П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ II

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов втузов

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
1974

УДК 517 + 519.2 (0.76)

Данко П. Е. и Попов А. Г.

Д17 Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II. Изд. 2-е. Учеб. пособие для втузов. М., «Высш. школа», 1974.
464 с. с ил.

Содержание II части охватывает следующие разделы программы: двойные и тройные интегралы; криволинейные интегралы и интегралы по поверхности; ряды; обыкновенные дифференциальные уравнения; элементы теории вероятностей; понятие об уравнениях в частных производных; элементы теории функций комплексного переменного; элементы операционного исчисления; методы вычислений; элементы линейного программирования.

В каждом параграфе приводится необходимый теоретический материал. Типовые задачи даются с подробными решениями.

Предназначается для студентов втузов.

Д $\frac{0223-485}{001\,(01)-74}$ 58—74

Рецензент канд. физ.-матем. наук В. А. МАНЕВИЧ

Павел Ефимович Данко
Александр Георгиевич Попов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ II

Редактор А. М. Суходский. Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор В. Н. Яшукова. Корректор Н. В. Гераськина

Сдано в набор 10/VII-73 г. Подп. к печати 23/XI-73 г. Формат 84×108/32.
Бум. тип. — № 3. Объем 14,5 печ. л. Усл. п. л. 24,36. Уч.-изд. л. 21,91.
Изд. № ФМ—537. Тираж 100 000 экз. Зак. № 720. Цена 77 коп.

План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1974 г. Позиция № 58.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14, Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Глава I. Двойные и тройные интегралы	
§ 1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах	6
§ 2. Замена переменных в двойном интеграле	11
§ 3. Вычисление площадей плоских фигур	15
§ 4. Вычисление объемов	18
§ 5. Вычисление площади поверхности	21
§ 6. Приложения двойного интеграла к механике	25
§ 7. Тройной интеграл	30
§ 8. Приложения тройных интегралов	35
Глава II. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности	
§ 1. Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам	39
§ 2. Независимость криволинейного интеграла II рода от контура интегрирования. Нахождение функции по ее полному дифференциалу	45
§ 3. Формула Грина	48
§ 4. Вычисление площадей	51
§ 5. Поверхностные интегралы	52
§ 6. Формулы Стокса и Остроградского—Гаусса. Элементы теории поля	56
Глава III. Ряды	
§ 1. Числовые ряды	63
§ 2. Функциональные ряды	78
§ 3. Степенные ряды	85
§ 4. Разложение функций в степенные ряды	93
§ 5. Приближенные вычисления значений функций при помощи степенных рядов	97
§ 6. Применение степенных рядов к вычислению пределов и определенных интегралов	104
§ 7. Комплексные числа и ряды с комплексными членами	107
§ 8. Ряд Фурье	120
§ 9. Интеграл Фурье	131
Глава IV. Обыкновенные дифференциальные уравнения	
§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	137
§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков	173
§ 3. Линейные уравнения высших порядков	182

§ 4. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов 208
§ 5. Системы дифференциальных уравнений 216

Глава V. Элементы теории вероятностей

§ 1. Случайное событие, его частота и вероятность . . . 231
§ 2. Аксиомы сложения и умножения вероятностей . . . 233
§ 3. Повторение испытаний 239
§ 4. Формула полной вероятности. Формула Бейеса . . . 241
§ 5. Случайные величины и законы их распределения 246
§ 6. Математическое ожидание случайной величины. Дисперсия 252
§ 7. Мода и медиана 256
§ 8. Равномерное распределение плотности 258
§ 9. Биномиальный закон распределения. Закон Пуассона 259
§ 10. Нормальный закон распределения и функция Лапласа 263
§ 11. Моменты случайной величины 266
§ 12. Закон больших чисел 272
§ 13. Теорема Муавра—Лапласа 276
§ 14. Системы случайных величин 278
§ 15. Линии регрессии. Корреляция 291

Глава VI. Понятие об уравнениях в частных производных

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных 299
§ 2. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных 302
§ 3. Типы уравнений второго порядка в частных производных. Приведение к каноническому виду . . . 303
§ 4. Уравнение колебания струны 309
§ 5. Уравнение теплопроводности 316
§ 6. Задача Дирихле для круга 325

Глава VII. Элементы теории функций комплексного переменного

§ 1. Функции комплексного переменного. Непрерывность 329
§ 2. Производные функций комплексного переменного 333
§ 3. Понятие об конформном отображении 337
§ 4. Интеграл по комплексному переменному 341
§ 5. Ряды Тейлора и Лорана 347
§ 6. Вычисление вычетов функций. Применение вычетов к вычислению интегралов 355

Глава VIII. Элементы операционного исчисления

§ 1. Нахождение изображений функций 362
§ 2. Отыскание оригинала по изображению 364
§ 3. Свертка функций. Изображение производных и интеграла от оригинала 369
§ 4. Применение операционного исчисления к решению некоторых дифференциальных и интегральных уравнений 372
§ 5. Общая формула обращения 375

Глава IX. Методы вычислений

§ 1. Приближенное решение уравнений 378
§ 2. Интерполирование 392
§ 3. Приближенное вычисление определенных интегралов 398
§ 4. Численное интегрирование дифференциальных уравнений 405
§ 5. Метод Пикара последовательных приближений . . . 413
§ 6. Простейшие способы обработки опытных данных 417

Глава X. Линейное программирование

§ 1. Линейные неравенства и область решений системы линейных неравенств 429
§ 2. Основная задача линейного программирования . . . 433
§ 3. Симплекс-метод 437
§ 4. Двойственные задачи 454
§ 5. Транспортная задача 457

ГЛАВА I

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть функция $f(x, y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей, имеющих площади $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ и диаметры $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (*диаметром области* называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $P_k(\xi_k; \eta_k)$ и умножим значение функции в этой точке на площадь элементарной области.

Интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по области D называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1)\,\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\,\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\,\Delta\sigma_n.$$

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы при условии, что наибольший из диаметров элементарных областей стремится к нулю:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения области D на элементарные и от выбора точек P_k (*теорема о существовании* двойного интеграла).

Если $f(x, y) > 0$ в области D, то двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$$

равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и снизу областью D плоскости xOy.

Основные свойства двойных интегралов

1) $\iint\limits_D [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\,d\sigma = \iint\limits_D f_1(x, y)\,d\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x, y)\,d\sigma.$

2) $\iint\limits_D c\cdot f(x, y)\,d\sigma = c\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, где c — постоянная.

3) Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, d\sigma.$$

В декартовых координатах двойной интеграл обычно записывают в виде

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Правила вычисления двойных интегралов

Различают два основных вида области интегрирования.

1) Область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, а снизу и сверху — непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x))$, каждая из которых пересекается вертикальной прямой только в одной точке (рис. 1).

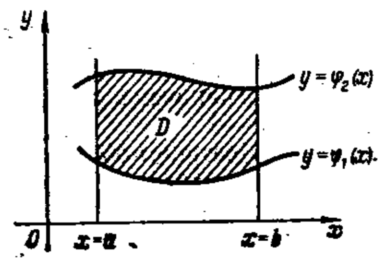

Рис. 1

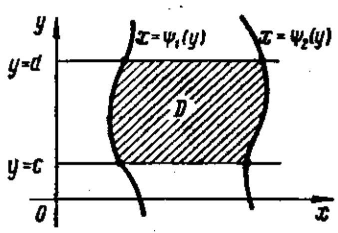

Рис. 2

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

причем сначала вычисляется интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$, в котором x считается постоянным.

2) Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми $y=c$ и $y=d$ $(c<d)$, а слева и справа — непрерывными кривыми $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y))$, каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке (рис. 2).

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

причем сначала вычисляется интеграл $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$, в котором y считается постоянным.

Правые части указанных формул называются *двукратными*, или *повторными* интегралами.

В более общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к основным.

№ 1. Вычислить $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)\,dy.$

Решение. Имеем

$$I=\int\limits_1^2\left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2}dx=\int\limits_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=0,9.$$

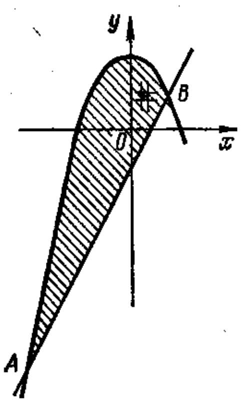

Рис. 3

№ 2. Вычислить $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

Решение. Построим область D. Первая линия — парабола с вершиной в точке (0; 2), симметричная относительно оси Oy. Вторая линия — прямая. Решая совместно два уравнения $y=2-x^2$ и $y=2x-1$, найдем координаты точек пересечения A и B: $A(-3;\ -7)$, $B(1;\ 1)$ (рис. 3).

Область интегрирования принадлежит к первому виду. Имеем:

$$\iint\limits_D (x-y)\,dxdy=\int\limits_{-3}^{1}dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2}dx=\int\limits_{-3}^{1}\Big(2x-x^3-2+2x^2-$$

$$-\frac{1}{2}x^4-2x^2+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\Big)dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1}=4\frac{4}{15}.$$

№ 3. Переменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy.$$

Решение. Область интегрирования D ограничена линиями (рис. 4)

$$x=-1,\ x=1,\ y=-\sqrt{1-x^2},\ y=1-x^2.$$

Изменим порядок интегрирования, для чего заданную область представим в виде двух областей (второго вида): D_1, ограниченную слева и справа ветвями параболы $x=\pm\sqrt{1-y}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$, и D_2, ограниченную дугами окружности $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1\leqslant y\leqslant 0)$.

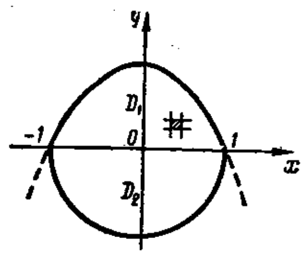

Рис. 4

Тогда

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\, dy=$$

$$=\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\, dx+\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

№ 4. Вычислить $\int_{0}^{2\pi} \cos^2 x\, dx \int_{0}^{a} y\, dy$.

Ответ. $\frac{\pi a^2}{2}$.

№ 5. Вычислить $\int_{1}^{3} dx \int_{x^2}^{x} (x-y)\, dy$.

Ответ. $112\frac{8}{105}$.

№ 6. Вычислить $\iint_D y\ln x\, dx\, dy$, если область D ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

Ответ. $\frac{5}{8}(2\ln 2-1)$.

№ 7. Вычислить $\iint\limits_D (\cos 2x+\sin y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x=0,\ y=0,\ 4x+4y-\pi=0$.

Ответ. $\frac{1}{4}(\pi+1-2\sqrt{2})$.

№ 8. Вычислить $\iint\limits_D (3x+y)\,dx\,dy$, если область D определяется неравенствами $x^2+y^2\leqslant 9,\ y\geqslant \frac{2}{3}x+3$.

Ответ. $-2\frac{94}{169}$.

№ 9. Вычислить $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x=0,\ y=\frac{\pi}{2},\ y=x$.

Ответ. 1.

№ 10. Вычислить $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, если область D—треугольник с вершинами $A(2;\ 3)$, $B(7;\ 2)$, $C(4;\ 5)$.

Ответ. 26.

Переменить порядок интегрирования:

№ 11. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,\ y)\,dy$.

Ответ. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,\ y)\,dx+\int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,\ y)\,dx$.

№ 12. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x,\ y)\,dy$.

Ответ. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,\ y)\,dx$.

№ 13. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx$.

Ответ. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,\ y)\,dy$.

№ 14. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,\ y)\,dy$.

Ответ. $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y)\,dx.$

№ 15. $\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

Ответ. $\int_0^{1/2} dy \int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_{1/2}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

№ 16. $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y)\,dy.$

Ответ. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\,dx.$

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

1. Двойной интеграл в полярных координатах. Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к *полярным координатам* ρ, θ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Если область интегрирования D ограничена двумя лучами, выходящими из полюса, $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$, и двумя кривыми $\rho = \rho_1(\theta)$ и $\rho = \rho_2(\theta)$, где $\rho_1(\theta)$ и $\rho_2(\theta)$ — однозначные функции при $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ и $\rho_1(\theta) \leqslant \rho_2(\theta)$, то *двойной интеграл вычисляется по формуле*

$$\iint_D F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho,$$

где $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, причем сначала вычисляется интеграл $\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho$, в котором θ считается постоянным.

2. Двойной интеграл в криволинейных координатах. Пусть двойной интеграл преобразуется от прямоугольных координат x, y к *криволинейным координатам* u, v, связанным с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

где функции $x(u, v)$, и $y(u, v)$, имеют непрерывные частные производные в области D' плоскости $uO'v$ и *якобиан преобразования* в области D' не обращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом устанавливается взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области D плоскости xOy и точками области D' плоскости $uO'v$ (рис. 5).

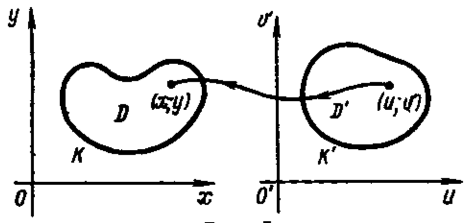

Рис. 5

Формула преобразования двойного интеграла в этом случае имеет вид

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\,|J|\,dudv.$$

Для случая полярных координат

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

№ 17. Перейдя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, если D — I четверть круга $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Решение. Полагая $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, имеем:

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D} \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\;\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a} \rho^2\,d\rho = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}.$$

№ 18. Вычислить $\iint\limits_{D} \ln(x^2+y^2)\,dxdy$, если область D есть кольцо между окружностями $x^2+y^2=e^2$ и $x^2+y^2=e^4$.

Решение. Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_D \ln\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = 2\iint\limits_D \rho\ln\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_e^{e^2} \rho\ln\rho\,d\rho.$$

Взяв по частям интеграл, зависящий от ρ, получим

$$2\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho - \frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2} d\theta = \pi e^2(3e^2-1).$$

№ 19. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$, если область D — квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ (рис. 6).

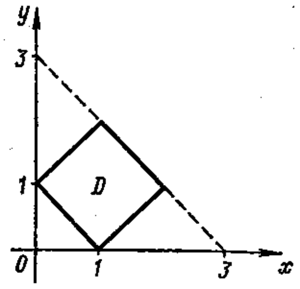

Рис. 6

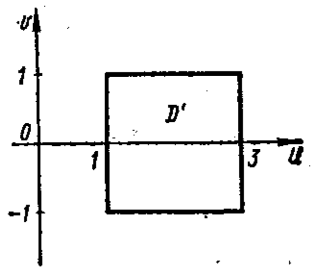

Рис. 7

Решение. Положим $x+y=u$, $x-y=v$, откуда $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$. Тогда якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \text{ т. е. } |J| = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D'} u^3v^2\,dudv.$

Поскольку область D' является также квадратом (рис. 7), то

$$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3\,du \int\limits_{-1}^1 v^2\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^3\cdot\frac{1}{3}v^3\Big|_{-1}^1 du = \frac{1}{6}\int\limits_1^3 u^3(1+1)\,du = \frac{1}{12}u^4\Big|_1^3 = \frac{20}{3}.$$

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

№ 20. $\iint\limits_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$, если область D — круг $x^2+y^2 \leqslant \pi^2$.

Ответ. $2\pi^2$.

№ 21. $\iint\limits_D \frac{dx dy}{x^2+y^2+1}$, если область D ограничена полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2}$ и осью Ox.

Ответ. $\frac{\pi}{2}\ln 2$.

№ 22. $\iint\limits_D (x^2+y^2) dx dy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

Ответ. $\frac{3}{2}\pi a^4$.

№ 23. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy$, если область D ограничена линиями $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$, $x^2+y^2=\pi^2$.

Ответ. 3π.

№ 24. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, если область D ограничена линиями $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=4a^2$.

Ответ. $\frac{14}{3}\pi a^3$.

№ 25. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} dy$, введя новые переменные $x=u(1-v)$, $y=uv$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

№ 26. Вычислить $\iint\limits_D dx\, dy$, если область D ограничена линиями $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$.

Указание. Сделать замену переменных $x=\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}$, $y=(uv)^{\frac{1}{2}}$.

Ответ. $\frac{1}{2}\ln 3$.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D, находится по формуле

$$S=\iint_D dx\,dy.$$

Если область D определена, например, неравенствами $a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$, то

$$S=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Если область D в полярных координатах определена неравенствами $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, $\varphi(\theta)\leqslant\rho\leqslant f(\theta)$, то

$$S=\iint \rho\,d\rho\,d\theta=\int_3^\beta d\theta\int^{f(\theta)}\rho\,d\rho.$$

$$\int_2 dy\int_{6-y} dx=\int_2 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy=$$

$$=\int_2^3(-y^2+5y-6)\,dy=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right]_2^3=\frac{1}{6}.$$

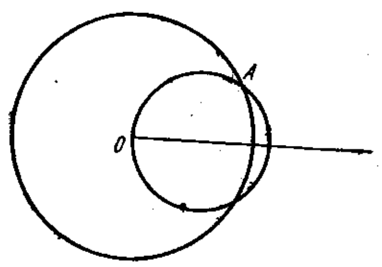

Рис. 8

№ 28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями: $\rho=1$, $\rho=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ (вне окружности $\rho=1$) (рис. 8).

Решение. Найдем координаты точки A:
$1=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{6}$, т. е. $A\left(1;\ \frac{\pi}{6}\right)$.
Тогда

$$S=\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} \rho\, d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \Big(4 \ \ldots$$

№ 29. Найти [illegible]

Решение. Преобразуем уравнение [illegible] $y=\rho\sin\theta$. [illegible]чим $\rho^2=2a^2\sin\theta\cos\theta=a^2\sin 2\theta$ (см. ч. 1, стр. 17).

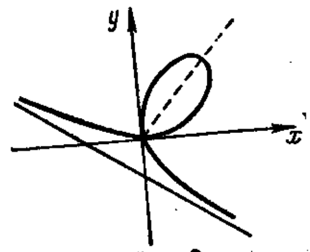

Рис. 9

В силу симметрии кривой площадь выразится так:

$$S=4\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \rho\, d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta =$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta\, d\theta = -a^2\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

№ 30. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^3+y^3=axy$ (площадь петли; рис. 9).

Решение. Преобразуем данное уравнение к полярным координатам: $\rho^3(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=a\rho^2\sin\theta\cos\theta$, т. е. $\rho=\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$. Осью симметрии петли является луч $\theta=\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$S=2\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_0^{\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}}\rho\,d\rho=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^2\theta\cos^4\theta}{\cos^6\theta\,(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\operatorname{tg}^2\theta\,d(\operatorname{tg}\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(1+\operatorname{tg}^3\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=$$

$$=\left[-\frac{a^2}{3(1+\operatorname{tg}^3\theta)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{6}.$$

587/29

№ 31. Вычислить площадь, ограниченную линиями $x=y^2-2y$, $x+y=0$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

№ 32. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y=2-x$, $y^2=4x+4$.

Ответ. $\frac{64}{3}$.

№ 33. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y^2=4x-x^2$, $y^2=2x$ (вне параболы).

Ответ. $S=2\pi-\frac{16}{3}$.

№ 34. Вычислить площадь, ограниченную линиями $3y^2=25x$, $5x^2=9y$.

Ответ 5.

№ 35. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y^2+2y-3x+1=0$, $3x-3y-7=0$.

Ответ. $\frac{125}{18}$.

№ 36. Вычислить площадь ближайшей от начала координат фигуры, ограниченной линиями $y=\cos x$, $y=\cos 2x$, $y=0$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

№ 37. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y=4x-x^2$, $y=2x^2-5x$.

Ответ. 27/2.

№ 38. Вычислить площадь, ограниченную линиями $x=4-y^2$, $x+2y-4=0$.

Ответ. 4/3.

№ 39. Вычислить площадь, ограниченную линиями $\rho=2(1-\cos\theta)$, $\rho=2$ (вне кардиоиды).

Ответ. $8-\pi$.

№ 40. Вычислить площадь, ограниченную линиями $\rho=2(1+\cos\theta)$, $\rho=2\cos\theta$.

Ответ. 5π.

№ 41. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y^2=4(1-x)$, $x^2+y^2=4$ (вне параболы).

Ответ. $2\pi-\frac{8}{3}$.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D, вычисляется по формуле

$$V=\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

№ 42. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=1+x^2$, $z=3x$, $y=5$, $z=0$ и расположенного в I октанте.

Решение. Тело, объем которого надо вычислить, ограничено сверху плоскостью $z=3x$, с боков—параболическим цилиндром $y=1+x^2$ и плоскостью $y=5$. Следовательно, это—цилиндрическое тело. Область D ограничена параболой $y=1+x^2$ и прямыми $y=5$ и $x=0$.

Объем тела равен

$$V=\iint\limits_D 3x\,dx\,dy=3\int\limits_0^2 x\,dx\int\limits_{1+x^2}^5 dy=3\int\limits_0^2 x\,[y]_{1+x^2}^5\,dx=$$

$$=3\int\limits_0^2 (4x-x^3)\,dx=3\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=12.$$

№ 43. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1-x^2-y^2$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $z=0$ и расположенного в I октанте.

Решение. Данное тело ограничено сверху параболоидом $z=1-x^2-y^2$. Область интегрирования D — круговой сектор, ограниченный дугой окружности $x^2+y^2=1$, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $z=0$, и прямыми $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$. Объем тела равен

$$V=\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Поскольку областью интегрирования является часть круга, а подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, то целесообразно перейти к полярным координатам:

$$V=\iint\limits_D (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int\limits_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho.$$

Пределы интегрирования по θ найдены из уравнений прямых: $y=x$ — здесь угловой коэффициент $k_1=\operatorname{tg}\theta_1=1$, т. е. $\theta_1=\frac{\pi}{4}$; $y=x\sqrt{3}$ — здесь $k_2=\operatorname{tg}\theta_2=\sqrt{3}$, т. е. $\theta_2=\frac{\pi}{3}$.

Таким образом, имеем

$$V=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta=\frac{\pi}{48}.$$

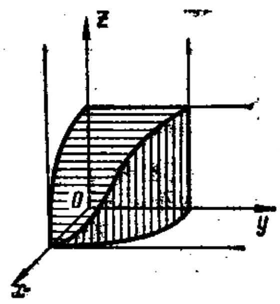

Рис. 10

№ 44. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$.

Решение. Рассмотрим восьмую часть заданного тела (рис. 10):

$$\frac{1}{8}V=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=$$

$$=\int\limits_0^a (a^2-x^2)\,dx=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3.$$

Следовательно,

$$V=\frac{16}{3}a^3.$$

№ 45. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$.

Ответ. $8\pi-\frac{32}{3}\sqrt{2}$.

№ 46. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=2y^2$, $x+2y+z=4$, $y=0$, $z=0$.

Ответ. $\frac{17}{5}$.

№ 47. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+4y^2+z=1$, $z=0$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

№ 48. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

Ответ. $\frac{88}{105}$.

№ 49. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-x^2$, $2x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Ответ. $\frac{40}{3}$.

№ 50. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2=xy$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=4$.

Ответ. $\frac{32}{9}$.

№ 51. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=5x$, $x^2+y^2=9$, $z=0$.

Ответ. 90.

№ 52. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=6$, $3x+2y=12$, $3x+y=6$, $y=0$, $z=0$.

Ответ. 12.

№ 53. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x+y+1$, $y^2=x$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

Ответ. $\frac{79}{60}$.

№ 54. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$, $z=xy$, $x^2+y^2=4$.

Ответ. 4.

№ 55. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, $z=\frac{x}{2}$, $z=x$.

Ответ. $\frac{1}{3}a^2b$.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Если гладкая однозначная поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$, то *площадь поверхности* выражается формулой

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

где D — проекция данной поверхности на плоскость xOy. Аналогично, если поверхность задана уравнением $x=f(y, z)$, то

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz,$$

где D — проекция поверхности на плоскость yOz; если же уравнение поверхности имеет вид $y=f(x, z)$, то

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz,$$

где D — проекция поверхности на плоскость xOz.

№ 56. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=ay$ (рис. 11).

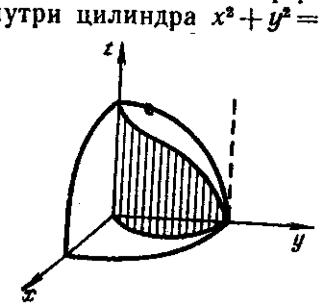

Рис. 11

Решение. Из уравнения сферы имеем (для I октанта):

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Часть сферы, расположенная в I октанте, проектируется в полукруг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=ay$ и

Перейдя к полярным координатам, получим

$$S=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+4\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi.$$

№ 60. Найти площадь части поверхности $y=x^2+z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+z^2=1$ и расположенной в I октанте.

Ответ. $\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{24}$.

№ 61. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанной цилиндром $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Ответ. $\frac{16}{3}\pi$.

№ 62. Найти площадь той части плоскости $z=x$, которая заключена внутри цилиндра $x^2+y^2=4$ выше плоскости $z=0$.

Ответ. $2\pi\sqrt{2}$.

№ 63. Найти площадь части поверхности цилиндра $z=x^2$, вырезанной плоскостями $x+y=\sqrt{2}$, $x=0$, $y=0$.

Ответ. $\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3+2\sqrt{2})$.

№ 64. Вычислить площадь поверхности конуса $x^2-y^2-z^2=0$, расположенной внутри цилиндра x^2+ $+y^2=1$.

Ответ. π.

№ 65. Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2+z^2=4$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

Ответ. 32.

№ 66. Найти площадь части поверхности $z^2=2xy$, вырезанной плоскостями $x=1$, $y=4$, $z=0$.

Ответ. $\frac{40\sqrt{2}}{3}$.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К МЕХАНИКЕ

Если пластинка занимает область D плоскости xOy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma=\gamma(x, y)$, то *масса* M пластинки выражается двойным интегралом:

$$M=\iint\limits_{D}\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Статические моменты M_x и M_y пластинки относительно осей Ox и Oy равны

$$M_x=\iint\limits_{D}y\gamma(x, y)\,dx\,dy,\quad M_y=\iint\limits_{D}x\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

В случае однородной пластинки $\gamma=\mathrm{const}$.

Координаты центра тяжести пластинки $\bar{x}$, $\bar{y}$ можно вычислить по формулам

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M},$$

где M — масса пластинки и M_x, M_y — ее статические моменты относительно осей координат.

В случае однородной пластинки эти формулы принимают вид

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D}x\,dx\,dy}{S};\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{D}y\,dx\,dy}{S},$$

где S — площадь области D.

Моменты инерции пластинки *относительно осей* Ox и Oy соответственно равны

$$I_x=\iint\limits_{D}y^2\gamma(x, y)\,dx\,dy,\quad I_y=\iint\limits_{D}x^2\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Момент инерции пластинки *относительно начала координат* равен

$$I_0=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\gamma(x, y)\,dx\,dy=I_x+I_y.$$

Положив в этих формулах $\gamma(x, y)=1$, получим формулы для вычисления геометрических моментов инерции плоской фигуры.

№ 67. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$ (рис. 14).

Решение. Поскольку фигура симметрична относительно оси Ox, то $\bar{y}=0$. Остается найти $\bar{x}$.

Найдем площадь данной фигуры

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=2\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} dx=$$

$$=2\int\limits_0^2\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=2\int\limits_0^2\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy=$$

$$=6\left[y-\frac{1}{12}y^3\right]_0^2=8.$$

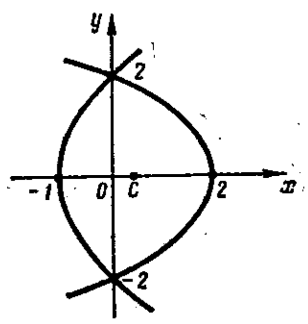

Рис. 14

Тогда

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\iint\limits_D x\,dx\,dy=\frac{1}{8}\cdot 2\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{1}{4}(y^2-4)}^{\frac{1}{2}(4-y^2)} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^2\left[\frac{1}{4}(4-y^2)^2-\frac{1}{16}(y^2-4)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^2\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=$$

$$=\frac{1}{8}\left[3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right]_0^2=\frac{2}{5}.$$

№ 68. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ и его хордой $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$.