П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ I

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов втузов

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
1974

Данко П. Е. и Попов А. Г.
Д17 Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I. Изд. 2-е. Учеб. пособие для втузов. М., «Высш. школа», 1974.
416 с. с ил.

Содержание I части охватывает следующие разделы программы: аналитическую геометрию на плоскости и в пространстве; элементы векторной и линейной алгебры; введение в анализ; дифференциальное исчисление одной и нескольких независимых переменных; интегральное исчисление функции одной независимой переменной (неопределенный и определенный интеграл); некоторые сведения о гиперболических функциях.

В каждом параграфе приводится необходимый теоретический материал. Типовые задачи даются с подробными решениями.

Предназначается для студентов втузов.

Д $\frac{0223-459}{001(01)-74}$ 57 — 74

Рецензент канд. физ.-матем. наук В. А. Маневич

Павел Ефимович Данко
Александр Георгиевич Попов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ I

Редактор А. М. Суходский. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Н. В. Яшукова. Корректор В. А. Вильшанская

Сдано в набор 9/VII-73 г. Подп. к печати 5/XI-73 г. Формат 84×108/32. Бум. тип. № 3. Объем 13 печ. л. Усл. п. л. 21,84. Уч.-изд. л. 18,25. Изд. № ФМ—536. Тираж 100 000 экз. Цена 67 коп.

План выпуска литературы издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1974 г. Позиция № 57.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14. Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28. Зак. 574.

ОГЛАВЛЕНИЕ

При написании книги «Высшая математика в упражнениях и задачах» авторы стремились раскрыть содержание основных понятий и теорем курса на систематически подобранных упражнениях и задачах, использовав при этом свое пособие под тем же названием, изданное в 1962 г. Ростовским н/Д институтом инженеров железнодорожного транспорта.

В пособие включены типовые задачи и даются методы их решения.

Каждому параграфу предшествует краткое введение, состоящее из определений и основных математических понятий рассматриваемого раздела. При этом наиболее трудные вопросы теории для лучшего усвоения сопровождаются раскрытием этих понятий (без доказательства). Первая часть этой книги, выпускаемая отдельным изданием, содержит аналитическую геометрию и дифференциальное исчисление. Эта часть состоит из 6 глав, включена также векторная алгебра, матрицы и линейные преобразования. Во вторую часть включены разделы: неопределенный и определенный интегралы, кратные и криволинейные интегралы, ряды, дифференциальные уравнения.

Третья часть содержит следующие разделы: гиперболические функции, элементы теории вероятностей, уравнения математической физики, элементы теории функций комплексного переменного, элементы операционного исчисления, методы вычислений, элементы линейного программирования.

При написании книги авторы использовали некоторые методические приемы и задачи из курсов: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т. I—III, Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления т. I—II, Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

По сравнению с первым изданием книги, вышедшим в 1967—1971 гг., авторами были сделаны следующие изменения.

Весь материал трех частей первого издания теперь сосредоточен в двух частях. В формулировках некоторых теоретических положений произведены небольшие изменения и даны необходимые дополнения; при этом весь теоретический материал в книге дается мелким шрифтом. Исправлены замеченные опечатки.

Кроме того, добавлено небольшое количество задач в следующих разделах: порядок касания кривых; исследование сходимости несобственных интегралов при помощи сравнения подынтегральных функций; математическое ожидание и дисперсия биномиального закона и закона Пуассона; уравнения Бесселя; дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных.

Авторы пользуются случаем выразить признательность всем читателям, которые высказали свои замечания и пожелания, направленные на улучшение настоящей книги.

Авторы

т. I—III, Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, 1952, Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики, 1966.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Шостаку Р. Я., Фролову С. В., Когану С. М. и Бахшияну Ф. А., прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим большое количество ценных методических замечаний и предложений, способствующих улучшению этой книги.

Всему коллективу сотрудников кафедры высшей математики РИИЖТа авторы благодарны за помощь в оформлении учебного пособия и проверки правильности ответов к задачам.

ГЛАВА I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ И ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Координаты на прямой. Точку M координатной оси Ox, имеющую абсциссу x, принято обозначать через $M(x)$.

Расстояние d между точками оси $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ при любом расположении точек на оси определяется формулой

$$d=|x_2-x_1|.$$

Деление отрезка в данном отношении. Если на произвольной прямой задан отрезок AB (A — начало отрезка, B — его конец), то всякая третья точка C этой прямой делит отрезок AB в некотором отношении λ, где

$$\lambda=\pm\frac{AC}{CB}.$$

Если отрезки AC и CB направлены в одну сторону, то λ приписывают знак «+»; если же отрезки AC и CB направлены в противоположные стороны, то λ приписывают знак «—». Иными словами, λ положительно, если точка C лежит между точками A и B, и отрицательно, если точка C лежит на прямой вне отрезка AB.

Если точки A и B лежат на оси Ox, то *координата x точки $C(x)$, делящей в отношении* λ отрезок между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$, определяется по формуле

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при $\lambda=1$ получаем формулу для *координаты середины отрезка* AB:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

№ 1. Построить на прямой точки $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E\left(-3\frac{1}{2}\right)$.

№ 2. Четырьмя точками отрезок AB разделили на 5 равных частей. Определить координату ближайшей к A точки деления, если $A(-3)$, $B(7)$.

Решение. Пусть $C(\overline{x})$ — искомая точка, тогда $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{4}$,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{4}\cdot 7}{1+\frac{1}{4}} = -1, \text{ т. е. } C(-1).$$

№ 3. Даны концы отрезка AB: $A(1)$, $B(5)$; вне отрезка AB расположена точка C, причем ее расстояние от точки A в три раза больше расстояния от точки B. Определить координату точки C.

Решение. Нетрудно видеть, что $\lambda = -\frac{AC}{BC} = -3$ (читателю рекомендуем сделать чертеж).

Таким образом, $\overline{x} = \frac{1-3\cdot 5}{1-3} = 7$, т. е. $C(7)$.

№ 4. Построить на числовой оси точки $A(-6)$, $B(2/3)$, $C(-0{,}5)$, $D(\sqrt{3})$, $E\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

№ 5. Определить расстояние между точками $M(3)$ и $N(-5)$.

Ответ. $d = 8$.

№ 6. Определить расстояние между точками $P\left(-5\frac{1}{2}\right)$ и $Q\left(-2\frac{1}{2}\right)$.

Ответ. $d = 3$.

№ 7. Двумя точками отрезок AB разделили на три равные части. Определить координаты точек деления, если $A(-1)$, $B(5)$.

Ответ. $C(1)$, $D(3)$.

№ 8. Даны точки $A(-7)$, $B(-3)$. Вне отрезка AB расположены точки C и D, причем $CA = BD = \frac{AB}{2}$. Определить координаты точек C и D.

Ответ. $C(-9)$, $D(-1)$.

2. Прямоугольные координаты на плоскости. Простейшие задачи. Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x; y)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

В частности, *расстояние* d *точки* $M(x;\ y)$ *от начала координат* определяется по формуле

$$d=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Координаты точки $C(x;\ y)$, *делящей в заданном отношении* λ (см. п. 1) отрезок между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при $\lambda=1$ получаем формулы для координат середины отрезка AB:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ определяется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|.$$

Формулу для площади треугольника можно записать в виде

$$S=\frac{1}{2}|\Delta|,$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}$$

(понятие об определителе третьего порядка дано в § 5 этой главы).

№ 9. Построить на координатной плоскости точки $A(4;\ 3)$, $B(-2;\ 5)$, $C(5;\ -2)$, $D(-4;\ -3)$, $E(-6;\ 0)$, $F(0;\ 4)$.

№ 10. Определить расстояние между точками $A(3;\ 8)$ и $B(-5;\ 14)$.

Решение. Воспользовавшись формулой $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, получим

$$d=\sqrt{(-5-3)^2+(14-8)^2}=\sqrt{64+36}=10.$$

№ 11. Показать, что треугольник ABC с вершинами $A(-3;\ -3)$, $B(-1;\ 3)$, $C(11;\ -1)$ — прямоугольный.

Решение. Найдем длины сторон треугольника:

$$AB=\sqrt{(-1+3)^2+(3+3)^2}=\sqrt{40},$$
$$BC=\sqrt{(11+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{160},$$
$$AC=\sqrt{(11+3)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{200}.$$

Так как $AB^2=40$, $BC^2=160$, $AC^2=200$, то $AB^2+BC^2=AC^2$. Таким образом, сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Отсюда заключаем, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой.

№ 12. Даны концы отрезка AB: $A(-2; 5)$, $B(4; 17)$. На отрезке AB расположена точка C, расстояние которой от точки A в два раза больше расстояния от точки B. Определить координаты точки C.

Решение. Так как $AC=2CB$, то $\lambda=\frac{AC}{CB}=2$. Здесь $x_1=-2$, $y_1=5$, $x_2=4$, $y_2=17$; следовательно,

$$\bar{x}=\frac{-2+2\cdot 4}{1+2}=2,\ \bar{y}=\frac{5+2\cdot 17}{1+2}=13,\ \text{т. е. } C(2;\ 13).$$

№ 13. Серединой отрезка AB является точка $C(2; 3)$. Определить координаты точки A, если $B(7; 5)$.

Решение. Здесь $\bar{x}=2$, $\bar{y}=3$, $x_2=7$, $y_2=5$, откуда $2=\frac{x_1+7}{2}$, $3=\frac{y_1+5}{2}$. Следовательно, $x_1=-3$, $y_1=1$, т. е. $A(-3; 1)$.

№ 14. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Определить координаты точки пересечения медиан треугольника.

Решение. Находим координаты точки D—середины отрезка AB:

$$x_D=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_D=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Точка M, в которой пересекаются медианы, делит отрезок CD в отношении $2:1$, считая от точки C. Следовательно, координаты точки M определятся по формулам

$$\bar{x}=\frac{x_3+2\cdot x_D}{1+2},\quad \bar{y}=\frac{y_3+2\cdot y_D}{1+2},$$

т. е.

$$\bar{x}=\frac{x_3+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_3+2\frac{y_1+y_2}{2}}{3}.$$

Окончательно

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

№ 15. Определить площадь треугольника с вершинами $A(-2; -4)$, $B(2; 8)$ и $C(10; 2)$.

Решение. Применив формулу для определения площади треугольника, получаем

$$S=\frac{1}{2}\cdot|(2+2)(2+4)-(10+2)(8+4)|=$$

$$=\frac{1}{2}|24-144|=60.$$

№ 16. Построить на координатной плоскости точки $A(1; \sqrt{2})$, $B\left(-2; -1\frac{1}{2}\right)$, $C(-\sqrt{3}; 0)$, $D\left(0; 2\frac{2}{3}\right)$.

№ 17. Определить расстояние между точками:

а) $A(2; 3)$ и $B(-10; -2)$;

б) $A(\sqrt{2}; -\sqrt{7})$ и $B(2\sqrt{2}; 0)$.

Ответ. а) 13; б) 3.

№ 18. Показать, что треугольник с вершинами $A(2; -1)$, $B(4; 2)$, $C(5; 1)$ — равнобедренный.

№ 19. Даны вершины треугольника: $A(-1; -1)$, $B(0; -6)$ и $C(-10; -2)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

Ответ. 5.

№ 20. Даны концы отрезка AB: $A(-3; 7)$ и $B(5; 11)$. Тремя точками отрезок разделили на четыре равные части. Определить координаты точек деления.

Ответ. $(-1; 8)$, $(1; 9)$, $(3; 10)$.

№ 21. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 5)$, $B(2; 7)$, $C(4; 11)$.

Ответ. $S=0$, т. е. точки A, B, C лежат на одной прямой.

№ 22. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(11; 4)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 7)$. Определить координаты четвертой вершины.

Ответ. $D(17; 12)$.

№ 23. Даны две вершины треугольника $A(3; 8)$ и $B(10; 2)$ и точка пересечения медиан треугольника $M(1; 1)$. Найти координаты третьей вершины треугольника.

Ответ. $C(-10; -7)$.

№ 24. Даны вершины треугольника: $A(7; 2)$, $B(1; 9)$ и $C(-8; -11)$. Найти расстояния точки пересечения медиан от вершин треугольника.

Ответ. $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$.

№ 25. Точки $L(0; 0)$, $M(3; 0)$ и $N(0; 4)$ являются серединами сторон треугольника. Вычислить площадь треугольника.

Ответ. 24.

3. Полярные координаты. В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием $OM=\rho$ от полюса O (ρ — полярный радиус-вектор точки) и углом θ, образованным отрезком OM с полярной осью Ox (θ — полярный угол точки). Угол θ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если точка M имеет полярные координаты $\rho>0$ и $\theta>0$, где $0\leqslant\theta<2\pi$, то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho; \theta+2k\pi)$ и $[-\rho; \theta+(2k+1)\pi]$, где k — произвольное целое (положительное или отрицательное) число или нуль.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат поместить в полюсе, а ось Ox направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и θ будут связаны следующими формулами:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta;$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

№ 26. Построить точки, заданные полярными координатами: $A\left(4; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2; \frac{4}{3}\pi\right)$, $C\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(-3; \frac{\pi}{3}\right)$, $E\ (0;\ \alpha)$, $F\left(-1; -\frac{3}{4}\pi\right)$.

Ответ. См. рис. 1.

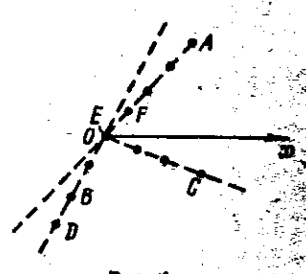

Рис. 1

№ 27. Найти полярные координаты точки $M\left(1; -\sqrt{3}\right)$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось — с положительным направлением оси абсцисс.

Решение. Имеем $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=$ $=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2.$ Из двух последних равенств находим $\theta=\frac{5}{3}\pi$ (при отсскании угла θ полезно учесть, что точка M лежит в IV четверти). Итак, $M\left(2;\ \frac{5}{3}\pi\right)$.

№ 28. Найти прямоугольные координаты точки $A\left(2\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, определяемой полярными координатами, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось направлена по оси абсцисс.

Решение. Имеем $x = 2\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi = -2;\ y = 2\sqrt{2}\sin\frac{3}{4}\pi = 2$. Итак, $A(-2;\ 2)$.

№ 29. Построить точки $A\left(10;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;\ \frac{5}{4}\pi\right)$, $C\left(0;\ \frac{\pi}{10}\right)$, $D\left(1;\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(-1;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(-1;-\frac{\pi}{4}\right)$.

№ 30. Даны полярные координаты точки $M\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$. Найти ее прямоугольные координаты, если начало координат совпадает с полюсом, а ось Ox — с полярной осью.

Ответ. $M(\sqrt{3};\ 1)$.

№ 31. Даны полярные координаты точки $M\left(3;\frac{2\pi}{3}\right)$. Найти ее декартовы координаты.

Ответ. $M\left(-\frac{3}{2};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

№ 32. Определить расстояние между точками $M_1(\rho_1;\ \theta_1)$ и $M_2(\rho_2;\ \theta_2)$.

Указание. Применить к треугольнику OM_1M_2 теорему косинусов.

Ответ. $d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$.

№ 33. Определить расстояние между точками $M\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right)$ и $N\left(4;\frac{3}{4}\pi\right)$.

Ответ. 5.

№ 34. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho;\ \theta)$ относительно полярной оси.

Ответ. $M_1(\rho;\ -\theta)$.

№ 35. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho;\ \theta)$ относительно полюса.

Ответ. $M_1(\rho;\ \pi + \theta)$.

№ 36. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho; \theta)$ относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно к полярной оси.

Ответ. $M_1(\rho; \pi-\theta)$.

4. Уравнение линии. Всякой линии на плоскости xOy, рассматриваемой как геометрическое место точек, соответствует некоторое уравнение, связывающее координаты любой точки $M(x; y)$ («текущей точки»), лежащей на этой линии. Такое уравнение называется *уравнением данной линии.*

При подстановке координат любой точки, лежащей на данной линии, в уравнение последней, это уравнение обращается в тождество (удовлетворяется). При подстановке же в уравнение линии координат любой точки, ей не принадлежащей, уравнение не удовлетворяется (обращается в неравенство).

Так, точка $A(2; 3)$ лежит на линии, уравнение которой $x^2+4x+y^2-21=0$ (это окружность радиуса $r=5$ с центром в точке $C(-2; 0)$) и не лежит на прямой $2x-y+5=0$; в самом деле: $2^2+4\cdot2+3^2-21=0$, а $2\cdot2-3+5\neq0$.

№ 37. Один из концов отрезка, длина которого равна c, перемещается по оси абсцисс, а другой конец отрезка — по оси ординат. Найти уравнение линии, описываемой серединой этого отрезка.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — середина отрезка. Длина отрезка OM (длина медианы) равна половине гипотенузы, т. е. $OM=\frac{c}{2}$. С другой стороны, $OM=\sqrt{x^2+y^2}$ (расстояние точки M от начала координат).

Таким образом, приходим к уравнению $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{c}{2}$, или $x^2+y^2=\frac{c^2}{4}$. Это и есть уравнение искомой линии.

Геометрически очевидно, что искомой линией является окружность радиуса $\frac{c}{2}$ с центром в начале координат.

№ 38. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ равно расстоянию этой же точки от прямой $y=-\frac{1}{4}$.

Решение. Возьмем на искомой линии произвольную точку $M(x; y)$. Расстояние точки M от точки F определится по формуле расстояния между двумя точками:

$$MF=\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}.$$

Расстояние точки M от прямой $y=-\frac{1}{4}$ найдется из простых геометрических соображений (рис. 2):

$$MN = MK + KN = y + \frac{1}{4}.$$

Так как по условию равенство $MF = MN$ выполняется для любой точки M, лежащей на искомой линии, то уравнение линии может быть записано в виде

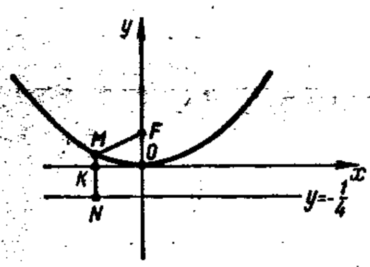

Рис. 2

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4},$$

или

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16} = y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16},$$

т. е.

$$y = x^2.$$

Линия, определяемая уравнением $y = x^2$, называется *параболой*.

№ 39. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых от точек $F_1(a;\ 0)$ и $F_2(-a;\ 0)$ есть постоянная величина, равная a^2.

Решение. Возьмем на искомой кривой произвольную точку $M(x;\ y)$. Ее расстояниями от точек $F_1(a_1;\ 0)$ и $F_2(-a;\ 0)$ будут $r_1 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$. Из условия задачи следует, что

$$r_1 \cdot r_2 = a^2.$$

Таким образом, искомая кривая имеет уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2.$$

Приведем это уравнение к рациональному виду:

$$(x^2+a^2+y^2-2ax)(x^2+a^2+y^2+2ax) = a^4,$$

откуда

$$(x^2+a^2+y^2)^2-4a^2x^2 = a^4,$$

или, наконец,

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

Найденная кривая называется *лемнискатой*.

№ 40. Составить уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Решение. В уравнении $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (см. предыдущую задачу) переходим к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Получаем уравнение лемнискаты в полярных координатах $\rho^2=2a^2\cdot\cos 2\theta$.

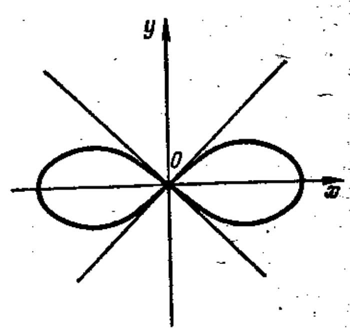

Рис. 3

Построим кривую. Разрешим уравнение относительно ρ: $\rho=\pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Из того, что в правой части равенства стоит двойной знак $\pm$, а также из того, что уравнение не меняется при замене θ на $-\theta$, заключаем, что лемниската расположена симметрично относительно осей Ox и Oy. Исследуем форму лемнискаты для I четверти, т. е. для случая $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$. Для этих значений ρ и θ будем иметь: $\rho=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos 2\theta}$. Нетрудно видеть, что здесь θ может изменяться только между значениями $\theta=0$ и $\theta=\frac{\pi}{4}$. Если $\theta>\frac{\pi}{4}$, то ρ—мнимая величина. Таким образом, соответствующая часть кривой лежит в угле между полярной осью и лучом $\theta=\frac{\pi}{4}$. Если $\theta=0$, то $\rho=a\sqrt{2}$. С возрастанием θ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ величина ρ убывает до значения $\rho=0$.

Приняв во внимание соображения симметрии, мы можем построить лемнискату (рис. 3).

№ 41. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $A(1;1)$ и $B(3;3)$.

Решение. Как известно из элементарной геометрии, искомое геометрическое место точек является прямой, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной к этому отрезку. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$.

Из условия задачи следует, что $MA=MB$. По формуле расстояния между двумя точками находим, что

$$MA=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2},\quad MB=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

и уравнение линии может быть записано в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}.$$

После возведения в квадрат получаем

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9.$$

Приводя подобные члены, приходим окончательно к следующему уравнению искомого геометрического места точек:

$$x+y-4=0.$$

№ 42. Точка M равномерно перемещается по лучу, вращающемуся равномерно около полюса. Составить уравнение линии, описанной точкой M, если в начальный момент вращающийся луч совпадает с полярной осью, а точка M с полюсом; при повороте же луча на угол $\theta=1$ (один радиан) точка M удалилась от полюса на расстояние a.

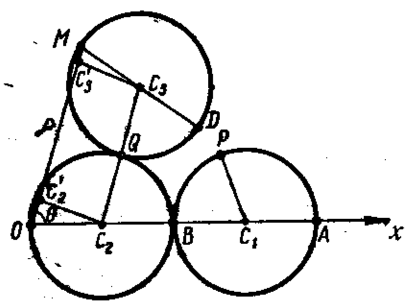

Рис. 4

Решение. Поскольку в начальный момент ρ и θ равны нулю, а затем оба возрастают пропорционально времени, нетрудно видеть, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью: $\frac{\rho}{\theta}=\text{const}$. Но при $\theta=1$ $\rho=a$, следовательно, $\frac{\rho}{\theta}=\frac{a}{1}$, т. е. $\rho=a\theta$. Кривая $\rho=a\theta$ называется *спиралью Архимеда*.

№ 43. Окружность диаметра a катится без скольжения по внешней стороне другой окружности такого же диаметра. Составить в полярных координатах уравнение линии, описанной некоторой фиксированной точкой катящейся окружности.

Решение. На рис. 4:

C_1 — первоначальное положение центра катящейся окружности;

A — первоначальное положение точки, описывающей искомую линию (точка A диаметрально противоположна