Р. МӘММӘДОВ

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛӘРИ ДОКТОРУ, ПРОФЕССОР

АЛИ РИЈАЗИЈЈАТ КУРСУ

II

ДӘРСЛИК

АЗӘРБАЈЧАН ССР АЛИ ВӘ ОРТА
ИХТИСАС ТӘҺСИЛИ НАЗИРЛИЈИ ТӘРӘФИНДӘН
ТӘСДИГ ЕДИЛМИШДИР

„МААРИФ“ НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы — 1981

517—1
М—42

Али ријазијјат курсунун јени програмы әсасында јазылмыш бу дәрслијин I чилди 1978-чи илдә бурахылмышдыр.

Дәрслијин II чилдиндә бирдәјишәнли функсијаларын интеграл һесабы, чохдәјишәнли функсијаларын диференсиал һесабы, ади диференсиал тәнликләр системи, дајаныглыг нәзәријјәсинин елементләри, әдәди вә функсионал сыралар, Фурје сырасы вә абстракт Һилберт фәзасында ортонормал функсијалар системи үзрә сыралар нәзәријјәси шәрһ едилир.

Али техники мәктәбләрин тәләбәләри үчүн јазылмыш бу дәрсликдән педагожи институтларын вә университетин тәләбәләри дә истифадә едә биләрләр.

Дәрслијә Азәрбајчан Иншаат Мүһәндисләри Институтунун «Али ријазијјат» кафедрасы рә'ј вермишдир.

Елми редактору **А. Бабајев**

Азәрбајчан ССР ЕА-нын мүхбир үзвү, професcор

60602—200
М—652 128—81 1702050000

III ҺИССӘ

БИРДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ИНТЕГРАЛ ҺЕСАБЫ

XXI ФӘСИЛ

ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛ

§ 1. ИБТИДАИ ФУНКСИЈА ВӘ ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН ТӘ'РИФИ

Диференсиал һесабында верилмиш функсијанын төрәмәсини (вә ја диференсиалыны) тапмагла мәшғул олурлар. Функсијанын төрәмәси верилдикдә онун өзүнү тапмаг мәсәләси исә интеграл һесабында өјрәнилир.

Интеграл һесабы мәсәләләринин тәдгигинә кечмәздән әввәл ибтидаи функсија анлајышы илә таныш олаг.

Фәрз едәк ки, $f(x)$ вә $F(x)$ һәр һансы $[a, b]$ парчасында (парча әвәзинә интервал, јарыминтервал вә с. дә көтүрмәк олар) тә'јин олунмуш функсијалардыр.

Тә'риф. *$[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтәләриндә*

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

вә ја

$$dF(x) = f(x)dx \tag{2}$$

бәрабәрлији өдәнилирсә, онда $F(x)$ функсијасына $f(x)$-ин $[a, b]$ парчасында ибтидаи функсијасы дејилир.

Ајдындыр ки, $F(x)$ функсијасы $f(x)$-ин ибтидаи функсијасыдырса, онда C ихтијари сабит әдәд олдугда $F(x)+C$ функсијасы да һәмин $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасы олар. Доғрудан да, (1) бәрабәрлијинә көрә:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

Бурадан нәтичә олараг чыхыр ки, әкәр $f(x)$ функсијасынын бир $F(x)$ ибтидаи функсијасы варсa, онда $F(x)+C$ (C ихтијари сабитдир) шәклиндә олан сонсуз сајда бүтүн функсијалар да һәмин функсијанын ибтидаи функсијасыдыр. Белә бир суал гаршыја чыхыр: $F(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында $f(x)$-ин ибтидаи функсијасы олдугда C сабитинә ихтијари гијмәтләр вермәклә $F(x)+C$ ифадәсиндән $f(x)$-ин бүтүн ибтидаи функсиjаларыны алмаг олармы? Бу суала ашағыдакы садә теорем чаваб верир.

Т е о р е м. ***$f(x)$ функсиjасынын ихтиjари ики $F(x)$ вә $\Phi(x)$ ибтидаи функсиjасы бир-бириндән сабит әдәдлә фәргләнир:***

$$\Phi(x) = F(x) + C. \tag{3}$$

Доғрудан да, $[a, b]$ парчасынын ихтиjари x нөгтәсиндә өдәнилән

$$F'(x) = f(x)$$

вә

$$\Phi'(x) = f(x)$$

бәрабәрликләриндән

$$[\Phi(x) - F(x)]' = 0$$

мүнасибәти алыныр. Бурадан (XVII, § 1) алырыг ки,

$$\Phi(x) - F(x) = C$$

вә jа (3) бәрабәрлиjи доғрудур (C ихтиjари сабитдир).

Бу теорем көстәрир ки, $F(x)$ функсиjасы $f(x)$-ин һәр һансы ибтидаи функсиjасыдырса, онда онун бүтүн ибтидаи функсиjалары $\{F(x)+C\}$ чохлуғуна дахилдир.

Тә'риф. $f(x)$ функсиjасынын $[a, b]$ парчасында бүтүн ибтидаи функсиjалары чохлуғуна $f(x)$ функсиjасынын һәмин парчада гејри-мүәjjән интегралы дејилир вә

$$\int f(x)\,dx \tag{4}$$

кими ишарә олунур.

Демәли, $F(x)$ функсиjасы $f(x)$-ин һәр һансы ибтидаи функсиjасыдырса, онда

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}.$$

Бу бәрабәрлиjи һәмишә

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{5}$$

кими jазырлар. Бурада $f(x)$ *интегралалты функсиjа*, $f(x)\,dx$ исә *интегралалты ифадә* адланыр.

Мисал 1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ функсиjасы $f(x) = x$ функсиjасынын ибтидаи функсиjасы олдуғундан,

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Мисал 2. $F(x) = -\cos x$ функсиjасы $f(x) = \sin x$ функсиjасынын ибтидаи функсиjасы олдуғундан

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Интеграл ишарәси алтында тәкчә интегралалты $f(x)$ функсиjасыны jазмаjыб, $f(x)\,dx$ шәклиндә интегралалты ифадәни jазмағын әсас сәбәби одур ки, беләjаздыгда интегралын һансы дәjишәнә көрә көтүрүлмәси аjдын олур. Мәсәлән, y^2x^3

функсиjасынын x вә y дәjишәнләринә көрә интеграллары мүхтәлифдир:

$$\int x^3y^2dy = \frac{x^3y^3}{3} + C, \quad \int y^2x^3dx = \frac{y^2x^4}{4} + C.$$

Буна көрә дә y^2x^3 функсиjасы интегралынын һансы дәjишәнә көрә көтүрүлдүjү көстәрилмәлидир.

Һәндәси олараг (4) гејри-мүәjјән интегралы бирпараметрли $y=F(x)+C$ мүстәви әjриләри (C параметрдир) аиләсиндән ибарәтдир. Бу аиләнин һәр бир әjриси дикәриндән Oy оху истигамәтиндә өзүнә паралел олараг jухары вә jа ашағы көчүрмәклә алыныр. Бу әjриләрә *интеграл әjриләри* деjилир.

Интеграл әjриләринин белә бир хассәси вардыр ки, онларын һәр биринә абсисләри еjни $x=x_0$ әдәди олан нөгтәләрдә чәкилмиш тохунанлар бир-биринә паралелдир вә онларын һамысынын буҹаг әмсалы

$$[F(x)+C]'_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0)$$

әдәдинә бәрабәрдир. Интеграл әjриләри кәсишмир вә бир-биринә тохунмур. Мүстәвинин, абсиси $[a, b]$ парчасына дахил олан һәр бир нөгтәсиндән анҹаг бир интеграл әjриси кечир.

Верилмиш функсиjанын ибтидаи функсиjаларыны тапмаға һәмин функсиjаны *интеграллама* деjилир. Демәли, төрәмәси верилмиш функсиjанын өзүнү тапмагдан ибарәт олан интеграллама әмәли диференсиаллама әмәлинин тәрсидир. Верилмиш функсиjаны габагҹа диференсиаллаjыб, сонра да алынан ифадәни интегралласаг, онда верилмиш функсиjанын өзүнү (сабит C һәддинә гәдәр дәгигликлә) аларыг. Бурадан көрүнүр ки, d (диференсиаллама) вә $\int$ (интеграллама) ишарәләри илә көстәрилән әмәлләр гаршылыглы тәрс әмәлләрдир:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{6}$$

$$d\int f(x)\,dx = d[F(x)+C] = F'(x)\,dx = f(x)dx. \tag{7}$$

Истәнилән функсиjанын ибтидаи функсиjасы вармы? Хеjр, jохдур. Лакин кәләҹәкдә (XXII, § 7) көстәрәҹәjик ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәjән һәр бир $f(x)$ функсиjасынын һәмин парчада ибтидаи функсиjасы, jә'ни гејри-мүәjјән интегралы вар вә буна көрә дә верилән функсиjа мүәjјән нөгтәләрдә кәсилән олдугда, онун кәсилмәз олдуғу аjры-аjры интервал вә jа парчаларда интегралындан данышаҹағыг. Мәсәлән, $f(x) = \frac{1}{x}$ функсиjасы $x=0$ нөгтәсиндә кәсиләндир. Буна көрә дә һәмин функсиjанын кәсилмәз олдуғу $(-\infty, 0)$ вә $(0, \infty)$ интервалларынын һәр бириндә аjрылыгда интегралындан данышмаг олар. Биринҹи интервалда

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C, \tag{8}$$

икинчи интервалда исә

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \tag{9}$$

олар. (8) вә (9) бәрабәрликләри

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \tag{10}$$

шәклиндә бирләшдирилир.

Интеграла гејри-мүәјјән ады верилмәси онун гијмәтинин конкрет (мүәјјән) бир функсија олмајыб, сонсуз сајда функсијалар (чохлуғу) олмасы илә әлагәдардыр.

§ 2. ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘН ИНТЕГРАЛЫН САДӘ ХАССӘЛӘРИ

Интегралын тә'рифиндән ајдындыр ки, верилмиш $f(x)$ функсијасынын интегралыны тапмаг (һесабламаг), онун бүтүн ибтидаи функсијалары чохлуғуну тапмаг демәкдир. Бунун үчүн исә онун бир ибтидаи функсијасыны, јә'ни $F'(x)=f(x)$ бәрабәрлијини өдәјән $F(x)$ функсијасыны билмәк кифајәтдир. Бу һалда

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{1}$$

бәрабәрлијинин доғрулуғу бахылан парчанын вә ја интервалын бүтүн нөгтәләриндә

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

мүнасибәтинин өдәнилмәсинә еквивалентдир. Беләликлә, (1) бәрабәрлијинин доғрулуғуну јохламаг үчүн онун сағ тәрәфинин төрәмәсинин интегралалты $f(x)$ функсијасына бәрабәр олдуғуну јохламаг кифајәтдир:

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Бу заман јадда сахламаг лазымдыр ки, ики гејри-мүәјјән интегралын вә ја гејри-мүәјјән интеграллар дахил олан ики ифадәнин бәрабәрлији ики чохлуғун (ибтидаи функсијалар чохлугларынын) бәрабәрлији демәкдир.

Дедикләримиздән истифадә едәрәк интегралын бир сыра садә хассәләрини исбат едәк.

Хассә 1. *Гејри-мүәјјән интегралын төрәмәси интегралалты функсијаја бәрабәрдир:*

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x). \tag{3}$$

Доғрудан да, (1) вә (2) бәрабәрликләринә көрә:

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Хассә 2. *Сонлу сајда функсијалар чәминин гејри-мүәјјән интегралы онларын гејри-мүәјјән интегралларынын чәминә бәрабәрдир:*

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx =$$
$$= \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx \tag{4}$$

Исбаты. Ҝејри-муәјјән интегралын тә'рифинә ҝөрә (4) бәрабәрлијинин сол тәрәфи $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијалары чохлуғудур. (4) бәрабәрлијинин сағ тәрәфинин төрәмәси дә һәмин $f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$ функсијасына бәрабәрдир. Доғрудан да, (3) бәрабәрлијинә ҝөрә

$$\left[\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\cdots+\int f_n(x)dx\right]'=$$
$$=\left[\int f_1(x)\,dx\right]'+\left[\int f_2(x)dx\right]'+\cdots+\left[\int f_n(x)dx\right]'=$$
$$=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x).$$

Демәли, (4) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи дә $f_1(x)+\cdots+f_n(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијалары чохлуғудур. Бурадан (4) бәрабәрлијинин доғрулуғу ајдын олур.

Интегралын (4) бәрабәрлијилә ифадә олунан хассәси функсијалара нәзәрән *интегралын аддитивлик хассәси* адланыр.

Хассә 3. *Сабит вуруғу интеграл ишарәси харичинә чыхармаг олар*:

$$\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx. \tag{5}$$

Доғрудан да,

$$\left(A\int f(x)\,dx\right)'=A\left(\int f(x)\,dx\right)'=Af(x)$$

олдуғундан (5) бәрабәрлији доғру олар.

Нәтичә. Ики функсија фәргинин ҝејри-муәјјән интегралы онларын ҝејри-муәјјән интегралларынын фәргинә бәрабәрдир:

$$\int[f(x)-\varphi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx-\int\varphi(x)dx. \tag{6}$$

Исбаты:

$$\int[f(x)-\varphi(x)]\,dx=\int[f(x)+(-1)\varphi(x)]\,dx=$$
$$=\int f(x)dx+\int(-1)\varphi(x)\,dx=\int f(x)dx-\int\varphi(x)\,dx.$$

Хассә 4. *Интегралын интеграллама дәјишәнинә нәзәрән инвариантлыг хассәси вардыр, јә'ни*

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

оларса, онда истәнилән диференсиалланан $u=u(x)$ функсијасы үчүн

$$\int f(u)\,du=F(u)+C. \tag{7}$$

Доғрудан да, (1) мүнасибәтинә ҝөрә

$$dF(x)=f(x)\,dx$$

олдуғундан, диференсиал шәклинин инвариантлығы (XV, § 5) хассәсинә әсасән

$$dF(u)=f(u)\,du$$

олар. Бурадан (7) бәрабәрлијинин доғрулуғу ајдындыр.

Хүсуси һалда, $u=ax+b$ оларса, онда

$$\int f(ax+b)\,d(ax+b)=F(ax+b)+C \qquad (8)$$

вә ја

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Мисал 1.

$$\int(2x^3+x+3)\,dx=\int 2x^3dx+\int xdx+\int 3dx=$$
$$=2\int x^3dx+\int xdx+3\int dx=\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}+3x+C.$$

Мисал 2.

$$\int(5x-e^x)\,dx=\int 5xdx-\int e^xdx=$$
$$=5\int xdx-\int e^xdx=\frac{5}{2}x^2-e^x+C$$

§ 3. ӘСАС ИНТЕГРАЛЛАР ЧӘДВӘЛИ

Гејри-мүәјјән интегралын тә'рифинә (§ 1) вә әсас елементар функсијаларын төрәмәләри дүстурларына (XIV, § 8) әсасән ашағыдакы интеграллар чәдвәли алыныр. Бу дүстурларын доғрулуғуну диференсиалламагла јохламаг олар.

1. $\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ ($\alpha\neq-1$ вә сабит әдәддир).

Хүсуси һалда,

$$\int du=u+C.$$

2. $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$ (u-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

3. $\int a^udu=\frac{a^u}{\ln a}+C$ (a сабитдир, $a>0$, $a\neq1$). Хүсуси һалда, $a=e$ оларса, онда

$$\int e^udu=e^u+C.$$

4. $\int\cos u\,du=\sin u+C.$

5. $\int\sin u\,du=-\cos u+C.$

6. $\int\frac{du}{\cos^2u}=\operatorname{tg}u+C$ ($\cos u$-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

7. $\int\frac{du}{\sin^2u}=-\operatorname{ctg}u+C$ ($\sin u$-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

8. $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a}+C \quad (a\neq0)$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C \quad (|u| < |a|)$.

10. $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$.

11. $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$.

12. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

13. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$ ($\operatorname{sh} u$-нун сыфырдан фәргли олдуғу һәр бир интервалда).

14. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$.

Јухарыда гејд етдијимиз кими бу дүстурларын һәр биринин доғрулуғуну билаваситә диференсиалламагла јохламаг олар.

Мәсәлән, 15-чи дүстурун доғрулуғуну јохлајаг. Сағ тәрәфин диференсиалыны һесабласаг,

$$d(\ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C) = \frac{(u + \sqrt{u^2 \pm a^2})' du}{u + \sqrt{u^2 \pm a^2}} =$$

$$= \frac{du}{u + \sqrt{u^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\right) = \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$$

олар, јә'ни 15-чи дүстур доғрудур.

Бу интеграллар чәдвәлиндән истифадә едәрәк, бир чох елементар функсијаларын интегралыны һесабламаг олар. Интегралы, чәдвәлдән истифадә едәрәк һесабламаға *билаваситә интеграллама* дејилир. Буна аид бир нечә мисал көстәрәк.

Мисал 1.

$$\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C.$$

Мисал 2.

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Мисал 3.

$$\int \cos^3 x \sin x\, dx = -\int \cos^3 x\, d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + C.$$

Мисал 4.

$$\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Мисал 5.

$$\int \operatorname{sh}(x+3)\, dx = \int \operatorname{sh}(x+3)\, d(x+3) = \operatorname{ch}(x+3) + C.$$

Мисал 6.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C \quad (\cos x \neq 0).$$

Мисал 7.

$$\int 2x \sin(x^2+5) dx = \int \sin(x^2+5)\, d(x^2+5) = -\cos(x^2+5) + C.$$

Мисал 8.

$$\int e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x dx = \int e^{\operatorname{sh} x} d(\operatorname{sh} x) = e^{\operatorname{sh} x} + C.$$

Мисал 9.

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \ln \sqrt[6]{\left|\frac{x-3}{x+3}\right|} + C.$$

Мисал 10.

$$\int \frac{e^x dx}{3+e^x} = \int \frac{d(3+e^x)}{3+e^x} = \ln(3+e^x) + C.$$

Мисал 11.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Бу мисалларын һамысында интеграл алтындакы елементар функсиjаларын ибтидаи функсиjалары jа елементар функсиjадыр, jа да елементар функсиjаларын муәjјән комбинасиjасыдыр. Лакин елә елементар функсиjалар вар ки, онларын ибтидаи функсиjалары елементар функсиjаларын һеч бир сонлу комбинасиjасы васитәсилә ифадә олунмур.

Әкәр верилмиш $f(x)$ функсиjасынын ибтидаи функсиjасы елементар функсиjа (вә jа онларын муәjјән сонлу комбинасиjасы) оларса, онда деjирләр ки, $\int f(x)dx$ интегралы елементар функсиjаларла сонлу шәкилдә ифадә олунур.

§ 4. ИНТЕГРАЛЛАМА УСУЛЛАРЫ

Биз jухарыда (§ 3) бир сырә садә функсиjаларын интегралыны һесабладыг. Лакин верилмиш функсиjанын интегралыны һесабламаг һәмишә белә садә олмур.

Функсиjаны интеграллама мәсәләси, умумиjјәтлә, чәтиндир. Бунун сәбәби одур ки, истәнилән функсиjанын интегралыны һесабламаг үчүн умуми конструктив гаjда көстәрмәк мумкүн олмур. Белә чәтинлик әксәр тәрс әмәлләр үчүн мөвчуддур. Интеграллама исә диференсиалламанын тәрс әмәлидир.

Дүз әмәл олан диференсиаллама конструктив шәкилдә тә'јин олунур. Төрәмәнин тә'рифиндә, верилмиш функсијанын мүәјјән нөгтәдә төрәмәсини тапмаг үчүн һансы әмәлләри (функсијанын артымыны тапмаг, артымларын нисбәтини дүзәлтмәк, лимитә кечмәк) һансы ардычыллыгла апармаг лазым олдуғу көстәрилир.

Лакин бә'зи функсијалар синфинин интегралыны һесабламаг үчүн үсуллар көстәрмәк мүмкүндүр.

I. Ајрылма үсулу.

Бу үсулун маһијјәти ондан ибарәтдир ки, интеграл алтындакы функсија интеграллары асан һесаблана билән функсијаларын чәми шәклиндә көстәрилир. Сонра исә интегралын „сонлу сајда функсијалар чәминин интегралы онларын интеграллары чәминә бәрабәрдир“ хассәсиндән (§ 2, II) истифадә олунур.

Мисал 1.

$$\int (2x^3 + 5^x - \cos x)dx = \int 2x^3\,dx + \int 5^x dx - \int \cos x dx =$$
$$= \frac{x^4}{2} + \frac{5^x}{\ln 5} - \sin x + C.$$

Мисал 2.

$$\int\left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \operatorname{tg} x\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx -$$
$$-\int \frac{dx}{x^2} = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x} + C.$$

Ајрылма үсулуну тәтбиг етмәк о заман әһәмијјәтлидир ки, „ајрылмадан“ алынан һәдләрин интеграллары асан һесаблансын.

II. Дәјишәни әвәзетмә үсулу.

Тутаг ки, $F(x)$ функсијасы $f(x)$-ин ибтидаи функсијасыдыр. Онда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (1)$$

олар. $x = \varphi(t)$ диференсиалланан функсија оларса, онда

$$\left(F[\varphi(t)]\right)_t' = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

вә буна көрә дә

$$\int F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \qquad (2)$$

(1) вә (2)-дән

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (3)$$

бәрабәрлији алыныр. Буна *дәјишәни әвәзетмә дүстуру* дејилир.

Гејд едәк ки, (3) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки интегралы һесабладыгдан сонра јенидән x дәјишәнинә гајытмаг үчүн $x = \varphi(t)$ әвәзләмәсиндән истифадә етмәк лазымдыр. Бә'зән

$x = \varphi(t)$ әвәзләмәсиндән деjил, $\psi(x) = t$ шәклиндә әвәзләмәдән истифадә олунур. Бу һалда, ахырынчы бәрабәрликдән $x = \Phi(t)$ тапылыр (әлбәттә, бунун мүмкүн олдуғуну гәбул едирик) вә беләликлә дә

$$\int f(x)\,dx = \int f[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,dt \tag{4}$$

әвәзетмә дүстуру алыныр.

Мисал 3.

$$J_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$$

интегралыны һесабламалы. Бу мәгсәдлә

$$x = a\sin t\ \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},\ -a \leqslant x \leqslant a\right)$$

әвәзләмәсиндән истифадә едәк:

$$J_1 = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\ a\cos t\,dt = a^2\int \sqrt{1 - \sin^2 t}\ \cos t\,dt =$$

$$= a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Јенидән x дәјишәнинә гајытмаг үчүн $x = a\sin t$ әвәзләмәсиндән t вә $\sin t$ кәмиjјәтләрини тапмаг лазымдыр:

$$\sin t = \frac{x}{a},\quad t = \arcsin\frac{x}{a},$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Беләликлә,

$$J_1 = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Мисал 4.

$$J_2 = \int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}$$

интегралыны һесабламаг үчүн $t = \varphi(x)$ әвәзләмәсини көтүрмәк әлверишлидир. Бу һалда $dt = \varphi'(x)\,dx$ вә

$$J_2 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$$

олар. Хүсуси һалда,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(a^2 + x^2)}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2 + x^2) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Мисал 5.

$$J_3 = \int \frac{x^{n-1}\,dx}{a^2+x^{2n}}$$

интегралыны һесабламаг үчүн $x^n = t$ әвәзләмәсиндән истифадә етсәк, аларыг:

$$nx^{n-1}\,dx = dt,$$

$$J_3 = \frac{1}{n}\int\frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{na}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a} + C = \frac{1}{na}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^n}{a} + C.$$

III. Һиссә-һиссә интеграллама дүстуру.

Билирик ки, диференсиаллана билән $U=U(x)$ вә $V=V(x)$ функсијаларынын һасилинин диференсиалы

$$d(UV) = VdU + UdV$$

кими һесабланыр. Бу бәрабәрлији интегралламагла

$$UV = \int VdU + \int UdV$$

вә јахуд

$$\int UdV = UV - \int VdU \tag{5}$$

дүстуруну аларыг.

(5) дүстуруна *һиссә-һиссә интеграллама дүстуру дејилир.* $dV = V'dx$ вә $dU = U'dV$ олдуғундан (1) дүстуруну

$$\int UV'dx = UV - \int VU'dx$$

кими јазмаг олар. Бу бәрабәрлијә әсасән n-чи тәртиб кәсилмәјән төрәмәләри олан $U(x)$ вә $V(x)$ функсијалары үчүн ашағыдакы бәрабәрликләри јазмаг олар:

$$\int UV^{(n)}dx = UV^{(n-1)} - \int U'V^{(n-1)}dx,$$

$$\int U'V^{(n-1)}dx = U'V^{(n-2)} - \int U''V^{(n-2)}dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int U^{(n-1)}V'dx = U^{(n-1)}V - \int U^{(n)}V\,dx.$$

Бу бәрабәрликләри нөвбә илә $+1$ вә -1 әдәдләринә вураraг, алынан бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг,

$$\int UV^{(n)}dx = UV^{(n-1)} - U'V^{(n-2)} + U''V^{(n-3)} - \dots +$$

$$+(-1)^{(n-1)}U^{(n-1)}V + (-1)^n\int U^{(n)}V\,dx \tag{6}$$

бәрабәрлијини аларыг. (6) дүстуруна *үмумиләшмиш һиссә-һиссә интеграллама дүстуру* дејилир.

Верилмиш интегралы һесабламаг үчүн (5) (вә ја (6)) дүстуруну тәтбиг етмәк о заман әлверишлидир ки, сағ тәрәфдә алынан $\int VdU\left(\int U^{(n)}Vdx\right)$ интегралы верилмиш $\int UdV\left(\int UV^{(n)}dx\right)$ интегралындан садә олсун. Бу мәсәлә интегралалты ифадәни U вә dV кими әлверишли вуругларын һасили шәклиндә көстәрмәкдән дә чох асылыдыр. Интегралалты ифадәни әлверишли вуругларын һасили шәклиндә көстәрмәк бачарығы исә чохлу мисал һәлл етмәк нәтиҹәсиндә газанылыр.

Мисал 6. $\int x^n \ln x\, dx = ?$

Бурада $u = \ln x$ вә $dV = x^n\, dx$ һесаб етсәк, $du = \frac{dx}{x}$ вә $V = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (бурада $+C$ сабитини көтүрмәјин әһәмијјәти јохдур, чүнки һәмин сабит нәтиҹәдә алынан ифадәјә дахил олмур. Јохла!!) олар. Онда (5) дүстуруна көрә алырыг:

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Мисал 7. $\int x^{2m} e^x\, dx = ?$

Верилмиш интегралы үмумиләшмиш һиссә-һиссә интеграллама дүстуру илә һесабламаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә $u = x^{2m}$ вә $V^{(2m)} = e^x$ һесаб етмәк әлверишлидир. Онда (6) дүстуруна көрә

$$\int x^{2m} e^x\, dx = e^x\left[x^{2m} - 2m\, x^{2m-1} + (2m-1)2m x^{2m-2} - \ldots - (2m)!x\right] + \int (2m)!\, e^x\, dx = e^x\left[x^{2m} - 2m\, x^{2m-1} + 2m(2m-1)x^{2m-2} - \ldots - (2m)!\,x + (2m)!\right] + C.$$

Мисал 8. $\int x^{2m} \sin x\, dx = ?$

Бу һалда $u = x^{2m}$ вә $V^{(2m)} = \sin x$ әвәзләмәләриндән истифадә етмәк әлверишлидир. Онда (6) дүстуруна көрә

$$\int x^{2m} \sin x\, dx = -x^{2m}\cos x + (2m)\, x^{2m-1}\sin x - \ldots \mp (2m)!\, x \sin x \pm (2m)! \int \sin x\, dx = -x^{2m}\cos x + (2m)\, x^{2m-1}\sin x - \ldots \mp (2m)!\, x\sin x \mp (2m)!\cos x + C.$$

Мисал 9. $\int \arcsin x\, dx = ?$

$u = \arcsin x$ вә $dV = dx$ гәбул етсәк, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ вә $V = x$ олар. Онда (5) дүстуруна әсасән

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

IV. Рекуррент (кәтирмә) дүстуру васитәсилә интегралын һесабланмасы.

Тутаг ки, ахтарылан $J_n (n \quad 1)$ кәмијјәтинин кичик индексли J_{n-1}, J_{n-2} вә с. васитәсилә

$$J_n = f(J_{n-1}, J_{n-2}, \ldots) \tag{7}$$

шәклиндә ифадә олундуғу бир дүстур верилмишдир. Бу һалда J_0, J_1 вә с. кәмиііәтләри мә'лум олса, онда бөјүк индексли кәмиііәтләри (7) дүстурлары васитәсилә ардычыл һесабламаг олар.

(7) дүстурларына *рекуррент вә ја кәтирмә дүстурлары* дејилир. Рекуррент дүстурлары васитәсилә интеграл һесабламаға аид бир нечә мисал һәлл едәк.

Мисал 10. $S_n = \int \sin^n x\,dx$ интегралыны һесабламалы. Бу мәгсәдлә, верилмиш интеграла һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг едәк:

$$u = \sin^{n-1} x,\; dV = \sin x\,dx,$$

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \cdot dx,\; V = -\cos x$$

олдуғундан

$$\int \sin^n x\,dx = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

вә ја

$$S_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n$$

олар. Бурадан

$$S_n = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}S_{n-2} \qquad (8)$$

рекуррент дүстуруну аларыг.

$$S_0 = \int dx = x + C$$

$$S_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

олдуғундан (8) дүстуру васитәсилә J_2, J_3 вә с. интегралларыны ардычыл олараг һесабламаг олар.

Мисал 11.

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

интегралында $u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$ вә $dV = dx$ гәбул етсәк,

$$du = -\frac{2n\,x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad V = x$$

вә

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

олар. Бурадан

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,J_n - 2na^2\,J_{n+1}$$

вә ја

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n J_n - 2na^2 J_{n+1}$$

аларыг. Верилмиш интегралы һесабламаг үчүн ахырынчы бәрабәрликдән

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n \qquad (9)$$

рекуррент дүстуруну тапарыг.

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$$

олдуғуну биләрәк, (9) дүстуруна әсасән J_2, J_3 вә с. интегралларыны һесабламаг олар:

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2, \ldots$$

§ 5. САДӘ РАСИОНАЛ КӘСРЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Расионал функсијаларын ән садә нөвү

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (1)$$

шәклиндә олан функсија, јә'ни n дәрәчәли чәбри чохһәдлидир. Белә функсијаларын интегралы билаваситә һесабланыр:

$$\int P_n(x)\,dx = \int \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^{n-k}\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{n-k+1}}{n-k+1} + C.$$

Садә расионал кәсрләр адланан

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geqslant 2$ натурал әдәддир),

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(q - \dfrac{p^2}{4} > 0 \text{ шәрти өдәнилир}\right)$,

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geqslant 2$ натурал әдәддир вә $q - \dfrac{p^2}{4} > 0$ шәрти өдәнилир)

шәклиндә кәсрләрин интегралланмасы илә мәшғул олаг.

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \ln|x-a| + C,$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^{\kappa}}\,dx = A\int (x-a)^{-\kappa}\,d(x-a) =$

$$= -\frac{A}{\kappa-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{\kappa-1}} + C,\ (\kappa\neq-1).$$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ кәсринин интегралыны һесабламаг үчүн онун мәхрәчини ашағыдакы кими чевирәк:

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4} =$$
$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Шәртә көрә $q-\frac{p^2}{4}>0$ олдуғундан, ону a^2 илә ишарә етмәк олар. Онда

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int\frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}\,dx$$

вә бурада $t = x+\frac{p}{2}$, $x = t-\frac{p}{2}$, $dx = dt$ әвәзләмәсини апарсаг,

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}\,dt = \frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+$$
$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+$$
$$+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

аларыг. Јенидән x дәјишәнинә гајытсаг, аларыг:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+$$
$$+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C.$$

IV. Јухарыда көстәрилән чевирмәләр васитәсилә

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^{\kappa}}\,dx = \int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{(t^2+a^2)^{\kappa}}\,dt =$$
$$= \frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\kappa}}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{\kappa}}$$

аларыг. Сағ тәрәфдәки биринчи интеграл билаваситә һесабланыр:

$$\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\kappa}} = -\frac{1}{(\kappa-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{\kappa-1}}+C.$$

Икинчи

$$J_{\kappa} = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{\kappa}}$$

интегралы исә әввәлки параграфда рекуррент дүстур васитәсилә һесабланан интегралдыр (§ 4, мисал 11).

Бу гајда илә һәр бир IV нөв садә расионал кәсрин интегралы һесабланыр.

Апардығымыз мүһакимәдән ајдындыр ки, I—IV нөв садә расионал кәсрләрин интегралыны һәмишә һесабламаг мүмкүндүр. Бу кәсрләрин һәр биринин интегралы елементар функсијаларла (XI, § 19) ифадә олунур.

Мисал 1.

$$J = \int \frac{x+3}{x^2-2x+10}\,dx$$

интегралыны һесабламалы.

Бурада $x-1=t, dx=dt$ әвәзләмәсини апарсаг, аларыг:

$$J=\int \frac{x+3}{(x-1)^2+9}\,dx=\int \frac{(t+4)\,dt}{t^2+9}=\frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+9}+4\int \frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2+9)+\frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+10)+\frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{3}+C.$$

§ 6. РАСИОНАЛ КӘСРЛӘРИН САДӘ КӘСРЛӘРӘ АЈРЫЛМАСЫ

Һәр бир расионал (кәср) функсија ики чәбри чохһәдлинин нисбәти шәклиндә олур:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}. \qquad (1)$$

Расионал кәсрин сурәтиндәки $P(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәси мәхрәчиндәки $Q(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәсиндән кичик олдугда она дүзкүн, әкс һалда исә дүзкүн олмајан кәср дејилир. Дүзкүн олмајан һәр бир расионал кәсрин сурәтини мәхрәчинә бөләрәк, буну мүәјјән бир чохһәдли илә дүзкүн расионал кәсрин чәми шәклиндә көстәрмәк олар:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{\Phi(x)}{Q(x)}. \qquad (2)$$

Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини интегралласаг,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\int T(x)\,dx+\int \frac{\Phi(x)}{Q(x)}\,dx \qquad (3)$$

аларыг. $T(x)$ чәбри чохһәдлисинин интегралы билаваситә һесабланыр. Демәли, һәр бир расионал кәсрин интегралланмасы бир дүзкүн расионал кәсрин интегралланмасына кәтирилир. Дүзкүн расионал кәсрләр исә сонлу сајда садә расионал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилә билир. Беләликлә, һәр бир расионал кәсрин интегралы садә расионал кәсрләрин интегралына кәтириләрәк тамамилә һесабланыр.

Инди һәр бир дүзкүн расионал кәсрин сонлу сајда садә расионал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилә билдијини исбат едәк.

Фәрз едәк ки, $\Phi(x)$ вә $Q(x)$ һәгиги әмсаллы чәбри чохһәдлиләр вә

$$R(x)=\frac{\Phi(x)}{Q(x)} \qquad (4)$$

дүзкүн расионал кәсрдир. Әкәр һәгиги a әдәди мәхрәчин κ ($\kappa \geqslant 1$) дәфә тәкрарланан көкүдүрсә (XVIII, § 8), онда

$$Q(x)=(x-a)^{\kappa} Q_1(x), Q_1(a) \neq 0 \qquad (5)$$

олар.

Теорем 1. *Һәгиги a әдәди $Q(x)$ чохһәдлисинин κ дәфә тәкрарланан көкү олдугда, елә һәгиги A әдәди вә дәрәчәси $(x-a)^{\kappa-1} Q_1(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәсиндән кичик олан $P_1(x)$ чохһәдлиси вар ки,*

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\kappa}}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\kappa-1} Q_1(x)} \qquad (6)$$

бәрабәрлиjи өдәнилир.

Исбаты. (6) бәрабәрлиjинин өдәнилмәси үчүн

$$\Phi(x)=A Q_1(x)+P_1(x)(x-a)$$

олмалыдыр. Бурадан, $x=a$ олдугда

$$\Phi(a)=A Q_1(a)$$

вә jа $Q_1(a) \neq 0$ олдуғундан

$$A=\frac{\Phi(a)}{Q_1(a)}$$

аларыг. A-нын бу гиjмәтиндә $x=a$ әдәди

$$\Phi(x)-A Q_1(x) \qquad (7)$$

фәргинин көкүдүр. Буна көрә дә һәмин фәрг $x-a$ фәргинә бөлүнүр (XVIII, § 6). Демәли,

$$\frac{\Phi(x)-A Q_1(x)}{x-a}=P_1(x) \qquad (8)$$

ифадәси чәбри чохһәдлидир вә онун дәрәчәси сурәтин дәрәчәсиндән (jә'ни (7) чохһәдлисинин дәрәчәсиндән) бир ваһид аздыр. (7) чохһәдлисинин дәрәчәси исә $Q(x)$-ин дәрәчәсиндән ән азы бир ваһид кичикдир. Демәли, $P_1(x)$ чохһәдлисинин дәрәчәси $Q(x)$-ин дәрәчәсиндән ән азы ики ваһид, $(x-a)^{\kappa-1} Q_1(x)$-ин дәрәчәсиндән исә бир ваһид кичикдир.

Нәһаjәт, (6) бәрабәрлиjи

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\kappa}}+\frac{\Phi(x)-A Q_1(x)}{(x-a)^{\kappa} Q_1(x)}$$

еjнилиjиндән (8) бәрабәрлиjинә әсасән алыныр.

Инди фәрз едәк ки, $\alpha=a+ib$ комплекс әдәди һәгиги әмсаллы $Q(x)$ чохһәдлисинин m дәфә тәкрарланан көкүдүр. Онда $\bar{\alpha}=a-ib$ әдәди дә онун m дәфә тәкрарланан көкү олар (XVIII, § 9) вә һәмин чохһәдли һәгиги әмсаллы

$$x^2+px+q=[x-(a+ib)][x-(a-ib)]$$
$$(p=-2a,\ q=a^2+b^2)$$

квадрат үчһәдлисинин m-чи дәрәчәдән гүввәтинә бөлүнәр:

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_2(x). \qquad (9)$$

Теорем 2. ***Һәгиги әмсаллы $Q(x)$ чоxһәдлиси үчүн (9) бәрабәрлији доғру олдуғда, елә һәгиги B вә C әдәдләри вә дәрәчәси $(x^2+px+q)^{m-1}\, Q_2(x)$ чоxһәдлисинин дәрәчәсиндән кичик олан $P_2(x)$ чоxһәдлиси вар ки,***

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\, Q_2(x)} \qquad (10)$$

ејнилији өдәнилир.

Исбаты. (10) ејнилијинин һәр ики тәрәфини $Q(x)$ ифадәсинә вурмагла

$$\Phi(x) = (Bx + C)\, Q_2(x) + (x^2 + px + q)\, P_2(x) \qquad (11)$$

мүнасибәтини аларыг. Бурадан x әвәзинә $\alpha = a + ib$ вә $\bar{\alpha} = a - ib$ јазмагла, B вә C әдәдләрини тапмаг үчүн

$$\begin{cases} \Phi(\alpha) = (B\alpha + C)\, Q_2(\alpha) \\ \Phi(\bar{\alpha}) = (B\bar{\alpha} + C)\, Q_2(\bar{\alpha}) \end{cases} \qquad (12)$$

системи алыныр.

$\Phi(x)$ вә $Q_2(x)$ чоxһәдлиләри һәгиги әмсаллы чоxһәдли олдуғундан $\frac{\Phi(\alpha)}{Q_2(\alpha)}$ вә $\frac{\Phi(\bar{\alpha})}{Q_2(\bar{\alpha})}$ әдәдләри гаршылыглы гошма комплекс әдәдләрдир:

$$\frac{\Phi(\alpha)}{Q_2(\alpha)} = M + iN, \quad \frac{\Phi(\bar{\alpha})}{Q_2(\bar{\alpha})} = M - iN.$$

Бу бәрабәрликләрдән истифадә едәрәк (12) системини

$$\begin{cases} B\alpha + C = M + iN \\ B\bar{\alpha} + C = M - iN \end{cases}$$

кими јазмаг олар. Бурадан B вә C тапылыр:

$$B = \frac{N}{b}, \quad C = M - \frac{Na}{b}. \qquad (13)$$

(11) мүнасибәтиндән ајдындыр ки, B вә C-нин тапдығымыз гијмәтләриндә

$$\Phi(x) - (Bx + C)\, Q_2(x)$$

фәрги $x^2 + px + q$ квадрат үчһәдлисинә бөлүнүр. Беләликлә, ахтардығымыз $P_2(x)$ чоxһәдлиси

$$P_2(x) = \frac{\Phi(x) - (Bx + C)\, Q_2(x)}{x^2 + px + q} \qquad (14)$$

шәклиндә тапылыр. (13) вә (14) мүнасибәтләриндән тапылмыш B, C әдәдләри вә $P_2(x)$ чоxһәдлиси үчүн (10) ејнилијинин доғрулуғу ајдындыр.

Нәтичә. Һәр бир дүзкүн расионал кәср сонлу сајда садә расионал кәсрләрин чәми шәклиндә көстәрилир.

Доғр дан да, тутаг ки, $R(x) = \frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кәсри верилмишдир вә онун мәхрәҹи n дәрәҹәли ҹәбри чохһәдлидир:

$$Q(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$$

(үмумилији азалтмадан x^n-ин әмсалыны ваһид һесаб едирик).

Бу чохһәдлини бир вә икидәрәҹәли һәгиги вуругларын һасили шәклиндә көстәрмәк олар (XVIII, § 9):

$$Q(x) = (x - a_1)^{\nu_1} \ldots (x - a_k)^{\nu_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}$$

$$(n = \nu_1 + \ldots + \nu_k + 2\mu_1 + \ldots + 2\mu_s,\ p_i^2 - 4q_i < 0,\ i = \overline{1,s}).$$

Онда $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кәсринә 1-ҹи теореми тәтбиг едә биләрик:

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - a_1)^{\nu_1 - 1} Q_1(x)}.$$

Сағ тәрәфдәки икинҹи һәдд дә дүзкүн расионал кәсрдир. $\nu_1 - 1 > 1$ олдугда она јенидән 1-ҹи теореми тәтбиг етсәк,

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1 - 1}} + \frac{P_2(x)}{(x - a_1)^{\nu_1 - 2} Q_1(x)}$$

аларыг. Бу просеси ардыҹыл давам етдирәрәк тапырыг:

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1 - 1}} + \cdots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \frac{P_{\nu_1}(x)}{Q_1(x)}$$

Сағ тәрәфдәки ахырынҹы һәдд дә дүзкүн расионал кәсрдир. Она јенидән $(x - a_2)^{\nu_2}, \ldots, (x - a_k)^{\nu_k}$ вуругларына нәзәрән 1-ҹи теореми ардыҹыл тәтбиг етсәк,

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1 - 1}} + \cdots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_1}{(x - a_k)^{\nu_k}} + \frac{B_2}{(x - a_k)^{\nu_k - 1}} + \cdots + \frac{B_{\nu_k}}{x - a_k} + \frac{\Phi_1(x)}{Q^*(x)},$$

$$Q^*(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{\mu_s}$$

аларыг. Инди сағ тәрәфдә алынмыш сонунҹу $\frac{\Phi_1(x)}{Q^*(x)}$ һәддинин дүзкүн расионал кәср олдуғуну нәзәрә алараг, она ардыҹыл олараг 2-ҹи теореми тәтбиг етсәк, нәтиҹәдә тәләб олунан үмуми

$$\frac{\Phi(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_2}{(x - a_1)^{\nu_1 - 1}} + \cdots + \frac{A_{\nu_1}}{x - a_1} + \cdots +$$

$$+ \frac{B_1}{(x - a_k)^{\nu_k}} + \frac{B_2}{(x - a_k)^{\nu_k - 1}} + \cdots + \frac{B_{\nu_k}}{x - a_k} +$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\cdots+\frac{C_{\mu_1}x+D_{\mu_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+$$

$$+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}}+\cdots+\frac{E_{\mu_s}x+F_{\mu_s}}{x^2+p_sx+q_s} \qquad (15)$$

ajрылышы алыныр ки, бу да нәтиҹәнин доғру олдуғуну көстәрир.

§ 7. РАСИОНАЛ КӘСРЛӘРИН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

Әввәлки параграфда көстәрдик ки, һәр бир расионал кәсрин интегралланмасы дүзкүн расионал кәсрин интегралланмасына кәтирилир. Дүзкүн расионал кәсрләр исә сонлу сајда садә расионал кәсрләрин ҹәми шәклиндә көстәриләбилдијиндән (§ 6, (15)) һәр бир дүзкүн расионал кәсрин интегралланмасы I—IV нөв садә расионал кәсрләрин интегралланмасына кәтирилир. Истәнилән садә расионал кәсрин интегралы тамамилә һесаблана билир вә бу интеграллар елементар функсијаларла сонлу шәкилдә ифадә олунур (§ 5).

Демәли, һәр бир расионал кәсрин интегралы тамамилә һесаблана билир вә онун нәтиҹәси елементар функсијалар васитәсилә ифадә олунур.

Расионал кәсрин интеграллanмасында әсас чәтинлик онун садә расионал кәсрләрин ҹәми шәклиндә көстәрилмәсидир. Бу мәгсәдлә онун мәхрәҹини вуруглара ајырмаг вә ajрылышын әмсалларыны (§ 6-да јазылмыш (15) дүстурунда иштирак едән $A_i\left(i=\overline{1,\nu_1}\right)$, $B_i\left(i=\overline{1,\nu_k}\right)$, ... E_i вә $F_i\left(i=\overline{1,\mu_s}\right)$ әмсалларыны) тапмаг лазымдыр.

Һәр бир расионал кәсрин мәхрәҹи сонлу дәрәҹәли ҹәбри чохһәдлидир. $Q(x)$ чохһәдлисини вуруглара ajырмаг принсипҹә һәмишә мүмкүндүр (XVIII, § 9), лакин бу мәсәлә $Q(x)=0$ ҹәбри тәнлијини һәлл етмәјә еквивалентдир ки, бу да чох заман асан олмур. Анҹаг дәрәҹәси дөрддән бөјүк олмаjан истәнилән ҹәбри тәнлијин һәлли үсулу мә'лумдур. Дәрәҹәси беш вә бешдән бөјүк олан истәнилән ҹәбри тәнлијин көкләрини әмсаллары васитәсилә ифадә едән дүстур исә мә'лум дејилдир. Бу да расионал кәсрләрин садә кәсрләрә ajрылмасында гаршыја чыхан әсас чәтинликдир.

Әкәр мүәjјән үсуллар васитәсилә $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ дүзкүн расионал кәсринин мәхрәҹи

$$Q(x)=(x-a_1)^{\nu_1}\cdots(x-a_k)^{\nu_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}$$

кими вуруглара ajрылмышдырса, онда һәмин расионал кәср үчүн әввәлки параграфда јазылмыш (15) ajрылышы доғру олмалыдыр. Бу ајрылышын әмсалларыны хүсуси гајдалар вә ја гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу илә тапмаг олар.

Гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу беләдир: (15) дүстурунун сағ тәрәфи үмуми мәхрәчә кәтирилир, алынан бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $Q(x)$-ә вурараг ики чохһәдлинин бәрабәрлији алыныр. Сол тәрәфдә расионал кәсрин сурәти олан мә'лум әмсаллы $\Phi(x)$ чохһәдлиси, сағ тәрәфдә исә әмсаллары ахтарылан намә'лум әмсаллардан асылы олан чохһәдли олур. Ики чохһәдлинин бәрабәр олмасы үчүн x-ин ејни дәрәчәли гүввәтләринин әмсаллары бәрабәр олмалыдыр. Беләликлә, ахтарылан әмсаллары тапмаг үчүн хәтти тәнликләр системи алыныр.

Бә'зән (15) ајрылышында иштирак едән намә'лум әмсаллары тапмаг үчүн јухарыда көстәрдијимиз кими алынан бәрабәрликдә x-ин ејни дәрәчәли гүввәтләринин әмсалларыны бәрабәр көтүрмәк әвәзинә, x-ә намә'лум әмсалларын сајы гәдәр гијмәтләр верәрәк, һәмин әмсаллары тапмаг үчүн хәтти тәнликләр системи алмаг олар. Бу заман x-ә мәхрәчин көкү олан гијмәтләри вермәк бә'зән әлверишли олур.

Инди бир нечә мисал һәлл едәк.

Мисал 1. $\int \frac{5x^2 - x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx$ интегралыны һесабламалы.

Интеграл алтындакы ифадә дүзкүн расионал кәсрдир. Интегралы һесабламаг үчүн һәмин кәсри садә расионал кәсрләрә ајырмаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә әввәлчә мәхрәчдәки чохһәдлини вуруглара ајырмалыјыг. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ тәнлијини һәлл едәрәк, онун $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ вә $x_3 = 3$ көкләрини тапырыг:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Инди һәмин кәср үчүн

$$\frac{5x^2 - x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \qquad (1)$$

ајрылышыны јазаг. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $(x-1)(x-2)(x-3)$ ифадәсинә вурсаг,

$$5x^2 - x + 3 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) \qquad (2)$$

бәрабәрлијини аларыг. Бурадан A, B вә C әмсалларыны ики јолла тапмаг олар:

I. (2) бәрабәрлијиндә x-ә нөвбә илә $x = 1$, $x = 2$ вә $x = 3$ гијмәтләрини версәк,

$$\begin{cases} 7 = A\cdot(-1)\cdot(-2) \\ 21 = B\cdot 1\cdot(-1) \\ 45 = C\cdot 2\cdot 1 \end{cases} \qquad (3)$$

хәтти тәнликләр системи алынар. Бурадан

$$A = \frac{7}{2}, \; B = -21, \; C = \frac{45}{2}.$$

II. (2) бәрабәрлиjинин сағ тәрәфини каноник чохһәдли шәклиндә jазсаг,

$$5x^2 - x + 3 = (A + B + C)\,x^2 + (-5A - 4B - 3C)\,x + \\ + (6A + 3B + 2C)$$

олар. Бурадан, x-ин еjни дәрәчәли гүввәтләринин әмсаллары-ны бәрабәр һесаб етмәклә

$$\begin{cases} A + B + C = 5, \\ -5A - 4B - 3C = -1, \\ 6A + 3B + 2C = 3 \end{cases} \qquad (4)$$

хәтти тәнликләр системини аларыг. Бу системи һәлл етдикдә әмсаллар үчүн јенә дә һәмин гиjмәтләр тапылыр:

$$A = \frac{7}{2},\ B = -21,\ C = \frac{45}{2}.$$

Лакин (4) системи (3) системиндән чәтин һәлл олунур. Буна көрә дә бу мисалда I үсулла (аргументә гиjмәтләр вермәклә) хәтти тәнликләр системи алыб, әмсаллары орадан тапмаг даһа әлверишлидир.

Нәтичәдә, (1) бәрабәрлиjи

$$\frac{5x^2 - x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - 21\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{45}{2}\cdot\frac{1}{x-3}$$

шәклиндә олар вә

$$\int \frac{5x^2 - x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx = \frac{7}{2}\int\frac{dx}{x-1} - 21\int\frac{dx}{x-2} + \frac{45}{2}\int\frac{dx}{x-3} = \\ = \frac{7}{2}\ln|x-1| - 21\ln|x-2| + \frac{45}{2}\ln|x-3| + C.$$

Мисал 2. $\int \frac{x^3 - 5x + 1}{x^4 - 3x^2 - 4}\,dx$ интегралыны һесабламалы. Бунун үчүн интеграл алтындакы расионал кәсрин мәхрәчини вуруг-лара аjыраг:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 = (x^2 - 4)\,x^2 + (x^2 - 4) = \\ = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Онда расионал кәсри

$$\frac{x^3 - 5x + 1}{(x^2+1)(x-2)(x+2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

кими садә расионал кәсрләрә аjырмаг олар. Бурадан

$$x^3 - 5x + 1 = (Ax + B)(x - 2)(x + 2) + \\ + C(x^2 + 1)(x + 2) + D(x^2 + 1)(x - 2)$$

вә jахуд

$$x^3 - 5x + 1 = (A + C + D)\,x^3 + (B + 2C - 2D)\,x^2 + \\ + (-4A + C + D)\,x + (-4B + 2C - 2D)$$

бәрабәрлиjини аларыг. x-ин еjни дәрәчәли гүввәтләринин әмсалларыны бәрабәр һесаб едәк:

$$\begin{cases} A+C+D=1, \\ B+2C-2D=0, \\ -4A+C+D=-5, \\ -4B+2C-2D=1. \end{cases}$$

Бу хәтти тәнликләр системи һәлл едиләрәк әмсаллар

$$A=\frac{6}{5},\quad B=-\frac{1}{5},\quad C=-\frac{1}{20},\quad D=-\frac{3}{20}$$

кими тапылыр. Демәли,

$$\int\frac{x^3-5x+1}{x^4-3x^2-4}dx=\int\frac{\frac{6}{5}x-\frac{1}{5}}{x^2+1}dx+\int\frac{-\frac{1}{20}}{x-2}dx+\int\frac{-\frac{3}{20}}{x+2}dx=$$

$$=\frac{3}{5}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{20}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{3}{20}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{3}{5}\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{20}\ln|x-2|-\frac{3}{20}\ln|x+2|+C.$$

Шәрһ етдијимиз үсул истәнилән расионал функсијанын интегралланмасына тәтбиг олуна биләр. Лакин һәр бир расионал функсијанын интегралланмасына бу үсулу механики олараг тәтбиг етмәк олмаз. Бә'зи расионал функсијаларын интегралыны хүсуси јоллар вә әвәзләмәләр васитәсилә һесабламаг даһа әлвериш и олур. Мәсәлән,

$$\int\frac{x\,dx}{x^4+1}$$

интегралыны һесабламаг үчүн $\frac{x}{x^4+1}$ расионал кәсрини садә расионал кәсрләрә ајырмаға еһтијач јохдур. $x^2=t$ әвәзләмәсиндән истифадә етсәк,

$$\int\frac{x\,dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^2+C.$$

Бурада бир чәһәти хүсуси гејд етмәк лазымдыр. Јухарыда көстәрдик ки, истәнилән расионал кәсрин интегралы принсипчә һәмишә ахыра кими һесабланыр вә онун нәтичәси елементар функсијаларла сонлу шәкилдә ифадә олунур. Бу чох мүһүм вә әһәмијјәтли нәтичәдир. Һәр һансы бир функсијанын интегралыны мүәјјән чевирмә вә әвәзләмәләр васитәсилә расионал функсијанын интегралына кәтирмәк мүмкүн оларса, јухарыда көстәрилән үсулла һәмин интегралы һесабламаг олар.

Демәли, мүәјјән расионал функсијанын интегралына кәтириләбилән һәр бир интеграл принсипчә һәмишә тамамилә һесаблана биләр. Бу чох мүһүм тәклифдән охучу белә бир нәтичә чыхармамалыдыр ки, истәнилән елементар функсијанын интегралыны һәмишә сонлу сајда елементар функсијаларла көстәрмәк мүмкүн олур.

Бир чох елементар функсиjаларын интегралыны сонлу саjда елементар функсиjалар васитәсилә ифадә етмәк мүмкүн деjилдир. Мәсәлән, $\int \frac{dx}{\ln x}$ (интеграл логарифм), $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ (интеграл синус), $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$ (интеграл косинус), $\int \sin x^2\, dx$ вә $\int \cos x^2\, dx$ (Френел интеграллары), $\int e^{-x^2}\, dx$ (еһтималлар интегралы), $\int \frac{e^x\, dx}{x}$ (интеграл үстлү функсиjа) вә с. интегралларыны сонлу саjда елементар функсиjаларла ифадә етмәк мүмкүн деjилдир.

Биз кәләчәкдә көрәчәjик ки, jухарыда jаздығымыз интеграллар алтындакы функсиjаларын һамысынын ибтидаи функсиjалары вардыр, лакин бу ибтидаи функсиjалар елементар функсиjалар деjилдир.

Мәсәлән,

$$F_1'(x) = e^{-x^2},\ F_2'(x) = \frac{\sin x}{x},\ F_3'(x) = \frac{1}{\ln x}, \ldots$$

мүнасибәтләрини өдәjән $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$ ибтидаи функсиjалары геjри-елементар функсиjалардыр (XI, § 19).

$P_m(x)$ вә $Q_n(x)$ функсиjалары уjғун олараг m вә n дәрәчәли чәбри чохһәдлиләр олдугда,

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{Q_n(x)}}\, dx \qquad (5)$$

интегралы да $n > 2$ олдугда, әксәр һалларда елементар функсиjаларла ифадә олунмур. $n = 3$ вә $n = 4$ олдугда (5) интегралына *еллиптик*, $n > 4$ олдугда исә она *һипереллиптик* интеграл деjилир. Хүсуси һалда,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 x}} \text{ вә } \int \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 x}\, dx$$

интеграллары уjғун олараг Лежандр шәклиндә *биринчи вә икинчи чинс еллиптик* интеграллар адланыр.

Геjд едәк ки, n натурал әдәд олдугда

$$\int \frac{\sin x}{x^n}\, dx,\ \int \frac{\cos x}{x^n}\, dx,\ \int \frac{e^x}{x^n}\, dx$$

интеграллары да елементар функсиjалар васитәсилә ифадә олунмур.

§ 8. САДӘ ИРРАСИОНАЛ ФУНКСИJАЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ

1. Истәнилән иррасионал функсиjанын (XI, § 20) интегралыны һәмишә һесабламаг вә нәтичәни елементар функсиjаларла ифадә етмәк мүмкүн олмур. Лакин елә садә иррасионал функсиjалар вар ки, онларын интегралыны расионал функси-

јаларын интегралына кәтирмәк олар. Расионал функсијаларын интегралыны исә һәмишә һесабламаг мүмкүндүр (§ 7).

Тутаг ки $U_1, U_2, \ldots, U_n$ дәјишәнләринә нәзәрән чохһәдли олан

$$P(U_1, \ldots, U_n) = \sum_{\kappa_1+\cdots+\kappa_n \leq m} a_{\kappa_1,\ldots,\kappa_n} U_1^{\kappa_1} \ldots U_n^{\kappa_n}$$

вә

$$Q(U_1, \ldots, U_n) = \sum_{\kappa_1+\cdots+\kappa_n \leq N} b_{\kappa_1,\ldots,\kappa_n} U_1^{\kappa_1} \ldots U_n^{\kappa_n}$$

верилмишдир. Онда

$$R(U_1, \ldots, U_n) = \frac{P(U_1, \ldots, U_n)}{Q(U_1, \ldots, U_n)}$$

шәклиндә ифадәјә $U_1, \ldots, U_n$ дәјишәнләринин расионал функсијасы дејилир. Мәсәлән,

$$R(x, \sqrt{x}) = \frac{5x + 3(\sqrt{x})^3}{2\sqrt{x}},$$

$$R(\sqrt{x+1}, \sqrt{x}, x) = \frac{(\sqrt{x+1})\,x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 3x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 5\sin x \cos x} \text{ вә с.}$$

2. Тутаг ки,

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx \qquad (1)$$

интегралыны һесабламаг лазымдыр. Бурада $r_1, r_2, \ldots, r_n$ расионал әдәдләрдир. $r_\kappa = \frac{p_\kappa}{q_\kappa}$ $(\kappa = \overline{1, n})$ кәсрләринин үмуми мәхрәҹи N олдугда (1) интегралында

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N \qquad (2)$$

әвәзләмәсини апармаг олар. Бу һалда $Nr_\kappa = \mu_\kappa$ гәбул етмәклә

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_\kappa} = t^{Nr_\kappa} = t^{\mu_\kappa} \ (\kappa = \overline{1, n}),$$

$$x = \frac{dt^N - b}{a - ct^N}, \quad dx = \frac{dNt^{N-1}(a - ct^N) + cNt^{N-1}(dt^N - b)}{(a - ct^N)^2}\, dt$$

аларыг вә (1) интегралы

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx =$$

$$= \int R\left[\frac{d \cdot t^N - b}{a - ct^N}, t^{\mu_1}, \ldots, t^{\mu_n}\right] \frac{(adN - cbN)\,t^{N-1}}{(a - ct^N)^2}\, dt$$

шәклиндә јазылар. Сағ тәрәфдәки интеграл алтындакы ифадә t-

нин расионал функсиjасыдыр. Беләликлә, (1) интегралы (2) әвәзләмәси васитәсилә расионал функсиjанын интегралына кәтирилир:

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right] dx = \int R_1(t)\, dt.$$

Расионал кәсрин интегралыны һесабладыгдан сонра t әвәзинә

$$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

jазмаг лазымдыр.

Геjд едәк ки, хүсуси һалда (1) интегралы

$$\int R\left(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_n}\right) dx,$$

$$\int R\left[x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_n}\right] dx$$

вә с. шәклиндә ола биләр.

Мисал 1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx$ интегралыны һесабламалы.

Бу мәгсәдлә

$$x = t^6,\ dx = 6t^5\, dt$$

әвәзләмәсиндән истифадә едәк. Онда:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{t^2 \cdot 6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^5\, dt}{t+1} = 6\int \Big(t^4 - t^3 +$$

$$+ t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\Big) dt = \frac{6}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 - 3t^2 +$$

$$+ 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

Мисал 2. $\int x\sqrt{x-1}\, dx$ интегралыны һесабламаг үчүн $\sqrt{x-1} = t$ әвәзләмәсиндән истифадә етмәк лазымдыр:

$$\sqrt{x-1} = t,\ x-1 = t^2,\ x = 1+t^2,\ dx = 2t\,dt.$$

Онда

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (1+t^2)\, t\, 2t\, dt = 2\int t^2\, dt + 2\int t^4\, dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + C.$$

§ 9. ЕJЛЕР ӘВӘЗЛӘМӘЛӘРИ

Дәjишә и әвәзетмә васитәсилә

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,\ a \neq 0 \qquad (1)$$

шәклиндә һәр бир интеграл расионал функсиjанын инте-