}_m}(\alpha)$ не меньше, чем*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\ln 2} \ln m.$$

В разделе 3.8 мы доказываем аналоги теоремы 3.12 для обобщенных полилогарифмов $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$ и $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$.

Теорема 3.13. *Для любого рационального α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует l_0, что при $l \geqslant l_0$ размерность линейного пространства, порожденного значениями $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(\alpha)$ с векторами $\vec{s}$ длины $\leqslant l$, $s_j \leqslant K$ и $s_j > 1$ при $j > 1$ (в том числе и $\vec{s} = \emptyset$), не меньше*

$$\frac{K(1-\varepsilon)}{K(1+\ln 2) + \ln 1{,}3} \ln l.$$

Для полилогарифмов $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ справедлива аналогичная теорема 3.14.

Множества векторов обобщенных полилогарифмов в теоремах 3.13 и 3.14 пересекаются с множеством $(\{1\}_k)_{k=1}^{\infty}$ только по вектору (1). Для обобщенных полилогарифмов ранее, кроме линейной независимости значений

$$\mathrm{Li}_{\{1\}_k}(z) = \frac{(-1)^k \ln^k(1-z)}{k!}$$

в рациональных точках $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, был известен только результат Сорокина о линейной независимости над $\mathbb{Q}$ значений обобщенных полилогарифмов в рациональных точках α, находящихся около нуля (см. [22]).

В главе 4 мы рассматриваем некоторые другие кратные интегралы, отличные от $S(z)$, которые могут быть представлены в виде линейной формы от обобщенных полилогарифмов с полиномиальными коэффицентами.

В разделе 4.1 исследуется обобщение интегралов, рассмотренных Рином (см. (4.2)), в виде кратных интегралов. Доказывается следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть параметры a_j, b_j, c_j – целые, причем $b_j > a_j \geqslant 1$ при $j = 1, \ldots, l$ и $c_j \geqslant 1$ при $j = 1, \ldots, l-1$, а также выполнены неравенства $c_j \leqslant b_j - a_j$, $j = 1, \ldots, l-1$ и*

$$a_l \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_{l-1} - \min_{j=1,\ldots,l-1} b_j - l + 3.$$

Тогда

$$\int_{[0,1]^l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j^{a_j-1}(1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-zx_jx_l)^{c_j}} x_l^{a_l-1}(1-x_l)^{b_l-a_l-1} dx_1 \cdots dx_l$$

$$= Q(z^{-1}) \,\mathrm{Li}_{2,\{1\}_{l-2}}(z) + \sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \,\mathrm{Li}_{\{1\}_j}(z),$$

где Q, P_j – многочлены с рациональными коэффициентами, причем $P_j(1) = 0$ при $j > 0$.

В точке $z = 1$ этот интеграл дает линейную форму от 1 и $\zeta(l)$, а при $l = 3$ и некотором выборе параметров – удвоенные приближения Апери (1.1).

В разделе 4.2 доказывается некоторое интегральное тождество, связанное с интегралами, рассмотренными Зудилиным в работе [12]. В заключение формулируется гипотеза о линейной форме для кратного интеграла, связанного с диофантовыми приближениями числа $\zeta(4)$.

Основные результаты этой диссертации опубликованы в работах [5]-[9].

Автор выражает глубокую признательность Ю.В. Нестеренко за интересную тему и большое внимание к работе.

Глава 2

Тождества

В этой главе мы докажем различные тождества и равенства.

2.1 Интегральные тождества

Пусть даны натуральные числа $1 \leqslant r_1 < r_2 < \dots < r_l = m$, $r_0 = 0$. Определим многочлены $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $1 \leqslant j \leqslant l$:

$$Q_0 = 1, \quad Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) = Q_{j-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_m) - z(1 - x_{r_j}) \prod_{1 \leqslant i < r_j} x_i.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= 1 - zx_1x_2 \dots x_{r_1-1} + zx_1x_2 \dots x_{r_1} - \dots - zx_1x_2 \dots x_{r_j-1} + zx_1x_2 \dots x_{r_j}, \end{aligned}$$

и, очевидно, $Q_j(z, x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$ при $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Пусть даны комплексные числа a_0 и a_i, b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Введем обозначения:

$$S = \{r_j | 1 \leqslant j \leqslant l\}, \quad c_i = \begin{cases} a_i, \text{ если } i \notin S, \\ a_{r_{j-1}}, \text{ если } i = r_j \in S. \end{cases}$$

Теорема 2.1 *Пусть* $\mathrm{Re}(a_0) > 0$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$ *при* $1 \leqslant i \leqslant m$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(c_i)$ *при* $i \in S$. *Тогда при* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ *выполняется равенство*

$$\int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_l(z,x_1,x_2,\dots,x_m)^{a_0}} d\overline{x} \\ = \frac{\Gamma(a_m)}{\Gamma(a_0)} \prod_{i\in S} \frac{\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i-c_i)} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{c_i-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i\in S}(1-zx_1\dots x_i)^{b_i-a_i}} d\overline{x},$$

где $d\overline{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_m$ *и оба интеграла сходятся.*

Доказательство. Сходимость интегралов очевидна.

Доказательство проведем индукцией по l. Для удобства будем считать, что интеграл по нульмерному пространству равен единице; при $l=0$ имеем $1 = \frac{\Gamma(a_0)}{\Gamma(a_0)}$, и база индукции проверена.

Проведем шаг индукции, где буква n для краткости обозначает r_{l-1}. Сделаем в первом интеграле замену $x_m \to 1-x_m$ и представим его в виде:

$$I = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m)^{a_0}} \\ \times \int_{[0,1]^{m-n}} \frac{\prod_{n<i<m} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1} \cdot x_m^{b_m-a_m-1}(1-x_m)^{a_m-1}}{(1-zx_1\cdots x_m/Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m))^{a_0}} d\overline{x}. \quad (2.1)$$

При $|z|<1$ имеем:

$$\left|\frac{zx_1\cdots x_m}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m)}\right| \leqslant |z| \cdot \frac{x_1\cdots x_m}{Q_{l-1}(1,x_1,x_2,\dots,x_m)} \leqslant |z| < 1,$$

следовательно, справедливо представление:

$$\left(1-\frac{zx_1\cdots x_m}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m)}\right)^{-a_0} \\ = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!} \left(\frac{zx_1\cdots x_m}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m)}\right)^k.$$

Подставив этот ряд в (2.1), получим представление внутреннего интеграла в виде суммы

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!} \prod_{n<i<m} \frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)} \\ \times \frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} \left(\frac{zx_1\cdots x_n}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\dots,x_m)}\right)^k.$$

Переставив суммирование и интегрирование (равномерная сходимость имеется), представим (2.1) в виде

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\Gamma(a_0+k)}{\Gamma(a_0)k!} \prod_{n<i<m} \frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}$$
$$\times \frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{(a_i+k)-1}(1-x_i)^{(b_i+k)-(a_i+k)-1}}{Q_{l-1}(z,x_1,x_2,\ldots,x_m)^{a_0+k}} d\overline{x}. \quad (2.2)$$

Согласно индукционному предположению, последний интеграл равен

$$\frac{\Gamma(a_n+k)}{\Gamma(a_0+k)} \prod_{i\in S'} \frac{\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i-c_i)} \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{c_i+k-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i\in S'}(1-zx_1\ldots x_i)^{b_i-a_i}} dx_1 dx_2\cdots dx_n,$$

где $S' = S\backslash\{m\}$.

Воспользуемся этим представлением и поменяем в (2.2) суммирование и интегрирование:

$$I = \prod_{i\in S'} \frac{\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i-c_i)} \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{c_i-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{\prod_{i\in S'}(1-zx_1\ldots x_i)^{b_i-a_i}}$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_n+k)}{\Gamma(a_0)k!} \prod_{n<i<m} \frac{\Gamma(a_i+k)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i+k)}$$
$$\times \frac{\Gamma(b_m-a_m+k)\Gamma(a_m)}{\Gamma(b_m+k)} (zx_1x_2\ldots x_n)^k dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Для завершения доказательства заметим, что внутренняя сумма может быть представлена в виде

$$\frac{\Gamma(c_m)}{\Gamma(a_0)} \prod_{n<i\leqslant m} \frac{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i-a_i)}{\Gamma(b_i)}$$
$$\times {}_{m-n+1}F_{m-n} \left[\begin{matrix} b_m-a_m, c_{n+1},\ldots,c_{m-1},c_m \\ b_{n+1},\ldots,b_{m-1},b_m \end{matrix}; zx_1x_2\ldots x_n\right]$$
$$= \frac{\Gamma(a_m)}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(b_m-a_m)}{\Gamma(b_m-c_m)} \int_{[0,1]^{m-n}} \frac{\prod_{n<i\leqslant m} x_i^{c_i-1}(1-x_i)^{b_i-c_i-1}}{(1-zx_1\ldots x_m)^{b_m-a_m}} dx_{n+1}\cdots dx_m.$$

Теорема доказана.

Отметим, что случай, когда знаменатель подынтегрального выражения есть степень $Q = 1 - zx_1x_2\cdots x_{r_1} + zx_1x_2\cdots x_{r_2} - \cdots + (-1)^l zx_1x_2\cdots x_{r_l}$

сводится к теореме 2.1. При четном l многочлен Q может быть представлен в требуемом в теореме виде, а при нечетном l необходимо вначале сделать замену $x_{r_l} \to 1 - x_{r_l}$.

В качестве следствия теоремы 2.1, получим равенство интеграла $V(z)$ интегралу вида $S(z)$. Рассмотрим отдельно случай четной и нечетной размерности.

При $r_j = 2j$, $1 \leqslant j \leqslant l$ получаем

Теорема 2.2 *Пусть* $\mathrm{Re}(a_0) > 0$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$ *при* $1 \leqslant i \leqslant 2l$, $\mathrm{Re}(b_{2j}) > \mathrm{Re}(a_{2j-2})$ *при* $1 \leqslant j \leqslant l$. *Тогда при* $|z| < 1$ *выполняется равенство*

$$V_{2l}\left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2l} \\ b_1, b_2, \ldots, b_{2l} \end{matrix}; z\right] = \frac{\Gamma(a_{2l})}{\Gamma(a_0)} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(b_{2j} - a_{2j})}{\Gamma(b_{2j} - a_{2j-2})}$$
$$\times \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{l} x_{2i-1}^{a_{2i-1}-1}(1 - x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i-2}-1}(1 - x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i-2}-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1 \ldots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}}$$
$$\times\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l},$$

причем оба интеграла сходятся.

Следствие 2.1 *Для произвольных целых неотрицательных* l *и* n *выполняется*

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^n (1 - x_i)^n}{(1 - x_1 + x_1 x_2 - \cdots + x_1 x_2 \cdots x_{2l})^{n+1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l}$$
$$= \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^n (1 - x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(1 - x_1 \ldots x_{2j})^{n+1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l}.$$

Доказательство. Выберем в теореме 2.2 $a_i = n+1$, $b_i = 2n+2$ и устремим z к единице.

При $r_j = 2j$, $1 \leqslant j \leqslant l$, $r_{l+1} = 2l + 1$ получаем

Теорема 2.3 *Пусть* $\mathrm{Re}(a_0) > 0$, $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$ *при* $1 \leqslant i \leqslant 2l + 1$, $\mathrm{Re}(b_{2j}) > \mathrm{Re}(a_{2j-2})$ *при* $1 \leqslant j \leqslant l$, $\mathrm{Re}(b_{2l+1}) > \mathrm{Re}(a_{2l})$. *Тогда при* $|z| < 1$ *выполняется равенство*

$$V_{2l+1}\left[\begin{matrix} a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2l+1} \\ b_1, b_2, \ldots, b_{2l+1} \end{matrix}; z\right] = \frac{\Gamma(a_{2l+1})}{\Gamma(a_0)} \frac{\Gamma(b_{2l+1}-a_{2l+1})}{\Gamma(b_{2l+1}-a_{2l})} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(b_{2j}-a_{2j})}{\Gamma(b_{2j}-a_{2j-2})}$$

$$\times \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{l} x_{2i-1}^{a_{2i-1}-1}(1-x_{2i-1})^{b_{2i-1}-a_{2i-1}-1} x_{2i}^{a_{2i-2}-1}(1-x_{2i})^{b_{2i}-a_{2i-2}-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1\ldots x_{2j})^{b_{2j}-a_{2j}}}$$

$$\times \frac{x_{2l+1}^{a_{2l}-1}(1-x_{2l+1})^{b_{2l+1}-a_{2l}-1}}{(1-zx_1\ldots x_{2l+1})^{a_{2l+1}}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l+1},$$

причем оба интеграла сходятся.

Следствие 2.2 *Для произвольных целых неотрицательных l и n выполняется*

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^n (1-x_i)^n}{(1-x_1+x_1x_2-x_1x_2x_3+\cdots-x_1x_2\cdots x_{2l+1})^{n+1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l+1}$$

$$= \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^n (1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(1-x_1\ldots x_{2j})^{n+1}(1-x_1x_2\ldots x_{2l}x_{2l+1})^{n+1}} dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l+1}.$$

Доказательство. Выберем в теореме 2.3 $a_i = n+1$, $b_i = 2n+2$ и устремим z к единице.

2.2 Разложение кратных интегралов в кратные суммы

Доказательство теоремы 2.1 по сути состоит в том, что левая и правая часть разлагаются в одни и те же кратные ряды. В этом разделе мы приведем явный вид такого ряда для интеграла $S(z)$ (см. (1.6)). При условиях $\mathrm{Re}(b_i) > \mathrm{Re}(a_i) > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$; $\mathrm{Re}(c_j) > 0$, $1 \leqslant j \leqslant l$ и $|z| < 1$ этот интеграл, очевидно, сходится. Обычно мы будем считать, что параметры a_i, b_i, c_j целые, причем $b_i > a_i \geqslant 1$, $c_j \geqslant 1$.

Лемма 2.1 *Пусть $b_i - a_i$ и c_j – натуральные числа. Тогда выполняется равенство*

$$zS(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1, n_2, \ldots, n_l) z^{n_1},$$

где

$$R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^{l} \Gamma(c_j)}$$
$$\times \frac{\prod_{j=1}^{l} [(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 1)(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 2) \ldots (\zeta_j - \zeta_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(\zeta_j + a_i - 1)(\zeta_j + a_i) \ldots (\zeta_j + b_i - 2)]}, \quad (2.3)$$

где подразумевается $r_0 = 0$, $\zeta_{l+1} \equiv 1$ *и в случае* $c_j = 1$ *множитель в числителе опускается.*

Доказательство. Разложим каждый множитель $(1 - zx_1x_2 \ldots x_{r_j})^{-c_j}$ под интегралом по формуле

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)k!} x^k.$$

Получим:

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}$$
$$\times \prod_{j=1}^{l} \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c_j + k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!} (zx_1x_2 \ldots x_{r_j})^{k_j} dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$
$$= \sum_{k_1,\ldots,k_l=0}^{\infty} z^{k_1+k_2+\cdots+k_l} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(c_j + k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!}$$
$$\times \int_{[0,1]^m} \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} x_i^{a_i+k_j+\cdots+k_l-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1} dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$
$$= \sum_{k_1,\ldots,k_l=0}^{\infty} z^{k_1+k_2+\cdots+k_l} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(c_j + k_j)}{\Gamma(c_j)k_j!}$$
$$\times \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{\Gamma(a_i + k_j + \cdots + k_l)\Gamma(b_i - a_i)}{\Gamma(b_i + k_j + \cdots + k_l)}.$$

Сделаем замену переменных: $n_i = k_i + k_{i+1} + \cdots + k_l + 1$ (тогда $k_i = n_i - n_{i+1}$, $n_{l+1} = 1$). После перегруппировки множителей получим:

$$S(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \frac{\prod_{i=1}^{m} \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^{l} \Gamma(c_j)}$$
$$\times \frac{\prod_{j=1}^{l} [(n_j - n_{j+1} + 1)(n_j - n_{j+1} + 2) \ldots (n_j - n_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(a_i + n_j - 1)(a_i + n_j) \ldots (b_i + n_j - 2)]},$$

что и доказывает лемму.

Частными случаями леммы 2.1 являются

Лемма 2.2 *Справедливо следующее интегральное представление для нестрогих обобщенных полилогарифмов:*

$$\mathrm{Le}_{s_1, s_2, \ldots, s_l}(z) = z \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_m}{\prod_{j=1}^{l} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \cdots + s_j$, $m = r_l$.

и

Лемма 2.3 *Справедливо следующее интегральное представление для строгих обобщенных полилогарифмов:*

$$\mathrm{Li}_{s_1, s_2, \ldots, s_l}(z) = z^l \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^{l-1} (x_1 x_2 \ldots x_{r_j}) dx_1 dx_2 \ldots dx_m}{\prod_{j=1}^{l} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \cdots + s_j$, $m = r_l$.

Эти интегралы продолжают обобщенные полилогарифмы в область $D = \mathbb{C} \backslash \{z : |\arg(1 - z)| < \pi\}$ (комплексная плоскость с разрезом по действительной прямой от 1 до $+\infty$)

Переходя к пределу при $z \to 1-$, из лемм 2.2 и 2.3 получим интегральные представления кратной дзета-функции.

Лемма 2.4 *При* $s_1 > 1$ *справедливо следующее интегральное представление для нестрогой кратной дзета-функции:*

$$\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_m}{\prod_{j=1}^{l} (1 - x_1 x_2 \ldots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \cdots + s_j$, $m = r_l$.

Лемма 2.5 *При* $s_1 > 1$ *справедливо следующее интегральное представление для строгой кратной дзета-функции:*

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^{l-1}(x_1 x_2 \dots x_{r_j}) dx_1 dx_2 \dots dx_m}{\prod_{j=1}^{l}(1 - x_1 x_2 \dots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \dots + s_j$, $m = r_l$.

2.3 Обобщенные полилогарифмы и преобразование $z \to \frac{-z}{1-z}$

В данном разделе мы рассмотрим поведение обобщенных полилогарифмов при преобразовании $z \to \frac{-z}{1-z}$.

Пусть у нас есть вектор $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ с натуральными компонентами. Сопоставим ему вектор $\vec{s'}$, определенный следующим образом:

$$\vec{s'} = (\{1\}_{s_1-1},\ 2, \{1\}_{s_2-2},\ \dots\ , 2, \{1\}_{s_{l-1}-2},\ 2, \{1\}_{s_l-1}).$$

Если какое-то $s_k = 1$ при $1 < k < l$, то вместо "$2, \{1\}_{s_k-2},$" нужно писать "$1+$".

Будем называть вектор $\vec{s'}$ двойственным к $\vec{s}$, так как из природы возникновения $\vec{s'}$ будет следовать, что $(\vec{s'})' = \vec{s}$. Если $\vec{s} \neq (1)$, то один и только один из двойственных векторов начинается с единицы, а их веса равны. Е.А. Уланский подсказал следующее определение двойственного вектора. Сопоставим вектору $\vec{s}$ слово $x_0^{s_1-1}x_1 \dots x_0^{s_k-1}x_1 = vx_1$. Пусть σ это отображение, действующее на таких словах и меняющее буквы x_0 и x_1 между собой. Тогда двойственный вектор $\vec{s'}$ соответствует слову $\sigma(v)x_1$.

Лемма 2.6 *(О двойственности) Пусть* $z \in D = \mathbb{C} \backslash \{z : |\arg(1-z)| < \pi\}$ *Тогда выполняется равенство*

$$\mathrm{Le}_{\vec{s}}\left(-\frac{z}{1-z}\right) = -\,\mathrm{Le}_{\vec{s'}}(z).$$

Доказательство. Докажем утверждение в области $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z| < |1-z|\}$. Тогда, используя аналитическое продолжение функций, утверждение будет также справедливо в области D. При $z = 0$ утверждение очевидно, поэтому далее $z \neq 0$. Воспользуемся интегральным представлением $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ (см. лемму 2.2)

$$\mathrm{Le}_{s_1,s_2,\ldots,s_l}(z) = z\int_{[0,1]^m} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_m}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\ldots x_{r_j})},$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \cdots + s_j$, $m = r_l$. Преобразуем интеграл по теореме 2.1 для $a_i = 1$, $b_i = 2$

$$\int_{[0,1]^m} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_m}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\ldots x_{r_j})} = \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_m}{1 - zQ_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,x_m)}, \tag{2.4}$$

где $Q_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,x_m) = x_1\cdots x_{r_1-1} - x_1\cdots x_{r_1} + \ldots + x_1\cdots x_{r_l-1} - x_1\cdots x_{r_l}$. Подставим вместо z в равенство (2.4) дробь $-\frac{z}{1-z}$.

$$\int_{[0,1]^m} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_m}{1 + \frac{z}{1-z}Q_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,x_m)} = (1-z)\int_{[0,1]^m} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_m}{1 - z + zQ_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,x_m)}$$

$$= (1-z)\int_{[0,1]^m} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_m}{1 - zQ'_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,x_m)}, \tag{2.5}$$

где $Q'_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,x_m) = 1 - Q_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,x_m)$. Сделаем в последнем интеграле замену $x_m \to 1 - x_m$ и заметим, что

$$\begin{aligned} Q'_{\vec{s}}(x_1,x_2,\ldots,1-x_m) &= x_1\cdots x_{r'_1-1} - x_1\cdots x_{r'_1} + \ldots \\ &\quad + x_1\cdots x_{r'_{l'}-1} - x_1\cdots x_{r'_{l'}} \\ &= Q_{\vec{s'}}(x_1,x_2,\ldots,x_m) \end{aligned}$$

соответствует вектору $\vec{s'}$ (собственно это и мотивирует его определение). Здесь мы использовали обозначения $l' = l(\vec{s'})$ и $r'_j = s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_j$. Снова сворачивая интеграл (после замены) в правой части (2.5) по теореме 2.1, запишем равенство (2.5) на языке полилогарифмов:

$$\frac{\mathrm{Le}_{\vec{s}}(-\frac{z}{1-z})}{-\frac{z}{1-z}} = (1-z)\frac{\mathrm{Le}_{\vec{s'}}(z)}{z},$$

что равносильно утверждению теоремы.

Так как обобщенный полилогарифм $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$ является линейной комбинацией $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$, то $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(-\frac{z}{1-z})$ будет линейной комбинацией $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$, а следовательно и $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$. Точную формулу можно найти в [23].

2.4 Производящие функции для значений кратной дзета-функции

В этом разделе мы будем изучать значения кратной дзета-функции с нестрогими неравенствами

$$\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_l \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}},$$

вместо обычно рассматриваемой кратной дзета-функции со строгими неравенствами:

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_l \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}.$$

В связи с проблемой иррациональности значений дзета-функции Римана в нечетных точках, Д.В. Васильев в работе [2] доказал равенство

$$\int_{[0,1]^{2k+1}} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{2k+1}}{1 - x_1(1 - x_2(\cdots - x_{2k}(1 - x_{2k+1}) \ldots)} = 2\zeta(2k+1). \qquad (2.6)$$

С помощью следствия 2.2 для $n = 0$ и леммы 2.4 можно переписать это равенство в виде

$$\widetilde{\zeta}(\{2\}_k, 1) = 2\zeta(2k+1) \qquad (2.7)$$

Далее будет доказана теорема, обобщающая этот факт, а также будут указаны другие связи ζ и $\widetilde{\zeta}$.

Для значений функций ζ известна следующая производящая функция.

Теорема 2.4 *(см., например, [30]) Выполняется равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\{s\}_k) x^k = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{j^s}\right)$$

(здесь и далее подразумевается $\zeta(\emptyset) = \widetilde{\zeta}(\emptyset) = 1$).

Пусть $s = 2p$ – четное число, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\{2p\}_k)(-x^{2p})^k = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^{2p}}{j^{2p}}\right) = \prod_{j=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{p-1}\left(1 - e^{\frac{2\pi i l}{p}}\frac{x^2}{j^2}\right)$$
$$= \prod_{l=0}^{p-1}\frac{\sin\left(\exp\left(\frac{\pi i l}{p}\right)\pi x\right)}{\exp\left(\frac{\pi i l}{p}\right)\pi x}. \tag{2.8}$$

Разлагая каждый синус в ряд Тейлора, можно получить значение $\zeta(\{2p\}_k)$ для произвольных p и k, которое будет вида $q_{2p,k}\pi^{2pk}$, $q_{2p,k} \in \mathbb{Q}$. В частности, $\zeta(\{2\}_k) = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!}$, $\zeta(\{4\}_k) = \frac{2^{2k+1}\pi^{4k}}{(4k+2)!}$. Относительно вычисления $\zeta(\{2p\}_k)$ при $p > 2$ см. [30].

Для значений функций $\widetilde{\zeta}$ имеется аналогичное тождество.

Теорема 2.5 *Выполняется равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\zeta}(\{s\}_k)x^k = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{j^s}\right)^{-1}.$$

Теорема 2.5 может быть доказана аналогично теореме 2.4 (только вначале необходимо разложить каждый множитель в бесконечном произведении в сумму геометрической прогрессии). Но мы получим ее в процессе доказательства теоремы 2.8.

Из теорем 2.4 и 2.5 следует тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta(\{s\}_k)(-x)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\zeta}(\{s\}_k)x^k = 1$$

откуда получаем для любого натурального m равенство

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \cdot \zeta(\{s\}_k) \cdot \widetilde{\zeta}(\{s\}_{m-k}) = 0 \tag{2.9}$$

и, следовательно, значение $\widetilde{\zeta}(\{2p\}_k)$ для произвольных p и k равно $\widetilde{q}_{2p,k}\pi^{2pk}$, $\widetilde{q}_{2p,k} \in \mathbb{Q}$.

Аналогично равенству (2.8), можно доказать следующий результат:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\zeta}(\{2p\}_k) x^{2pk} = \prod_{l=0}^{p-1} \frac{\exp\left(\frac{\pi i l}{p}\right) \pi x}{\sin\left(\exp\left(\frac{\pi i l}{p}\right) \pi x\right)}.$$

В частности, при $p = 1$ получаем $\widetilde{\zeta}(\{2\}_k) = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k)$ (это было доказано в [2]).

Обобщением равенства (2.9) является

Теорема 2.6 *Для произвольных действительных $s_1, s_2, \ldots, s_m$, больших единицы выполняется равенство*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \zeta(s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1) \cdot \widetilde{\zeta}(s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_m) = 0.$$

Доказательство. Определим множества $M_l = \{n_{l+1} > n_l > n_{l-1} > \cdots > n_1 \geqslant 1, n_{l+1} \geqslant n_{l+2} \geqslant \cdots \geqslant n_m \geqslant 1\}$ и $N_l = \{n_l > n_{l-1} > \cdots > n_1 \geqslant 1, n_{l+1} \geqslant \cdots \geqslant n_m \geqslant 1\}$. Заметим, что

$$\sum_{N_l} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}} = \zeta(s_l, s_l, \ldots, s_1) \cdot \widetilde{\zeta}(s_{l+1}, s_{l+2}, \ldots, s_m)$$

Индукцией по l покажем равенство

$$\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{k-1} \cdot \zeta(s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1) \cdot \widetilde{\zeta}(s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_m) + (-1)^l \sum_{M_l} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}. \quad (2.10)$$

База индукции, $l = 0$, следует из определения множества $M_0 = \{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_m \geqslant 1\}$:

$$\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \sum_{M_0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}.$$

Докажем равенство (2.10) для $l < m$, в предположении, что оно верно для $l - 1$. Справедливы следующие выражения для множеств M_{l-1} и M_l:

$$M_{l-1} = N_l \cap \{n_l \geqslant n_{l+1} \geqslant 1\}, \quad M_l = N_l \cap \{n_{l+1} > n_l \geqslant 1\}.$$

Отсюда получаем равенство для множеств $M_{l-1} = N_l \backslash M_l$ и, далее, равенство для рядов:

$$\sum_{M_{l-1}} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}} = \sum_{N_l} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}} - \sum_{M_l} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}$$
$$= \zeta(s_l, s_{l-1}, \ldots, s_1) \cdot \widetilde{\zeta}(s_{l+1}, s_{l+2}, \ldots, s_m) - \sum_{M_l} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^{k-1} \cdot \zeta(s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1) \cdot \widetilde{\zeta}(s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_m)$$
$$+ (-1)^{l-1} \sum_{M_{l-1}} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}$$
$$= \sum_{k=1}^{l} (-1)^{k-1} \cdot \zeta(s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1) \cdot \widetilde{\zeta}(s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_m)$$
$$+ (-1)^{l} \sum_{M_l} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}},$$

что и требовалось доказать. При $l = m - 1$ равенство (2.10) равносильно утверждению теоремы, так как

$$\sum_{M_{m-1}} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}} = \zeta(s_m, s_{m-1}, \ldots, s_1).$$

Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству обобщения равенства (2.7). Оно будет во многом похоже на доказательство Васильева равенства (2.6) в [2]. Нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Пусть $s_1 > 1$, s_2, $\ldots$, s_k – натуральные числа. Определим числа $r_j = \sum_{i=1}^{j} s_i$ и многочлены

$$Q_0 = 1,$$
$$Q_k(z) = 1 - zx_1 \cdots x_{r_1 - 1} + zx_1 \cdots x_{r_1} - \ldots - zx_1 \cdots x_{r_k - 1} + zx_1 \cdots x_{r_k},$$
$$Q_k = Q_k(1).$$

Лемма 2.7 *Выполняется равенство*

$$\int_{[0,1]^{r_k}} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{Q_k} = \widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_k).$$

Доказательство. Применим теорему 2.1 к $a_i = 1$, $b_i = 2$

$$\int_{[0,1]^{r_k}} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{Q_k(z)} = \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{\prod_{j=1}^{k}(1 - zx_1 \ldots x_{r_j})}.$$

В этом тождестве устремим z к единице и воспользуемся леммой 2.5.

Рассмотрим семейство интегралов:

$$I_{\emptyset} = 1, \quad I_{s_1, s_2, \ldots, s_k}(\sigma) = \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{(1 - Q_k)^{\sigma}}{Q_k} dx_1 \cdots dx_{r_k}, \quad \sigma \geqslant 0.$$

Следствие 2.3 *Выполняется равенство* $I_{s_1, s_2, \ldots, s_k} = I_{s_1, s_2, \ldots, s_k}(0) = \widetilde{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

Доказательство. Это переформулировка леммы 2.7.

Следствие 2.4 *Пусть все* $s_j > 1$. *Тогда выполняется равенство*

$$-\frac{d}{d\sigma}\left[I_{s_1, s_2, \ldots, s_k}(\sigma)\right]_{\sigma=0} = \widetilde{\zeta}(2, \{1\}_{s_1 - 2}, 2, \{1\}_{s_2 - 2}, 2, \{1\}_{s_k - 2}, 1).$$

Доказательство. Имеем равенство

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\sigma}\left[I_{s_1, s_2, \ldots, s_k}(\sigma)\right]_{\sigma=0} &= \int_{[0,1]^{r_k}} -\frac{\ln(1 - Q_k)}{Q_k} dx_1 \cdots dx_{r_k} \\ &= \int_{[0,1]^{r_k+1}} \frac{dx_0 dx_1 \cdots dx_{r_k}}{1 - x_0 Q_k} \end{aligned}$$

Возможность дифференцирования по параметру σ дает равномерная сходимость интеграла

$$\int_{[0,1]^{r_k}} \frac{\ln(1 - Q_k)(1 - Q_k)^{\sigma}}{Q_k} dx_1 \cdots dx_{r_k}.$$

при $\sigma \geqslant 0$. Теперь сделаем в интеграле замену $x_{r_k} \to 1 - x_{r_k}$ и представим $1 - x_0 Q_k(x_1, x_2, \ldots, 1 - x_{r_k})$ в виде (добавляя и вычитая некоторые слагаемые)

$$
\begin{aligned}
1 &- x_0 + x_0x_1 - x_0x_1 + x_0x_1x_2 - \cdots - x_0x_1\cdots x_{r_1-2} + x_0x_1\cdots x_{r_1-1}\\
&- x_0x_1\cdots x_{r_1} + x_0x_1\cdots x_{r_1+1} - \cdots - x_0x_1\cdots x_{r_2-2} + x_0x_1\cdots x_{r_2-1}\\
&\ldots\\
&- x_0x_1\cdots x_{r_{k-1}} + x_0x_1\cdots x_{r_{k-1}+1} - \cdots - x_0x_1\cdots x_{r_k-2} + x_0x_1\cdots x_{r_k-1}\\
&- x_0x_1\cdots x_{r_k-1} + x_0x_1\cdots x_{r_k}
\end{aligned}
$$

и применим лемму 2.7. Следствие доказано.

Введем

$$\zeta_\sigma(s_1, s_2, \ldots, s_l) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_l \geqslant 1} \frac{1}{(n_1+\sigma)^{s_1}\cdots(n_l+\sigma)^{s_l}},$$

где $s_1 > 1$, s_2, …, s_k – натуральные числа. Этот ряд равномерно сходится при $\sigma \geqslant 0$.

Лемма 2.8 *При $s_j > 1$ выполняется равенство*

$$I_{s_1,s_2,\ldots,s_k}(\sigma) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\zeta_\sigma(s_j, s_{j-1}, \ldots, s_1)\widetilde{\zeta}(s_{j+1}, s_{j+2}, \ldots, s_k). \qquad (2.11)$$

Доказательство. Имеем тождество

$$Q_k(x_1, x_2, \ldots, x_{ks}) = 1 - x_1\cdots x_{s_1-1}(1 - x_{s_1}Q_{k-1}(x_{s_1+1}, x_{s_1+2}, \ldots, x_{r_k})).$$

Для краткости обозначим $Q' = Q_{k-1}(x_{s_1+1}, x_{s_1+2}, \ldots, x_{r_k})$. Разложим в подынтегральном выражении $1/Q_k$ по степеням $1 - Q_k$ (внутри куба интегрирования $0 < Q_k < 1$):

$$
\begin{aligned}
I_{s_1,s_2,\ldots,s_k}(\sigma) &= \int_{[0,1]^{r_k}} \frac{(1-Q_k)^\sigma}{Q_k} dx_1\cdots dx_{r_k}\\
&= \int_{[0,1]^{r_k}} \sum_{n=0}^{\infty}(1-Q_k)^{n+\sigma} dx_1\cdots dx_{r_k}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]^{r_k}} (x_1 \cdots x_{s_1-1}(1 - x_{s_1}Q'))^{n+\sigma} dx_1 \cdots dx_{r_k}.$$

Так как $(1-Q_k)^{n+\sigma}$ неотрицательно, то возможность перестановки интеграла и суммы гарантируется теоремой Фубини (см, например, [14, глава V, § 6, Теорема 5 и замечание к ней]). Теорема Фубини говорит о перестановке двух интегралов (Лебега), однако бесконечную сумму можно представить в виде несобственного интеграла:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_0^{\infty} f(t)\, dt,$$

где $f(t) = a_n$ при $t \in [n, n+1)$. Проинтегрируем по переменным x_1, x_2, $\ldots$, x_{s_1}.

$$\begin{aligned} I_{s_1,s_2,\ldots,s_k}(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sigma)^{s_1}} \int_{[0,1]^{r_k - s_1}} \frac{1-(1-Q')^{n+\sigma}}{Q'} dx_{s_1+1} \cdots dx_{r_k} \\ &= \zeta_\sigma(s_1) I_{s_2,s_3,\ldots,s_k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sigma)^{s_1}} I_{s_2,s_3,\ldots,s_k}(n+\sigma). \qquad (2.12) \end{aligned}$$

Будем доказывать утверждение леммы по индукции. Проверим базу для $k = 1$

$$I_{s_1}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sigma)^{s_1}} = \zeta_\sigma(s_1).$$

Предположим, что утверждение леммы доказано для $k-1$, докажем его для k. Подставляя в (2.12) вместо $I_{s_2,s_3,\ldots,s_k}(n+\sigma)$ выражение, верное по предположению индукции, получаем

$$\begin{aligned} I_{s_1,s_2,\ldots,s_k}(\sigma) &= \zeta_\sigma(s_1) I_{s_2,s_3,\ldots,s_k} \\ &\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sigma)^{s_1}} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \zeta_{n+\sigma}(s_{j+1}, s_j, \ldots, s_2) I_{s_{j+2}, s_{j+3}, \ldots, s_k} \\ &= \zeta_\sigma(s_1) I_{s_2,s_3,\ldots,s_k} - \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \zeta_\sigma(s_{j+1}, s_j, \ldots, s_1) I_{s_{j+2}, s_{j+3}, \ldots, s_k} \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \zeta_\sigma(s_j, s_{j-1}, \ldots, s_1) I_{s_{j+1}, s_{j+2}, \ldots, s_k}, \end{aligned}$$

что, учитывая следствие 2.3, и доказывает лемму.

Теорема 2.7 *При* $s_j > 1$ *верно равенство*

$$\begin{aligned}&\widetilde{\zeta}(2,\{1\}_{s_1-2},2,\{1\}_{s_2-2},2,\{1\}_{s_k-2},1)\\&\qquad=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{l=1}^{j}s_l\zeta(s_j,s_{j-1},\ldots,s_l+1,\ldots,s_1)\widetilde{\zeta}(s_{j+1},s_{j+2},\ldots,s_k).\end{aligned}$$

Доказательство. Продифференцируем по σ равенство (2.11) и подставим $\sigma=0$:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\sigma}\left[I_{s_1,s_2,\ldots,s_k}(\sigma)\right]_{\sigma=0}\\&\qquad=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{d}{d\sigma}\left[\zeta_\sigma(s_j,s_{j-1},\ldots,s_1)\right]_{\sigma=0}\widetilde{\zeta}(s_{j+1},s_{j+2},\ldots,s_k).\end{aligned}$$

По следствию 2.4 левая часть равна

$$-\widetilde{\zeta}(2,\{1\}_{s_1-2},2,\{1\}_{s_2-2},2,\{1\}_{s_k-2},1),$$

а из определения $\zeta_\sigma(s_j,s_{j-1},\ldots,s_1)$ и ее равномерной сходимости при $\sigma\geqslant 0$ следует, что

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\zeta_\sigma(s_j,s_{j-1},\ldots,s_1)\right]_{\sigma=0}=-\sum_{l=1}^{j}s_l\zeta(s_j,s_{j-1},\ldots,s_l+1,\ldots,s_1).$$

Откуда получаем утверждение теоремы.

Из теоремы 2.7 при $k=1$ следует, что $\widetilde{\zeta}(2,\{1\}_{s-1})=s\zeta(s+1)$, а при $k=2$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\zeta}(2,\{1\}_{s_1-2},2,\{1\}_{s_2-1})&=s_1\zeta(s_1+1)\zeta(s_2)-s_2\zeta(s_2+1,s_1)-s_1\zeta(s_2,s_1+1)\\&=s_1\zeta(s_1+s_2+1)+s_1\zeta(s_1+1,s_2)-s_2\zeta(s_2+1,s_1).\end{aligned}$$

В случае равных s_j (пусть $s_j=s$ для любого j) удается посчитать правую часть для любых k.

Теорема 2.8 *При натуральных* k, $s\geqslant 2$ *выполняется равенство*

$$\widetilde{\zeta}(\{2,\{1\}_{s-2}\}_k,1)=s\zeta(sk+1).$$

Доказательство. Рассмотрим производящие функции

$$f_\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \zeta_\sigma(\{s\}_k) x^k = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{(j+\sigma)^s}\right)$$

и $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\zeta}(\{s\}_k) x^k$. Из леммы 2.8 следует, что

$$f_\sigma(x) g(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (I_{\{s\}_k} - I_{\{s\}_k}(\sigma)) x^k. \tag{2.13}$$

При $\sigma = 0$ получаем $f_0(x) g(x) = 1$, откуда

$$g(x) = 1/f_0(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{j^s}\right)^{-1}$$

и мы, с помощью следствия 2.3, получаем теорему 2.5.

Продифференцируем тождество (2.13) по σ и подставим $\sigma = 0$. Пользуясь следствием 2.4, находим

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\zeta}(\{2, \{1\}_{s-2}\}_k, 1) x^k &= g(x) \frac{d}{d\sigma} \left[f_\sigma(x)\right]_{\sigma=0} \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{j^s}\right)^{-1} \frac{d}{d\sigma} \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{(j+\sigma)^s}\right)\right]_{\sigma=0} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{x}{j^s}} \frac{sx}{j^{s+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} s\zeta(sk+1) x^k.
\end{aligned}$$

2.5 Арифметические свойства кратных дзета-значений

Кратные дзета-значения активно изучаются, однако большинство результатов представляют собой различные тождества между этими значениями. В этом разделе мы коснемся их арифметических свойств.

Среди всех векторов с натуральными компонентами выделим следующие множества:

$$\mathcal{B} = \{\vec{s} : s_i \in \{2, 3\}\}, \quad \mathcal{B}_w = \{\vec{s} \in \mathcal{B} : w(\vec{s}) = w\}.$$

Хоффман ([33]) выдвинул следующие гипотезы.

Гипотеза 1. При любом $\vec{s_0}$ значение $\zeta(\vec{s_0})$ представляется в виде линейной формы с рациональными коэффициентами от значений $\zeta(\vec{s})$, $\vec{s} \in \mathcal{B}_{w(\vec{s_0})}$.

Эта гипотеза была проверена для $\vec{s_0}$ с весом $\leqslant 16$.

Гипотеза 2. Все значения $\zeta(\vec{s})$, $\vec{s} \in \mathcal{B}$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Если гипотеза 2 верна, то представление в виде линейной формы из гипотезы 1 единственно. Из этих двух гипотез следует, что размерность линейного пространства, порожденного кратными дзета-значениями веса w равна d_w, где числа d_w определяются производящей функцией

$$\sum_{w=0}^{\infty} d_w x^w = \frac{1}{1 - w^2 - w^3}.$$

Так как $\zeta(\{2\}_k) = \pi^{2k}/(2k+1)!$, то эти значения иррациональны (и даже линейно независимы над $\mathbb{Q}$ между собой и 1). Также, по теореме Апери, иррационально число $\zeta(3)$. Относительно арифметических свойств $\zeta(\vec{s})$ при других $\vec{s} \in \mathcal{B}$ никакой определености пока нет.

Пусть какое-то $\zeta(\vec{s_0}) \in \mathbb{Q}$, $w(\vec{s_0})$ – нечетно. Если $\zeta(\vec{s_0})\zeta(2k)$ представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами чисел $\zeta(\vec{s})$, $\vec{s} \in \mathcal{B}_{w(\vec{s_0})+2k}$ (а так и должно быть по гипотезе 1), то следовательно среди этих чисел есть хотя бы одно иррациональное. Например, если $\zeta(2,3) \in \mathbb{Q}$ или $\zeta(3,2) \in \mathbb{Q}$, то одно из чисел $\zeta(3,2,2)$, $\zeta(2,3,2)$ и $\zeta(2,2,3)$ иррационально. Аналогично, если какое-то $\zeta(\vec{s_0}) \in \mathbb{Q}$, $w(\vec{s_0})$ – четное и $\zeta(\vec{s_0})\zeta(3)$ представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами чисел $\zeta(\vec{s})$, $\vec{s} \in \mathcal{B}_{w(\vec{s_0})+3}$, то среди них есть хотя бы одно иррациональное.

Далее мы докажем некоторый результат о линейной независимости кратных дзета-значений.

Лемма 2.9 *Пусть $x \notin \mathbb{Q}$, числа y_i, $i = 1, \ldots, k$ — такие, что 1, y_1, …, y_k линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда существуют $k-1$ чисел из xy_i, что 1, x и они линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть числа 1, x, xy_i, $i = 1, \ldots, k-1$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Т.е. существуют такие целые A_1, B_1 и C_{1i}, не равные одновременно нулю, что

$$A_1 + B_1 x + \sum_{i=1}^{k-1} C_{1i} x y_i = 0.$$

Если $A_1 = 0$, то поделив это равенство на x, получим, что 1 и числа y_i, $i = 1, \ldots, k-1$ линейно зависимы, что по условию не так. Если бы все $C_{1i} = 0$, то x было бы рациональным. Следовательно, существует $p \in [1, k-1]$, что $C_{1p} \neq 0$. Пусть целые A_2, B_2 и C_{2i}, не равные одновременно нулю таковы, что

$$A_2 + B_2 x + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k, i \neq p} C_{2i} x y_i = 0.$$

Аналогично, $A_2 \neq 0$. Умножим первое равенство на A_2 и вычтем второе равенство, умноженное на A_1. Получим (полагая $C_{1k} = 0$, $C_{2p} = 0$)

$$(B_1 A_2 - B_2 A_1) x + \sum_{i=1}^{k} (C_{1i} A_2 - C_{2i} A_1) x y_i = 0.$$

Поделим это равенство на x. Тогда получим линейную форму от 1, y_i, причем коэффициент при y_p будет равен $C_{1p} A_2 \neq 0$, противоречие с линейной независимостью 1 и чисел y_i. Лемма доказана.

Следствие 2.5 *При любом натуральном l числа 1, $\zeta(3)$ и какие-то l чисел из $\zeta(3)\zeta(2k)$, $k = 1, \ldots, l+1$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. В лемме 2.9 возьмем $x = \zeta(3)$, $y_k = \zeta(2k)$.

Из этого следствия вытекает другое

Следствие 2.6 *Если $\mathcal{M}_w$ - множество векторов веса w таких, что все кратные дзета-функции веса w выражаются рациональным образом через $\zeta(\vec{s})$, $\vec{s} \in \mathcal{M}_w$, то существуют l таких векторов $\vec{t_i}$ разного веса, $i \in \{5, 7, \ldots, 2l+5\}$, $\vec{t_i} \in \mathcal{M}_i$, что 1, $\zeta(3)$ и числа $\zeta(\vec{t_i})$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

По гипотезе 1 в качестве $\mathcal{M}_w$ можно взять $\mathcal{B}_w$. Если так, то

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{\vec{s} \in \mathcal{B}_3 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{2l+5}} \mathbb{Q}\zeta(\vec{s})) \geqslant l + 2.$$

Также, очевидно,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{\vec{s} \in \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{2l}} \mathbb{Q}\zeta(\vec{s})) \geqslant l + 1.$$

Следствие 2.7 *Существует такое*

$$\vec{s_0} \in \{(2,3), (3,2), (2,2,3), (2,3,2), (3,2,2)\},$$

что числа 1, $\zeta(3)$ и $\zeta(\vec{s_0})$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Применим следствие 2.6 при $l = 1$, выбирая $M_5 = \{(2,3), (3,2)\}$ и $M_7 = \{(2,2,3), (2,3,2), (3,2,2)\}$.

Глава 3

Разложения кратных интегралов в линейные формы

Уже классическим результатом является представление гипергеометрического интеграла

$$\int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1x_2\dots x_m)^{a_0}} dx_1dx_2\dots dx_m$$

при натуральных a_i, b_i в виде $\sum_{s=0}^m P_s(z^{-1})\operatorname{Li}_s(z)$ (см., например, [16, Proposition 1, Lemma 1, Lemma 2]). Здесь и далее коэффициенты при (обобщенных) полилогарифмах в разложении интегралов — многочлены с рациональными коэффициентами.

В работах [20], [21] В.Н. Сорокин по существу доказал тождества

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} dx_1dx_2dx_3 \tag{3.1}$$

$$= P_{2,1}(z^{-1})\operatorname{Le}_{2,1}(z) + P_{1,1}(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,1}(z) + P_1(z^{-1})\operatorname{Le}_1(z) + P_\emptyset(z^{-1})$$

и

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{2j})^{n+1}} dx_1dx_2\dots dx_{2l} \tag{3.2}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{1,\{2\}_k}(z),$$

где $a_{2j-1} = a_{2j} = (l+1-j)(n+1) - \delta$, $0 \leqslant \delta \leqslant l \leqslant n$. Существование такого разложения было показано с помощью аппроксимаций Паде.

В данной главе мы изучим обобщение этих фактов, а именно разложение интеграла

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1dx_2\dots dx_m,$$
$$0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_l = m.$$

в линейные формы от обобщенных полилогарифмов. Будут использоваться следующие обозначения. Будем писать, что $\vec{u} \leqslant \vec{v}$, если длины этих векторов равны и $u_i \leqslant v_i$ при любом $i = 1, \dots, l(\vec{u}) = l(\vec{v})$. Назовем вектор $\vec{u}$ *подчиненным* вектору $\vec{v}$, если $\vec{u} \leqslant \vec{v}$ или $\vec{u} \leqslant \vec{v'}$ для некоторого вектора $\vec{v'}$, полученного из вектора $\vec{v}$ вычеркиванием нескольких компонент в произвольных местах. *Высотой* многочлена назовем максимум модулей его коэффициентов.

3.1 Общая теорема о разложении кратных интегралов

Лемма 3.1 *Обобщенные полилогарифмы* $\operatorname{Le}_{s_1,s_2,\dots,s_n}(z)$ *с различными наборами индексов линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство. Известно, что обобщенные полилогарифмы $\operatorname{Li}_{s_1,s_2,\dots,s_n}(z)$ с различными наборами индексов линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ (см. [37], [23]). Наборы функций $\{\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)\}$ и $\{\operatorname{Li}_{\vec{s}}(z)\}$ с $w(\vec{s})$, не превосходящим некоторого фиксированного числа и упорядоченных по возрастанию длины $\vec{s}$, связаны преобразованием с верхнетреугольной матрицей с ненулевыми диагональными элементами (см. [23, пункт 3]):

$$\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z) = \operatorname{Li}_{\vec{s}}(z) + \sum_{\vec{t}} \operatorname{Li}_{\vec{t}}(z),$$

где вектора $\vec{t}$ в сумме имеют тот же вес, что и $\vec{s}$, но меньшую длину. Откуда и следует линейная независимость $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ над $\mathbb{C}(z)$.

Следствие 3.1 *Если функция $f(z)$ имеет представление в виде конечной суммы $\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$, $P_{\vec{s}}(x)$ – многочлены, то это представление единственно.*

Определим индекс рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ как $I(R) = \deg P - \deg Q$. Функции $R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = R_1(\zeta_1)\cdots R_l(\zeta_l)$ от нескольких переменных сопоставим вектор из индексов $(I(R_1), \ldots, I(R_l))$.

Теорема 3.1 *Пусть для функции $R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = R_1(\zeta_1)\ldots R_l(\zeta_l)$ выполняется неравенство $I(R_1) + I(R_2) + \cdots + I(R_j) + j \leqslant 0$ для любого $j = 1, \ldots, l$ и все полюса R_j лежат в множестве $\{0, -1, -2, \ldots\}$. При этом обозначим m_j – максимальный из порядков этих полюсов, p и P – соответственно минимальное и максимальное значения абсолютных величин полюсов всех функций R_j.*

Тогда при $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ сумма

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1, n_2, \ldots, n_l) z^{n_1 - 1} \tag{3.3}$$

представляется в виде

$$\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z), \tag{3.4}$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, удовлетворяющим условию $\vec{s} \leqslant (m_1 * m_2 * \cdots * m_l)$, где '$*$' означает либо запятую, либо плюс при каком-либо их распределении (в частности, будут выполняться неравенства $l(\vec{s}) \leqslant l$ и $w(\vec{s}) \leqslant m_1 + m_2 + \cdots + m_l$), а $P_{\vec{s}}(x)$ – многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant 1, \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant p + 1 \text{ при } \vec{s} \neq \emptyset, \quad \deg P_{\vec{s}}(x) \leqslant P + 1.$$

Дополнительно, если выполняются неравенства

$$I(R_1) + I(R_2) + \cdots + I(R_j) + j \leqslant -1, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{3.5}$$

то $P_{\vec{s}}(1) = 0$, для векторов $\vec{s}$ с $s_1 = 1$.

Докажем вначале следующую лемму.

Лемма 3.2 *Пусть l — натуральное число и теорема 3.1 верна для функций $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r) = R_1(\zeta_1) \cdots R_r(\zeta_r)$ при $r < l$ (в случае $l = 1$ никаких предположений не требуется). Тогда теорема верна для $R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l) = R_1(\zeta_1)R_2(\zeta_2)\dots R_l(\zeta_l)$, $R_j(x) = \frac{1}{(x+p_j)^{u_j}}$. Условие (3.5) в этом случае равносильно $u_1 \geqslant 2$. Высоты многочленов $P_{\vec{s}}$ не превосходят*

$$\max(l! \cdot (w(\vec{u})2^{w(\vec{u})})^{l-1}P^l, 1) \tag{3.6}$$

и $D_P^{w(\vec{u})-w(\vec{s})}P_{\vec{s}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Доказательство. Требуется доказать теорему 3.1 для суммы

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1-1} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}, \tag{3.7}$$

причем $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant l} p_j = p$, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l} p_j = P$. Такие суммы будем далее называть элементарными. Пусть $r_0 = 0$, $r_j = u_1 + u_2 + \dots + u_j$, $m = r_l = w(\vec{u})$. Используя лемму 2.1, выражение (3.7) можно записать в виде интеграла

$$I(p_1, p_2, \dots, p_l) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\dots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_{r_j})} dx_1dx_2\dots dx_m.$$

Проведем индукцию по величине $p_1 + p_2 + \dots + p_j$. При этом покажем только, что сумма (3.7) представима в виде (3.4), так как в каждом из разбираемых случаев нетрудно проследить за степенями многочленов, а также за ограничением на вектора получающихся обобщенных полилогарифмов.

База индукции ($p_1 = p_2 = \dots = p_l = 0$) следует из леммы 2.2: $I(0, 0, \dots, 0) = z^{-1}\operatorname{Le}_{u_1,u_2,\dots,u_l}(z)$.

Рассмотрим случай $p_j > 0$ для любого $j = 1, \dots, l$. Из равенства

$$x_1x_2\dots x_{r_l} = \frac{1 - (1 - zx_1x_2\dots x_{r_l})}{z}$$

следует, что

$$I(p_1, p_2, \dots, p_l) = z^{-1}I(p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_l - 1)$$

$$-z^{-1}\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\dots x_{r_j})^{p_j-1}}{\prod_{j=1}^{l-1}(1-zx_1x_2\dots x_{r_j})}dx_1dx_2\dots dx_m.$$

В последнем интеграле проинтегрируем по переменным $x_{r_{l-1}+1}$, $x_{r_{l-1}+2}$, $\dots$, x_{r_l} и полученный интеграл разложим в сумму по лемме 2.1:

$$I(p_1,p_2,\dots,p_l)=z^{-1}I(p_1-1,p_2-1,\dots,p_l-1)$$
$$-z^{-1}\cdot\frac{1}{p_l^{u_l}}\cdot\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\dots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1}z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_j-1)^{u_j}}.$$

Интеграл $I(p_1-1,p_2-1,\dots,p_l-1)$ представляется в виде (3.4) по предположению индукции, а вычитаемая сумма представляется в виде (3.4) по условию леммы (она зависит от $l-1$ переменной). Таким образом можно считать $p=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant l}p_j=0$.

Пусть теперь $p_h>0$ при некотором $h>1$. Запишем равенство

$$\begin{aligned}(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\dots x_{r_h})^{p_h} &= (x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\dots x_{r_h})^{p_h-1}\\ &\quad+(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\dots x_{r_h})^{p_h}(1-zx_1x_2\dots x_{r_{h-1}})\\ &\quad-(x_{r_{h-1}+1}x_{r_{h-1}+2}\dots x_{r_h})^{p_h-1}(1-zx_1x_2\dots x_{r_h}),\end{aligned}$$

из которого следует

$$I(p_1,p_2,\dots,p_h,\dots,p_l)=I(p_1,p_2,\dots,p_h-1,\dots,p_l)$$
$$+\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\dots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq h-1}}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{r_j})}dx_1dx_2\dots dx_m$$
$$-\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{j=1}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\dots x_{r_j})^{p'_j}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{r_j})}dx_1dx_2\dots dx_m,$$

где $p'_j=p_j$ при $j\neq h$ и $p'_h=p_h-1$. Используя лемму 2.1, перепишем это равенство как

$$I(p_1,p_2,\dots,p_h,\dots,p_l)$$
$$=I(p_1,p_2,\dots,p_h-1,\dots,p_l) \tag{3.8}$$

$$+\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{h-2}\frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}$$

$$\times\frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}}(n_{h-1}+p_h)^{u_h}}\cdot\prod_{j=h}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_{j+1})^{u_{j+1}}} \tag{3.9}$$

$$-\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{h-1}\frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}$$

$$\times\frac{1}{(n_h+p_h-1)^{u_h}(n_h+p_{h+1})^{u_{h+1}}}\cdot\prod_{j=h+1}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_{j+1})^{u_{j+1}}} \tag{3.10}$$

В случае $h=l$ вычитаемая сумма выглядит как

$$\frac{1}{p_l^{u_l}}\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}$$

К $I(p_1,p_2,\ldots,p_h-1,\ldots,p_l)$ применимо предположение индукции, а две другие суммы по условию леммы представляются в виде (3.4).

Остается доказать утверждение леммы для интеграла

$$I(p_1,0,\ldots,0)=\int_{[0,1]^m}\frac{(x_1x_2\ldots x_{r_1})^{p_1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})}dx_1dx_2\ldots dx_m.$$

Из равенства

$$(x_1x_2\ldots x_{r_1})^{p_1}=z^{-1}(x_1x_2\ldots x_{r_1})^{p_1-1}-z^{-1}(x_1x_2\ldots x_{r_1})^{p_1-1}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_1})$$

следует

$$\begin{aligned}
I(p_1,0,\ldots,0)&=z^{-1}I(p_1-1,0,\ldots,0)\\
&\quad-z^{-1}\int_{[0,1]^m}\frac{(x_1x_2\ldots x_{r_1})^{p_1-1}}{\prod_{j=2}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_{r_j})}dx_1dx_2\ldots dx_m\\
&=z^{-1}I(p_1-1,0,\ldots,0)\\
&\quad-z^{-1}\sum_{n_1\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\frac{1}{(n_1+p_1-1)^{u_1}n_1^{u_2}}\prod_{j=2}^{l-1}\frac{1}{n_j^{u_{j+1}}},
\end{aligned}$$

Вычитаемая сумма по условию леммы, а $I(p_1-1,0,\dots,0)$ по предположению индукции, представляются в виде (3.4). Представление в виде (3.4) теперь полностью доказано.

Перейдем теперь к оценке высот и арифметическим свойствам коэффициентов многочленов $P_{\vec{s}}(z)$. Утверждение, которое мы будем доказывать по индукции, немного более строгое, чем утверждение леммы: высоты $P_{\vec{s}}(z)$ не превосходят

$$\max\left(\sum_{j=1}^{l} p_j \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1}, 1\right).$$

Это оценка действительно более точная, чем (3.6), так как $\sum_{j=1}^{l} p_j \leqslant l \cdot P$.

Доказательство проведем индукцией по вектору $(l, p_1+p_2+\dots+p_l)$. Вектора (l,k) мы упорядочиваем в лексикографическом порядке, т.е.

$$(l_1,k_1) < (l_2,k_2) \Leftrightarrow l_1 < l_2 \text{ или } l_1 = l_2 \text{ и } k_1 < k_2.$$

База индукции справедлива: если $p_j = 0$ для всех j, то исходная сумма равна $z^{-1}\operatorname{Le}_{u_1,u_2,\dots,u_l}(z)$. Пусть теперь существует $p_j > 0$ (а значит и $P > 0$). Тогда проделаем те же самые преобразования, что были выше (напомним, что представление в виде линейной формы (3.4) единственно по следствию 3.1). В каждом из трех случаев доказательства аналогичны, поэтому разберем только второй случай (когда $p_h > 0$ при $h > 1$).

Рассмотрим подробнее сумму (3.9). Если $p_{h-1} = p_h$, то

$$\frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}}(n_{h-1}+p_h)^{u_h}} = \frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}+u_h}},$$

т.е. сумма (3.9) сама является элементарной и к ней можно применить предположении индукции. В этом случае высоты многочленов $P_{\vec{t}}(z)$ в её разложении не превосходят

$$(l-1)! \cdot (m2^m)^{l-2} P^{l-1},$$

а общий знаменатель коэффициентов $P_{\vec{t}}(z)$ делит $D_P^{m-w(\vec{t})}$. Если $p_{h-1} \neq p_h$, то рассмотрим следующее разложение в сумму простейших дробей

$$\frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^{u_{h-1}}(n_{h-1}+p_h)^{u_h}} = \sum_{k=1}^{u_{h-1}} \frac{A_k}{(n_{h-1}+p_{h-1})^k} + \sum_{k=1}^{u_h} \frac{B_k}{(n_{h-1}+p_h)^k},$$

$$A_k = (-1)^{u_{h-1}-k}\binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_{h-1}-k}\frac{1}{(p_h-p_{h-1})^{u_{h-1}+u_h-k}},$$
$$B_k = (-1)^{u_h-k}\binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_h-k}\frac{1}{(p_{h-1}-p_h)^{u_{h-1}+u_h-k}}.$$

Подставляя это равенство в (3.9), мы представим (3.9) в виде суммы $u_{h-1}+u_h$ элементарных сумм (с коэффициентами A_k и B_k), к каждой из которых можно применить предположение индукции. Рассмотрим какую-то одну из них:

$$\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{l-1}\geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{h-2}\frac{1}{(n_j+p_j)^{u_j}}\cdot\frac{1}{(n_{h-1}+p_{h-1})^k}\cdot\prod_{j=h}^{l-1}\frac{1}{(n_j+p_{j+1})^{u_{j+1}}}.$$

Ей соответствуют следующие параметры

$$l' = l-1, \quad m' = m+k-u_{h-1}-u_h, \quad \vec{p}' = (p_1,\ldots,p_{h-2},p_{h-1},p_{h+1},\ldots,p_l).$$

Если $P_{\vec{t}}(z)$ — многочлены разложения в линейную форму от обобщенных полилогарифмов, то общий знаменатель коэффициентов $P_{\vec{t}}(z)$ делит $D_P^{m'-w(\vec{t})}$. Так как $D_P^{u_{h-1}+u_h-k}A_k\in\mathbb{Z}$, то $D_P^{m-w(\vec{t})}(A_k\cdot P_{\vec{t}}(z))\in\mathbb{Z}[z]$, что и требуется. Высоты $P_{\vec{t}}(z)$ не превосходят

$$(l-1)!\cdot(m2^m)^{l-2}\cdot P^{l-1}.$$

Следовательно, высоты многочленов в разложении суммы (3.9) не превосходят

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{u_{h-1}}|A_k|+\sum_{k=1}^{u_h}|B_k|\right)\cdot(l-1)!\cdot(m2^m)^{l-2}\cdot P^{l-1}\\
\leqslant&\left(\sum_{k=1}^{u_{h-1}}\binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_{h-1}-k}+\sum_{k=1}^{u_h}\binom{u_{h-1}+u_h-k-1}{u_h-k}\right)\\
&\quad\times(l-1)!\cdot(m2^m)^{l-2}\cdot P^{l-1}\\
\leqslant&(u_{h-1}+u_h)2^{u_{h-1}+u_h-2}\cdot(l-1)!\cdot(m2^m)^{l-2}\cdot P^{l-1}\\
\leqslant&m2^{m-2}\cdot(l-1)!\cdot(m2^m)^{l-2}\cdot P^{l-1}\\
\leqslant&\frac{1}{2}\cdot(l-1)!\cdot(m2^mP)^{l-1}.
\end{aligned}$$

Сумма (3.10) рассматривается аналогично, а к интегралу $I(p_1, p_2, \ldots, p_h - 1, \ldots, p_l)$ можно применить предположение индукции. Для всех трех слагаемых (3.8), (3.9), (3.10) в линейной форме (3.4) знаменатели коэффициентов многочлена при $\mathrm{Le}_{\vec{t}}(z)$ делят $D_P^{m-w(\vec{t})}$. Высоты многочленов $P_{\vec{s}}(z)$ исходной суммы в случае $\sum_{j=1}^{l} p_j > 1$ не превосходят

$$\left(\sum_{j=1}^{l} p_j - 1\right) \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1} = \sum_{j=1}^{l} p_j \cdot (l-1)! \cdot (m2^m P)^{l-1}.$$

В случае $\sum_{j=1}^{l} p_j = 1$, вектора обобщенных полилогарифмов из разложения сумм (3.9) и (3.10) имеют длину меньше l, а в разложении $I(\{0\}_l)$ только один полилогарифм длины l, т.е. множества полилогарифмов не пересекаются и оценка на высоты в этом случае также справедлива. Лемма теперь полностью доказана.

Замечание. Можно было бы доказывать представление (3.4) без дополнительного предположения о том, что теорема 3.1 верна для функций R, зависящих от менее чем l переменных, по той же схеме, как мы доказывали утверждение о высотах и арифметических свойствах коэффициентов многочленов. Однако благодаря этому предположению, утверждение о том, что в случае $u_1 \geqslant 2$ выполняется равенство $P_{\vec{s}}(1) = 0$ при $s_1 = 1$ доказывается автоматически.

Назовем δ-суммой выражение

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+\delta_1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} R_l(n_l),$$

где δ_j – целые неотрицательные числа, полюса R_j лежат на отрезке $[-P_j, -p_j]$ и являются целыми числами и для любого $j = 1, \ldots, l$ выполняется $I(R_1) + I(R_2) + \cdots + I(R_l) + j \leqslant 0$.

Лемма 3.3 *Любая δ-сумма $\mathcal{F}$ представляется в виде конечной суммы $\sum_i \lambda_i \mathcal{F}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, где $\mathcal{F}_i$ – δ-суммы, у которых $I(R_j) < 0$ для любого j.*

При этом

1) Если $\vec{T}$ – вектор из максимальных порядков полюсов функций R_j для $\mathcal{F}$, а $\vec{t}$ – такой вектор для $\mathcal{F}_i$, то $\vec{t}$ подчинен $\vec{T}$.

2) Минимум из чисел p_j в $\mathcal{F}_i$ не меньше такого минимума в $\mathcal{F}$, а максимум из чисел P_j в $\mathcal{F}_i$ не больше такого максимума в $\mathcal{F}$.

3) Максимум из чисел $I(R_1) + I(R_2) + \cdots + I(R_l) + j$ в $\mathcal{F}_i$ не больше такого числа в $\mathcal{F}$. Следовательно, если у $\mathcal{F}$ он был < -1, то в $\mathcal{F}_i$ он будет < -1.

4) Если для любого j выполнялись неравенства $p_{j+1} + \delta_j \geqslant P_j$ в $\mathcal{F}$, то они будут выполняться и для любой суммы $\mathcal{F}_i$.

5) Если для любого j выполнялись неравенства $p_j > P_{j+1}$ в $\mathcal{F}$, то они будут выполняться и для любой суммы $\mathcal{F}_i$.

Доказательство. Проведем индукцию по вектору (l, k), где k – количество функций R_j с $I(R_j) \geqslant 0$ ($0 \leqslant k < l$). Вектора (l, k) мы упорядочиваем в лексикографическом порядке. База индукции, $l = 1$, очевидна, так как в этом случае, по определению δ-суммы, $I(R_1) \leqslant -1$. Докажем утверждение для вектора (l, k), предполагая, что для меньших векторов оно доказано. Покажем при этом основное утверждение леммы. Нетрудно проследить за пунктами 1-5 в шаге индукции. Если $k = 0$, то доказывать нечего, ведь тогда $I(R_j) < 0$ для любого j. Пусть $k > 0$, т.е. есть такое j, что $I(R_j) \geqslant 0$. Так как по условию $I(R_1) \leqslant -1$, то $j > 1$. Представим R_j в виде суммы многочлена и правильной дроби. В слагаемом с правильной дробью число k уменьшилось на единицу и к нему можно применить предположение индукции. Рассмотрим теперь второе слагаемое, в котором $R_j(x) = P(x)$, P – многочлен.

а) Если $j = l$. Просуммируем последнюю сумму:

$$\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}} P(n_l) = Q(n_{l-1}),$$

где Q – многочлен степени $\deg P + 1$. Таким образом R_{l-1} умножится на Q. Итак, по сравнению с исходной δ-суммой, количество знаков суммирования уменьшилось на единицу. Нетрудно видеть, что полученное выражение является δ-суммой (вектор из индексов входящих в нее рациональных функций будет $(I(R_1),\ \ldots,\ I(R_{l-2}),\ I(R_{l-1})+I(R_l)+1))$, и значит мы можем применить предположение индукции.

б) Пусть теперь $R_j(x)=P(x)$, $1<j<l$, P – многочлен. Перепишем исходную δ-сумму в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1}R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1+\delta_1}R_2(n_2)\cdots$$
$$\times\sum_{n_{j-1}=1}^{n_{j-2}+\delta_{j-2}}R_{j-1}(n_{j-1})\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}}P(n_j)\sum_{n_{j+1}=1}^{n_j+\delta_j}f(n_{j+1}),$$

где

$$f(n_{j+1})=R(n_{j+1})\sum_{n_{j+2}=1}^{n_{j+1}+\delta_{j+1}}R_{j+2}(n_{j+2})\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\delta_{l-1}}R_l(n_l)$$

Имеем цепочку равенств:

$$\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}}P(n_j)\sum_{n_{j+1}=1}^{n_j+\delta_j}f(n_{j+1})$$
$$=\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}}P(n_j)\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j}f(n_{j+1})-\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}}P(n_j)\sum_{n_{j+1}=n_j+\delta_j+1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j}f(n_{j+1})$$
$$=Q_1(n_{j-1})\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j}f(n_{j+1})-\sum_{n_{j+1}=\delta_j+2}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j}f(n_{j+1})\sum_{n_j=1}^{n_{j+1}-\delta_j-1}P(n_j)$$
$$=Q_1(n_{j-1})\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j}f(n_{j+1})-\sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}+\delta_{j-1}+\delta_j}Q_2(n_{j+1})f(n_{j+1})$$
$$+\sum_{n_{j+1}=1}^{\delta_j+1}Q_2(n_{j+1})f(n_{j+1}),$$

причем $\deg Q_1=\deg Q_2=\deg P+1$, а третье слагаемое является константой. Таким образом, исходную δ-сумму мы представим в виде линейной комбинации трех δ-сумм меньшей кратности с соответствующими им векторами

$$(I(R_1),\ldots,I(R_{j-1})+I(R_j)+1,I(R_{j+1}),\ldots,I(R_l)),$$

$$(I(R_1),\dots,I(R_{j-1}),I(R_{j+1})+I(R_j)+1,\dots,I(R_l))$$

и

$$(I(R_1),\dots,I(R_{j-1})).$$

К каждой из них можно применить предположение индукции, что и доказывает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3.1. Проведем индукцию по l. Предположение индукции: теорема верна для функций R, зависящих от менее, чем l переменных (в случае $l = 1$ никаких предположений не требуется). Докажем ее для функций R, зависящих от l переменных.

Применяя лемму 3.3 при $\delta_j = 0$, мы можем считать, что для любого j выполняется $I(R_j) < 0$. Разложим каждую функцию R_j в сумму простейших дробей и представим R в виде

$$R(\zeta_1,\dots,\zeta_l)=\sum_{(m_1,\dots,m_l)}\sum_{(u_1,\dots,u_l)}\frac{B_{\vec m,\vec u}}{(\zeta_1+u_1)^{m_1}\dots(\zeta_l+u_l)^{m_l}},$$

в суммах $u_j \in U_j$, $m_j \leqslant M_j$ где U_j – множество абсолютных значений (неположительных) величин полюсов R_j, M_j – максимальный из порядков этих полюсов, $B_{\vec m,\vec u} = \prod_{j=1}^{l} B_{m_j,u_j}$ Достаточно доказать теорему для фиксированных $m_2,\dots,m_l$ и $u_2 = p_2,\dots,u_l = p_l$, т.е. для

$$R(\zeta_1,\dots,\zeta_l)=\sum_{m_1=1}^{M_1}\sum_{u_1\in U_1}\frac{B_{m_1,u_1}}{(\zeta_1+u_1)^{m_1}(\zeta_2+p_2)^{m_2}\dots(\zeta_l+p_l)^{m_l}} \tag{3.11}$$

(далее для краткости будем писать u вместо u_1 и U всесто U_1).

Члены с $m_1 \geqslant 2$ в сумме (3.3) сразу же представляются в нужной форме по лемме 3.2. Если $I(R_1) = -1$, то тогда дополнительное условие теоремы 3.1 не выполняется, и нам не надо заботиться о коэффициентах при полилогарифмах с первой координатой 1. В этом случае члены с $m_1 =$ 1 также представим по лемме 3.2.

Рассмотрим далее случай $I(R_1) \leqslant -2$. В этом случае $\sum_{u\in U} B_{1,u} = 0$. Свернем сумму слагаемых из (3.3) с $m_1 = 1$ в интеграл вида

$$\int_{[0,1]^m}\frac{(\sum_{u\in U}B_{1,u}x_1^u)\prod_{j=2}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\dots x_{r_j})^{p_j}}{(1-zx_1)\prod_{j=2}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{r_j})}dx_1dx_2\dots dx_m$$

с $r_1 = 1$ и $m = r_l$. По лемме 3.2 интеграл представляется в виде

$$\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z). \tag{3.12}$$

Остается только доказать, что $P_{\vec{s}}(1) = 0$, если $s_1 = 1$. Т.к. $\sum_{u\in U} B_{1,u} = 0$, то многочлен $\sum_{u\in U} B_{1,u}x_1^u$ делится на $1 - x_1$. Итак,

$$\sum_{u\in U} B_{1,u}x_1^u = (1 - x_1)B(x_1) = z^{-1}(1 - zx_1)B(x_1) + (1 - z^{-1})B(x_1).$$

Соответственно наш интеграл распадется на два

$$z^{-1}\int_{[0,1]^m} \frac{B(x_1)\prod_{j=2}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\dots x_{r_j})^{p_j}}{\prod_{j=2}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_{r_j})}dx_1dx_2\dots dx_m$$
$$+ (1 - z^{-1})\int_{[0,1]^m} \frac{B(x_1)\prod_{j=2}^{l}(x_{r_{j-1}+1}x_{r_{j-1}+2}\dots x_{r_j})^{p_j}}{(1 - zx_1)\prod_{j=2}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_{r_j})}dx_1dx_2\dots dx_m$$

Первый интеграл по предположению индукции представляется в нужной форме, и условие на коэффициенты там выполняется. Во втором интеграле после домножения на $(1-z^{-1})$ все многочлены будут иметь корень единицу. Итак, в представлении их суммы в виде линейной формы выполняется свойство $P_{\vec{s}}(1) = 0$, если $s_1 = 1$. Т.к. представление в виде линейной формы единственно по следствию 3.1, то это и есть представление (3.12). Теорема доказана.

Из леммы 2.1 и теоремы 3.1 следует

Теорема 3.2 *Пусть параметры a_i, b_i, c_j – целые, причем $b_i > a_i \geqslant 1$ при $i = 1,\dots,m$ и $c_j \geqslant 1$, $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j$, где $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}(b_i - a_i)$, $j = 1,\dots,l$; d_j – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $d_j \leqslant c_j$ при $j = 1,\dots,l$ и $\sum_{k=j}^{l+1} d_k < a_i$ при $j = 1,\dots,l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$.*

Тогда для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ выполняется равенство

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i-1}(1 - x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_{r_j})^{c_j}}dx_1dx_2\dots dx_m = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z), \tag{3.13}$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$, удовлетворяющим условию $\vec{s} \leqslant (r_1 * (r_2 - r_1) * \cdots * (r_l - r_{l-1}))$ (в частности, будут выполняться неравенства $l(\vec{s}) \leqslant l$, $w(\vec{s}) \leqslant m$), а $P_{\vec{s}}(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами такие, что

$$\deg P_{\vec{s}}(z) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i - 1$$

для любого вектора $\vec{s}$,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \cdots + d_l, \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \cdots + d_l + d_{l+1} + 1 \quad (3.14)$$

для любого непустого вектора $\vec{s}$ в (3.13). Дополнительно, если существует j, что $d_j < c_j$, то

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant d_1 + d_2 + \cdots + d_l + 1.$$

Если для любого $j = 1, \ldots, l$ выполняется неравенство $c_1 + \cdots + c_j \leqslant q_1 + \cdots + q_j - 1$, то $P_{\vec{s}}(1) = 0$ для векторов $\vec{s}$ с $s_1 = 1$.

Доказательство. Вначале докажем теорему с менее точной оценкой на порядок нуля многочленов $P_{\vec{s}}(z)$ в точке $z = 0$, а именно

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant 1, \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i \text{ при } \vec{s} \neq \emptyset. \quad (3.15)$$

Представим интеграл $S(z)$ в виде кратной суммы с помощью леммы 2.1. Разложим числитель функции $R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l)$ (см. (2.3)) в сумму мономов такого вида:

$$Z \zeta_1^{X_1} \zeta_2^{Y_1 + X_2} \zeta_3^{Y_2 + X_3} \ldots \zeta_l^{Y_{l-1} + X_l},$$

где

$$X_j + Y_j \leqslant c_j - 1, \quad j = 1, \ldots, l-1, \quad X_l \leqslant c_l - 1, \quad Z \in \mathbb{Z}.$$

Тогда R разложится в сумму функций $\widetilde{R}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \widetilde{R}_1(\zeta_1) \ldots \widetilde{R}_l(\zeta_l)$, где

$$\widetilde{R}_j(\zeta_j) = \frac{\zeta_j^{Y_{j-1} + X_j}}{\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(\zeta_j + a_i - 1)(\zeta_j + a_i) \cdots (\zeta_j + b_i - 2)]}, \quad Y_0 = 0.$$

причем для каждой такой $\widetilde{R}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&I(\widetilde{R}_1) + I(\widetilde{R}_2) + \cdots + I(\widetilde{R}_j) + j \\
&= (X_1 - q_1) + (Y_1 + X_2 - q_2) + \cdots + (Y_{j-1} + X_j - q_j) + j \\
&= (X_1 + Y_1 + 1) + \cdots + (X_{j-1} + Y_{j-1} + 1) + (X_j + 1) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_j) \\
&\leqslant (c_1 + c_2 + \cdots + c_j) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_j) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Следовательно для $\widetilde{R}$ выполняются условия теоремы 3.1. При этом

$$p = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i - 1, \quad P = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i - 2.$$

Применяя ее для каждой $\widetilde{R}$, получаем требуемое в теореме равенство.

Докажем теперь более точную оценку (3.14). В числителе подынтегрального выражения $S(z)$ подставим следующие равенства

$$(x_1 x_2 \cdots x_{r_j})^{d_j} = \left(\frac{1 - (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})}{z} \right)^{d_j}, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Это возможно сделать, так как $\sum_{k=j}^{l} d_k < a_i$ при $j = 1, \ldots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$. В результате получим линейную комбинацию выражений вида

$$\frac{1}{z^{d_1+d_2+\cdots+d_l}} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^{a'_i - 1} (1 - x_i)^{b_i - a_i - 1}}{\prod_{j=1}^{l} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_j})^{c'_j}} dx_1 dx_2 \ldots dx_m,$$

с переменными c'_j, причем $0 \leqslant c'_j \leqslant c_j$, а $a'_i = a_i - \sum_{k=j}^{l} d_k \geqslant d_{l+1} + 1 \geqslant 1$ для $j = 1, \ldots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$. Если все $c'_j = 0$ (это может быть только в случае $d_j = c_j$ для любого j), то интеграл равен константе и утверждение теоремы выполняется. Пусть теперь есть $c'_j > 0$, и j_0 – наибольший такой индекс. Проинтегрировав по переменным x_i, $i > r_{j_0}$, придем к интегралу, для которого выполняются условия теоремы 3.2 (это следует из того, что они выполнялись для исходного интеграла и того, что $c'_j \leqslant c_j$ и степени у $(1 - x_i)$ в интеграле остались прежними), а значит, по теореме 3.2 с (3.15), в его разложении $\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant 1$ и $\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant d_{l+1} + 1$ для непустого $\vec{s}$. Учитывая множитель $1/z^{d_1+d_2+\cdots+d_l}$, приходим к утверждению теоремы.

Так как всегда можно положить $d_j = 0$, $j = 1, \ldots, l$ и $d_{l+1} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i - 1$, то оценка (3.14) не хуже чем (3.15). В общем случае она лучше, например для интеграла (3.2) положим $d_1 = d_2 = \dots = d_{l-1} = n+1$, $d_l = n - \delta$, $d_{l+1} = 0$, поэтому там $\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant l(n+1) - \delta$, в том числе и для пустого $\vec{s}$. Если $c_1 + c_2 + \dots + c_l \geqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i$, то можно подобрать d_j так, что $\sum_{k=j}^{l} d_k = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i - 1$, $d_{l+1} = 0$ и, следовательно, для $P_{\emptyset}(z)$ верна оценка $\operatorname*{ord}_{z=0} P_{\emptyset}(z) \geqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i$ (в общем случае это неверно).

Следствие 3.2 *Пусть в предыдущих обозначениях выполняется неравенство $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j - 1$ для любого $j = 1, \dots, l$. Тогда интеграл*

$$S = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i - 1}(1 - x_i)^{b_i - a_i - 1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - x_1 x_2 \dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

представляется в виде линейной формы над $\mathbb{Q}$ от значений кратной дзета-функции, т.е.

$$S = \sum_{\vec{s}} q_{\vec{s}} \widetilde{\zeta}(\vec{s}), \quad \widetilde{\zeta}(\vec{s}) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_l \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}, \quad q_{\vec{s}} \in \mathbb{Q}.$$

на вектора $\vec{s}$ накладываются те же ограничения, что и в теореме, а кроме того $s_1 > 1$ (что гарантирует сходимость ряда, определяющего кратную дзета-функцию).

Доказательство. Устремим $z \to 1-$ в утверждении теоремы 3.2. Возможность перестановки предела и интеграла гарантируется теоремой Б. Леви (см, например, [14, глава V, § 5, Теорема 7]). Осталось заметить, что $\lim_{z \to 1-}(1 - z)\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z) = 0$, если $s_1 = 1$.

3.2 Усиление общей теоремы при некоторых ограничениях

В некоторых случаях в линейной форме в действительности возникает много меньше обобщенных полилогарифмов (см., например, (3.1) и (3.2)), чем гарантируется общей теоремой 3.2, что востребовано в арифметических приложениях. Далее нашей задачей будет дать достаточные условия на параметры интеграла $S(z)$, при которых можно значительно сузить количество полилогарифмов, входящих в его разложение. Ограничения на степени многочленов $P_{\vec{s}}$ и их кратности нуля следуют из теоремы 3.2, и мы не будем упоминать о них.

Для вектора $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_l)$ с натуральными компонентами определим функцию

$$R(\vec{s}; x) = R(s_1, s_2, \ldots, s_l; x) = \sum_{1 \leqslant n_l \leqslant \ldots \leqslant n_2 \leqslant x} \frac{1}{x^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}}.$$

Несложно видеть, что выполняются равенства

$$\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R(\vec{s}; n) z^n,$$

$$R(s_1, s_2, \ldots, s_l; x) = \frac{1}{x^{s_1}} \sum_{1 \leqslant k \leqslant x} R(s_2, s_3, \ldots, s_l; k) \text{ (при } l > 1).$$

Лемма 3.4 *При целом неотрицательном α выполняется равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} R(\vec{s}; n+\alpha) = z^{-\alpha-1} \mathrm{Le}_{\vec{s}}(z) + P(z^{-1}),$$

где $P(z) = \sum_{k=1}^{\alpha} q_k z^k$ и $D_{\alpha+1-k}^{w(\vec{s})} q_k \in \mathbb{Z}$ (в случае $\alpha = 0$ многочлен $P(z)$ отсутствует).

Доказательство. Обозначим левую часть равенства через $L(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} z^{\alpha+1} L(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+\alpha} R(\vec{s}; n+\alpha) = \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} z^n R(\vec{s}; n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n R(\vec{s}; n) - \sum_{n=1}^{\alpha} z^n R(\vec{s}; n) = \mathrm{Le}_{\vec{s}}(z) - \sum_{n=1}^{\alpha} R(\vec{s}; n) z^n. \end{aligned}$$

Осталось поделить обе части на $z^{\alpha+1}$ и заметить, что $D_n^{w(\vec{s})} R(\vec{s}; n) \in \mathbb{Z}$ и $q_k = R(\vec{s}; \alpha+1-k)$.

Далее будем обозначать через S конечное множество непустых векторов, и соответствующее ему множество $S_0 = S \cup \{\emptyset\}$. Через $\mathcal{A}$ будем обозначать конечный отрезок суммирования $[\alpha_1, \alpha_2]$ с целыми неотрицательными α_1, α_2.

Следствие 3.3 *Пусть функция $R(x)$ такова, что для любого натурального n выполняется равенство*

$$R(n)=\sum_{\vec{s}\in S}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}R(\vec{s};n+\alpha),\quad A_{\vec{s},\alpha}\in\mathbb{C}$$

Тогда сумма $\sum_{n=1}^{\infty}R(n)z^{n-1}$ представляется в виде $\sum_{\vec{s}\in S_0}P_{\vec{s}}(z^{-1})\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$, причем $\operatorname*{ord}_{z=0}P_{\emptyset}(z)\geqslant 1$ и для любого непустого вектора $\vec{s}$ имеем $P_{\vec{s}}(z)=\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}z^{\alpha+1}$.

Доказательство. Выполняется равенство

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}R(n)z^{n-1}=\sum_{\vec{s}\in S}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}R(\vec{s};n+\alpha).$$

Применяя лемму 3.4, получим

$$\begin{aligned}L&=\sum_{\vec{s}\in S}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}\left(z^{-\alpha-1}\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)+P_{\vec{s},\alpha}(z^{-1})\right)\\&=\sum_{\vec{s}\in S}(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}z^{-\alpha-1})\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)+\sum_{\vec{s}\in S}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}P_{\vec{s},\alpha}(z^{-1}).\end{aligned}$$

Неравенство $\operatorname*{ord}_{z=0}P_{\emptyset}(z)\geqslant 1$ следует из леммы 3.4.

С помощью сравнения коэффициентов в степенных рядах при z^{n-1}, $n\geqslant 1$, показывается следующая лемма, обратная следствию.

Лемма 3.5 *Пусть сумма $\sum_{n=1}^{\infty}R(n)z^{n-1}$ представляется в виде линейной формы $\sum_{\vec{s}\in S_0}P_{\vec{s}}(z^{-1})\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$, причем $\operatorname*{ord}_{z=0}P_{\emptyset}(z)\geqslant 1$, а для вектора $\vec{s}\in S$ пусть $P_{\vec{s}}(z)=\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}z^{\alpha+1}$. Тогда для любого натурального n выполняется равенство*

$$R(n)=\sum_{\vec{s}\in S}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}A_{\vec{s},\alpha}R(\vec{s};n+\alpha),$$

Леммы 3.4 и 3.5 позволяют работать не с бесконечными суммами, а с конечными, зависящими от натурального параметра.

Обозначим через $\mathcal{K}(\vec{T},p,P)$ – линейное пространство функций от n, натянутое на функции $R(\vec{s},n+\alpha)$, где $\vec{s}$ подчинен вектору $\vec{T}$ и $p\leqslant\alpha\leqslant P$, а через $\mathcal{L}(\vec{T}, p, P)$ – его подпространство, куда входят вектора $\vec{s}$ с $s_j > 1$ при $j > 1$. Также обозначим через $\mathcal{K}_0$ – подпространство $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}_0$ – подпространство $\mathcal{L}$, для элементов которых при каждом $\vec{s} = (1, s_2, \dots)$ сумма коэффициентов по α равна нулю ($\mathcal{L}_0$ также будет подпространством $\mathcal{K}_0$).

Лемма 3.6 *Пусть $\alpha'' > \alpha' \geqslant 0$ – целые, а l, m_1', m_1'', m_j – натуральные числа. Тогда функция*

$$\frac{1}{(n+\alpha')^{m_1'}} R(m_1'', m_2, \dots, m_l; n+\alpha'')$$

принадлежит $\mathcal{K}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$, а при $m_2, \dots, m_l > 1$ (при $l = 1$ считаем это условие выполненным автоматически) и пространству $\mathcal{L}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \dots, m_l), \alpha', \alpha'')$.

Доказательство. Проведем индукцию по l. Разложим дробь $1/((n+\alpha')^{m_1'}(n+\alpha'')^{m_1''})$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(n+\alpha')^{m_1'}(n+\alpha'')^{m_1''}} = \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} + \sum_{t=1}^{m_1''} \frac{C_t}{(n+\alpha'')^t}.$$

Выполняется равенство $B_1 + C_1 = 0$. Это, в частности, обеспечивает базу индукции ($l = 1$). Пусть $l > 1$, и для $(l-1)$ лемма верна. Обозначим левую часть доказываемого равенства буквой L. Имеем

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{(n+\alpha')^{m_1'}(n+\alpha'')^{m_1''}} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\
&= \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) + \sum_{t=1}^{m_1''} \frac{C_t}{(n+\alpha'')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\
&= \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha'} R(m_2, \dots, m_l; k) + \sum_{t=1}^{m_1''} \frac{C_t}{(n+\alpha'')^t} \sum_{k=1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k) \\
&\quad + \sum_{t=1}^{m_1'} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} \sum_{k=n+\alpha'+1}^{n+\alpha''} R(m_2, \dots, m_l; k)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^{m_1'} B_t R(t, m_2, \ldots, m_l; n+\alpha') + \sum_{t=1}^{m_1''} C_t R(t, m_2, \ldots, m_l; n+\alpha'')$$
$$+ \sum_{t=1}^{m_1'} \sum_{\gamma=\alpha'+1}^{\alpha''} \frac{B_t}{(n+\alpha')^t} R(m_2, \ldots, m_l; n+\gamma).$$

Слагаемые
$$\frac{B_t}{(n+\alpha')^t} R(m_2, \ldots, m_l; n+\gamma)$$
принадлежат требуемому в утверждении леммы пространству по предположению индукции. Так как $B_1 + C_1 = 0$, то
$$\sum_{t=1}^{m_1'} B_t R(t, m_2, \ldots, m_l; n+\alpha') + \sum_{t=1}^{m_1''} C_t R(t, m_2, \ldots, m_l; n+\alpha'')$$
$$\in \mathcal{K}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \ldots, m_l), \alpha', \alpha''),$$
а при $m_2, \ldots, m_l > 1$ это выражение также принадлежит и пространству $\mathcal{L}_0((\max(m_1', m_1''), m_2, \ldots, m_l), \alpha', \alpha'')$, что и завершает доказательство леммы.

Лемма 3.7 *Пусть α_1, α_2, β_1 – целые неотрицательные числа, такие что $\alpha_2 + \beta_1 \geqslant \alpha_1$; $u_1, u_2, \ldots, u_l$ – натуральные числа. Тогда для любого натурального n_1 выполняется равенство*
$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(u_2, \ldots, u_l; n_2+\alpha_2)$$
$$= R(u_1, u_2, \ldots, u_l; n_1+\alpha_1) - \frac{E}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} + f(n_1),$$
где $f \in \mathcal{K}_0((u_1, u_2, \ldots, u_l), \alpha_1, \alpha_2+\beta_1)$, а константа E зависит только от $(u_2, \ldots, u_l)$ и α_2. Дополнительно, если $u_j > 1$ при $j > 2$, то $f \in \mathcal{L}_0((u_1, u_2, \ldots, u_l), \alpha_1, \alpha_2+\beta_1)$.

Доказательство. Левая часть доказываемого равенства может быть представлена в виде
$$L = \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=\alpha_2+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} R(u_2, \ldots, u_l; n_2)$$

Учитывая неравенство $\alpha_2 + \beta_1 \geqslant \alpha_1$, имеем

$$\sum_{n_2=\alpha_2+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} = \sum_{n_2=1}^{n_1+\alpha_1} + \sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} - \sum_{n_2=1}^{\alpha_2}.$$

Если $\alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1$, то вторая сумма отсутствует (или можно считать, что она равна нулю). Отсюда

$$\begin{aligned} L = &R(u_1, u_2, \ldots, u_l; n_1 + \alpha_1) + \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=n_1+\alpha_1+1}^{n_1+\alpha_2+\beta_1} R(u_2, \ldots, u_l; n_2) \\ &- \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{\alpha_2} R(u_2, \ldots, u_l; n_2). \end{aligned}$$

Обозначим не зависящую от n_1 и α_1 константу $\sum_{n_2=1}^{\alpha_2} R(u_2, \ldots, u_l; n_2)$ через E. Осталось заметить, что к слагаемым

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} R(u_2, \ldots, u_l; n_1 + \alpha_1')$$

при $\alpha_1 + 1 \leqslant \alpha_1' \leqslant \alpha_2 + \beta_1$ можно применить лемму 3.6. Лемма 3.7 доказана.

Лемма 3.8 *Пусть β_j, $j = 1, \ldots, l-1$ и $p_j \leqslant P_j$, T_j, $j = 1, \ldots, l$ – целые неотрицательные числа, причем $p_{j+1} + \beta_j \geqslant P_j$ для любого $j = 1, \ldots, l-1$; $R_1(x)$, $\ldots$, $R_l(x)$ – рациональные функции от x, причем $I(R_j) < 0$. Полюса $R_j(x)$ сосредоточены в целых точках на отрезке $[-P_j, -p_j]$ и кратности полюсов не превосходят T_j. Тогда*

$$S = R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1-1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+\beta_{l-1}-1} R_l(n_l) \in \mathcal{K}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j).$$

Если при этом $I(R_j) < -1$ при $j > 1$, то $S \in \mathcal{L}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$. Дополнительно, если $I(R_1) < -1$, то $S \in \mathcal{L}_0(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$.

Доказательство. Проведем индукцию по l. При $l = 1$ суммы по $n_2, \ldots, n_l$ отсутствуют и утверждение леммы очевидно после разложения R_1 в сумму простых дробей. Пусть $l > 1$, и для $(l-1)$ лемма верна. Применим предположение индукции для выражения, стоящего в сумме по n_2

$$S = R_1(n_1)\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} f(n_2), \quad f \in \mathcal{K}((T_2, T_3, \ldots, T_l), m_2, P_l + \sum_{j=2}^{l-1}\beta_j).$$

Покажем вначале, что S лежит в $\mathcal{K}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1}\beta_j)$. В силу линейности достаточно доказать, что

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}}\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(\vec{u}; n_2+\alpha_2) \in \mathcal{K}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1}\beta_j),$$

где $p_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant P_1$, $1 \leqslant t_1 \leqslant T_1$, $\vec{u} = (u_2, \ldots, u_l)$ подчинен $(T_2, T_3, \ldots, T_l)$, $p_2 \leqslant \alpha_2 \leqslant P_l + \sum_{j=2}^{l-1}\beta_j$. Это следует из леммы 3.7.

Пусть теперь $I(R_j) < -1$ при $j > 1$. Тогда по предположению индукции

$$f \in \mathcal{L}_0((T_2, T_3, \ldots, T_l), m_2, P_l + \sum_{j=2}^{l-1}\beta_j).$$

В качестве образующих $\mathcal{L}_0$ возьмем $R(\vec{u}; n_2+\alpha_2)$ с $u_j > 1$ и $R(\vec{u}; n_2+\alpha_2'') - R(\vec{u}; n_2+\alpha_2')$ с $u_2 = 1$ и $u_j > 1$ при $j > 2$. При $u_j > 1$ по лемме 3.7

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}}\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(\vec{u}; n_2+\alpha_2) \in \mathcal{L}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1}\beta_j),$$

а если $t_1 > 1$, то принадлежит и $\mathcal{L}_0$. Пусть теперь $u_2 = 1$ и $u_j > 1$ при $j > 2$. Тогда по лемме 3.7

$$\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}}\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1}(R(\vec{u}; n_2+\alpha_2'') - R(\vec{u}; n_2+\alpha_2')) = \frac{E_{\vec{u},\alpha_2'} - E_{\vec{u},\alpha_2''}}{(n_1+\alpha_1)^{t_1}} + g(n_1),$$

$$g \in \mathcal{L}_0(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1}\beta_j),$$

а следовательно и все выражение лежит в $\mathcal{L}$, а при $t_1 > 1$ и в $\mathcal{L}_0$. Осталось доказать утверждение леммы при $I(R_1) < -1$. В этом случае вместо $R_1(x)$ мы можем рассматривать функции

$$\frac{1}{(x+\alpha_1)^{t_1}}, \quad t_1 > 1 \text{ и } \frac{1}{x+\alpha_1''} - \frac{1}{x+\alpha_1'}.$$

Случай $t_1 > 1$ разобран выше. Аналогично показывается, что при $u_j > 1$

$$\left(\frac{1}{n_1+\alpha_1''}-\frac{1}{n_1+\alpha_1'}\right)\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} R(\vec{u};n_2+\alpha_2) \in \mathcal{L}_0(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j),$$

а при $u_2 = 1$ и $u_j > 1$ при $j > 2$

$$\left(\frac{1}{n_1+\alpha_1''}-\frac{1}{n_1+\alpha_1'}\right)\sum_{n_2=1}^{n_1+\beta_1} (R(\vec{u};n_2+\alpha_2'')-R(\vec{u};n_2+\alpha_2'))$$
$$\in \mathcal{L}_0(\vec{T},p_1,P_l+\sum_{j=1}^{l-1}\beta_j).$$

Лемма полностью доказана.

Перейдем теперь к представлению интеграла $S(z)$ (см. (1.6)) в виде линейной формы от обобщенных полилогарифмов.

Теорема 3.3 *Пусть выполнены неравенства* $c_1+\cdots+c_j \leqslant q_1+\cdots+q_j$ *и* $a_{i_2}+c_j-b_{i_1} \geqslant 0$ *при всех* $j=1,\dots,l$, $i_1\in[r_{j-1}+1,r_j]$, $i_2\in[r_j+1,r_{j+1}]$. *Тогда для* $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$ *верно равенство* $S(z)=\sum_{\vec{s}}P_{\vec{s}}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$, *где суммирование ведется по векторам* $\vec{s}$, *подчиненным* $(r_1,r_2-r_1,\dots,r_l-r_{l-1})$. *Дополнительно, если* $c_1\leqslant q_1$ *и* $c_{j-1}+c_j\leqslant q_j$ *при* $j=2,\dots,l$, *то в этих векторах* $\vec{s}$ *выполняется* $s_j>1$ *при* $j>1$.

Доказательство. Разложим интеграл в кратную сумму (см. лемму 2.1)

$$S(z)=\frac{\prod_{i=1}^m\Gamma(b_i-a_i)}{\prod_{j=1}^l\Gamma(c_j)}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{n_1}\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}}z^{n_1-1}$$
$$\times\frac{\prod_{j=1}^l[(n_j-n_{j+1}+1)(n_j-n_{j+1}+2)\dots(n_j-n_{j+1}+c_j-1)]}{\prod_{j=1}^l\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}[(n_j+a_i-1)(n_j+a_i)\cdots(n_j+b_i-2)]},\quad(3.16)$$

где мы полагаем $n_{l+1}\equiv 1$. Теперь заметим, что можно вести суммирование n_{j+1} не до n_j, а до n_j+c_j-1, так как добавленные слагаемые равны нулю. Далее мы действуем так же, как и при доказательстве теоремы 3.2. Разложим числитель суммируемой функции в сумму мономов вида

$$Zn_1^{X_1}n_2^{Y_1+X_2}n_3^{Y_2+X_3}\dots n_l^{Y_{l-1}+X_l},$$

где

$$X_j + Y_j \leqslant c_j - 1, \quad Y_l = 0, \quad Z \in \mathbb{Z}.$$

Теперь при фиксированных X_j, Y_j рассмотрим сумму

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1+c_1-1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}+c_{l-1}-1} R_l(n_l), \tag{3.17}$$

где

$$R_j(n_j) = \frac{n_j^{Y_{j-1}+X_j}}{\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(n_j+a_i-1)(n_j+a_i)\cdots(n_j+b_i-2)]}, \quad Y_0 = 0.$$

Рассмотрии вначале случай $c_1 \leqslant q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leqslant q_j$ при $j = 2, \ldots, l$. В этом случае $I(R_1) \leqslant -1$ и $I(R_j) < -1$ при $j > 1$. Применим к сумме (3.17) лемму 3.8. При этом

$$\vec{T} = (r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_l - r_{l-1}), \quad \beta_j = c_j - 1,$$

$$p_j = \min_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} a_i - 1, \quad P_j = \max_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} b_i - 2$$

и необходимые неравенства на p_j и P_j выполняются вследствие неравенств $a_{i_2} + c_j - b_{i_1} \geqslant 0$ для всех $j = 1, \ldots, l$, $i_1 \in [r_{j-1}+1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. Следовательно, сумма (3.17) лежит в $\mathcal{L}(\vec{T}, p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$. Для перехода к линейным формам от полилогарифмов воспользуемся леммой 3.4.

В более общем случае, при $c_1 + \cdots + c_j \leqslant q_1 + \cdots + q_j$, сумма (3.17) является δ-суммой с неравенствами $p_{j+1} + \delta_j \geqslant P_j$ вследствие ограничений на параметры интеграла. С помощью леммы 3.3 представим (3.17) в виде линейной комбинации δ-сумм с $I(R_j) < 0$, в каждой из которых также выполнены неравенства $p_{j+1} + \delta_j \geqslant P_j$. Поэтому к ним можно применить лемму 3.8, при этом в этих суммах вектор $\vec{T}$ подчинен $(r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_l - r_{l-1})$, а значит (3.17) принадлежит $\mathcal{K}((r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_l - r_{l-1}), p_1, P_l + \sum_{j=1}^{l-1} \beta_j)$. После этого применяем лемму 3.4.

Полагая в теореме $r_j = j$ при $j = 1, \ldots, l$, получим

Следствие 3.4 *При* $a_{i+1}+c_i-b_i\geqslant 0$ *для* $i=1,\ldots,l-1$ *и* $\sum_{i=1}^{j}(b_i-a_i-c_i)\geqslant 0$ *для любого* $j=1,\ldots,l$ *выполняется разложение*

$$\int_{[0,1]^l}\frac{\prod_{i=1}^{l}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_j)^{c_j}}dx_1dx_2\ldots dx_l=\sum_{k=0}^{l}P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{1\}_k}(z)$$

Полагая в теореме $r_j=2j$ при $j=1,\ldots,l$, получим

Следствие 3.5 *Пусть*

$$(b_{2j-1}-a_{2j-1})+(b_{2j}-a_{2j})\geqslant c_{j-1}+c_j,\quad j=1,\ldots,l,\quad c_0=0,$$

$$a_{i_2}+c_j-b_{i_1}\geqslant 0,\quad i_1\in[2j-1,2j],i_2\in[2j+1,2j+2],j=1,\ldots,l-1$$

Тогда выполняется разложение

$$\int_{[0,1]^{2l}}\frac{\prod_{i=1}^{2l}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\ldots x_{2j})^{c_j}}dx_1dx_2\ldots dx_{2l}$$

$$=\sum_{k=0}^{l}P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z)+\sum_{k=0}^{l-1}T_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z).$$

Дополнительно, если $(b_1-a_1)+(b_2-a_2)>c_1$, *то* $T_k(1)=0$ *для любого* $k=1,\ldots,l-1$.

Полагая в теореме $r_j=2j-1$ при $j=1,\ldots,l+1$, получим

Следствие 3.6 *Пусть*

$$b_1-a_1\geqslant c_1,\quad (b_{2j-2}-a_{2j-2})+(b_{2j-1}-a_{2j-1})\geqslant c_{j-1}+c_j,\quad j=2,\ldots,l,$$

$$a_{i_2}+c_j-b_{i_1}\geqslant 0,\quad i_1\in[\max(1,2j-2),2j-1],i_2\in[2j,2j+1],j=1,\ldots,l-1.$$

Тогда выполняется разложение

$$\int_{[0,1]^{2l+1}}\frac{\prod_{i=1}^{2l+1}x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l+1}(1-zx_1x_2\ldots x_{2j-1})^{c_j}}dx_1dx_2\ldots dx_{2l+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{l}P_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z)+\sum_{k=0}^{l}T_k(z^{-1})\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z).$$

С помощью этих следствий получим представления для интегралов $V(z)$ (обобщения $V_{m,n}$). В следующей теореме рассмотрен случай четного m.

Теорема 3.4 *Пусть параметры A_i, $i = 0, \dots, 2l$, B_i, $i = 1, \dots, 2l$ – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$B_i > A_i > 0 \text{ при всех } i, \quad B_i > A_{i-2} \text{ при четных } i,$$

$$A_3 \geqslant A_2, \quad A_5 \geqslant A_4, \dots, A_{2l-1} \geqslant A_{2l-2},$$

$$B_2 \geqslant B_1, \quad B_4 \geqslant B_3, \dots, B_{2l-2} \geqslant B_{2l-3},$$

$$A_2 + B_1 \geqslant A_0 + A_1, \quad A_4 + B_3 \geqslant A_3 + B_2, \dots, A_{2l} + B_{2l-1} \geqslant A_{2l-1} + B_{2l-2}.$$

Тогда

$$V_{2l}(z) = \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}\, dx_1 dx_2 \dots dx_{2l}}{(1 - zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \dots + zx_1x_2 \cdots x_{2l})^{A_0}}$$
$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z).$$

Дополнительно, если $A_2 + B_1 > A_0 + A_1$, то $T_k(1) = 0$ для любого $k = 1, \dots, l-1$.

Доказательство. По теореме 2.2

$$V_{2l}(z) = \gamma \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2 \dots x_{2j})^{B_{2j}-A_{2j}}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l},$$

где

$$\gamma = \frac{\Gamma(A_{2l})}{\Gamma(A_0)} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(B_{2j} - A_{2j})}{\Gamma(B_{2j} - A_{2j-2})},$$

$a_i = A_i$ при нечетном i и $a_i = A_{i-2}$ при четном i. Далее применяем следствие 3.5.

Разложение интегралов $V(z)$ при нечетном m мы получим не сразу, а через промежуточную лемму.

Лемма 3.9 *Пусть параметры A_i, $i=0,\dots,2l+1$, B_i, $i=1,\dots,2l+1$ – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$B_i > A_i > 0 \text{ при всех } i, \quad B_1 > A_0, \quad B_i > A_{i-2} \text{ при нечетных } i \geqslant 3,$$

$$A_1 \geqslant A_0, \quad A_2 \geqslant A_1, \quad A_4 \geqslant A_3, \dots, A_{2l} \geqslant A_{2l-1},$$

$$B_3 \geqslant B_2, \quad B_5 \geqslant B_4, \dots, B_{2l-1} \geqslant B_{2l-2},$$

$$A_3+B_2 \geqslant A_2+B_1, \quad A_5+B_4 \geqslant A_4+B_3, \dots, A_{2l+1}+B_{2l} \geqslant A_{2l}+B_{2l-1}.$$

Тогда

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}\,dx_1dx_2\dots dx_{2l+1}}{(1-z+zx_1-zx_1x_2+zx_1x_2x_3-\dots+zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}}$$

$$=\sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,\{2\}_k}(z)+\sum_{k=0}^{l} T_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\{2\}_k}(z).$$

Доказательство. По теореме 2.1

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}\,dx_1dx_2\dots dx_{2l+1}}{(1-z+zx_1-zx_1x_2+zx_1x_2x_3-\dots+zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}}$$

$$=\gamma\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l+1}(1-zx_1x_2\dots x_{2j-1})^{B_{2j-1}-A_{2j-1}}}dx_1dx_2\dots dx_{2l+1},$$

где

$$\gamma=\frac{\Gamma(A_{2l+1})}{\Gamma(A_0)}\frac{\Gamma(B_1-A_1)}{\Gamma(B_1-A_0)}\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(B_{2j+1}-A_{2j+1})}{\Gamma(B_{2j+1}-A_{2j-1})},$$

$a_i=A_i$ при четном i, $a_1=A_0$ и $a_i=A_{i-2}$ при нечетном $i\geqslant 3$. Далее применяем следствие 3.6.

Можно доказать аналоги лемм 3.6, 3.7, 3.8 и теоремы 3.3 для обобщенных полилогарифмов со строгими неравенствами $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$. При этом вместо функции $R(\vec{s};x)$ используется

$$\widehat{R}(s_1,s_2,\dots,s_l;x)=\sum_{1\leqslant n_l<\dots<n_2<x}\frac{1}{x^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}},$$

а неравенства $p_{j+1}+\beta_j\leqslant P_j$ заменяются на $p_j>P_j$. Так мы доказываем следующую теорему, которая является аналогом теоремы 3.3.

Теорема 3.5 *Пусть выполнены неравенства* $c_1 + \dots + c_j \leqslant q_1 + \dots + q_j$ *и* $a_{i_1} \geqslant b_{i_2}$ *при всех* $j = 1, \dots, l$, $i_1 \in [r_{j-1}+1, r_j]$, $i_2 \in [r_j + 1, r_{j+1}]$. *Тогда для* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ *верно равенство* $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\vec{s}}(z)$, *где суммирование ведется по векторам* $\vec{s}$, *подчиненным* $(r_1, r_2 - r_1, \dots, r_l - r_{l-1})$. *Дополнительно, если* $c_1 \leqslant q_1$ *и* $c_{j-1} + c_j \leqslant q_j$ *при* $j = 2, \dots, l$, *то в этих векторах* $\vec{s}$ *выполняется* $s_j > 1$ *при* $j > 1$.

Полагая в теореме $r_j = j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

Следствие 3.7 *При* $b_1 > a_1 \geqslant b_2 > a_2 \geqslant \ldots \geqslant b_l > a_l$ *и* $\sum_{i=1}^{j}(b_i - a_i - c_i) \geqslant 0$ *для любого* $j = 1, \dots, l$ *выполняется разложение*

$$\int_{[0,1]^l} \frac{\prod_{i=1}^{l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_j)^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_l = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_k}(z).$$

Полагая в теореме $r_j = 2j$ при $j = 1, \dots, l$, получим

Следствие 3.8 *Пусть*

$$(b_{2j-1} - a_{2j-1}) + (b_{2j} - a_{2j}) \geqslant c_{j-1} + c_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad c_0 = 0,$$

$$a_{i_1} \geqslant b_{i_2}, \quad i_1 \in [2j-1, 2j], i_2 \in [2j+1, 2j+2], j = 1, \dots, l-1$$

Тогда выполняется разложение

$$\int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_{2j})^{c_j}} dx_1 dx_2 \dots dx_{2l}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{1,\{2\}_k}(z).$$

В частном случае это тождество использовалась в [21] (см. тождество (3.2)).

Используя лемму 3.9 и преобразование $z \to \frac{-z}{1-z}$, можно доказать следующую теорему, дающую разложение $V(z)$ при нечетном m.

Теорема 3.6 *Пусть параметры* A_i, $i = 0, \dots, 2l+1$, B_i, $i = 1, \dots, 2l+1$ – *натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам леммы 3.9 и,* *дополнительно,* $B_{2j} > A_{2j-2}$ *при* $j = 1, \dots, l$, $B_{2l+1} > A_{2l}$ *и* $\sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1} - A_{2j-1}) \geqslant A_0$. *Тогда*

$$\begin{aligned} V_{2l+1}(z) &= \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}\, dx_1 dx_2 \dots dx_{2l+1}}{(1 - zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \dots - zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_0}} \\ &= \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\, \mathrm{Le}_{\{2\}_k,1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1})\, \mathrm{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z) + U(z^{-1}). \end{aligned}$$

Дополнительно, если $\sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1} - A_{2j-1}) > A_0$, *то* $T_k(1) = 0$ *для любого* $k = 1, \dots, l-1$.

Доказательство. Так как $B_i > A_i > 0$ при всех i, а также $B_{2j} > A_{2j-2}$ при $j = 1, \dots, l$ и $B_{2l+1} > A_{2l}$, то по теореме 2.3

$$V_{2l+1}(z) = \gamma \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1}\, dx_1 dx_2 \dots dx_{2l+1}}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\cdots x_{2j})^{B_{2j}-A_{2j}}(1 - zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{A_{2l+1}}},$$

где

$$\gamma = \frac{\Gamma(A_{2l+1})}{\Gamma(A_0)} \frac{\Gamma(B_{2l+1} - A_{2l+1})}{\Gamma(B_{2l+1} - A_{2l})} \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(B_{2j} - A_{2j})}{\Gamma(B_{2j} - A_{2j-2})},$$

$a_i = A_i$ при нечетном $i < 2l$, $a_{2l+1} = A_{2l}$ и $a_i = A_{i-2}$ при четном i. Проверим теперь условие $c_1 + \dots + c_k \leqslant q_1 + \dots + q_k$ при $k = 1, \dots, l+1$ для интеграла в правой части, которое дает разложение в линейную форму от полилогарифмов по теореме 3.2. При $k = 1, \dots, l$ имеем

$$\begin{aligned} (q_1 + \dots + q_k) - (c_1 + \dots + c_k) &= \sum_{j=1}^{k}(B_j - A_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k}(B_{2j} - A_{2j}) \\ &= (A_{2k} - A_{2k-1}) + (B_1 - A_0) + \sum_{j=2}^{k}(B_{2k-1} - A_{2k-3}) > 0 \end{aligned}$$

(в оценке использовались неравенства на параметры A_i, B_i из условия леммы 3.9). При $k = 2l+1$

$$(q_1 + \dots + q_{2l+1}) - (c_1 + \dots + c_{2l+1}) = \sum_{j=1}^{l+1}(B_{2j-1} - A_{2j-1}) - A_0 \geqslant 0.$$

Итак, по теореме 3.2 справедливо представление в виде линейной формы $V_{2l+1}(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$.

Обозначим интеграл, фигурирующий в лемме 3.9 через $J(z)$. Имеем равенство

$$\begin{aligned}
V_{2l+1}(z) &= \frac{1}{(1-z)^{A_0}} J\left(-\frac{z}{1-z}\right) \\
&= \frac{1}{(1-z)^{A_0}} \left(\sum_{k=0}^{l} P_k \left(-\frac{1-z}{z}\right) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k} \left(-\frac{z}{1-z}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{l} T_k \left(-\frac{1-z}{z}\right) \operatorname{Le}_{\{2\}_k} \left(-\frac{z}{1-z}\right) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{l} \widetilde{P}_k(z) \operatorname{Le}_{\{2\}_k,1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} \widetilde{T}_k(z) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z) + \widetilde{U}(z),
\end{aligned}$$

где $\widetilde{P}_k(z)$, $\widetilde{T}_k(z)$, $\widetilde{U}(z)$ – рациональные функции. В последнем равенстве мы использовали лемму 2.6 для пар векторов $(1, \{2\}_k) \leftrightarrow (\{2\}_k, 1)$ и $(\{2\}_k) \leftrightarrow (1, \{2\}_{k-1}, 1)$ (мы считаем, что $\operatorname{Le}_\emptyset(z) = 1$ и $T_0(z)$ дает слагаемое $\widetilde{U}(z)$). Сравнивая с разложением $V_{2l+1}(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$ и учитывая линейную независимость обобщенных полилографмов над $\mathbb{C}(z)$, заключаем, что функции $\widetilde{P}_k(z)$, $\widetilde{T}_k(z)$, $\widetilde{U}(z)$ в действительности являются многочленами от аргумента z^{-1}. В промежуточных выкладках предполагается, что z находится в области $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z| < |1-z|\}$. Но в конечном равенстве, с помощью аналитического продолжения, можно считать, что $|z| < 1$. Теорема доказана.

Из равенств $\operatorname{Le}_{\{2\}_k}(1) = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k)$ и $\operatorname{Le}_{\{2\}_k,1}(1) = 2\zeta(2k+1)$ (см. раздел 2.4) следует, что в условиях теорем 3.4 и 3.6, интегралы $V_{2l}(1)$ и $V_{2l+1}(1)$ могут быть представлены в виде линейной формы от 1 и чисел $\zeta(k)$, где k соответствующей четности, с рациональными коэффициентами.

Докажем теперь представление (3.1), использованное в работе [20] для доказательства иррациональности $\zeta(3)$. По теореме 2.3 справедливо равенство

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n}{(1-zx_1x_2)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n}{(1-zx_1+zx_1x_2-zx_1x_2x_3)^{n+1}} dx_1dx_2dx_3.$$

Тождество (3.1) теперь следует из теоремы 3.6, примененной к интегралу в правой части равенства.

3.3 Знаменатели коэффициентов линейных форм

Здесь мы рассмотрим вопрос о знаменателях коэффициентов линейных форм. В силу единственности представления в виде линейной формы от обобщенных полилографмов, мы можем исследовать их независимо от предыдущих рассуждений.

Нам понадобится понятие целозначного многочлена. Напомним, что это многочлен, который при любом целом аргументе принимает целое значение. Для целозначности многочлена степени N достаточно, чтобы он принимал целые значения в $N+1$ соседних целых точках (см. [19, Теорема 12.1]).

Пусть зафиксировано некоторое целое неотрицательное число Δ. Будем называть рациональную функцию $R(x)$ Δ-нормальной, если она представляется в виде

$$R(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \sum_{m=1}^{M} \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^m} + P(x),$$

где $\mathcal{A}$ – множество целых неотрицательных чисел из некоторого отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$, $D_\Delta^{M-m} A_{m,\alpha} \in \mathbb{Z}$, а $D_\Delta^M P(x)$ — целозначный многочлен.

Лемма 3.10 *Если Δ-нормальную функцию домножить на целозначный многочлен степени $\leqslant \Delta$, то полученная рациональная функция будет Δ-нормальной.*

Доказательство. Если целозначный многочлен $D_\Delta^M P(x)$ умножить на любой другой целозначный многочлен, то он останется целозначным. Утверждение леммы будет доказано, если мы покажем его для

$$R(x) = \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^m}, \quad D_\Delta^{M-m} A_{m,\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем это индукцией по m. Проверим вначале базу индукции $m = 1$.

Пусть $T(x)$ – целозначный многочлен степени $\leqslant \Delta$ и α – целое число. Тогда

$$\frac{T(x)}{x+\alpha} = \frac{T(-\alpha)}{x+\alpha} + Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен степени $\leqslant \Delta - 1$ (при $\Delta = 0$ он отсутствует). По условию, $T(-\alpha)$ является целым числом. Рассмотрим теперь $Q(x)$ в точках $x = -\alpha + k$, где $k = 1, 2, \ldots, \Delta$:

$$Q(-\alpha + k) = \frac{T(-\alpha + k) - T(-\alpha)}{k}.$$

После домножения на D_Δ все эти числа будут целыми, а значит и $D_\Delta Q(x)$ — целозначный многочлен.

Поэтому, в случае $m = 1$

$$R(x)T(x) = \frac{A_{1,\alpha} T(-\alpha)}{x+\alpha} + A_{1,\alpha} Q(x).$$

При этом,

$$D_\Delta^{M-1}(A_{1,\alpha} \cdot T(-\alpha)) = (D_\Delta^{M-1} \cdot A_{1,\alpha}) T(-\alpha) \in \mathbb{Z},$$

и

$$D_\Delta^{M}(A_{1,\alpha} \cdot Q(x)) = (D_\Delta^{M-1} \cdot A_{1,\alpha}) \cdot (D_\Delta \cdot Q(x))$$

является целозначным многочленом.

Пусть теперь $m > 1$. В этом случае

$$R(x)T(x) = \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^{m-1}} \cdot \frac{T(x)}{x+\alpha} = \frac{A_{m,\alpha} T(-\alpha)}{(x+\alpha)^m} + \frac{A_{m,\alpha}}{(x+\alpha)^{m-1}} Q(x).$$

Так как

$$D_\Delta^{M-m} \cdot (A_{m,\alpha} T(-\alpha)) = (D_\Delta^{M-m} \cdot A_{m,\alpha}) T(-\alpha) \in \mathbb{Z},$$

то первое слагаемое Δ-нормальное. Второе слагаемое перепишем как

$$\frac{A_{m,\alpha}/D_\Delta}{(x+\alpha)^{m-1}} \cdot (D_\Delta Q(x)).$$

Так как $D_\Delta^{M-(m-1)} \cdot (A_{m,\alpha}/D_\Delta) \in \mathbb{Z}$ и $D_\Delta Q(x)$ – целозначный многочлен, то к этому выражению можно применить предположение индукции. Лемма доказана.

Лемма 3.11 *Пусть для суммы*

$$\mathcal{F} = \sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} R_l(n_l),$$

выполняются неравенства

$$\sum_{j=1}^{j_1} (I(R_j)+1) \leqslant 0, \quad \sum_{j=j_1}^{j_2} (I(R_j)+1) \leqslant \Delta \tag{3.18}$$

для любых $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant l$, а функции R_j являются Δ-нормальными. Тогда $\mathcal{F}$ представляется в виде конечной суммы $\sum_i \lambda_i \mathcal{F}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, где

$$\mathcal{F}_i = \sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_{i,1}(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1} R_{i,2}(n_2) \cdots \sum_{n_{l(i)}=1}^{n_{l(i)-1}} R_{i,l(i)}(n_{l(i)}),$$

и $I(R_{i,j}) < 0$ для любых i, j. При этом функции $R_{i,j}$ — Δ-нормальные и $D_\Delta^{w_i} \lambda_i \in \mathbb{Z}$, где

$$w_i = \sum_{j=1}^{l} M_j - \sum_{j=1}^{l(i)} M_{i,j},$$

M_j, $M_{i,j}$ – максимальные порядки полюсов функций R_j и $R_{i,j}$.

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.3. Приведем его подробно для полноты изложения.

Проведем индукцию по вектору (l,k), где k – количество функций R_j с $I(R_j) \geqslant 0$ $(0 \leqslant k < l)$. Вектора (l,k) мы упорядочиваем в лексикографическом порядке. База индукции, $l = 1$, очевидна, так как в этом случае, по условию, $I(R_1) \leqslant -1$. Докажем утверждение для вектора (l, k), предполагая, что для меньших векторов оно доказано. Если $k = 0$, то доказывать нечего, ведь тогда $I(R_j) < 0$ для любого j. Пусть $k > 0$, т.е. есть такое j, что $I(R_j) \geqslant 0$. Так как по условию $I(R_1) \leqslant -1$, то $j > 1$. Представляя R_j в виде суммы многочлена и правильной дроби, запишем $\mathcal{F}$ в виде суммы двух слагаемых. В слагаемом с правильной дробью (она Δ-нормальна) число k уменьшилось на единицу и к нему можно применить предположение индукции. Рассмотрим теперь второе слагаемое, в котором $R_j(x) = P(x)$ – многочлен. Из нормальности R_j следует, что многочлен $D_\Delta^{M_j} P$ является целозначным, при этом сумма максимальных порядков полюсов функций R_j как раз уменьшилась на M_j по сравнению с $\mathcal{F}$.

а) Если $j = l$, то просуммируем последнюю сумму:

$$\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} P(n_l) = Q(n_{l-1}),$$

где $D_\Delta^{M_j} Q$ – целозначный многочлен степени $\deg P + 1$. Таким образом R_{l-1} умножится на Q. Итак, по сравнению с исходной суммой, количество знаков суммирования уменьшилось на единицу. К полученной сумме, домноженной на $D_\Delta^{M_j}$, можно применить предположение индукции, так как вектор из индексов входящих в нее рациональных функций будет $(I(R_1), \ldots, I(R_{l-2}), I(R_{l-1}) + I(R_l) + 1))$, а домножение на $D_\Delta^{M_j} Q(x)$ функции R_{l-1} по лемме 3.10 оставляет ее P-нормальной, ведь в силу условия (3.18) для $j_1 = j_2 = j$

$$\deg Q(x) = \deg P + 1 = I(R_j) + 1 \leqslant \Delta.$$

б) Пусть теперь $R_j(x) = P(x)$ при $1 < j < l$. Перепишем исходную сумму в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_{j-1}=1}^{n_{j-2}} R_{j-1}(n_{j-1}) \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_j} f(n_{j+1}),$$

где

$$f(n_{j+1}) = R(n_{j+1}) \sum_{n_{j+2}=1}^{n_{j+1}} R_{j+2}(n_{j+2}) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} R_l(n_l)$$

Имеем цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_j} f(n_{j+1}) \\
&= \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) - \sum_{n_j=1}^{n_{j-1}} P(n_j) \sum_{n_{j+1}=n_j+1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) \\
&= Q_1(n_{j-1}) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) - \sum_{n_{j+1}=2}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) \sum_{n_j=1}^{n_{j+1}-1} P(n_j) \\
&= Q_1(n_{j-1}) \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} f(n_{j+1}) - \sum_{n_{j+1}=1}^{n_{j-1}} Q_2(n_{j+1}) f(n_{j+1}),
\end{aligned}
$$

причем $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \deg P + 1$, $Q_2(1) = 0$. Таким образом, исходную сумму мы представим в виде разности сумм меньшей кратности с соответствующими им векторами

$$(I(R_1), \ldots, I(R_{j-1}) + I(R_j) + 1, I(R_{j+1}), \ldots, I(R_l)),$$

$$(I(R_1), \ldots, I(R_{j-1}), I(R_{j+1}) + I(R_j) + 1, \ldots, I(R_l)).$$

Для каждой суммы неравенства (3.18) будут также выполняться. Так как $D_\Delta^{M_j} P(x)$ — целозначный многочлен и $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — такие многочлены, что $Q_1(n) = \sum_{k=1}^{n} P(k)$, $Q_2(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k)$ при натуральных n, то $D_\Delta^{M_j} Q_1$ и $D_\Delta^{M_j} Q_2$ являются целозначными. Домножение на $D_\Delta^{M_j} Q_1(x)$ и $D_\Delta^{M_j} Q_2(x)$ функций R_{j-1} и R_{j+1} по лемме 3.10 оставляет их Δ-нормальными, ведь

$$\deg Q_1(x) = \deg Q_2(x) = \deg P + 1 = I(R_j) + 1 \leqslant \Delta.$$

Последнее неравенство справедливо в силу условия (3.18) для $j_1 = j_2 = j$. Итак, к каждой из двух сумм, после домножения на $D_\Delta^{M_j}$, можно применить предположение индукции, что и доказывает лемму.

Лемма 3.12 *Пусть параметры a_i, b_i, c_j – целые, причем $b_i > a_i \geqslant 1$ при $i = 1, \ldots, m$, $P = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i - 2$, $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i)$ и выполняются неравенства $1 \leqslant c_j \leqslant P + 1$, $c_1 + \cdots + c_j \leqslant q_1 + \cdots + q_j$, $j = 1, \ldots, l$;*

$c_{j_1-1}+\sum_{j=j_1}^{j_2}(c_j-q_j)\leqslant P+1$, $1<j_1\leqslant j_2\leqslant l$. Пусть $P_{\vec{s}}$ — многочлены в линейной форме $S(z)=\sum_{\vec{s}}P_{\vec{s}}(z^{-1})\operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$ (см. (3.13)). Тогда многочлен $D_P^{m-w(\vec{s})}P_{\vec{s}}(z)$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. По лемме 2.1 интеграл $S(z)$ можно представить в виде

$$S(z)=\frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(b_i-a_i)}{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(c_j)}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{n_1}\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}}z^{n_1-1}$$
$$\times\frac{\prod_{j=1}^{l}[(n_j-n_{j+1}+1)(n_j-n_{j+1}+2)\dots(n_j-n_{j+1}+c_j-1)]}{\prod_{j=1}^{l}\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}[(n_j+a_i-1)(n_j+a_i)\cdots(n_j+b_i-2)]},$$

где мы полагаем $n_{l+1}\equiv 1$. Из известной формулы (см., например, [3, Lemma 5])

$$(x-y+1)\cdots(x-y+n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k+1)\cdots(x+n)$$
$$\times(y+1)\cdots(y+k-1)$$

следует

$$(n_j-n_{j+1}+1)\cdots(n_j-n_{j+1}+c_j-1)=\sum_{k_j=0}^{c_j-1}(-1)^{k_j}\binom{c_j-1}{k_j}$$
$$\times(n_j+k_j+1)(n_j+k_j+2)\cdots(n_j+c_j-1)\cdot n_{j+1}(n_{j+1}+1)\cdots(n_{j+1}+k_j-1).$$

Применяя последнее равенство для каждого j получим, что $S(z)$ представляется в виде целочисленной линейной комбинации сумм (с фиксированными k_j) вида

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{n_1}\cdots\sum_{n_l=1}^{n_{l-1}}z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{l}p_j^1(n_j)p_j^2(n_{j+1})$$
$$\times\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j}\frac{\Gamma(b_i-a_i)}{(n_j+a_i-1)(n_j+a_i)\cdots(n_j+b_i-2)},$$

где

$$p_j^1(x)=\frac{(x+k_j+1)(x+k_j+2)\cdots(x+c_j-1)}{(c_j-k_j-1)!},$$

$$p_j^2(x) = \frac{x(x+1)\cdots(x+k_j-1)}{k_j!}$$

— целозначные многочлены. Перепишем последнее выражение в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} R_1(n_1) \sum_{n_2=1}^{n_1} R_2(n_2) \cdots \sum_{n_l=1}^{n_{l-1}} R_l(n_l),$$

где

$$R_j(x) = p_j^1(x) p_{j-1}^2(x) \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{\Gamma(b_i - a_i)}{(x+a_i-1)(x+a_i)\cdots(x+b_i-2)}.$$

При $j = 1$ многочлен $p_0^2(x) \equiv 1$ (считаем, что $c_0 = 1$, $k_0 = 0$).

Так как $|(b_{i_1} - 2) - (a_{i_2} - 1)| \leqslant P - (\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i - 1) \leqslant P$, то произведение

$$\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{\Gamma(b_i - a_i)}{(x+a_i-1)(x+a_i)\cdots(x+b_i-2)}$$

является P-нормальным. Следовательно, к нему можно применить лемму 3.10 для домножения на $p_j^1(x)$ и $p_{j-1}^2(x)$. Оценки на степени многочленов выполняются: $\deg p_j^1 \leqslant c_j - 1 \leqslant P$ и $\deg p_{j-1}^2 \leqslant c_{j-1} - 1 \leqslant P$. Итак, R_j является P-нормальной функцией.

Проверим условие (3.18) для функций R_j:

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_1}^{j_2} (I(R_j) + 1) &= \sum_{j=j_1}^{j_2} (k_{j-1} + (c_j - k_j - 1) - q_j + 1) \\ &\leqslant c_{j_1-1} - 1 + \sum_{j=j_1}^{j_2} (c_j - q_j) \leqslant P.\end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо в силу условия леммы.

Применяя лемму 3.11, мы можем считать, что для любого j выполняется $I(R_j) < 0$, при этом R_j является P-нормальной функцией. Другими словами, мы представили $S(z)$ в виде целочисленной линейной комбинации сумм

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} \frac{A_{\vec{u},\vec{\alpha}}}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1} \frac{1}{(n_2+\alpha_2)^{u_2}} \cdots \sum_{n_{l'}=1}^{n_{l'-1}} \frac{1}{(n_{l'}+\alpha_{l'})^{u_{l'}}},$$

где $l' \leqslant l$, $p \leqslant \alpha_j \leqslant P$. При этом $D_P^{m-w(\vec{u})} A_{\vec{u},\vec{\alpha}} \in \mathbb{Z}$. Далее, для многочленов $P_{\vec{s}}$ в разложении элементарной суммы

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} z^{n_1-1} \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{u_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1} \frac{1}{(n_2+\alpha_2)^{u_2}} \cdots \sum_{n_{l'}=1}^{n_{l'-1}} \frac{1}{(n_{l'}+\alpha_{l'})^{u_{l'}}},$$

в линейную форму $\sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$ по лемме 3.2 будет выполняться включение $D_P^{w(\vec{u})-w(\vec{s})} P_{\vec{s}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$. Откуда и следует утверждение леммы.

Замечание. Лемма 3.12 справедлива, если некоторые c_j равны нулю.

Теорема 3.7 *Пусть параметры a_i, b_i, c_j – целые, причем $b_i > a_i \geqslant 1$ при $i = 1, \ldots, m$ и $c_j \geqslant 1$, $c_1 + \cdots + c_j \leqslant q_1 + \cdots + q_j$, где $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i)$, $j = 1, \ldots, l$; d_j – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $d_j \leqslant c_j$ при $j = 1, \ldots, l$ и $\sum_{k=j}^{l} d_k < a_i$ при $j = 1, \ldots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$. Обозначим*

$$\Delta = \max_{1 \leqslant j \leqslant l} \max_{r_{j-1} < i \leqslant r_j} (b_i - \sum_{k=j}^{l} d_k - 2).$$

Пусть также выполняются неравенства $1 \leqslant c_j \leqslant \Delta + 1$, $c_{j_1-1} + \sum_{j=j_1}^{j_2} (c_j - q_j) \leqslant \Delta + 1$, $1 < j_1 \leqslant j_2 \leqslant l$, а $P_{\vec{s}}$ — многочлены в линейной форме $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\vec{s}}(z)$ (см. (3.13)). Тогда многочлен $D_\Delta^{m-w(\vec{s})} P_{\vec{s}}(z)$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. В числителе подынтегрального выражения $S(z)$ подставим следующие равенства

$$(x_1 x_2 \cdots x_{r_j})^{d_j} = \left(\frac{1 - (1 - z x_1 x_2 \cdots x_{r_j})}{z} \right)^{d_j}, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Это возможно сделать, так как $\sum_{k=j}^{l} d_k < a_i$ при $j = 1, \ldots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$. В результате получим целочисленную линейную комбинацию выражений вида

$$\frac{1}{z^{d_1+d_2+\cdots+d_l}} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^{a'_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l} (1 - z x_1 x_2 \ldots x_{r_j})^{c'_j}} dx_1 dx_2 \ldots dx_m,$$

с переменными c'_j, причем $0 \leqslant c'_j \leqslant c_j$, а $a'_i = a_i - \sum_{k=j}^{l} d_k \geqslant 1$ для $j = 1, \ldots, l$ и $r_{j-1} < i \leqslant r_j$. Осталось к каждому такому интегралу применить лемму 3.12 (в качестве P там будем фигурировать Δ).

Следствие 3.9 *Пусть интеграл $S(z)$ имеет параметры*

$$a_i = n+1, \quad b_i = 2n+2, \quad c_j = n+1.$$

Тогда многочлен $D_n^{m-w(\vec{s})} P_{\vec{s}}(z)$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. В теореме 3.7 положим $d_j = 0$ при $j = 1, \ldots, l-1$ и $d_l = n$. Тогда $\Delta = n$ и все условия теоремы соблюдаются.

В частности, это следствие мы можем применить к интегралу (3.1).

Следствие 3.10 *Пусть интеграл $S(z)$ имеет параметры*

$$a_i = (l+1-j)(n+1) - \delta \text{ при } r_{j-1} < i \leqslant r_j, \quad b_i = a_i + n + 1, \quad c_j = n+1,$$

причем $0 \leqslant \delta \leqslant n$. Тогда многочлен $D_n^{m-w(\vec{s})} P_{\vec{s}}(z)$ имеет целые коэффициенты.

Доказательство. В теореме 3.7 положим $d_j = n+1$ при $j = 1, \ldots, l-1$ и $d_l = n - \delta$. Тогда $\Delta = n$ и все условия теоремы соблюдаются.

В частности, это следствие мы можем применить к интегралу (3.2).

3.4 Оценка коэффициентов линейных форм

Во многих арифметических приложениях важно иметь оценку сверху на абсолютную величину коэффициентов линейных форм В этом разделе мы изучим высоты многочленов в линейной форме от обобщенных полилогарифмов, возникающей из интеграла $S(z)$ (см. (1.6)).

Предварительно докажем лемму об оценке факториалов.

Лемма 3.13 *Для целых неотрицательных a и b выполнена двухсторонняя оценка*

$$\frac{1}{a+b+1} \cdot \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} \leqslant \frac{(a+b)!}{a!b!} \leqslant \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$$

(в случае $x=0$ считаем, что $x^x=1$).

Доказательство. В случае, если $a=0$ или $b=0$, то оба неравенства выполнены. Далее считаем, что a и b натуральные.

Рассмотрим бета-интеграл

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = B(a+1,b+1) = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Функция $f(x)=x^a(1-x)^b$ на отрезке $[0,1]$ достигает максимума в точке $x=a/(a+b)$. Следовательно,

$$\frac{a!b!}{(a+b+1)!} \leqslant f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}.$$

Первое неравенство доказано. Докажем второе неравенство индукцией по величине $a+b$. База индукции $a=b=1$ выполняется. Введем обозначение

$$g(a,b)=\frac{(a+b)!}{a!b!}.$$

Пусть теперь $b>1$ и по индукционному предположению

$$g(a,b-1) \leqslant \frac{(a+b-1)^{a+b-1}}{a^a(b-1)^{b-1}}.$$

Из определения функции g

$$\frac{g(a,b)}{g(a,b-1)} = \frac{a+b}{b}.$$

Функция $(1+1/m)^m$ монотонно возрастает по m, следовательно

$$\left(1+\frac{1}{a+b-1}\right)^{a+b-1} \geqslant \left(1+\frac{1}{b-1}\right)^{b-1}.$$

Последнее неравенство можно переписать как

$$\frac{(a+b-1)^{a+b-1}}{(b-1)^{b-1}} \leqslant \frac{(a+b)^{a+b-1}}{b^{b-1}}$$

Окончательно,

$$g(a,b) = \frac{a+b}{b}\cdot g(a,b-1) \leqslant \frac{a+b}{b}\cdot\frac{(a+b-1)^{a+b-1}}{a^a(b-1)^{b-1}}$$

$$\leqslant \frac{a+b}{b} \cdot \frac{(a+b)^{a+b-1}}{a^a b^{b-1}} = \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Выражение

$$\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$$

можно записать в виде

$$\left(\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}\right)^n,$$

где $\alpha = a/n$, $\beta = b/n$.

По лемме 2.1 интеграл $S(z)$ представляется в виде

$$S(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1, n_2, \ldots, n_l) z^{n_1 - 1},$$

где

$$R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - a_i)}{\prod_{j=1}^l \Gamma(c_j)} \times \frac{\prod_{j=1}^l [(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 1)(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 2) \ldots (\zeta_j - \zeta_{j+1} + c_j - 1)]}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} [(\zeta_j + a_i - 1)(\zeta_j + a_i) \ldots (\zeta_j + b_i - 2)]},$$

В оставшейся части раздела будем предполагать, что параметры a_i, b_i, c_j меняются линейно по растущему натуральному параметру n:

$$a_i = \alpha_i n + \alpha_i', \quad b_i = \beta_i n + \beta_i', \quad c_j = \gamma_j n + \gamma_j', \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_j \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i', \beta_i', \gamma_j' \in \mathbb{Z}.$$

Как и раньше, $q_j = \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} (b_i - a_i)$. Также введем обозначения

$$p_j = \min_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} a_i - 1, \quad P_j = \max_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} b_i - 2,$$

$$h_j = \min_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} \alpha_i, \quad H_j = \max_{r_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant r_j} \beta_i,$$

$$\varphi(x, y) = |x+y|^{x+y} \cdot |x|^{-x}.$$

Здесь и далее $|x|^x = 1$ при $x = 0$, что соответствует пределу функции $|x|^x$ при $x \to 0$. Функция $\varphi(x, y)$ непрерывна как функция от двух переменых, и выполняется равенство $\varphi(-x-y, y) = \varphi(x, y)$.

Лемма 3.14 *Пусть $c_1 \leqslant q_1$ и $c_{j-1} + c_j \leqslant q_j$ при $j = 2, \ldots, l$. Тогда*

$$R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \sum_{\vec{s},\vec{k}} A_{\vec{s},\vec{k}} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(\zeta_j + k_j)^{s_j}},$$

и при $n \to \infty$

$$|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant (F(x_1, \ldots, x_l))^{n+o(n)},$$

где

$$x_j = \frac{k_j - p_j}{P_j - p_j} \in [0, 1]$$

и

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_l) = \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} & \frac{(\beta_i - \alpha_i)^{\beta_i - \alpha_i}}{\varphi(\alpha_i - h_j - (H_j - h_j)x_j, \beta_i - \alpha_i)} \\ & \times \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\varphi(h_{j+1} + (H_{j+1} - h_{j+1})x_{j+1} - h_j - (H_j - h_j)x_j, \gamma_j)}{\gamma_j^{\gamma_j}} \\ & \times \frac{\varphi(h_l + (H_l - h_l)x_l - \gamma_l, \gamma_l)}{\gamma_l^{\gamma_l}}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Доказательство. Если разложить числитель функции R в сумму мономов, то для каждого монома в соответствующей ему функции $\widehat{R}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l)$ по каждой переменной степень числителя будет меньше степени знаменателя. Следовательно, функцию $R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l)$ можно представить в виде

$$R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l) = \sum_{\vec{s},\vec{k}} A_{\vec{s},\vec{k}} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(\zeta_j + k_j)^{s_j}},$$

Из интегральной формулы Коши для полицилиндрической области (см. [26, (1.28)]), примененной к частным производным функции

$$(\zeta_1 + k_1)^{m_1} \cdots (\zeta_l + k_l)^{m_l} R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l),$$

где m_j — максимальной порядок полюса по переменной ζ_j, следует

$$A_{\vec{s},\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{|\zeta_1 + k_1| = \frac{1}{2}} \cdots \int_{|\zeta_l + k_l| = \frac{1}{2}} R(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l)$$

$$\times (\zeta_1 + k_1)^{s_1-1} \cdots (\zeta_l + k_l)^{s_l-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_l.$$

Введем функцию

$$\Phi(u,v) = |u+v|!^{\operatorname{sign}(u+v)} \cdot |u|!^{-\operatorname{sign}(u)},$$

определенную при целых u и v. На окружностях $|\zeta_j + k_j| = 1/2$ выполнены неравенства

$$|(\zeta_j + a_i - 1) \cdots (\zeta_j + b_i - 2)| \geqslant \Phi((a_i-1) - k_j, b_i - a_i - 1)e^{o(n)},$$

$$|\zeta_l(\zeta_l + 1) \cdots (\zeta_l + c_l - 2)| \leqslant \Phi(k_l - c_l + 1, c_l - 1)e^{o(n)},$$

$$|(\zeta_j - \zeta_{j+1} + 1) \cdots (\zeta_j - \zeta_{j+1} + c_j - 1)| \leqslant \Phi(k_{j+1} - k_j, c_j - 1)e^{o(n)}.$$

Докажем первое неравенство (остальные доказываются аналогично). Рассмотрим вначале случай, когда k_j лежит внутри интервала $(a_i - 1, b_i - 2)$. Тогда при $N < k_j$

$$|\zeta_j + N| = |(k_j - N) - (\zeta_j + k_j)| \geqslant (k_j - N) - \frac{1}{2},$$

а при $N > k_j$

$$|\zeta_j + N| = |(N - k_j) + (\zeta_j + k_j)| \geqslant (N - k_j) - \frac{1}{2}.$$

Следовательно (если в произведении верхний предел больше нижнего, то считаем его равным 1),

$$\begin{aligned}
|(\zeta_j + a_i - 1) \cdots (\zeta_j + b_i - 2)| &\geqslant \prod_{N=a_i-1}^{k_j-1} (k_j - N - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{N=k_j+1}^{b_i-2} (N - k_j - \frac{1}{2}) \\
&\geqslant \frac{1}{8} \prod_{N=a_i-1}^{k_j-2} (k_j - N - 1) \cdot \prod_{N=k_j+2}^{b_i-2} (N - k_j - 1) \\
&= \frac{(k_j - (a_i-1))!((b_i-2) - k_j)!}{8(k_j - (a_i - 1))((b_i - 2) - k_j)} \\
&= \Phi((a_i - 1) - k_j, b_i - a_i - 1)e^{o(n)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $k_j < a_i - 1$:

$$
\begin{aligned}
|(\zeta_j + a_i - 1)\cdots(\zeta_j + b_i - 2)| &\geqslant \prod_{N=a_i-1}^{b_i-2}(N - k_j - \frac{1}{2}) \geqslant \frac{1}{2}\prod_{N=a_i}^{b_i-2}(N - k_j - 1)\\
&= \frac{a_i - 1 - k_j}{2(b_i - 2 - k_j)} \cdot \frac{((b_i-2)-k_j)!}{((a_i-1)-k_j)!}\\
&= \Phi((a_i - 1) - k_j, b_i - a_i - 1)e^{o(n)}.
\end{aligned}
$$

Случай $k_j > b_i - 2$ рассматривается аналогично. Случаи, когда $k_j = a_i - 1$ или $k_j = b_i - 2$ проверяются прямой подстановкой.

Итак,

$$
\begin{aligned}
|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant \prod_{j=1}^{l}\prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} &\frac{(b_i - a_i - 1)!}{\Phi((a_i-1)-k_j, b_i - a_i - 1)}\\
&\times \prod_{j=1}^{l-1}\frac{\Phi(k_{j+1} - k_j, c_j - 1)}{(c_j - 1)!} \cdot \frac{\Phi(k_l - c_l + 1, c_l - 1)}{(c_l - 1)!} \cdot e^{o(n)}. \quad (3.20)
\end{aligned}
$$

Сделаем замену $k_j = p_j + (P_j - p_j)x_j$, $j = 1, \ldots, l$, $x_j \in [0, 1]$. Из леммы 3.13 и оценки (3.20) следует, что

$$
|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant (F(x_1, \ldots, x_l))^n e^{o(n)},
$$

где $F(x_1, \ldots, x_l)$ — функция, указанная в условии леммы.

Теорема 3.8 *Пусть $c_1 \leqslant q_1$ и $c_{j-1}+c_j \leqslant q_j$ при $j = 2, \ldots, l$. Тогда высоты всех многочленов в линейной форме $S(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z)$ (см. (3.13)) не превосходят $M^{n+o(n)}$, $n \to \infty$, где M — максимум функции (3.19) на кубе $[0, 1]^l$.*

Доказательство. Используя лемму 3.14, имеем равенство:

$$
\begin{aligned}
S(z) &= \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} R(n_1, n_2, \ldots, n_l) z^{n_1 - 1}\\
&= \sum_{\vec{s},\vec{k}} A_{\vec{s},\vec{k}} \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1-1}\prod_{j=1}^{l}\frac{1}{(\zeta_j + k_j)^{s_j}}.
\end{aligned}
$$

Так как $s_j \leqslant m$ и $b_i - a_i \leqslant Cn$, то количество слагаемых во внешней сумме не превосходит $(m \cdot Cn)^l = e^{o(n)}$. Далее, при фиксированных $\vec{s}$ и $\vec{k}$ в разложении элементарной суммы

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_l \geqslant 1} z^{n_1-1} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{(n_j + k_j)^{s_j}}$$

в линейную форму от полилогарифмов, высоты всех многочленов по лемме 3.2 будут $e^{o(n)}$. Из леммы 3.14 следует, что $|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant M^{n+o(n)}$. Откуда получаем утверждение теоремы.

3.5 Мера трансцендентности π^2

В этом разделе мы докажем оценку меры трансцендентности числа π^2:

Теорема 3.9 *Число π^2 трансцендентное, и для любого многочлена $\mathcal{A}(x) = A_\rho x^\rho + \cdots + A_0$ с целыми коэффициентами, $A = \max\limits_{j=0,\ldots,\rho} |A_i| > 0$ выполняется неравенство*

$$|\mathcal{A}(\pi^2))| > \frac{C(\rho)}{A^{E(\rho)}},$$

где $C(\rho) > 0$ – постоянная величина и

$$E(\rho) = \rho \cdot 39^\rho.$$

В работе [21] В.Н. Сорокин для оценки меры трансцендентности π^2 использовал семейство интегралов

$$I_{2l,\delta}(z) = \int_{[0,1]^{2l}} \frac{\prod_{i=1}^{2l} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\ldots x_{2j})^{n+1}} dx_1dx_2\ldots dx_{2l},$$

где $a_{2j-1} = a_{2j} = (l+1-j)(n+1)-\delta$ при $\delta = 0,\ldots,l$ и $n \geqslant l$. По следствию 3.8

$$I_{2l,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1}) \operatorname{Li}_{1,\{2\}_k}(z).$$

Переходя к пределу при $z \to 1-0$ (по теореме 3.2 выполняется $T_k(1)=0$) получим, что

$$I_{2l,\delta}(1) = \sum_{j=0}^{l} \varkappa_{j,\delta}\zeta(\{2\}_j) = \sum_{j=0}^{l} \varkappa_{j,\delta}\frac{\pi^{2j}}{(2j+1)!}.$$

По следствию 3.10 числа $D_n^{2l-2j}\varkappa_{j,\delta}$ будут целыми. Оценка $I_{2l,\delta}(1)$ проведена в [21, Лемма 30] с использованием только интегрального представления линейной формы. А именно, выполняется неравенство

$$0 < I_{2l,\delta}(1) \leqslant 2\left(\frac{1}{4l}\right)^{l(n-l)}. \tag{3.21}$$

Оценим теперь величины $|\varkappa_{j,\delta}|$.

Введем обозначение $\varphi(x) = \varphi(x,1) = |x+1|^{x+1}\cdot|x|^{-x}$. Как уже говорилось в разделе 3.4, мы полагаем $|x|^x = 1$ при $x=0$. По теореме 3.8

$$|\varkappa_{j,\delta}| \leqslant M^{n+o(n)}, \quad n\to\infty,$$

где M – максимум функции

$$\begin{aligned}F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l) &= \frac{\varphi(-1+\alpha_2-\alpha_1)\varphi(-1+\alpha_3-\alpha_2)\cdots\varphi(-1+\alpha_l-\alpha_{l-1})}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j^{\alpha_j}(1-\alpha_j)^{1-\alpha_j})^2} \\ &\quad\times\frac{(\alpha_l+1)^{\alpha_l+1}}{\alpha_l^{\alpha_l}} \\ &= \frac{\varphi(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(\alpha_2-\alpha_3)\cdots\varphi(\alpha_{l-1}-\alpha_l)}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j^{\alpha_j}(1-\alpha_j)^{1-\alpha_j})^2}\cdot\frac{(\alpha_l+1)^{\alpha_l+1}}{\alpha_l^{\alpha_l}}\end{aligned}$$

на кубе $[0,1]^l$. Последнее равенство следует из тождества $\varphi(-x-1) = \varphi(x)$.

Лемма 3.15 *Максимум M функции $F(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l)$ на кубе $[0,1]^l$ не превосходит $4\cdot 5{,}2^l$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l) = \frac{\varphi(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(\alpha_2-\alpha_3)\cdots\varphi(\alpha_{l-1}-\alpha_l)}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j^{\alpha_j}(1-\alpha_j)^{1-\alpha_j})^2}.$$

Так как $(x+1)^{x+1}/x^x \leqslant 4$ при $x \in [0,1]$, то

$$M \leqslant 4 \max_{\vec{\alpha} \in [0,1]^l} G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l).$$

Зафиксируем произвольный упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$. Разобьем его на s групп $\alpha_{k_j+1}, \alpha_{k_j+2}, \dots, \alpha_{k_{j+1}}$ при $k_0 = 0 < k_1 < \dots < k_s = l$ таких, что в каждой группе числа монотонно не возрастают и $\alpha_{k_j} < \alpha_{k_j+1}$ при $j = 1, \dots, s-1$. Так как $\varphi(x) \leqslant 1$ при $x \in [-1, 0]$, то

$$\begin{aligned} G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) &= \prod_{j=0}^{s-1} G(\alpha_{k_j+1}, \alpha_{k_j+2}, \dots, \alpha_{k_{j+1}}) \cdot \prod_{j=1}^{s-1} \varphi(\alpha_{k_j} - \alpha_{k_j+1}) \\ &\leqslant \prod_{j=0}^{s-1} G(\alpha_{k_j+1}, \alpha_{k_j+2}, \dots, \alpha_{k_{j+1}}). \end{aligned}$$

Утверждение леммы теперь вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.16 *Пусть* $1 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_k \geqslant 0$. *Тогда*

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \leqslant 5{,}2^k.$$

Доказательство. При $k = 1$

$$G(\alpha_1) = \frac{1}{(\alpha_1^{\alpha_1}(1-\alpha_1)^{1-\alpha_1})^2} \leqslant 4 < 5{,}2.$$

При $k = 2$ максимум функции G достигается при $\alpha_1 = 2/3$, $\alpha_2 = 1/3$. При этом

$$G(2/3, 1/3) = 27 < 5{,}2^2.$$

При $k = 3$ максимум функции G достигается при $\alpha_1 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1 - 1/\sqrt{2}$ и

$$G(1/\sqrt{2}, 1/2, 1 - 1/\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2}+1)^4 < 5{,}2^3.$$

При $k = 4$ максимум функции G достигается при $\alpha_1 = (5+\sqrt{5})/10$, $\alpha_2 = (5-\sqrt{5})/5$, $\alpha_3 = \sqrt{5}/5$, $\alpha_4 = (5-\sqrt{5})/10$ и

$$G((5+\sqrt{5})/10, (5-\sqrt{5})/5, \sqrt{5}/5, (5-\sqrt{5})/10) = 619{,}9593... < 5{,}2^4.$$

Пусть утверждение леммы верно для $k-1$ при $k \geqslant 5$, докажем его для k. Предположим противное: существуют такие числа α_i, что $1 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 0$ и $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) > 5{,}2^k$. Тогда для любого $m = 2, \ldots, k-1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}5{,}2^k < G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) &= \frac{\varphi(\alpha_{m-1} - \alpha_m)\varphi(\alpha_m - \alpha_{m+1})}{\varphi(\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})(\alpha_m^{\alpha_m}(1-\alpha_m)^{1-\alpha_m})^2} \\ &\quad \times G(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_k) \\ &\leqslant \frac{(\varphi((\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})/2))^2}{\varphi(\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})(\alpha_m^{\alpha_m}(1-\alpha_m)^{1-\alpha_m})^2} \cdot 5{,}2^{k-1}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались предположением индукции и выпуклостью вверх функции $\ln\varphi(x)$ на отрезке $[0,1]$, т.е. функции $(x+1)\ln(x+1) - x\ln x$. Следовательно,

$$\frac{(\varphi((\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})/2))^2}{\varphi(\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})(\alpha_m^{\alpha_m}(1-\alpha_m)^{1-\alpha_m})^2} > 5{,}2. \tag{3.22}$$

Пусть $\beta = \min(\alpha_{k-1}, 1-\alpha_2)$. Так как $\alpha_{k-1} + (1-\alpha_2) \leqslant 1$, то $\beta \leqslant 1/2$. Используя возрастание функции $\varphi(x/2)^2/\varphi(x)$ на отрезке $[0,1]$ и неравенство $\alpha_1 - \alpha_3 \leqslant 1 - \alpha_{k-1} \leqslant 1 - \beta$, получим

$$\frac{(\varphi((\alpha_1 - \alpha_3)/2))^2}{\varphi(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2^{\alpha_2}(1-\alpha_2)^{1-\alpha_2})^2} \leqslant \frac{(\varphi((1-\beta)/2))^2}{\varphi(1-\beta)(\alpha_2^{\alpha_2}(1-\alpha_2)^{1-\alpha_2})^2}.$$

Из этого неравенства и (3.22) при $m = 2$ следует, что

$$\alpha_2^{\alpha_2}(1-\alpha_2)^{1-\alpha_2} < \frac{\varphi((1-\beta)/2)}{\sqrt{5{,}2\varphi(1-\beta)}}.$$

Аналогично, используя (3.22) при $m = k-1$, находим

$$\alpha_{k-1}^{\alpha_{k-1}}(1-\alpha_{k-1})^{1-\alpha_{k-1}} < \frac{\varphi((1-\beta)/2)}{\sqrt{5{,}2\varphi(1-\beta)}}.$$

Учитывая определение β, получим неравенство

$$\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta} = \max(\alpha_2^{\alpha_2}(1-\alpha_2)^{1-\alpha_2}, \alpha_{k-1}^{\alpha_{k-1}}(1-\alpha_{k-1})^{1-\alpha_{k-1}}) < \frac{\varphi((1-\beta)/2)}{\sqrt{5{,}2\varphi(1-\beta)}}\,.$$

При неотрицательном $x < 0{,}3$ выполняется

$$x^x(1-x)^{1-x} > 0{,}54 > \frac{\varphi((1-x)/2)}{\sqrt{5{,}2\varphi(1-x)}},$$

поэтому $\beta \geqslant 0{,}3$ и $\alpha_2 \leqslant 0{,}7$, $\alpha_{k-1} \geqslant 0{,}3$. Откуда

$$\alpha_2 - \alpha_4 \leqslant \alpha_2 - \alpha_{k-1} \leqslant 0{,}4$$

и

$$\frac{(\varphi((\alpha_2-\alpha_4)/2))^2}{\varphi(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3^{\alpha_3}(1-\alpha_3)^{1-\alpha_3})^2} \leqslant 4\frac{(\varphi(0{,}4/2))^2}{\varphi(0{,}4)} = 5{,}104... < 5{,}2.$$

Это противоречит (3.22) при $m = 3$. Доказательство леммы окончено.

Замечание. Сорокин в [21, Лемма 34] показал, что $|\varkappa_{j,\delta}| \leqslant q^{ln}$ для любого $q > 6$ при $l \geqslant l_0$ и $n \geqslant l$ для некоторого l_0.

Для оценки меры трансцендентности нам потребуется

Лемма 3.17 *Пусть $\omega \in \mathbb{C}$, ρ, l – фиксированные натуральные числа и $Q_n(x)$ — многочлены степени l с целыми коэффициентами, причем при $n \to \infty$ выполняется*

$$|Q_n(\omega)| = \alpha^{n+o(n)}, \quad \alpha \in (0,1),$$

и высота (т.е. максимум модулей коэффициентов) Q_n не превосходит

$$\beta^{n+o(n)}, \quad \beta > 1.$$

Если выполняются неравенства

$$\alpha\beta^{\rho-1} < 1, \qquad E > E_0 = \frac{l(-\ln\alpha + \ln\beta)}{-\ln\alpha - (\rho-1)\ln\beta},$$

то для любого неприводимого (над $\mathbb{Z}$) многочлена $\mathcal{A}(x) = A_\rho x^\rho + \dots + A_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $A = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant\rho} |A_i| > 0$ справедлива оценка

$$|\mathcal{A}(\omega)| \geqslant \frac{C}{A^E}, \tag{3.23}$$

где $C = C(\rho, l, \alpha, \beta, E) > 0$ – постоянная, не зависящая от A.

Доказательство леммы 3.17. При доказательстве будет использован метод, впервые примененный в работе [34] для оценки меры трансцендентности e^{π}.

Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое малое число, зависящее от ρ, l, α, β, E и которое мы выберем в дальнейшем. При некотором натуральном n_1 и $n > n_1$ справедливо неравенство

$$\alpha_1^n \leqslant |Q_n(\omega)| \leqslant \alpha_2^n, \quad \alpha_1 = \alpha^{1+\varepsilon} < \alpha < \alpha^{1-\varepsilon} = \alpha_2 < 1,$$

а высоты многочленов Q_n не превосходят

$$\beta_2^n, \quad \beta_2 = \beta^{1+\varepsilon} > \beta > 1.$$

Пусть N – натуральное число, зависящее от ω, ρ, l, α, β, E, многочленов Q_n и ε (которое зависит от подмножества параметров, перечисленных ранее), которое мы также выберем далее. В частности, будем считать, что $N > n_1$.

Выберем $n = [\gamma \ln A] + N$, где

$$\gamma = \frac{l}{-\ln\alpha_2 - (\rho-1)\ln\beta_2 - \varepsilon}.$$

Из условия $\alpha\beta^{\rho-1} < 1$ следует, что при достаточно малых ε верно $\gamma > 0$. При таких ε выполняется неравенство

$$-\ln\alpha_2 - (\rho-1)\ln\beta_2 > 0. \tag{3.24}$$

Зафиксируем теперь произольный ненулевой и неприводимый многочлен $\mathcal{A}(x)$ степени ρ. Рассмотрим два случая: $\mathcal{A}$ делит Q_n и $\mathcal{A}$ не делит Q_n.

В первом случае $Q_n(x) = \mathcal{A}(x)B(x)$. Тогда, обозначая через $H(P)$ высоту многочлена P, будем иметь

$$H(\mathcal{A})H(B) \leqslant e^l H(Q_n) \leqslant e^l \beta_2^n.$$

Откуда

$$|B(\omega)| \leqslant l\max(1, |\omega|^l)H(B) \leqslant le^l\max(1, |\omega|^l)\beta_2^n \leqslant \beta_3^n,$$

$$\beta_3 = \beta^{1+2\varepsilon} > \beta_2 > 1$$

при $n > n_2$ для некоторого $n_2 > n_1$. Можно считать, что $N > n_2$. Тогда

$$|\mathcal{A}(\omega)| = \frac{|Q_n(\omega)|}{|B(\omega)|} \geqslant \left(\frac{\alpha_1}{\beta_3}\right)^n \geqslant \left(\frac{\alpha_1}{\beta_3}\right)^N \cdot \frac{1}{A^{\gamma(-\ln\alpha_1+\ln\beta_3)}}.$$

При $\varepsilon \to 0+$

$$\gamma(-\ln\alpha_1+\ln\beta_3) = \frac{l(-\ln\alpha_1+\ln\beta_3)}{-\ln\alpha_2-(\rho-1)\ln\beta_2-\varepsilon} \to \frac{l(-\ln\alpha+\ln\beta)}{-\ln\alpha-(\rho-1)\ln\beta} = E_0,$$

поэтому выбрав ε достаточно малым можно добиться, чтобы выполнялось $\gamma(-\ln\alpha_1+\ln\beta_3) < E$, что и доказывает лемму в первом случае.

Рассмотрим теперь второй случай. В этом случае Q_n и $\mathcal{A}$ не имеют общих корней. Покажем, что при

$$N > 1 + \frac{\ln(3(\rho+l)l^{\rho-1}\rho^l)}{-\ln\alpha_2-(\rho-1)\beta_2} \tag{3.25}$$

выполняется неравенство

$$|Q_n(\omega)| \leqslant \frac{L(Q_n)^{1-\rho}L(\mathcal{A})^{-l}}{3(\rho+l)}, \tag{3.26}$$

где $L(P)$ – сумма модулей коэффициентов многочлена P. Достаточно доказать неравенство

$$\alpha_2^n \leqslant \frac{l^{1-\rho}\beta_2^{(1-\rho)n}\rho^{-l}A^{-l}}{3(\rho+l)},$$

которое можно переписать в виде

$$n(-\ln\alpha_2-(\rho-1)\beta_2) \geqslant \ln(3(\rho+l)l^{\rho-1}\rho^l) + l\ln A.$$

Из неравенств (3.24), (3.25), $n > \gamma\ln A + (N-1)$ и определения γ следует

$$\begin{aligned} n(-\ln\alpha_2-(\rho-1)\beta_2) &> \gamma(-\ln\alpha_2-(\rho-1)\beta_2)\ln A \\ &\quad + (N-1)(-\ln\alpha_2-(\rho-1)\beta_2) \\ &> l\ln A + \ln(3(\rho+l)l^{\rho-1}\rho^l), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Так как Q_n и $\mathcal{A}$ не имеют общих корней и выполняется (3.26), то по [25, Глава 9, Лемма 1.9] справедливо неравенство

$$|\mathcal{A}(\omega)| \geqslant \frac{L(Q_n)^{-\rho}L(\mathcal{A})^{1-l}}{3(\rho+l)} \geqslant \frac{l^{-\rho}\beta_2^{-\rho n}\rho^{1-l}A^{1-l}}{3(\rho+l)} \geqslant \frac{C_1}{A^l\beta_2^{\rho\gamma\ln A}},$$

где

$$C_1 = \frac{l^{-\rho}\beta_2^{-N}\rho^{1-l}}{3(\rho+l)}.$$

При $\varepsilon \to 0+$

$$l + \gamma\rho\ln\beta_2 \to E_0.$$

Можно выбрать такое малое ε, что

$$l + \gamma\rho\ln\beta_2 < E,$$

а значит

$$|\mathcal{A}(\omega)| \geqslant \frac{C_1}{A^E},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.11 *Если для любого натурального ρ существуют такие $l(\rho)$, $\alpha(\rho)$, $\beta(\rho)$, $E(\rho)$ и последовательность многочленов Q_n степени $l(\rho)$, необходимых в условии леммы 3.17, то число ω – трансцендентное и оценка (3.23) справедлива для всех многочленов $\mathcal{A}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени ρ (с некоторой другой константой C).*

Доказательство. Если бы число ω было алгебраическим, то существовал бы неприводимый многочлен $\mathcal{A} \in \mathbb{Z}[x]$, что $\mathcal{A}(\omega) = 0$. Но это противоречит оценке снизу для $|\mathcal{A}(\omega)|$, которая дает лемма 3.17.

Если $\mathcal{A}(x)$ неприводимый, то требуемая оценка на $|\mathcal{A}(\omega)|$ сразу следует из леммы 3.17. Пусть многочлен $\mathcal{A}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ приводим и

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_1(x) \cdots \mathcal{A}_k(x),$$

где $\mathcal{A}_i$ – неприводимые многочлены. Для высот A_i многочленов $\mathcal{A}_i$ справедлива оценка

$$A_1 \cdots A_k \leqslant e^l A.$$

К многочлену $\mathcal{A}_i$ применим лемму 3.17:

$$|\mathcal{A}_i(\omega)| \geqslant \frac{C(\rho)}{A_i^{E(\rho)}}.$$

Следовательно,

$$|\mathcal{A}(\omega)| = \prod_{i=1}^{k} |\mathcal{A}_i(\omega)| \geqslant \frac{C(\rho)^k}{(A_1 \cdots A_k)^{E(\rho)}} \geqslant \frac{C(\rho)^k}{e^l A^{E(\rho)}}.$$

Так как $k \leqslant \rho$, то $C(\rho)^k \geqslant \min(1, C(\rho)^\rho)$. Откуда следует неравенство (3.23) с константой

$$C = \frac{\min(1, C(\rho)^\rho)}{e^l}.$$

Доказательство теоремы 3.9. Для доказательства нам будет достаточно рассмотреть только одну линейную форму

$$\mathcal{L} = (2l+1)! D_n^{2l} I_{2l,0}(1) = \sum_{j=0}^{l} (D_n^{2l} \cdot \varkappa_{j,\delta}) \frac{(2l+1)!}{(2j+1)!} \pi^{2j} = Q_n(\pi^2),$$

где Q_n – многочлен степени l с целыми коэффициентами. Применеяя метод Лапласа к интегралу $I_{2l,0}(1)$, находим, что $I_{2l,0}(1) = \tau^{n+o(n)}$ при $n \to \infty$, где

$$\tau = \max_{\vec{x} \in [0,1]^l} \prod_{j=1}^{l} \frac{x_{2j-1}^{l+1-j}(1 - x_{2j-1}) x_{2j}^{l+1-j}(1 - x_{2j})}{1 - x_1 x_2 \ldots x_{2j}}.$$

Из (3.21) видно, что

$$\tau \leqslant \left(\frac{1}{4l}\right)^l. \tag{3.27}$$

Применим к $Q_n(\pi^2)$ лемму 3.17. Из (3.27) и асимптотического закона распределения простых чисел $D_n = e^{n+o(n)}$ следует, что

$$\alpha = \tau e^{2l} \leqslant \frac{e^{2l}}{(4l)^l} = \left(\frac{e^2}{4l}\right)^l < \left(\frac{2}{l}\right)^l.$$

Из леммы 3.15

$$\beta = e^{2l} \cdot 4 \cdot 5{,}2^l.$$

При $l \geqslant 94$ справедливо

$$\beta = 4(e^2 5{,}2)^l < 39^l.$$

Выберем $l(\rho) = [(2e)39^{\rho-1}] + 1$. Тогда при $\rho \geqslant 2$ будет выполнено $l \geqslant 94$ и

$$-\ln\alpha > l(\ln l - \ln 2) > l(1 + (\rho - 1)\ln 39) > l + (\rho - 1)\ln\beta.$$

Следовательно,

$$E_0(\rho) = l\left(1 + \frac{\rho\ln\beta}{-\ln\alpha - (\rho-1)\ln\beta}\right) < l\left(1 + \frac{\rho l \ln 39}{l}\right)$$
$$< (\rho\ln 39 + 1)((2e)39^{\rho-1} + 1).$$

Откуда нетрудно показать, что $E_0(\rho) < \rho 39^\rho$, следовательно можно выбрать $E(\rho) = \rho 39^\rho$. При $\rho = 1$ выберем $l = 4$, тогда $E_0(1) < 25 < 1 \cdot 39^1 = E(1)$. Теперь можно применить следствие 3.11, доказывающее теорему.

Теорема 3.9 аналогична результату Сорокина [21, Теорема] с лучшей константой (39 вместо 45). Однако при больших ρ оба результата хуже оценки, полученной Н.И. Фельдманом [24] с помощью метода Гельфонда:

$$|\mathcal{A}(\pi)| \geqslant A^{-\Lambda\rho\ln(\rho+2)},$$

где Λ - некоторая постоянная, $\mathcal{A}$ – ненулевой многочлен с целыми коэффициентами степени ρ и высотой A.

3.6 Линейная независимость значений дзета-функции Римана

Первый результат, касающийся чисел $\zeta(k)$ при $k = 5, 7, 9, \ldots$ был получен в 2000г. Т. Ривоалем в [41]. В этой работе была дана оценка снизу на размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного 1 и $\zeta(2j+1)$, $j = 1, \ldots, l$, из которой следовало, что среди чисел $\zeta(2j+1)$ бесконечно много иррациональных.

Линейные формы от $\zeta(2j+1)$ в [41] получались при суммировании вполне уравновешенной гипергеометрической функции. В данном разделе мы докажем оценку снизу на размерность указанного выше линейного пространства с помощью кратных интегралов вида $S(z)$. Сравнение с известными результатами будет дано в конце раздела.

Теорема 3.10 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует l_0, что при $l \geqslant l_0$ размерность линейного пространства, порожденного числами 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, ..., $\zeta(2l+1)$, не меньше*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\ln 5{,}2}\ln l.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_{2l+1,r}(z) = \frac{(rn)!^2}{(n!)^{2r}} \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{rn}(1-x_i)^n dx_i}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j})^{n+1}(1-zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{rn+1}}$$

при $r \leqslant l$. Из теоремы 3.6 следует его представление в виде

$$I_{2l+1,r}(z) = \sum_{k=0}^{l} P_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\{2\}_k,1}(z) + \sum_{k=0}^{l-1} T_k(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{1,\{2\}_k,1}(z) - U(z^{-1}). \quad (3.28)$$

Переходя к пределу при $z \to 1-0$ (по теореме 3.2 выполняется $P_0(1) = 0$ и $T_k(1) = 0$) получим, что

$$I_{2l+1,r}(1) = \varkappa_0 + \varkappa_1\zeta(3) + \varkappa_2\zeta(5) + \cdots + \varkappa_l\zeta(2l+1),$$

где $\varkappa_0 = -U(1)$ и $\varkappa_j = P_j(1)$ при $j > 0$.

Чтобы получить оценки сверху величин $|\varkappa_j|$ и общего знаменателя $\varkappa_j$, мы рассмотрим двойственный интеграл

$$J_{2l+1,r}(z) = \frac{(rn)!^2}{(n!)^{2r}} \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{rn}(1-x_i)^n dx_i}{\prod_{j=1}^{l+1}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j-1})^{n+1}}.$$

Двойственность интеграла означает, что (см. доказательство теоремы 3.6)

$$I_{2l+1,r}(z) = \frac{1}{(1-z)^{rn+1}} J_{2l+1,r}\left(\frac{-z}{1-z}\right). \quad (3.29)$$

По следствию 3.6

$$J_{2l+1,r}(z) = \sum_{k=0}^{l} \widetilde{T}_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{1,\{2\}_k}(z) + \sum_{k=0}^{l} \widetilde{P}_k(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{2\}_k}(z). \tag{3.30}$$

Учитывая разложения (3.28), (3.30) и их связь (3.29), заключаем, что

$$U(z^{-1}) = \frac{-1}{(1-z)^{rn+1}} \widetilde{P}_0\left(-\frac{1-z}{z}\right), \quad P_j(z^{-1}) = \frac{-1}{(1-z)^{rn+1}} \widetilde{T}_j\left(-\frac{1-z}{z}\right).$$

По теореме 3.2

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \widetilde{P}_0(z) \geqslant rn+1, \quad \deg \widetilde{P}_0 \leqslant (r+1)n+1,$$

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \widetilde{T}_j(z) \geqslant rn+1, \quad \deg \widetilde{T}_j \leqslant (r+1)n+1.$$

Если $\widetilde{P}_0(z) = \sum_{\alpha=rn+1}^{(r+1)n+1} t_{0,\alpha} z^\alpha$ и $\widetilde{T}_j(z) = \sum_{\alpha=rn+1}^{(r+1)n+1} t_{j,\alpha} z^\alpha$ при $j = 1, \ldots, l$, то

$$\varkappa_j = (-1)^{rn} t_{j,rn+1}. \tag{3.31}$$

Следовательно вместо оценки $\varkappa_j$ мы можем произвести оценку коэффициентов многочленов в разложении (3.30).

Для изучения арифметических свойств коэффициентов многочленов в (3.30) докажем несколько лемм.

Лемма 3.18 *Пусть x, y, s – натуральные числа. Тогда*

$$D_{x+s} \frac{y \cdots (y+s-1)}{x \cdots (x+s)} \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из тождества

$$\frac{y \cdots (y+s-1)}{x \cdots (x+s)} = \binom{y+s-1}{s} \sum_{p=0}^{s} (-1)^p \binom{s}{p} \frac{1}{x+p}.$$

Лемма 3.19 *Пусть n, α, β_1, β_2, $\ldots \beta_k$ – натуральные числа, причем $\alpha \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k \leqslant \alpha + n - 1$. Тогда*

$$D_n^k \cdot \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n! \beta_1 \cdots \beta_k} \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\beta_1\cdots\beta_k}=\frac{\alpha\cdots(\beta_1-1)}{(\beta_1-\alpha)!}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{(\beta_j+1)\cdots(\beta_{j+1}-1)}{(\beta_j-\alpha+1)\cdots(\beta_{j+1}-\alpha)},$$

где подразумевается $\beta_{k+1}=\alpha+n$. В случае $\beta_1=\alpha$ первая дробь отсутствует, а в случае $\beta_j+1=\beta_{j+1}$ отсутствует j-ая дробь произведения. Первая дробь (если присутствует) является целым числом, а j-ая дробь произведения по лемме 3.18 после домножения на D_n является целым числом. Лемма доказана.

Лемма 3.20 *Пусть r, n, α_1, α_2, $\ldots$, α_k – целые числа, $0\leqslant k<r$, $n\geqslant 1$, $\alpha_1\geqslant 1$, $\alpha_k\leqslant(r-1)n$, $\alpha_i+n<\alpha_{i+1}$. Тогда число*

$$D_n^k\cdot\frac{(rn)!}{n!^r}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{n!}{\alpha_j(\alpha_j+1)\cdots(\alpha_j+n)}$$

является целым.

Доказательство. Для всех j от 1 до k каждую дробь в произведении разложим по формуле

$$\frac{n!}{\alpha_j(\alpha_j+1)\cdots(\alpha_j+n)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p\binom{n}{p}}{\alpha_j+p}.$$

В силу линейности достаточно доказать, что число

$$D_n^k\cdot\frac{(rn)!}{n!^r}\cdot\frac{1}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_k},\quad 1\leqslant\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k\leqslant rn.$$

целое. Разобьем отрезок $[1,rn]$ целых чисел на r отрезков $[(i-1)n+1,in]$, $i=1,\ldots,r$. Если для какого-то i в отрезок $[(i-1)n+1,in]$ не попадает никакое β_j, то воспользуемся тем, что

$$\frac{((i-1)n+1)((i-1)n+2)\cdots in}{n!}\in\mathbb{Z}.$$

Если же в отрезок $[(i-1)n+1,in]$ попали β_{j_1}, β_{j_1+1}, $\ldots$, β_{j_2} (в действительности, $j_2=j_1$ или $j_2=j_1+1$), то по лемме 3.19 будет выполнено

$$D_n^{j_2-j_1+1}\frac{((i-1)n+1)((i-1)n+2)\cdots in}{n!\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_2}}\in\mathbb{Z}.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 3.21 *Многочлены в разложении (3.30) удовлетворяют условию*

$$D_n^{2l-2k}\widetilde{P}_k(z)\in\mathbb{Z}[z],\quad D_n^{2l+1-2k}\widetilde{T}_k(z)\in\mathbb{Z}[z].$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$K(m,a,c)=\int_{[0,1]^{2m+1}}\frac{\prod_{i=1}^{2m+1}x_i^{a-1}(1-x_i)^n dx_i}{\prod_{j=1}^{m}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j-1})^{n+1}(1-zx_1x_2\cdots x_{2m+1})^c}.$$

Заметим, что

$$J_{2l+1,r}(z)=\frac{(rn)!^2}{(n!)^{2r}}K(l,rn+1,n+1).$$

Если $a>1$ и $c\geqslant 1$, то из тождества

$$x_1x_2\cdots x_{2m+1}=z^{-1}(1-(1-zx_1x_2\cdots x_{2m+1})),$$

следует равенство

$$K(m,a,c)=z^{-1}(K(m,a-1,c)-K(m,a-1,c-1)).$$

Если $c=1$, то преобразуем вычитаемое по формуле

$$K(m,a,0)=\left(\frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}\right)^2K(m-1,a,n+1).$$

Данная формула получается интегрированием по двум последним переменным. Таким образом исходный интеграл $K(l,rn+1,n+1)$ представляется в виде целочисленной линейной комбинации выражений вида

$$z^{-rn}\prod_{k=1}^{l-m}\left(\frac{n!}{a_k(a_k+1)\cdots(a_k+n)}\right)^2K(m,1,c),$$

где $1\leqslant l-r+1\leqslant m\leqslant l$, $a_1\geqslant 1$, $a_{l-m}\leqslant(r-1)n$, $a_i+n<a_{i+1}$. По лемме 3.2 в разложении $K(m,1,c)$ в линейную форму от полилогарифмов многочлены $P_{\vec{s}}(z)$ удовлетворяют условию $D_n^{2m+1-w(\vec{s})}P_{\vec{s}}(z)\in\mathbb{Z}[z]$, а по лемме 3.20 выполняется

$$D_n^{l-m}\cdot\frac{(rn)!}{n!^r}\cdot\prod_{k=1}^{l-m}\frac{n!}{a_k(a_k+1)\cdots(a_k+n)}\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно, в разложении $J_{2l+1,r}(z)$ в линейную форму от полилогарифмов многочлены $P_{\vec{s}}(z)$ удовлетворяют условию $D_n^{2l+1-w(\vec{s})}P_{\vec{s}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, что и требовалось доказать.

Применяя метод Лапласа, получаем при $n \to \infty$ асимптотическое равенство $I_{2l+1,r}(1) = \tau^{n+o(n)}$, где

$$\tau = r^{2r} \max_{\vec{x}\in[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^r(1-x_i)}{\prod_{j=1}^{l}(1-x_1x_2\ldots x_{2j})\cdot(1-x_1x_2\ldots x_{2l+1})^r}.$$

Лемма 3.22 *Для любых натуральных m, $r \leqslant m$, целого $k \in [0,m]$ и $t<1$ справедливо неравенство*

$$\max_{\vec{x}\in[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^r(1-x_i)}{(1-tx_1x_2\cdots x_m)^k} \leqslant \frac{1}{r^m}.$$

Доказательство. Функция

$$F(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i^r(1-x_i)}{(1-tx_1x_2\cdots x_m)^k},$$

непрерывна на кубе $[0,1]^m$ и равна нулю на его границе. Следовательно, максимум функции F достигается в некоторой внутренней точке куба. В этой точке логарифмическая производная функции F по произвольной переменной x_i обращается в нуль:

$$\frac{F'_{x_i}}{F} = \frac{r}{x_i} - \frac{1}{1-x_i} + \frac{1}{x_i}\cdot\frac{kx_1\cdots x_m}{1-x_1\cdots x_m} = 0.$$

Следовательно, выражение

$$r - \frac{x_i}{1-x_i}$$

принимает для всех x_i одинаковое значение, откуда в точке максимума $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = x_0$. Далее,

$$F(x_0,x_0,\ldots,x_0) = \frac{x_0^{rm}(1-x_0)^m}{(1-tx_0^m)^k} \leqslant \left(\frac{x_0^r(1-x_0)}{1-x_0^m}\right)^m.$$

Покажем теперь, что

$$\frac{x^r(1-x)}{1-x^m} \leqslant \frac{1}{r}$$

на интервале $(0,1)$. Имеем:

$$\frac{x^r(1-x)}{1-x^m} \leqslant \frac{x^r(1-x)}{1-x^r} = \frac{x^r}{1+x+\dots+x^{r-1}} \leqslant \frac{x^r}{rx^r} = \frac{1}{r},$$

что и доказывает лемму.

Лемма 3.23 *Для любых натуральных l и $r \leqslant l$ выполняется оценка*

$$\tau \leqslant \frac{1}{r^{2l+1-3r}}.$$

Доказательство. Функция

$$F(\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^r(1-x_i)}{\prod_{j=1}^{l}(1-x_1x_2\dots x_{2j})\cdot(1-x_1x_2\dots x_{2l+1})^r},$$

доопределенная нулем на границе куба $[0,1]^{2l+1}$, непрерывна на этом кубе. Ее максимум M достигается в некоторой внутренней точке куба $[0,1]^{2l+1}$. Из равенства логарифмических производных F по переменным x_{2j-1} и x_{2j} (при $j=1,\dots,l$) нулю, следует, что

$$r - \frac{x_{2j-1}}{1-x_{2j-1}} = r - \frac{x_{2j}}{1-x_{2j}},$$

откуда в точке максимума $x_{2j-1} = x_{2j} = u_j$. Обозначим также значение координаты x_{2l+1} в точке максимума через u_{l+1}. Тогда

$$M = \frac{\prod_{j=1}^{l} u_j^{2r}(1-u_j)^2\cdot u_{l+1}^r(1-u_{l+1})}{\prod_{j=1}^{l}(1-u_1^2u_2^2\dots u_j^2)\cdot(1-u_1^2u_2^2\cdots u_l^2u_{l+1})^r}.$$

Проделаем некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} M &= \prod_{j=1}^{r}\frac{u_j^r(1-u_j)}{1-u_1^2u_2^2\cdots u_j^2}\cdot\prod_{k=0}^{[l/r]-1}\frac{\prod_{j=kr+1}^{(k+1)r}u_j^r(1-u_j)}{\prod_{j=(k+1)r+1}^{\min(l,(k+2)r)}(1-u_1^2u_2^2\cdots u_j^2)} \\ &\quad\times\prod_{j=[l/r]r+1}^{l}u_j^r(1-u_j)\cdot\frac{\prod_{j=r+1}^{l+1}u_j^r(1-u_j)}{(1-u_1^2u_2^2\cdots u_l^2u_{l+1})^r} \\ &\leqslant 1\cdot\prod_{k=0}^{[l/r]-1}\frac{\prod_{j=kr+1}^{(k+1)r}u_j^r(1-u_j)}{(1-u_{(k+1)r+1}\cdot u_{kr+1}u_{kr+2}\cdots u_{(k+1)r})^r} \\ &\quad\times\prod_{j=[l/r]r+1}^{l}u_j^r(1-u_j)\cdot\frac{\prod_{j=r+1}^{l+1}u_j^r(1-u_j)}{(1-u_r\cdot u_{r+1}\cdots u_{l+1})^r}. \end{aligned}$$

После применения леммы 3.22 ко всем множителям, получим:

$$M \leqslant \prod_{k=0}^{[l/r]-1} \frac{1}{r^r} \cdot \frac{1}{r^{l-[l/r]r}} \cdot \frac{1}{r^{l+1-r}} = \frac{1}{r^{2l+1-r}}.$$

Откуда следуют неравенства

$$M \leqslant \frac{1}{r^{2l+1-r}}, \quad \tau = r^{2r} M \leqslant \frac{1}{r^{2l+1-3r}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.24 *Величины* $\varkappa_j$ *по модулю не превосходят*

$$(r^r(r+1)^{r+1} 5{,}2^l)^{n+o(n)}, \quad n \to \infty$$

Доказательство. Разложим интеграл

$$\widetilde{J}_{2l+1,r}(z) = \frac{(n!)^{2r}}{(rn)!^2} J_{2l+1,r}(z) = \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{rn}(1-x_i)^n dx_i}{\prod_{j=1}^{l+1}(1 - z x_1 x_2 \cdots x_{2j-1})^{n+1}}.$$

в кратную сумму по лемме 2.1:

$$\widetilde{J}_{2l+1,r}(z) = \sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_{l+1} \geqslant 1} R(n_1, n_2, \ldots, n_{l+1}) z^{n_1 - 1},$$

где

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_{l+1}) = n!^l \\ \times \frac{\prod_{j=1}^{l+1}[(n_j - n_{j+1} + 1)(n_j - n_{j+1} + 2)\ldots(n_j - n_{j+1} + n)]}{(n_1 + rn)\cdots(n_1 + (r+1)n)\prod_{j=2}^{l+1}[(n_j + rn)\cdots(n_j + (r+1)n)]^2},$$

где подразумевается $n_{l+2} \equiv 1$. Если разложить числитель в сумму мономов, то для каждого монома в соответствующей ему функции $\widehat{R}(n_1, n_2, \ldots, n_{l+1})$ по каждой переменной степень числителя будет меньше степени знаменателя. Следовательно, функцию $R(n_1, n_2, \ldots, n_{l+1})$ можно представить в виде

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_{l+1}) = \sum_{\vec{s}, \vec{k}} A_{\vec{s}, \vec{k}} \prod_{j=1}^{l+1} \frac{1}{(n_j + k_j)^{s_j}},$$

где $s_1 = 1$, $s_j \in \{1, 2\}$ при $j > 1$ и $rn \leqslant k_j \leqslant (r+1)n$. Количество слагаемых в сумме равно $2^l \cdot (n+1)^{l+1}$, что является $e^{o(n)}$. Далее, при фиксированных $\vec{s}$ и $\vec{k}$ в разложении суммы

$$\sum_{n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_{l+1} \geqslant 1} z^{n_1 - 1} \prod_{j=1}^{l+1} \frac{1}{(n_j + k_j)^{s_j}}$$

в линейную форму от полилогарифмов, высоты всех многочленов по лемме 3.2 будут $e^{o(n)}$. Если $k_1 > rn$, то по теореме 3.2 (выберем $d_1 = 1$, $d_2 = \cdots = d_{l+1} = 0$, $d_{l+2} = rn$) порядок в $z = 0$ этих многочленов (кроме свободного члена, многочлена при единице) больше, чем $rn + 1$, следовательно такие элементарные суммы не дают вклад в $\varkappa_j$ при $j > 0$. Оценка же $|\varkappa_0|$ будет та же, что и у $|\varkappa_j|$ вследствие малости линейных форм: из леммы 3.23 следует, что при достаточно больших n выполнено

$$\frac{(n!)^{2r}}{(rn!)^2} I_{2l+1,r}(1) \leqslant 1$$

(в действительности, это неравенство выполнено при всех n). Итак, достаточно оценить величины $|A_{\vec{s},\vec{k}}|$ при $k_1 = rn$.

Сделаем замену $k_j = rn + \alpha_j n$, $j = 2, \ldots, l+1$, $\alpha_j \in [0, 1]$. Из леммы 3.14 следует, что

$$|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant (F(\alpha_2, \ldots, \alpha_{l+1}))^n e^{o(n)},$$

где

$$F(\alpha_2, \ldots, \alpha_{l+1}) = \frac{\varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_3 - \alpha_2) \cdots \varphi(\alpha_{l+1} - \alpha_l)}{\prod_{j=2}^{l+1} (\alpha_j^{\alpha_j} (1 - \alpha_j)^{1 - \alpha_j})^2} \cdot \frac{(r + \alpha_{l+1})^{r + \alpha_{l+1}}}{(r + \alpha_{l+1} - 1)^{r + \alpha_{l+1} - 1}},$$

$$\varphi(x) = \varphi(x, 1) = |x + 1|^{x+1} \cdot |x|^{-x}.$$

Если M – максимум функции F на кубе $[0, 1]^l$, то

$$|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant M^{n + o(n)}.$$

Так как $\varphi(\alpha_2) \leqslant 4$ и

$$\frac{(r + \alpha_{l+1})^{r + \alpha_{l+1}}}{(r + \alpha_{l+1} - 1)^{r + \alpha_{l+1} - 1}} \leqslant \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r},$$

то

$$F(\alpha_2,\ldots,\alpha_{l+1}) \leqslant \frac{4(r+1)^{r+1}}{r^r} \cdot \frac{\varphi(\alpha_3-\alpha_2)\cdots\varphi(\alpha_{l+1}-\alpha_l)}{\prod_{j=2}^{l+1}(\alpha_j^{\alpha_j}(1-\alpha_j)^{1-\alpha_j})^2}.$$

Используя это неравенство, аналогично лемме 3.15 можно доказать оценку

$$M \leqslant 4(r+1)^{r+1}/r^r \cdot 5{,}2^l.$$

Итак, при $k_1 = rn$

$$|A_{\vec{s},\vec{k}}| \leqslant (4(r+1)^{r+1}/r^r \cdot 5{,}2^l)^{n+o(n)}.$$

Нормализационный множитель $(rn)!^2/(n!)^{2r}$ имеет асимптотику $(r^{2r})^{n+o(n)}$. Следовательно

$$|\varkappa_j| \leqslant (4r^r(r+1)^{r+1}5{,}2^l)^{n+o(n)}, \quad n\to\infty,$$

что и требовалось доказать.

Для оценки размерности линейного пространства над $\mathbb{Q}$ используется критерий Нестеренко (см. [15]), который мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 3.11 *Пусть θ_0, θ_1, ..., θ_N – действительные числа и $\varkappa_{j,n}$, $j = 0,\ldots,N$ – целые числа такие, что при $n\to\infty$*

$$|\sum_{j=0}^{N}\varkappa_{j,n}\theta_j| = \alpha^{n+o(n)}, \quad \alpha\in(0,1)$$

и

$$|\varkappa_{j,n}| \leqslant \beta^{n+o(n)}, \quad \beta>1.$$

Тогда размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного числами θ_j, не меньше, чем

$$1-\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}.$$

Доказательство теоремы 3.10. Рассмотрим линейную форму от 1 и $\zeta(2j+1)$, $j=1,\ldots,l$ с целыми коэффициентами (см. лемму 3.21):

$$\mathcal{L} = D_n^{2l+1}I_{2l+1,r}(1) = D_n^{2l+1}\varkappa_0 + \sum_{j=1}^{l}(D_n^{2l+1}\varkappa_j)\zeta(2j+1).$$

Применим к ней теорему 3.11, выбирая $N = l$, $\theta_0 = 1$ и $\theta_j = \zeta(2j+1)$ при $j > 0$. Из леммы 3.23 и асимптотического закона распределения простых чисел $D_n = e^{n+o(n)}$, $n \to \infty$, следует, что

$$\alpha = e^{2l+1}\tau \leqslant \frac{e^{2l+1}}{r^{2l+1-3r}}.$$

Из леммы 3.24

$$\beta = e^{2l+1} 4 r^r (r+1)^{r+1} 5{,}2^l.$$

Итак, для размерности $\mathbb{D}_l$ линейного пространства, порожденного числами 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$, $\zeta(2l+1)$ справедлива оценка

$$\mathbb{D}_l \geqslant 1 + \frac{(2l+1-3r)\ln r - 2l - 1}{2l+1+\ln 4 + r\ln r + (r+1)\ln(r+1) + l\ln 5{,}2}.$$

Выбирая $r = [l/\ln^2 l]$, при $l \to \infty$ получим оценку

$$\mathbb{D}_l \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{2}\ln 5{,}2} \cdot \ln l \cdot (1 + o(1)),$$

что и требовалось доказать.

По теореме 2.3 для $a_i = rn+1$, $b_i = (r+1)n+2$ справедливо тождество

$$I_{2l+1,r}(z) = \frac{(rn)!^2}{(n!)^{2r}} \times \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{rn}(1-x_i)^n \, dx_1 dx_2 \ldots dx_{2l+1}}{(1 - zx_1 + zx_1x_2 - zx_1x_2x_3 + \cdots - zx_1x_2\cdots x_{2l+1})^{rn+1}}.$$

Откуда по теореме из [10] значение $I_{2l+1,r}(1)$ имеет гипергеометрическое представление:

$$I_{2l+1,r}(1) = n!^{2l+2-2r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \times \frac{(k-rn)(k-rn+1)\cdots(k-1)\cdot(k+n+1)(k+n+2)\cdots(k+rn)}{(k(k+1)\cdots(k+n))^{2l+2}}. \tag{3.32}$$

Показывается (см., например, [11, Lemma 19]), что

$$I_{2l+1,r}(1) = \varkappa_0' + \varkappa_1'\zeta(3) + \varkappa_2'\zeta(5) + \cdots + \varkappa_l'\zeta(2l+1),$$

однако мы не можем утверждать, что $\varkappa_j = \varkappa'_j$.

Легко показать, что в представлении $I_{2l+1,r}(1)$ в виде гипергеометрического ряда (3.32) общий знаменатель коэффициентов линейной формы от $\zeta(2k+1)$ (т.е. $\varkappa'_j$) делит D_n^{2l+2}. То, что он делит D_n^{2l+1} является сложной задачей и было показано Ривоалем и Краттенталером ([35, Théorème 1]). Доказательство леммы 3.21 представляется более простым. Подставляя $r = 1$, мы доказываем гипотезу Васильева (см. формулировку в разделе 1.2).

Доказанная в лемме 3.24 оценка хуже оценки, получаемой из линейной формы $I_{2l+1,r}(1)$ при её представлении в виде гипергеометрического ряда (3.32): при $n \to \infty$

$$\varkappa'_j \leqslant (2^{2l+2-2r}(2r+1)^{2r+1})^{n+o(n)} \tag{3.33}$$

(доказательство такое же, как и в [42, Lemme 3.4]). К сожалению, мы не сможем воспользоваться здесь этой оценкой, так как мы не знаем, что $\varkappa_j = \varkappa'_j$. Таким образом, в представлении приближений в виде кратных интегралов легче доказать "правильную"арифметику, но при представлении в виде гипергеометрического ряда легче показать хорошую оценку коэффициентов.

Асимптотическая оценка линейной формы проще получается из представления (3.32). Однако мы предпочитаем доказать в этой работе лемму 3.23, чтобы получить доказательство, основанное только на кратных интегралах. Кроме того, само равенство (3.32) получается с помощью нетривиально доказываемого тождества из [10].

В работе [41] была доказана теорема, аналогичная теореме 3.10. Но при $\ln l$ стоит большая (т.е. лучшая) константа

$$\frac{1}{1+\ln 2}.$$

Ухудшение константы в данной работе связано с оценкой $|\varkappa_j|$, о которой говорилось выше. Если доказать оценку, подобную (3.33) (например, с помощью равенства $\varkappa_j = \varkappa'_j$), то будет в точности доказан результат работы [41].

3.7 Линейная независимость значений классических полилогарифмов

Первые результаты о линейной независимости классических полилогарифмов $\mathrm{Li}_s(z)$ были получены Е.М. Никишиным в 1979г. В [18] он показал, что для любого натурального m и $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > p^m(4m)^{m(m-1)}$ числа 1, $\mathrm{Li}_1(p/q)$, $\ldots$, $\mathrm{Li}_m(p/q)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Т. Ривоаль, в [42, Chapitre 2] доказал оценку размерности линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного значениями $\mathrm{Li}_s(z)$ в рациональных точках α, $|\alpha| < 1$. Эти функции могут быть продолжены в область $D = \mathbb{C}\backslash\{z : |\arg(1-z)| < \pi\}$ (коплексная плоскость с разрезом по действительной прямой от 1 до $+\infty$) с помощью тождества

$$\mathrm{Li}_s(z) = z\int_{[0,1]^s} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_s}{1 - zx_1x_2\ldots x_s}, \tag{3.34}$$

Мы обобщим результат Ривоаля на значения полилогарифмов в рациональных точках α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$. В качестве следствия мы получим оценку размерности линейного пространства, порожденного значениями обобщенных полилогарифмов $\{\mathrm{Le}_{\{1\}_s}(\alpha)\}$ при ненулевом $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha < 1$.

Теорема 3.12 *Для любого рационального α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое m_0, что при $m \geqslant m_0$ размерность линейного пространства (над $\mathbb{Q}$), порожденного $1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \mathrm{Li}_2(\alpha), \ldots, \mathrm{Li}_m(\alpha)$ не меньше, чем*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\ln 2}\ln m.$$

Из формулы (3.34) следует, что $\mathrm{Li}_s(\alpha)$ является действительным числом при $\alpha < 1$.

Перед доказательством теоремы, сформулируем ее

Следствие 3.12 *Для любого рационального α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое m_0, что при $m \geqslant m_0$ размерность* *линейного пространства (над* $\mathbb{Q}$*), порожденного* $1, \mathrm{Le}_1(\alpha), \ldots, \mathrm{Le}_{\{1\}_m}(\alpha)$ *не меньше, чем*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\ln 2}\ln m.$$

Доказательство следствия. По лемме 2.6 справедливо равенство $\mathrm{Le}_{\{1\}_s}(\alpha) = -\mathrm{Li}_s(-\frac{\alpha}{1-\alpha})$, причем $\frac{-\alpha}{1-\alpha}$ будет ненулевым рациональным числом < 1, что и доказывает следствие.

Отметим, что из теоремы 3.12 и ее следствия вытекает, что при любом рациональном α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ как в множестве $\{\mathrm{Li}_s(\alpha)\}$, $s \geqslant 1$, так и в множестве $\{\mathrm{Le}_{\{1\}_s}(\alpha)\}$, $s \geqslant 1$ содержится бесконечно много иррациональных чисел.

Доказательство теоремы 3.12 будет во многом похоже на доказательство Ривоаля [42, Théorème 2.1].

Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \frac{(rn)!}{n!^r}\int_{[0,1]^m}\frac{\prod_{i=1}^m x_i^{rn}(1-x_i)^n}{(1-zx_1x_2\cdots x_m)^{rn+1}}\,dx_1dx_2\cdots dx_m,$$

где r и m – натуральные числа, причем $r < m$, $m \geqslant 2$. При $|z| < 1$ интеграл по лемме 2.1 можно разложить в бесконечную сумму:

$$I(z) = n!^{m-r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+1)\cdots(k+rn-1)}{((k+rn)(k+rn+1)\cdots(k+(r+1)n))^m}z^{k-1}. \qquad (3.35)$$

Из теоремы 3.2 следует, что при $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

$$I(z) = P_0(z^{-1}) + \sum_{j=1}^m P_j(z^{-1})\,\mathrm{Li}_l(z),\ \operatorname*{ord}_{z=0} P_j(z) \geqslant rn+1,\ \deg P_j \leqslant (r+1)n+1.$$

То же равенство (в силу аналитического продолжения), выполняется и во всей комплексной плоскости с разрезом по лучу $[1,\infty)$ на действительной прямой. Коэффициенты многочленов можно выписать явно, исходя из представления (3.35):

$$P_j(z) = z\sum_{\alpha=rn}^{(r+1)n} A_{j,\alpha}z^\alpha,\ j>0, \quad P_0(z) = -z\sum_{j=1}^m\sum_{\alpha=rn+1}^{(r+1)n} A_{j,\alpha}\sum_{\beta=1}^{\alpha-rn}\frac{1}{\beta^j}z^{\alpha-\beta},$$

где $A_{j,\alpha}$ – числа из разложения в сумму простейших дробей

$$n!^{m-r}\frac{k(k+1)\cdots(k+rn-1)}{((k+rn)(k+rn+1)\cdots(k+(r+1)n))^m}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=rn}^{(r+1)n}\frac{A_{j,\alpha}}{(k+\alpha)^j}.$$

По теореме 3.7 многочлены $D_n^{m-j}P_j(z)$ имеют целые коэффициенты. Также это можно показать и из явных представлений многочленов (см. [42, Lemme 2.5]).

В дальнейшем мы будем рассматривать линейную форму

$$z^{rn+1}I(z)=Q_0(z^{-1})+\sum_{j=1}^{m}Q_j(z^{-1})\operatorname{Li}_j(z),$$

где многочлены Q_j имеют степень $\leqslant n$.

По формуле Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(rn)!}{n!^r}\right)^{1/n}=r^r.$$

Применяя метод Лапласа к интегралу, получим, что при фиксированном $z<1$ выполняется $I(z)=\tau(z)^{n+o(n)}$, $n\to\infty$, где

$$\tau(z)=r^r\max_{\overline{x}\in[0,1]^m}\frac{\prod_{i=1}^m x_i^r(1-x_i)}{(1-zx_1x_2\cdots x_m)^r}>0.$$

Из леммы 3.22 следует, что $\tau(z)\leqslant 1/r^{m-r}$.

Рассмотрим теперь линейную форму в точке $z=\alpha$, где $\alpha=p/q$, $\alpha<1$

$$\mathcal{L}=D_n^m p^n(p/q)^{rn+1}I(p/q)=\sum_{j=0}^{m}\varkappa_j\operatorname{Li}_j(\alpha),$$

где $\varkappa_j=D_n^m p^n Q_j(q/p)\in\mathbb{Z}$.

Лемма 3.25 *Выполняется оценка*

$$\ln\varkappa_j\leqslant(m+\ln\max(|p|,|q|)+(r+1)\ln(r+1)+m\ln 2)n+o(n).$$

Доказательство. Известно, что $D_n=e^{n+o(n)}$. Далее, если $T(z)$ – многочлен степени $\leqslant n$ с высотой H, то

$$|p^nT(q/p)|\leqslant n\cdot H\cdot(\max(|p|,|q|))^n.$$

Применим эту оценку к мночленам Q_j при $j = 0, \ldots, m$. Осталось оценить их высоты. К интегралу $I(z)$ (без нормализационного множителя) применим теорему 3.8. Высоты Q_j не превосходят $(r^r M)^{n+o(n)}$, где M – максимум функции

$$\frac{1}{(\varphi(-x,1))^m} \cdot \frac{\varphi(x,r)}{r^r}.$$

на отрезке $[0,1]$. На [0,1] $\varphi(-x,1) \geqslant 1/2$, а функция $\varphi(x,r)$ монотонно возрастает при $x \geqslant 0$, поэтому $\varphi(x,r) \leqslant \varphi(1,r) = (r+1)^{r+1}$. Следовательно, высоты многочленов не превосходят

$$(r^r \cdot 2^m \cdot (r+1)^{r+1}/r^r)^{n+o(n)} = ((r+1)^{r+1} 2^m)^{n+o(n)},$$

что и требовалось доказать.

Из определения формы $\mathcal{L}$ сразу следует

$$\ln|\mathcal{L}| = (m + (r+1)\ln p - r\ln q + \ln\tau(p/q))n + o(n).$$

Применим к линейной форме $\mathcal{L}$ критерий Нестеренко 3.11. Размерность $\mathbb{D}_m$ линейного пространства, порожденного 1 и значениями $\mathrm{Li}_j(\alpha)$, $j = 1, \ldots, m$, не меньше, чем

$$1 - \frac{m + (r+1)\ln p - r\ln q + \ln\tau(p/q)}{m + \ln\max(|p|,|q|) + (r+1)\ln(r+1) + m\ln 2}.$$

$$\geqslant 1 + \frac{(m-r)\ln r - m - (r+1)\ln p + r\ln q}{m + \ln\max(|p|,|q|) + (r+1)\ln(r+1) + m\ln 2}.$$

Выбирая $r = [m/\ln^2 m]$, получим оценку

$$\mathbb{D}_m \geqslant \frac{1}{1+\ln 2} \cdot \ln m \cdot (1 + o(1)), \quad m \to \infty,$$

что и доказывает теорему.

3.8 Линейная независимость значений обобщенных полилогарифмов

В.Н. Сорокин в работе [22] доказал результат о линейной независимости над $\mathbb{Q}$ значений обобщенных полилогарифмов в рациональных точках

$\alpha = p/q$, находящихся около нуля. А именно, обобщенные полилогарифмы $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$ веса $\leqslant r$ линейно независимы в точке p/q, где $|p/q| < (2pe^r)^{-N_r}$, $N_r = 2^r - 1$.

Мы же оценим размерность линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного значениями обобщенных полилогарифмов $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z)$ в произвольной рациональной точке $\alpha \neq 0$, $\alpha < 1$, где вектора $\vec{s}$ имеют длину $\leqslant l$ и каждая координата, за исключением первой, лежит на отрезке $[2, K]$, $K \geqslant 2$. Если из этого множества выкинуть $\mathrm{Li}_1(z)$, то в оставшееся множество не входят полилогарифмы $\mathrm{Li}_{\{1\}_k}(z) = \frac{(-1)^k \ln^k(1-z)}{k!}$, которые, как известно, линейно независимы между собой в любой рациональной точке $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$.

Теорема 3.13 *Для любого рационального α, $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует l_0, что при $l \geqslant l_0$ размерность линейного пространства, порожденного значениями $\mathrm{Li}_{\vec{s}}(\alpha)$ с векторами $\vec{s}$ длины $\leqslant l$, $s_j \leqslant K$ и $s_j > 1$ при $j > 1$ (в том числе и $\vec{s} = \emptyset$), не меньше*

$$\frac{K(1-\varepsilon)}{K(1+\ln 2) + \ln 1{,}3} \ln l.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \int_{[0,1]^{Kl}} \frac{\prod_{i=1}^{Kl} x_i^{a_i - 1}(1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(1 - zx_1x_2\dots x_{Kj})^{n+1}} dx_1 dx_2 \dots dx_{Kl}, \tag{3.36}$$

где $a_i = (l+1-j)(n+1)$, $j = [(i-1)/K] + 1$.

По теореме 3.5

$$I(z) = \sum_{\vec{s}} P_{\vec{s}}(z^{-1}) \,\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z), \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\vec{s}}(z) \geqslant l(n+1), \quad \deg P_{\vec{s}} \leqslant l(n+1) + n,$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$ с длиной $\leqslant l$, $s_j \leqslant K$ и $s_j > 1$ при $j > 1$. По следствию 3.10 многочлены $D_n^{Kl} P_{\vec{s}}(z^{-1})$ будут иметь целые коэффициенты. В дальнейшем мы будем рассматривать линейную форму

$$z^{l(n+1)} I(z) = \sum_{\vec{s}} Q_{\vec{s}}(z^{-1}) \,\mathrm{Li}_{\vec{s}}(z),$$

где многочлены $Q_{\vec{s}}$ имеют степень $\leqslant n$.

Высоты многочленов по теореме 3.8 не превосходят $M^{n+o(n)}$, где M — максимум функции

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) = \frac{\varphi(\alpha_1 - \alpha_2)\varphi(\alpha_2 - \alpha_3)\cdots\varphi(\alpha_{l-1} - \alpha_l)}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j^{\alpha_j}(1-\alpha_j)^{1-\alpha_j})^K} \cdot \frac{(\alpha_l + 1)^{\alpha_l + 1}}{\alpha_l^{\alpha_l}}$$

на кубе $[0,1]^l$. Из леммы 3.15 следует неравенство $M \leqslant 4 \cdot (1{,}3 \cdot 2^K)^l$.

Применяя метод Лапласа, получаем, что при фиксированном $z < 1$ выполняется асимптотическое равенство $I(z) = \tau(z)^{n+o(n)}$, где

$$\tau(z) = \max_{\vec{x} \in [0,1]^l} \frac{\prod_{j=1}^{l}(x_j^{l+1-j}(1-x_j))^K}{\prod_{j=1}^{l}(1 - z(x_1 x_2 \ldots x_j)^K)}.$$

При $z < 1$

$$\frac{1}{1 - z(x_1 x_2 \ldots x_j)^K} \leqslant \max\left(1, \frac{1}{1-z}\right).$$

Максимум функции $x^t(1-x)$ достигается в точке $x = t/(t+1)$ и равен $t^t/(t+1)^{t+1}$. Используя это при $t = 1, \ldots, l$, и перемножая все эти значения, получаем:

$$\tau(z) \leqslant \max\left(1, \frac{1}{(1-z)^l}\right) \frac{1}{(l+1)^{(l+1)K}}.$$

Рассмотрим теперь линейную форму в точке $z = \alpha$, где $\alpha = p/q$, $\alpha < 1$

$$\mathcal{L} = D_n^{Kl} p^n (p/q)^{l(n+1)} I(p/q) = \sum_{\vec{s}} \varkappa_{\vec{s}} \operatorname{Li}_{\vec{s}}(\alpha).$$

Причем, $\varkappa_{\vec{s}} = D_n^{Kl} p^n Q_{\vec{s}}(q/p) \in \mathbb{Z}$ и

$$\ln \varkappa_{\vec{s}} \leqslant (Kl + \ln\max(|p|, |q|) + \ln 4 + l \cdot (\ln 1{,}3 + K \ln 2))n + o(n),$$

$$\ln |\mathcal{L}| = (Kl + (l+1)\ln p - l \ln q + \ln \tau(p/q))n + o(n).$$

По критерию Нестеренко 3.11, размерность линейного пространства, порожденного значениями $\operatorname{Li}_{\vec{s}}(\alpha)$ не меньше, чем

$$\begin{aligned} 1 &- \frac{Kl + (l+1)\ln p - l\ln q + \ln\tau(p/q)}{Kl + \ln\max(|p|,|q|) + \ln 4 + l \cdot (\ln 1{,}3 + K\ln 2)} \\ \geqslant &1 + \frac{K(l+1)\ln(l+1) + l\min(0, \ln(1-p/q)) - Kl - (l+1)\ln p + l\ln q}{Kl + \ln\max(|p|,|q|) + \ln 4 + l \cdot (\ln 1{,}3 + K\ln 2)} \end{aligned}$$

$$=\frac{K}{K(1+\ln 2)+\ln 1{,}3}\cdot\ln l\cdot(1+o(1)),\quad l\to\infty.$$

Теорема доказана.

Можно было бы пытаться рассматривать интеграл (3.36) в точке $z=1$ (в этой точке обобщенные полилогарифмы превращаются в кратные дзета-функции), однако возникающие при этом значения $\zeta(\{2\}_k)=\pi^{2k}/(2k+1)!$ не позволяют доказать что-либо нетривиальное. К счастью, между кратными дзета-значениями существует множество различных алгебраических соотношений, которые позволяют доказывать некоторые арифметические результаты (см. раздел 2.5).

Рассматривая интеграл (с нормализационным множителем)

$$J(z)=\frac{(rn)!^K}{n!^{Kr}}\int_{[0,1]^{Kl}}\frac{\prod_{i=1}^{Kl}x_i^{rn}(1-x_i)^n}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\dots x_{Kj})^{n+1}}dx_1dx_2\dots dx_{Kl},\quad r<l,$$

можно получить аналогичную теорему и для $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(\alpha)$.

Теорема 3.14 *Для любого рационального α, $\alpha<1$, $\alpha\neq 0$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует l_0, что при $l\geqslant l_0$ размерность линейного пространства, порожденного значениями $\mathrm{Le}_{\vec{s}}(\alpha)$ с векторами $\vec{s}$ длины $\leqslant l$, $s_j\leqslant K$ и $s_j>1$ при $j>1$ (в том числе и $\vec{s}=\emptyset$), не меньше*

$$\frac{K(1-\varepsilon)}{K(1+\ln 2)+\ln 1{,}3}\ln l.$$

Не будем проводить доказательство полностью, а обозначим основные моменты.

По теореме 3.3

$$J(z)=\sum_{\vec{s}}P_{\vec{s}}(z^{-1})\,\mathrm{Le}_{\vec{s}}(z),\quad \operatorname*{ord}_{z=0}P_{\vec{s}}(z)\geqslant rn+1,\quad \deg P_{\vec{s}}\leqslant(r+1)n+1,$$

где суммирование ведется по векторам $\vec{s}$ с длиной $\leqslant l$, $s_j\leqslant K$ и $s_j>1$ при $j>1$. Аналогично лемме 3.21 показывается, что многочлены $D_n^{Kl}P_{\vec{s}}(z^{-1})$ имеют целые коэффициенты. Выполняется асимптотическое равенство $J(z)=\tau(z)^{n+o(n)}$, где

$$\tau(z)=r^{Kr}\max_{\vec{x}\in[0,1]^l}\frac{\prod_{j=1}^{l}(x_j^r(1-x_j))^K}{\prod_{j=1}^{l}(1-z(x_1x_2\dots x_j)^K)}\leqslant\max\left(1,\frac{1}{(1-z)^l}\right)\frac{1}{r^{K(l-r)}}.$$

К линейной форме

$$\mathcal{L} = D_n^{Kl} p^n (p/q)^{rn+1} J(p/q).$$

нужно применить критерий Нестеренко 3.11 и выбрать $r = [l/\ln^2 l]$.

Глава 4

Другие кратные интегралы

Представляется интересным также рассматривать кратные интегралы, которые имеют вид, отличный от интеграла

$$S(z) = \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-zx_1x_2\dots x_{r_j})^{c_j}} dx_1dx_2\dots dx_m,$$

но похожих на него, а именно

$$\int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^l (1-z\prod_{i\in S_j} x_i)^{c_j}} dx_1dx_2\dots dx_m, \tag{4.1}$$

где S_j – некоторое множество натуральных чисел из отрезка $[1, m]$. Если выбрать $S_j = \{1 \leqslant i \leqslant r_j\}$, то мы получим интеграл $S(z)$. Таким образом, интеграл (4.1) является обобщением интеграла $S(z)$. Его изучение становится еще более сложным, чем $S(z)$.

В данной главе мы рассмотрим несколько примеров таких интегралов. Эти интегралы интересны тем, что они представляются в виде линейной формы от обобщенных полилогарифмов и, благодаря некой симметрии, число этих полилогарифмов невелико. Это могло бы помочь в получении новых арифметических результатов.

4.1 Интегралы Рина

Дж. Рин ([38]) рассмотрел интеграл

$$I_l = \int_0^1 f(z)^{l-1} z^{-(l-1)(2n+1)} z^t (1-z)^n \, dz, \tag{4.2}$$

где

$$f(z) = z^{2n+1} \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n}{(1-zx)^{n+1}} \, dx = Q_n(z) \ln(1-z) - P_n(z),$$

P_n, Q_n – многочлены степени n, а $t = n$ при $l = 2$ и $t = (2n+1)(l-2)$ при $l > 2$. Этот интеграл можно представить в виде линейной формы от 1 и $\zeta(l)$ с рациональными коэффициентами:

$$I_l = u_n \zeta(l) - v_n, \quad u_n, v_n \in \mathbb{Q}.$$

В этом разделе мы докажем этот факт в несколько более общей формулировке.

Прежде всего, приведем одномерный интеграл к кратному:

$$\begin{aligned} I_l &= \int_0^1 (f(z) z^{-(2n+1)})^{l-1} z^t (1-z)^n \, dz \\ &= \int_0^1 \prod_{j=1}^{l-1} \int_0^1 \frac{x_j^n (1-x_j)^n}{(1-zx_j)^{n+1}} \, dx_j \cdot z^t (1-z)^n \, dz \\ &= \int_{[0,1]^l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j^n (1-x_j)^n}{(1-x_j x_l)^{n+1}} x_l^t (1-x_l)^n dx_1 \cdots dx_l. \end{aligned}$$

Наше обобщение состоит в следующем.

Теорема 4.1 *Пусть параметры a_j, b_j, c_j – целые, причем $b_j > a_j \geqslant 1$ при $j = 1, \ldots, l$ и $c_j \geqslant 1$ при $j = 1, \ldots, l-1$, а также выполнены неравенства $c_j \leqslant b_j - a_j$, $j = 1, \ldots, l-1$ и*

$$a_l \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_{l-1} - \min_{j=1,\ldots,l-1} b_j - l + 3.$$

Тогда

$$\int_{[0,1]^l}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{x_j^{a_j-1}(1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-zx_jx_l)^{c_j}}x_l^{a_l-1}(1-x_l)^{b_l-a_l-1}dx_1\cdots dx_l$$
$$=Q(z^{-1})\,\mathrm{Li}_{2,\{1\}_{l-2}}(z)+\sum_{j=0}^{l-1}P_j(z^{-1})\,\mathrm{Li}_{\{1\}_j}(z),$$

где Q, P_j – многочлены с рациональными коэффициентами, причем $P_j(1)=0$ при $j>0$.

Доказательство. Обозначим интеграл в формулировке теорему через $I_l(z)$ и разложим его в кратную сумму (в суммах $i=1,\dots,l-1$):

$$\begin{aligned}
I_l(z)&=\sum_{k_i\geqslant 0}z^{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\Gamma(k_j+c_j)}{\Gamma(c_j)k_j!}\int_{[0,1]^l}\prod_{j=1}^{l-1}x_j^{k_j+a_j-1}(1-x_j)^{b_j-a_j-1}\\
&\qquad\times x_l^{k_1+\cdots+k_{l-1}+a_l-1}(1-x_l)^{b_l-a_l-1}dx_1\cdots dx_l\\
&=\sum_{k_i\geqslant 0}z^{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\Gamma(b_j-a_j)}{\Gamma(c_j)}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(b_l-a_l)}{(k_1+\cdots+k_{l-1}+a_l)\cdots(k_1+\cdots+k_{l-1}+b_l-1)}\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{l-1}\frac{(k_j+1)\cdots(k_j+c_j-1)}{(k_j+a_j)\cdots(k_j+b_j-1)}\\
&=\prod_{j=1}^{l-1}\frac{\Gamma(b_j-a_j)}{\Gamma(c_j)}\sum_{k_i\geqslant 1}z^{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}-l+1}\\
&\qquad\times\frac{\Gamma(b_l-a_l)}{(k_1+\cdots+k_{l-1}+a_l-l+1)\cdots(k_1+\cdots+k_{l-1}+b_l-l)}\\
&\qquad\times\prod_{j=1}^{l-1}\frac{k_j\cdots(k_j+c_j-2)}{(k_j+a_j-1)\cdots(k_j+b_j-2)}.
\end{aligned}$$

Разложим каждую дробь

$$\frac{k_j\cdots(k_j+c_j-2)}{(k_j+a_j-1)\cdots(k_j+b_j-2)}$$

в сумму простых дробей. Это возможно сделать, так как по условию степень числителя меньше степени знаменателя. То же проделаем и с дробью

$$\frac{\Gamma(b_l - a_l)}{(k_1 + \cdots + k_{l-1} + a_l - l + 1) \cdots (k_1 + \cdots + k_{l-1} + b_l - l)}.$$

Утверждение теоремы теперь будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 4.1 *Пусть α_j, β – целые неотрицательные числа, причем*

$$\beta \geqslant \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1} - \min_{j=1,\ldots,l-1} \alpha_j.$$

Тогда кратная сумма

$$\sum_{k_j \geqslant 1} \frac{z^{k_1+\cdots+k_{l-1}}}{k_1 + \cdots + k_{l-1} + \beta} \cdot \frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \cdots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})}, \quad j = 1, \ldots, l-1,$$

представляется в виде

$$\sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_j}(z),$$

если $\beta \neq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}$ и

$$\frac{(l-1)!}{z^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1}}} \operatorname{Li}_{2,\{1\}_{l-2}}(z) + \sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_j}(z),$$

если $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}$. В обоих случаях будет выполняться $P_j(1) = 0$ при $j > 0$.

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 4.2 *При целых неотрицательных числах α_j и натуральных k_j выполняется тождество*

$$\frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \cdots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})} = \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(k_1 + \cdots + k_{l-1} + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1})}$$
$$\times \frac{1}{(k_{\sigma(1)} + \cdots + k_{\sigma(l-2)} + \alpha_{\sigma(1)} + \cdots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (k_{\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(1)})},$$

где суммирование производится по всем подстановкам на множестве $l-1$ элементов.

Доказательство. Докажем индукцией по m следующее тождество для положительных переменных y_j:

$$\frac{1}{y_1 y_2 \cdots y_m} = \sum_{\sigma \in S_m} \frac{1}{(y_1 + y_2 + \cdots + y_m)(y_{\sigma(1)} + \cdots + y_{\sigma(m-1)}) \cdots y_{\sigma(1)}}. \quad (4.3)$$

База индукции, $m = 1$ выполняется: $1/y_1 = 1/y_1$. Пусть теперь равенство (4.3) выполняется для $m-1$, докажем его для m.

Выражение в правой части (4.3) представим в виде

$$\frac{1}{(y_1 + y_2 + \cdots + y_m)} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ \sigma(m)=j}} \frac{1}{(y_{\sigma(1)} + \cdots + y_{\sigma(m-1)}) \cdots y_{\sigma(1)}}.$$

Если σ пробегает все подстановки из S_m такие, что $\sigma(m) = j$, то $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m-1))$ пробегает все перестановки множества $\{1, 2, \ldots, m\} \backslash j$. Следовательно, по предположению индукции

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ \sigma(m)=j}} \frac{1}{(y_{\sigma(1)} + \cdots + y_{\sigma(m-1)}) \cdots y_{\sigma(1)}} = \frac{1}{y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(m-1)}}$$

$$= \frac{y_{\sigma(m)}}{y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(m)}} = \frac{y_j}{y_1 y_2 \cdots y_m}.$$

Откуда правая часть (4.3) равна

$$\frac{1}{y_1 + y_2 + \cdots + y_m} \sum_{j=1}^{m} \frac{y_j}{y_1 y_2 \cdots y_m} = \frac{1}{y_1 y_2 \cdots y_m},$$

что и требовалось доказать.

Лемма следует из (4.3) при $m = l - 1$ и $y_j = k_j + \alpha_j$.

Применяя лемму для $\alpha_j = 0$, получим

Следствие 4.1 *При любом натуральном $l \geqslant 2$ выполняется тождество*

$$\sum_{k_j \geqslant 1} \frac{z^{k_1 + \cdots + k_{l-1}}}{(k_1 + \cdots + k_{l-1}) k_1 \cdots k_{l-1}}$$

$$= (l-1)! \sum_{k_j \geqslant 1} \frac{z^{k_1 + \cdots + k_{l-1}}}{(k_1 + \cdots + k_{l-1})^2 (k_1 + \cdots + k_{l-2}) \cdots k_1} = (l-1)! \operatorname{Li}_{2,\{1\}_{l-2}}(z).$$

Доказательство леммы 4.1.

Обозначим исходную сумму через $S(z)$. Рассмотрим сначала случай $\beta \neq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}$. С помощью леммы 4.2 представим $S(z)$ как

$$\sum_{k_j \geqslant 1} \frac{z^{k_1+\cdots+k_{l-1}}}{k_1 + \cdots + k_{l-1} + \beta} \cdot \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(k_1 + \cdots + k_{l-1} + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1})} \\ \times \frac{1}{(k_{\sigma(1)} + \cdots + k_{\sigma(l-2)} + \alpha_{\sigma(1)} + \cdots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (k_{\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(1)})},$$

Рассмотрим фиксированную подстановку $\sigma \in S_{l-1}$ и сделаем замену переменных: $n_1 = k_1 + \cdots + k_{l-1}$, $n_2 = k_{\sigma(1)} + \cdots + k_{\sigma(l-2)}$, $\ldots$, $n_{l-1} = k_{\sigma(1)}$. Достаточно доказать утверждение леммы для выражения

$$E(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_{l-1} \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{(n_1 + \beta)(n_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1})} \\ \times \frac{1}{(n_2 + \alpha_{\sigma(1)} + \cdots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (n_{l-1} + \alpha_{\sigma(1)})}.$$

Используя равенство

$$\frac{1}{(n_1 + \beta)(n_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1})} = \frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1} - \beta} \\ \times \left(\frac{1}{n_1 + \beta} - \frac{1}{n_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}} \right) \quad (4.4)$$

и ограничение на β по условию леммы, представим $E(z)$ как разность двух кратных сумм вида

$$\sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_{l-1} \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{(n_1 + \gamma_1)(n_2 + \gamma_2) \cdots (n_{l-1} + \gamma_{l-1})},$$

причем $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{l-1}$. По следствию 3.7 эти суммы представляются в виде

$$\sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_j}(z).$$

Так как индекс рациональной (по n_1) функции (4.4) равен -2, а по остальным переменным n_j индексы равны -1, то по теореме 3.1 будет выполняться $P_j(1) = 0$ при $j > 0$.

Осталось рассмотреть случай $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}$. Проведем индукцию по величине $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}$. База индукции ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_{l-1} = 0$) обеспечивается следствием 4.1:

$$S(z) = (l-1)!\,\mathrm{Li}_{2,\{1\}_{l-2}}(z).$$

Пусть теперь при некотором j_0 число $\alpha_{j_0} \neq 0$. Проведем преобразования над кратными суммами:

$$\begin{aligned}
S(z) &= \sum_{k_{j_0}\geqslant 1} \sum_{\substack{k_j\geqslant 1\\ j\neq j_0}} \frac{z^{k_1+\cdots+k_{l-1}}}{k_1+\cdots+k_{l-1}+\beta}\cdot\frac{1}{(k_1+\alpha_1)\cdots(k_{l-1}+\alpha_{l-1})}\\
&= \sum_{k_{j_0}\geqslant 0} \sum_{\substack{k_j\geqslant 1\\ j\neq j_0}} \frac{z^{k_1+\cdots+k_{l-1}}}{k_1+\cdots+k_{l-1}+\beta}\cdot\frac{1}{(k_1+\alpha_1)\cdots(k_{l-1}+\alpha_{l-1})}\\
&\quad - \sum_{k_{j_0}=0} \sum_{\substack{k_j\geqslant 1\\ j\neq j_0}} \frac{z^{k_1+\cdots+k_{l-1}}}{k_1+\cdots+k_{l-1}+\beta}\cdot\frac{1}{(k_1+\alpha_1)\cdots(k_{l-1}+\alpha_{l-1})}\\
&= \sum_{k_j\geqslant 1} \frac{z^{k_1+\cdots+k_{l-1}}}{k_1+\cdots+k_{l-1}+(\beta-1)}\\
&\qquad\times\frac{1}{(k_1+\alpha_1)\cdots(k_{j_0}+(\alpha_{j_0}-1))\cdots(k_{l-1}+\alpha_{l-1})}\\
&\quad - \sum_{\substack{k_j\geqslant 1\\ j\neq j_0}} \frac{z^{k_1+\cdots+k_{j_0-1}+k_{j_0+1}+k_{l-1}}}{k_1+\cdots+k_{j_0-1}+k_{j_0+1}+k_{l-1}+\beta}\\
&\qquad\times\frac{1}{(k_1+\alpha_1)\cdots(k_{j_0-1}+\alpha_{j_0-1})(k_{j_0+1}+\alpha_{j_0+1})\cdots(k_{l-1}+\alpha_{l-1})}
\end{aligned}$$

Проделанное преобразование соответствует подстановке в интеграле Рина

$$x_{j_0}x_l = \frac{1-(1-zx_{j_0}x_l)}{z}.$$

В уменьшаемом число β и величина $\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1}$ уменьшились на единицу по сравнению с $S(z)$, и к нему можно применить предположение индукции. К вычитаемому можно применить уже доказанную часть леммы, так как

$$\beta > \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j_0-1} + \alpha_{j_0+1} + \cdots + \alpha_{l-1}.$$

Лемма теперь полностью доказана.

Теорема 4.1 действительно обобщает результат Рина:

Следствие 4.2 *Пусть параметры a_j, b_j, c_j удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Тогда*

$$\int_{[0,1]^l}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{x_j^{a_j-1}(1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-x_jx_l)^{c_j}}x_l^{a_l-1}(1-x_l)^{b_l-a_l-1}dx_1\cdots dx_l=u\zeta(l)-v,$$

где $u, v\in\mathbb{Q}$.

Доказательство. В тождестве теоремы 4.1 устремим $z\to 1-$ и воспользуемся равенством $\mathrm{Li}_{2,\{1\}_{l-2}}(1)=\zeta(2,\{1\}_{l-2})=\zeta(l)$.

Рассмотрим теперь наиболее симметричный случай, то есть интеграл

$$I_l(z)=\int_{[0,1]^l}\prod_{j=1}^{l-1}\frac{x_j^n(1-x_j)^n}{(1-zx_jx_l)^{n+1}}x_l^t(1-x_l)^ndx_1\cdots dx_l,\quad t=(2n+1)(l-2),$$

При $z=1$ он дает тот самый интеграл, который рассматривал Рин. Прежде всего, выясним асимптотическое поведение $I_l(1)$ при $n\to\infty$. Перепишем интеграл $I_l(1)$ в виде

$$I_l(1)=\int_{[0,1]^l}\left(\prod_{j=1}^{l-1}\frac{x_j(1-x_j)}{1-x_jx_l}\cdot x_l^{2(l-2)}(1-x_l)\right)^n\frac{x_l^{l-2}}{\prod_{j=1}^{l-1}(1-x_jx_l)}dx_1\cdots dx_l.$$

Откуда следует, что $I_l(1)=\tau^{n+o(n)}$, где

$$\tau=\max_{\vec{x}\in[0,1]^l}F(\vec{x}),\quad F(\vec{x})=\prod_{j=1}^{l-1}\frac{x_j(1-x_j)}{1-x_jx_l}\cdot x_l^{2(l-2)}(1-x_l).$$

Функция F, доопределенная на границе куба $[0,1]^l$ нулем, является непрерывной на кубе. Также выполняется неравенство

$$I_l(1)\leqslant\tau^n\int_{[0,1]^l}\frac{x_l^{l-2}}{\prod_{j=1}^{l-1}(1-x_jx_l)}dx_1\cdots dx_l=(l-1)!\zeta(l)\tau^n. \tag{4.5}$$

Найдем максимум τ. Он достигается в некоторой точке строго внутри куба $[0,1]^l$, причем в этой точке логарифмическая производная функции F по любой переменной x_j обращается в ноль. При $j = 1, \dots, l-1$

$$\frac{F'_{x_j}}{F} = \frac{1}{x_j} - \frac{1}{1-x_j} + \frac{x_l}{1-x_j x_l} = 0.$$

Это уравнение можно привести к

$$x_l x_j^2 - 2x_j + 1 = 0,$$

откуда $1/x_j = 1 \pm \sqrt{1-x_l}$. Так как $1/x_j > 1$, то подходит только корень со знаком '+'. Значит в точке максимума $x_1 = x_2 = \dots = x_{l-1} = x_0$ и $x_l = (2x_0 - 1)/x_0^2$.

Приравняем логарифмическую производную по переменной x_l нулю:

$$\frac{F'_{x_l}}{F} = \frac{2(l-2)}{x_l} - \frac{1}{1-x_l} + \frac{(l-1)x_0}{1-x_0 x_l} = 0.$$

Подставляя сюда $x_l = (2x_0 - 1)/x_0^2$, получаем уравнение на x_0:

$$(x_0 - 1)(2x_0^2 + (l-3)x_0 + (2-l)) = 0.$$

Требуется найти корень внутри интервала $(0, 1)$, поэтому значение $x_0 = 1$ не подходит. По тем же причинам отбрасываем отрицательный корень квадратного уравнения, положительный же корень равен

$$x_0 = \frac{3 - l + \sqrt{l^2 + 2l - 7}}{4}.$$

А значение τ выражается через этот x_0 следующим образом:

$$\tau = \frac{(1-x_0)^2 (2x_0 - 1)^{2(l-2)}}{x_0^{2(l-2)}}.$$

Перейдем к арифметике коэффициентов линейных форм. Нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 4.3 *При целых $n \geqslant 1$, $\alpha \in [0, n]$, $\beta \in [1, n+\alpha]$ верно*

$$D_n \binom{n+\alpha}{n} \frac{1}{\beta} \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Если $\beta \leqslant n$, то утверждение леммы очевидно, так как β делит D_n. Пусть теперь $\beta > n$. Пусть $\beta = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$, p_i – разичные простые. Если $s \geqslant 2$, то $p_i^{s_i} \leqslant n$, так как $\beta \leqslant 2n$. Но тогда опять β делит D_n. Осталось рассмотреть случай, когда $\beta = p^s$, p – простое. В этом случае p^{s-1} делит D_n и достаточно показать, что p делит $\binom{n+\alpha}{n}$. Представим бином в виде

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+\alpha)}{\alpha!}.$$

Среди чисел $1, 2, \ldots, \alpha$ ровно $[\alpha/p]$ делятся на p, ровно $[\alpha/p^2]$ делятся на p^2, и так далее до p^{s-1}, а на p^s не делится ни одно из них. Среди чисел $n+1, n+2, \ldots, n+\alpha$ не менее $[\alpha/p]$ делятся на p, не менее $[\alpha/p^2]$ делятся на p^2, и так далее до p^{s-1}, а на p^s делится ровно одно (число β). Таким образом, число p входит в числитель в степени, как минимум на 1 превышающей степень, в которой p входит в знаменатель, что и доказывает лемму.

Лемма 4.4 *При $l \geqslant 3$ знаменатели коэффициентов многочленов Q и P_j в представлении интеграла $I_l(z)$ в виде линейной формы от полилогарифмов делят $D^l_{(l-2)n}$.*

Доказательство. Представим $I_l(z)$ в виде кратной суммы (см. доказательство теоремы 4.1):

$$I_l(z) = \sum_{k_i \geqslant 1} z^{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}-l+1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{k_j \cdots (k_j+n-1)}{(k_j+n)\cdots(k_j+2n)}$$
$$\times \frac{n!}{(k_1+\cdots+k_{l-1}+(2l-4)n)\cdots(k_1+\cdots+k_{l-1}+(2l-3)n)}.$$

Сделаем сдвиг по переменным суммирования и добавим дополнительные нулевые слагаемые:

$$I_l(z) = \sum_{k_i \geqslant 1} z^{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}-ln+1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{(k_j-n)\cdots(k_j-1)}{k_j\cdots(k_j+n)}$$
$$\times \frac{n!}{(k_1+\cdots+k_{l-1}+(l-3)n)\cdots(k_1+\cdots+k_{l-1}+(l-2)n)}.$$

Раскладывая каждую дробь в сумму простейших, получим:

$$I_l(z) = \sum_{k_i \geqslant 1} z^{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}-ln+1} \sum_{\alpha_1=0}^{n} \cdots \sum_{\alpha_l=0}^{n} \prod_{j=1}^{l-1} \binom{n+\alpha_j}{n} \binom{n}{\alpha_j} \frac{(-1)^{n-\alpha_j}}{k_j+\alpha_j}$$
$$\times \binom{n}{\alpha_l} \frac{(-1)^{\alpha_l}}{k_1+\cdots+k_{l-1}+(l-3)n+\alpha_l}. \tag{4.6}$$

Достаточно изучить знаменатели коэффициентов для сумм вида

$$\sum_{k_i \geqslant 1} z^{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}} \prod_{j=1}^{l-1} \binom{n+\alpha_j}{n} \frac{1}{k_j+\alpha_j} \cdot \frac{1}{k_1+\cdots+k_{l-1}+(l-3)n+\alpha_l}.$$

для фиксированных $\alpha_j \in [0, n]$. По лемме 4.2

$$E = \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k_j+\alpha_j} \cdot \frac{1}{k_1+\cdots+k_{l-1}+(l-3)n+\alpha_l}$$
$$= \frac{1}{k_1+\cdots+k_{l-1}+(l-3)n+\alpha_l}$$
$$\times \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(k_1+\cdots+k_{l-1}+\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1})}$$
$$\times \frac{1}{(k_{\sigma(1)}+\cdots+k_{\sigma(l-2)}+\alpha_{\sigma(1)}+\cdots+\alpha_{\sigma(l-2)})\cdots(k_{\sigma(1)}+\alpha_{\sigma(1)})}.$$

Рассмотрим вначале случай $\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1} \leqslant (l-2)n$. В этом случае для каждой подстановки σ сделаем замену переменных: $n_1 = k_1+\cdots+k_{l-1}$, $n_2 = k_{\sigma(1)}+\cdots+k_{\sigma(l-2)}$, $\ldots$, $n_{l-1} = k_{\sigma(1)}$. В разложении суммы

$$\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_{l-1}\geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1+(l-3)n+\alpha_l}$$
$$\times \frac{1}{(n_1+\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1})(n_2+\alpha_{\sigma(1)}+\cdots+\alpha_{\sigma(l-2)})\cdots(n_{l-1}+\alpha_{\sigma(1)})}$$

в линейную форму от полилогарифмов знаменатели коэффициентов многочленов по лемме 3.2 делят $D^l_{(l-2)n}$ (так как и $(l-3)n+\alpha_l \leqslant (l-2)n$).

Теперь рассмотрим случай $\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1} > (l-2)n \geqslant (l-3)n+\alpha_l$. Тогда

$$E = \frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1}-(l-3)n-\alpha_l}$$

$$\times \left(\frac{1}{n_1 + (l-3)n + \alpha_l} - \frac{1}{n_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}} \right)$$
$$\times \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(n_2(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)} + \cdots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (n_{l-1}(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)})}$$
$$= \frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l} \left(\sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{n_1 + (l-3)n + \alpha_l} \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{(n_2(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)} + \cdots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (n_{l-1}(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)})} - \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k_j + \alpha_j} \right).$$

Через $n_j(\sigma)$ обозначена сумма $k_{\sigma(1)} + \cdots + k_{\sigma(l-j)}$, $n_1 = k_1 + \cdots + k_{l-1}$. Опять по лемме 3.2 для суммы

$$\sum_{n_1 > n_2(\sigma) > \cdots > n_{l-1}(\sigma) \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{(n_1 + (l-3)n + \alpha_l)}$$
$$\times \frac{1}{(n_2(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)} + \cdots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (n_{l-1}(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)})}$$

искомый знаменатель делит $D_{(l-2)n}^{l-1}$. Далее,

$$\sum_{k_i \geqslant 1} z^{k_1 + k_2 + \cdots + k_{l-1}} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k_j + \alpha_j} = \prod_{j=1}^{l-1} \sum_{k_i \geqslant 1} \frac{z^{k_j}}{k_j + \alpha_j}$$
$$= \prod_{j=1}^{l-1} z^{-\alpha_j} \left(\mathrm{Li}_1(z) - \sum_{k_j=1}^{\alpha_j} \frac{1}{k_j} \right).$$

Так как

$$(\mathrm{Li}_1(z))^s = s!\,\mathrm{Li}_{\{1\}_s}(z), \quad D_n \cdot \sum_{k_j=1}^{\alpha_j} \frac{1}{k_j} \in \mathbb{Z},$$

то раскрывая произведение по j, получим линейную форму от $\mathrm{Li}_{\{1\}_s}(z)$, $s = 0, \ldots, l-1$, а коэффициенты стоящих при них многочленов (от аргумента z^{-1}) делят D_n^{l-1}. Осталось найти такое μ, что для любых $\alpha_j \in [0, n]$ будет выполнено

$$\frac{\mu}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l} \in \mathbb{Z}.$$

При $l > 3$ справедливо неравенство

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l \leqslant (l-1)n - (l-3)n = 2n \leqslant (l-2)n,$$

поэтому в качестве μ можно выбрать $D_{(l-2)n}$. При $l = 3$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \leqslant n + \alpha_1,$$

поэтому по лемме 4.3 можно выбрать

$$\mu = D_n \binom{n+\alpha_1}{n}.$$

Лемма теперь полностью доказана.

Рассмотрим подробнее случай $l = 3$. Значения x_0 и τ будут следующими:

$$x_0 = 1/\sqrt{2}, \quad \tau = (\sqrt{2}-1)^4.$$

Можно заметить, что главный асимптотический член $I_3(1)$ такой же, как и у приближений Апери (см. (1.1)). В действительности, они совпадают с точностью до постоянного множителя. Покажем это. По теореме 4.1

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n}{(1-x_1x_3)^{n+1}(1-x_2x_3)^{n+1}} x_3^{2n+1}(1-x_3)^n dx_1 dx_2 dx_3 = 2u_n'\zeta(3) - v_n',$$

где $u_n', v_n' \in \mathbb{Q}$. Из представления $I_l(z)$ в виде (4.6) и леммы 4.1 можно написать явный вид коэффициента при $\zeta(3)$:

$$u_n' = \sum_{\alpha,\beta\geqslant 0, \alpha+\beta\leqslant n} \binom{n}{\alpha+\beta}\binom{\alpha+n}{n}\binom{n}{\alpha}\binom{\beta+n}{n}\binom{n}{\beta}.$$

Пусть $(u_n\zeta(3) - v_n)$ – приближения Апери. Для u_n известна формула

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2.$$

Лемма 4.5 *Для любого целого неотрицательного n выполнено $u_n' = u_n$.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$u_n' = \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{\alpha+n}{n}\binom{n}{\alpha} \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} \binom{n}{\alpha+\beta}\binom{\beta+n}{n}\binom{n}{\beta}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{\alpha+n}{n} \binom{n}{\alpha}^2 {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, n+1, -n+\alpha \\ 1, \alpha+1 \end{matrix}; 1 \right].$$

К гипергеометрической функции ${}_3F_2$ применим преобразование Тома (см. [32, (3.1.1)] или [28, §3.9]):

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, a, b \\ d, e \end{matrix}; 1 \right] = \frac{(e-b)_n}{(e)_n} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, b, d-a \\ d, 1+b-e-n \end{matrix}; 1 \right].$$

Получим:

$$\begin{aligned} u_n' &= \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{\alpha+n}{n} \binom{n}{\alpha}^2 \frac{(n+1)_n}{(\alpha+1)_n} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, -n+\alpha, -n \\ 1, -2n \end{matrix}; 1 \right] \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha}^2 {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, -n+\alpha, -n \\ 1, -2n \end{matrix}; 1 \right] \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha}^2 \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} \frac{(-n)_\beta^2 (-n+\alpha)_\beta}{\beta!^2 (-2n)_\beta} \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{\beta=0}^{n} \frac{(-n)_\beta^2}{\beta!^2 (-2n)_\beta} \sum_{\alpha=0}^{n-\beta} \binom{n}{\alpha}^2 (-n+\alpha)_\beta. \end{aligned}$$

Далее,

$$\sum_{\alpha=0}^{n-\beta} \binom{n}{\alpha}^2 (-n+\alpha)_\beta = (-n)_\beta \cdot {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, -n+\beta \\ 1 \end{matrix}; 1 \right].$$

Гипергеометрическая функция ${}_2F_1$ может быть явно вычислена по теореме Гаусса (см. [28, (1.3.1)]):

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1 \right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a+b).$$

Следовательно,

$$u_n' = \binom{2n}{n} \sum_{\beta=0}^{n} \frac{(-n)_\beta^3}{\beta!^2 (-2n)_\beta} \cdot \frac{(2n-\beta)!}{n!(n-\beta)!} = \sum_{\beta=0}^{n} \binom{n}{\beta}^2 \binom{2n-\beta}{n}^2.$$

Делая замену $\beta = n-k$, получим

$$u_n' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 = u_n,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4.2 *Интеграл*

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n}{(1-x_1x_3)^{n+1}(1-x_2x_3)^{n+1}} x_3^{2n+1}(1-x_3)^n dx_1dx_2dx_3.$$

дает удвоенные приближения Апери.

Доказательство. Данный интеграл равен $2u_n'\zeta(3)-v_n'$, причем по лемме 4.5 $u_n'=u_n$ и $D_n^3v_n' \in \mathbb{Z}$ по лемме 4.4. Из оценки интеграла (4.5) следует, что

$$|2u_n\zeta(3)-v_n'| \leqslant 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Интеграл Бейкерса (1.3) дает удвоенные приближения Апери и из его оценки

$$|2u_n\zeta(3)-2v_n| \leqslant 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$D_n^3\cdot|v_n'-2v_n| \leqslant 4\zeta(3)D_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Левая часть является целым числом, а при $n \geqslant 7$ правая часть меньше единицы ($D_n \leqslant 3^n$ для любого натурального n), следовательно $v_n'=2v_n$. При $n<7$ числа v_n и v_n' можно вычислить явно и проверить то же равенство. Теорема доказана.

Рин доказал теорему 4.2 с помощью равенства интегралов $I_l(1)$ и (1.3), используя замену переменных интегрирования.

К сожалению, уже при $l=4$ интеграл Рина

$$\int_{[0,1]^4} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n x_3^n(1-x_3)^n}{(1-x_1x_4)^{n+1}(1-x_2x_4)^{n+1}(1-x_3x_4)^{n+1}} x_4^{4n+2}(1-x_4)^n dx_1dx_2dx_3dx_4.$$

недостаточно мал, чтобы доказать какой-либо арифметический результат. Действительно, в этом случае значения x_0 и τ следующие:

$$x_0=\frac{\sqrt{17}-1}{4}, \quad \tau=\frac{(5-\sqrt{17})^2(\sqrt{17}-3)^4}{(\sqrt{17}-1)^4}.$$

Знаменатели коэффициентов делят D_{2n}^4, чья асимптотика

$$\ln D_{2n}^4 = 8n+o(n), \quad n\to\infty,$$

а

$$\ln I_4(1) = \ln\tau \cdot n + o(n), \quad n \to \infty,$$

причем $\ln\tau \approx -4{,}35366$.

4.2 Кратные интегралы для линейных форм от $\zeta(4)$

В.В. Зудилин в работе [12] рассмотрел интегралы вида

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{Q_{2l+1}(x_1,\dots,x_{2l+1})^{a_0}} dx_1 \cdots dx_{2l+1},$$

где $Q_1 = 1$ и

$$Q_{2l+1}(x_1,\dots,x_{2l+1}) = (1-x_1)(1-x_{2l+1}) + Q_{2l-1}(x_1,\dots,x_{2l-1}) \cdot x_{2l}x_{2l+1}.$$

Он доказал, что при некоторых ограничениях на параметры, этот интеграл равен интегралу Барнса, который обобщает некоторые конструкции линейных форм от значений дзета-функции. Далее, в духе сведения интегралов типа $V(z)$ к интегралам типа $S(z)$, мы докажем аналог теоремы 2.1.

Определим многочлены $Q_{2l+1}(z, x_1, \dots, x_{2l+1})$:

$$Q_1 = 1, \quad Q_{2l+1}(z,x_1,\dots,x_{2l+1}) = Q_{2l-1}(z,x_1,\dots,x_{2l-1}) \\ - zx_1x_2\dots x_{2l-1}(1-x_{2l}) - zx_2x_3\dots x_{2l}(1-x_{2l+1}).$$

Нетрудно проверить, что при нашем определении $Q_{2l+1}(1, x_1, \dots, x_{2l+1})$ совпадает с $Q_{2l+1}(x_1, x_{2l+1}, x_{2l}, \dots, x_2)$ Зудилина.

Теорема 4.3 *Пусть натуральное число $l > 1$ и выполняются неравенства $\mathrm{Re}(A_0) > 0$, $\mathrm{Re}(B_i) > \mathrm{Re}(A_i) > 0$ при $i = 1, \dots, 2l+1$, $\mathrm{Re}(B_2) > \mathrm{Re}(A_0)$ и $\mathrm{Re}(B_i) > \mathrm{Re}(A_{i-1})$ при $i > 2$. Тогда при $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ верно равенство*

$$\int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}\, dx_1 \cdots dx_{2l+1}}{Q_{2l+1}(z,x_1,\dots,x_{2l+1})^{A_0}} = \frac{\Gamma(A_{2l+1})}{\Gamma(A_0)} \prod_{i=2}^{2l+1} \frac{\Gamma(B_i - A_i)}{\Gamma(B_i - a_i)}$$

$$\times \int_{[0,1]^{2l+1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1}dx_1\cdots dx_{2l+1}}{\prod_{j=1}^{l}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j})^{c_{2j-1}}(1-zx_2x_3\cdots x_{2j+1})^{c_{2j}}},$$

где $a_1 = A_1$, $a_2 = A_0$, $a_i = A_{i-1}$ *при* $i > 2$, $c_k = B_{k+1} - A_{k+1}$, $k = 1, \ldots, 2l$.

Доказательство. Обозначая интеграл в левой части равенства через I, будем иметь

$$\begin{aligned}
I = &\int_{[0,1]^{2l-1}} \frac{\prod_{i=1}^{2l-1} x_i^{A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{Q_{2l-1}(z,x_1,\ldots,x_{2l-1})^{A_0}} \\
&\times \int_{[0,1]^2} \frac{x_{2l}^{A_{2l}-1}(1-x_{2l})^{B_{2l}-A_{2l}-1}x_{2l+1}^{A_{2l+1}-1}(1-x_{2l+1})^{B_{2l+1}-A_{2l+1}-1}}{\left(1-\frac{zx_1x_2\ldots x_{2l-1}(1-x_{2l})}{Q_{2l-1}(z,x_1,\ldots,x_{2l-1})}-\frac{zx_2x_3\ldots x_{2l}(1-x_{2l+1})}{Q_{2l-1}(z,x_1,\ldots,x_{2l-1})}\right)^{A_0}}dx_1\cdots dx_{2l+1} \\
= &\sum_{k_1,k_2\geqslant 0} \frac{z^{k_1+k_2}\Gamma(k_1+k_2+A_0)}{\Gamma(A_0)k_1!k_2!} \\
&\times \int_{[0,1]^{2l-1}} \frac{x_1^{k_1+A_1-1}(1-x_i)^{B_1-A_1-1}\prod_{i=2}^{2l-1} x_i^{k_1+k_2+A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{Q_{2l-1}(z,x_1,\ldots,x_{2l-1})^{A_0+k_1+k_2}} \\
&\times \int_{[0,1]^2} x_{2l}^{k_2+A_{2l}-1}(1-x_{2l})^{k_1+B_{2l}-A_{2l}-1}x_{2l+1}^{A_{2l+1}-1}(1-x_{2l+1})^{k_2+B_{2l+1}-A_{2l+1}-1} \\
&\times dx_1\cdots dx_{2l+1} \\
= &\sum_{k_1,k_2\geqslant 0} \frac{z^{k_1+k_2}\Gamma(k_1+k_2+A_0)}{\Gamma(A_0)k_1!k_2!}\cdot\frac{\Gamma(k_2+A_{2l})\Gamma(k_1+B_{2l}-A_{2l})}{\Gamma(k_1+k_2+B_{2l})} \\
&\times \frac{\Gamma(A_{2l+1})\Gamma(k_2+B_{2l+1}-A_{2l+1})}{\Gamma(k_2+B_{2l+1})} \\
&\times \int_{[0,1]^{2l-1}} \frac{x_1^{k_1+A_1-1}(1-x_i)^{B_1-A_1-1}\prod_{i=2}^{2l-1} x_i^{k_1+k_2+A_i-1}(1-x_i)^{B_i-A_i-1}}{Q_{2l-1}(z,x_1,\ldots,x_{2l-1})^{A_0+k_1+k_2}} \\
&\times dx_1\cdots dx_{2l-1}.
\end{aligned}$$

Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по l. Проверим базу индукции, $l = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
I = \sum_{k_1,k_2\geqslant 0} &\frac{z^{k_1+k_2}\Gamma(k_1+k_2+A_0)}{\Gamma(A_0)k_1!k_2!}\cdot\frac{\Gamma(k_2+A_2)\Gamma(k_1+B_2-A_2)}{\Gamma(k_1+k_2+B_2)} \\
&\times \frac{\Gamma(A_3)\Gamma(k_2+B_3-A_3)}{\Gamma(k_2+B_3)}\int_0^1 x_1^{k_1+A_1-1}(1-x_1)^{B_1-A_1-1}dx_1.
\end{aligned}$$

Переставим знаки суммирования и интегрирования и заметим, что

$$\sum_{k_1,k_2\geqslant 0}\frac{\Gamma(k_1+k_2+A_0)}{k_1!k_2!}\cdot\frac{\Gamma(k_2+A_2)\Gamma(k_1+B_2-A_2)}{\Gamma(k_1+k_2+B_2)}$$

$$\times\frac{\Gamma(k_2+B_3-A_3)}{\Gamma(k_2+B_3)}(zx_1)^{k_1}z^{k_2}$$

$$=\frac{\Gamma(B_2-A_2)\Gamma(B_3-A_3)}{\Gamma(B_2-a_2)\Gamma(B_3-a_3)}\int_{[0,1]^2}\frac{x_2^{a_2-1}(1-x_2)^{B_2-a_2-1}x_3^{a_3-1}(1-x_3)^{B_3-a_3-1}}{(1-zx_1x_2)^{c_1}(1-zx_2x_3)^{c_2}}$$

$$\times dx_2dx_3.$$

Случай $l=1$ доказан. Теперь проведем шаг индукции, предполагая, что утверждение леммы доказано для $l-1$ и доказывая его для $l>1$.

$$I=\sum_{k_1,k_2\geqslant 0}\frac{z^{k_1+k_2}\Gamma(k_1+k_2+A_0)}{\Gamma(A_0)k_1!k_2!}\cdot\frac{\Gamma(k_2+A_{2l})\Gamma(k_1+B_{2l}-A_{2l})}{\Gamma(k_1+k_2+B_{2l})}$$

$$\times\frac{\Gamma(A_{2l+1})\Gamma(k_2+B_{2l+1}-A_{2l+1})}{\Gamma(k_2+B_{2l+1})}\frac{\Gamma(k_1+k_2+A_{2l-1})}{\Gamma(k_1+k_2+A_0)}\prod_{i=2}^{2l-1}\frac{\Gamma(B_i-A_i)}{\Gamma(B_i-a_i)}$$

$$\times\int_{[0,1]^{2l-1}}\frac{x_1^{k_1+a_1-1}(1-x_i)^{B_1-a_1-1}\prod_{i=2}^{2l-1}x_i^{k_1+k_2+a_i-1}(1-x_i)^{B_i-a_i-1}}{\prod_{j=1}^{l-1}(1-zx_1x_2\cdots x_{2j})^{c_{2j-1}}(1-zx_2x_3\cdots x_{2j+1})^{c_{2j}}}$$

$$\times dx_1\cdots dx_{2l-1}.$$

Для завершения доказательства заметим, что

$$\sum_{k_1,k_2\geqslant 0}\frac{\Gamma(k_1+k_2+A_{2l-1})}{k_1!k_2!}\cdot\frac{\Gamma(k_2+A_{2l})\Gamma(k_1+B_{2l}-A_{2l})}{\Gamma(k_1+k_2+B_{2l})}$$

$$\times\frac{\Gamma(k_2+B_{2l+1}-A_{2l+1})}{\Gamma(k_2+B_{2l+1})}(zx_1x_2\cdots x_{2l-1})^{k_1}(zx_2x_3\cdots x_{2l-1})^{k_2}$$

$$=\frac{\Gamma(B_{2l}-A_{2l})\Gamma(B_{2l+1}-A_{2l+1})}{\Gamma(B_{2l}-a_{2l})\Gamma(B_{2l+1}-a_{2l+1})}$$

$$\times\int_{[0,1]^2}\frac{x_{2l}^{a_{2l}-1}(1-x_{2l})^{B_{2l}-a_{2l}-1}x_{2l+1}^{a_{2l+1}-1}(1-x_{2l+1})^{B_{2l+1}-a_{2l+1}-1}}{(1-zx_1x_2\cdots x_{2l})^{c_{2l-1}}(1-zx_2x_3\cdots x_{2l+1})^{c_{2l}}}dx_{2l}dx_{2l+1}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим подробнее интеграл при $l=2$, $A_i=n+1$, $B_i=2n+2$:

$$I_n(z) = \frac{(3n+1)!}{(n!)^3} \times \int_{[0,1]^5} \frac{\prod_{i=1}^5 x_i^n (1-x_i)^n dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5}{((1-zx_1x_2)(1-zx_2x_3)(1-zx_1x_2x_3x_4)(1-zx_2x_3x_4x_5))^{n+1}}.$$

Известно, что $I_n(1) = u_n\zeta(4) - v_n$, где $u_n \in \mathbb{Z}$, $D_n^4 v_n \in \mathbb{Z}$ (см. [12, (17)], [13, Lemma 5] и [35, Théorème 3]).

Гипотеза. При любом целом неотрицательном n выполняется

$$I_n(z) = P_{2,1,1}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{2,1,1}(z) + \sum_{j=0}^{4} P_{\{1\}_j}(z^{-1}) \operatorname{Le}_{\{1\}_j}(z),$$

причем $P_{\{1\}_j}(1) = 0$ при $j > 0$, степени и порядки нуля многочленов в точке $z = 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\deg P_{\vec{s}} \leqslant 4n+2, \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{2,1,1}(z) \geqslant 2n+2, \quad \operatorname*{ord}_{z=0} P_{\{1\}_j}(z) \geqslant n+1$$

и $D_n^{4-w(\vec{s})} P_{\vec{s}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Литература

1. Василенко О.Н., *Некоторые формулы для значения дзета-функции Римана в целых точках* // Тезисы докладов Республиканской научно-теоретической конференции "Теория чисел и ее приложения"(Ташкент, 26-28 сентября 1990г.). Ташкентский гос. пед. институт, 1990. С. 27.

2. Васильев Д.В., *Некоторые формулы для дзета-функции Римана в целых точках* // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. №1. С. 81–84.

3. Vasilyev D.V., *On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd integers* // Preprint №1 (558). Minsk: Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., 2001.

4. Гельфонд А.О., *Трансцендентные числа* // Труды II Всес. матем. съезда. Л.: Техтеоретиздат, 1934. Т. I.; // В кн. "Избранные труды". М.: Наука, 1973. С. 57–75.

5. Злобин С.А., *Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов* // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №5. С. 782–787.

6. Злобин С.А., *О некоторых интегральных тождествах* // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. №3. С. 153–154.

7. Злобин С.А., *Разложения кратных интегралов в линейные формы* // Доклады РАН. 2004. Т. 398. №5. С. 595–598.

8. Злобин С.А., *Производящие функции для значений кратной дзета-функции* // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2005. №2. С. 55–59.

9. Злобин С.А., *Разложения кратных интегралов в линейные формы* // Матем. заметки. 2005. Т. 77. №5. С. 683–706.

10. Зудилин В.В., *Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы* // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57. №4. С. 177–178.

11. Zudilin W., *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values* // J. Théorie Nombres Bordeaux. 2004. V. 16. №1. P. 251–291; // http://arxiv.org/abs/math/0206176.

12. Zudilin W., *Well-poised hypergeometric transformations of Euler-type multiple integrals* // J. London Math. Soc. (2). 2004. V. 70. №1. P. 215–230.

13. Zudilin W., *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values* // Actes des 12èmes rencontres arithmetiques de Caen (June 29–30, 2001). J. Theorie Nombres Bordeaux. 2003. V. 15. №2. P. 593–626.

14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа* // М.: Наука, 1989.

15. Нестеренко Ю.В., *О линейной независимости чисел* // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1985. №1. С. 46–54.

16. Nesterenko Yu.V., *Integral identities and constructions of approximations to zeta-values* // Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001). J. Théorie Nombres Bordeaux. 2003. V. 15. №2. P. 535–550.

17. Нестеренко Ю.В., *Об одном тождестве Малера* // Матем. заметки. 2006. Т. 79. №1.

18. Никишин Е.М., *Об иррациональности значений функций $F(x, s)$* // Матем. сборник. 1979. Т. 109. №3. С. 410–417.

19. Прасолов В.В., *Многочлены* // М.: МЦНМО, 1999.

20. Сорокин В.Н., *Теорема Апери* // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. №3. С. 48–52.

21. Сорокин В.Н., *О мере трансцендентности числа π^2* // Матем. сборник. 1996. Т. 187. №12. С. 87–120.

22. Сорокин В.Н., *О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов* // Матем. сборник. 2001. Т. 192. №8. С. 139–154.

23. Уланский Е. А., *Тождества для обобщенных полилогарифмов* // Матем. заметки. 2003. Т. 73. №4. С. 613–624.

24. Фельдман Н.И., *О мере трансцендентности числа π* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. №3. С. 357–368.

25. Фельдман Н.И., *Седьмая проблема Гильберта* // М.: Изд-во МГУ, 1982.

26. Фукс Б. А., *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных* // М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.

27. Apery R., *Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$* // Astérisque 1979. V. 61. P. 11–13.

28. Bailey W.N., *Generalized Hypergeometric Series* // New York: Stechnert-Hafner, 1964. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, V. 32).

29. Beukers F., *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$* // Bull. London Math Society. 1979. V. 11. №3. P. 268–272.

30. Borwein J.M., Bradley D.M., Broadhurst D.J., *Evaluations of k-fold Euler/Zagier Sums: A Compendium of Results for Arbitrary k* //

The Electronic Journal of Combinatorics. 1997. V. 4. №2. Research Paper 5.

31. Fischler S., *Formes linéaires en polyzêtas et intégrales multiples* // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2002. V. 335. P. 1–4.

32. Гаспер Дж., Рахман М., *Базисные гипергеометрические ряды* // М.: Мир, 1993.

33. Hoffman M.E., *The algebra of multiple harmonic series* // Journal of Algebra. 1997. V. 194. №2. P. 477–495.

34. Koksma J.F., Popken J., *Zur Transzendenz von e^π* // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1932. V. 168. P. 211–230.

35. Krattenthaler C., Rivoal T., *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann* // Preprint (December 2004), submitted for publication; // http://arxiv.org/abs/math/0311114.

36. Mahler K., *Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes über die Approximation algebraischer Zahlen für binomische Gleichungen* // Math. Ann. 1931. V. 105. P. 267–276.

37. Hoang Ngoc Minh, Petitot M., Van Der Hoeven J., *Shuffle algebra and polylogarithms* // Discrete Mathematics. 2000. V. 225. №1-3. P. 217–230.

38. Rhin G., *Approximation of Values of Zeta Functions at Integers* // The Meeting on Elementare und Analytische Zahlentheorie, Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, March 9–15, 2003, Abstacts, P. 19; // http://www.mfo.de/programme/schedule/2003/11/Report12_2003.pdf.

39. Rhin G., Viola C., *On a permutation group related to $\zeta(2)$* // Acta Arith. 1996. V. 77, №1. P. 23–56.

40. Rhin G., Viola C., *The group structure for* $\zeta(3)$ // Acta Arith. 2001. V. 97. №3. P. 269–293.

41. Rivoal T., *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs* // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 2000. V. 331. №4. P. 267–270.

42. Rivoal T., *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs* // These de doctorat (29 juin 2001). Caen: Universite de Caen, Laboratoire SDAD; // http://theses-EN-ligne.in2p3.fr.