FİKRƏT GÜLƏLİ OĞLU FEYZİYEV

Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

CƏBR VƏ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

(Dərs vəsaiti)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 10.12.2009-cu il tarixli 1369 saylı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.

BAKI - 2010

UOT 512.8

Elmi redaktorlar: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru,
prof. H.F.Quliyev,
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi,
dosent P.F. Qəhrəmanov

Rəy verənlər:
1. F.-r.e.d., prof. S.S.Mirzəyev (BDU),
2. F.-r.e.d., prof. H.D.Orucov (BDU),
3. F.-r.e.n., dosent R.M. Quliyev (BDU).
4. F.-r.e.n., dosent N.Q. Əhmədov (BDU),
5. F.-r.e.n., dosent N.T. Qurbanov (SDU),
6. F.-r.e.n., dosent Ə.C. Məmmədov (SDU).

F.G.Feyziyev. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi. Dərs vəsaiti.- Bakı, «Təhsil» NPM, 2010, 608 s.

Dərs vəsaiti müasir riyaziyyatın bir sıra bölmələrinin tədrisini nəzərdə tutan cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi fənninə həsr olunmuşdur. Bu fənn riyazi analiz və analitik həndəsə fənləri ilə birlikdə riyaziyyat və ona yaxın olan ixtisaslar üzrə təhsilin bazasında dayanır.

Dərs vəsaiti universitetlərin riyaziyyat, riyaziyyat müəllimliyi və riyaziyyat və informatika ixtisasları üzrə bakalavr pilləsi üçün nəzərdə tutulmuşdur. Ondan universitetlərin kompüter elmləri, fizika, informatika, iqtisadi kibernetika və digər texniki ixtisaslar üzrə bakalavr və magistratura pilləsində təhsil alanlar, riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat, kibernetika, informatika sahələrində çalışan mühəndislər, doktorantlar, elmi işçilər və s. istifadə edə bilərlər.

$F\frac{0033208}{700122}2010$

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Bakalavr təhsil pilləsinin riyaziyyat və digər yaxın ixtisasları üzrə əsas fənlərdən biri «Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi» fənnidir. Bu fənn «Riyazi analiz» və «Analitik həndəsə» fənləri ilə paralel olaraq tədris olunur və onlarla birlikdə riyaziyyat ixtisasında tədris olunan digər fənlər üçün baza təşkil edir. Ümumiyyətlə, «Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi» fənni çərçivəsində tədris olunan bu və ya digər bölmələr müasir riyaziyyat elminin əsas bölmələrindən və demək olar ki, riyaziyyat elminin bünövrəsini təşkil edən bölmələrlərdəndir.

Qeyd edək ki, «cəbr» termini IX əsrdə orta Asiyada mövsud olmuş Xorəzmdə yaşayıb yaratmış görkəmli alim Məhəmməd ibni Musa əl-Xorəzmin «Əl-cəbr və əl-mükəbalə hesabına dair qısa kitab» adlı traktatındakı «əl-cəbr» sözündən alınmışdır. Adı çəkilən traktatda Məhəmməd əl-Xorəzm «əl-cəbr» terminini tənliklər üzərində aparılan çevirmələr zamanı müsbət həddin bərabərliyin bir tərəfindən digər tərəfinə keçirildikdə onun işarəsinin dəyişməsi mənada işlətmişdir. Bununla da cəbr tənliklər haqqında elm kimi yaranıb inkişaf etmişdir.

Dərs vəsaiti 22 fəsildən ibarətdir.

Dərs vəsaitinin əvvəlində birinci fəsildə çoxluqlar, uyğunluqlar, inikaslar və münasibətlər haqqında qısa məlumatlar verilir, sonlu çoxluqların elementlərinin müxtəlif qaydada qruplaşdırılması şərh olunur.

Vəsaitin ikinci, üçüncü,...,altıncı və onikinci fəsilləri ədədlər nəzəriyyəsinə həsr olunur. Bu fəsillərdə tam ədədlər çoxluğunda tam və qalıqlı bölmə, sadə və mürəkkəb ədədlər, tam ədədlərin kanonik təsvirləri, tam ədədlərin ən böyük ortaq bölənlərini tapmaq üçün Evklid alqoritmi, sonlu zənciri kəsrlər, ədədlər nəzəriyyəsinin mühüm funksiyalarından olan $[x]$ və $\{x\}$ funksiyaları, multiplikativ funksiyalar, ədədlərin bölənlərinin sayı və cəmi funksiyaları, Möbius funksiyası, Eyler funksiyası və onların xassələri şərh olunur. Burada həmçinin müqayisələr və çıxıqlar və onların xassələri, verilən modula görə siniflər, Eyler və Ferma teoremləri, həm xətti birməchullu müqayisələr və müqayisələr sisteminin və həm də yüksək dərəcəli məchullu müqayisələrin həll üsullarına baxılır.

Dərs vəsaitinin qalan fəsilləri cəbrin bir sıra bölmələrinə həsr olunur. Bu bölmələrə kompleks ədədlər, matrislər, determinantlat, xətti cəbri tənliklər sistemi, n-ölçülü vektorlar, çoxhədlilər, cəbri strukturlar, rasional kəsrlər, kvadratik formalar, xətti fəzalar, xətti operatorlar, bir neçə dəyişəndən asılı çoxhədlilər nəzəriyyələri, cəbrlər aiddirlər.

Kompleks ədədlər nəzəriyyəsinə həsr olunmuş fəsildə kompleks ədədlərin daxil edilməsinin zəruriliyi, kompleks ədədlərin müstəvi nöqtələri kimi təyin edilməsi və onlar üzərində əməllər və bu əməllərin xassələri, kompleks ədədlərin triqonometrik şəkli, modul və arqumentin xassələri, Muavr düsturu, qoşma kompleks ədədlər, kompleks ədədlərdən kök alınması, vahidin n dərəcədən kökləri və onların xassələri, kompleks ədədin qüvvət şəkli şərh olunur.

Matrislər və determinantlar nəzəriyyəsinə həsr olunmuş fəsildə matrisin təyini, matrislər üzərində əməllər və bu əməllərin xassələri, 2,3 və n – tərtibli determinantlar, onların xassələri, minor və cəbri tamamlayıcılar, determinantların hesablanması üsulları, o cümlədən Laplas və Bine-Koşi teoremləri, matrisin tərsinin varlığı üçün zəruri və kafi şərtlər və s. şərh olunur.

Xətti cəbri tənliklər sisteminə həsr olunmuş fəsildə bu sistemin həll edilməsində istifadə olunan Qauss üsulu, Kramer qaydası, tərs matrisin tətbiqinə əsaslanan üsul, n-ölçülü vektorlar fəzası, vektorların xətti asılılığı ilə bağlı anlayışlar, vektorlar sisteminin ranqı, matrisin ranqı və onun hesablanması üsulları, xətti cəbri tənliklər sisteminin birgəlik əlaməti üçün Kroneker-Kapelli teoremi, xətti cəbri tənliklər sisteminin ümumi həllərinin və bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin fundamental həllərinin tapılması qaydaları şərh olunur.

Dərs vəsaitində həm kompleks ədədlər meydanı üzərində və həm də ixtiyari meydan üzərində birdəyişənli və bir neçə dəyişənli çoxhədlilərin xassələri, onlar üzərində əməllər və bu əməllərin xassələri, gətirilmə problemləri, kökün varlığı problemləri, o cümlədən cəbrin əsas teoremi və bir sıra digər məsələlərin şərhinə geniş yer verilir.

Rasional kəsrlərə həsr olunmuş fəsildə rasional kəsrlərin təyini və onlar üzərində əməllər, düzgün rasional kəsrlər, rasional kəsrlərin sadə rasional kəsrlərə ayrılışı, düzgün rasional kəsrlərin C

kompleks ədədlər və R həqiqi ədədlər çoxluğunda sadə kəsrlərə ayrılışları şərh olunur.

Kvadratik formalara həsr olunmuş fəsildə kvadratik formaların təyini, onların matris-vektor şəklində təsviri, kvadratik formaların kanonik şəklə gətirilməsi, kvadratik formaların normal şəkli, ətalət qanunu, kvadratik formalarının müsbət müəyyənliyi və onun üçün Silvestr əlaməti şərh olunur.

Əsas cəbri strukturlar fəsilində cəbri əməl və cəbri struktur anlayışı, qruppoid, yarımqrup, monoid, qrup, halqa və meydan kimi cəbri strukturların aksiomları, bir sıra anlayışları və onların xəssələri şərh olunur. Bu fəsildə həmçinin altqrup, althalqa, altmeydan, sonlu meydanların tam ədədlər halqasına əsaslanan və çoxhədlilər halqasına əsaslanan növləri, sonlu meydanın primitiv elementi, sonlu meydanın strukturu, sonlu meydanlarda minimal çoxhədlilər və qoşmalar və s. haqqında məlumatlar verilir.

Xətti fəzalar fəsilində xətti fəzaların təyini, xətti fəzaların izomorfluğu, sonluölçülü fəza və onun bazisləri, bazislər arası əlaqə və keçid matrisləri, xətti altfəza və onların cəmi və kəsişməsi, altfəzaların düz cəmi, faktor fəza, xətti funksiya, qoşma fəza və s. şərh olunur.

Matrislərin normal formasına həsr olunmuş fəsildə λ-matrislər və onlar üzərində elementar çevirmələr, unimodulyar matrislər, λ-matrislərin ekvivalentlik meyarı, matris çoxhədlilər, ədədi matrislərin oxşarlığının əsas teoremi, Jordan hücrələri və Jordan matrisləri, matrislərin Jordan normal formasına gətirilməsi, matrislərin minimal çoxhədliləri, Hamilton-Keli teoremi və s. şərh olunur.

Xətti operatorlar fəsilində xətti operatorun tərifi, onun matrisi, müxtəlif bazislərdəki matrisləri arasında əlaqə, xətti operatorun xarakteristik matrisi və çoxhədlisi, xarakteristik kökləri, məxsusi qiymətləri və məxsusi vektorları, qiymətlər oblastı, ranqı, nüvəsi və defekti, xətti operatorlar üzərində əməllər və s. haqqında məlumatlar verilir. Bu fəsildə həmçinin operator matrisinin kanonik şəkli və s. haqqında məlumatlar şərh olunur.

Evklid və unitar fəzalara həsr olunmuş fəsildə skalyar hasil anlayışı, Evklid fəzasının tərifi, vektorun uzunluğu, Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi, iki vektor arasında bucaq, ortoqonal və ortonormal bazis, Evklid fəzalarının izomorfluğu, unitar fəzanın tərifi, Qram determinantı, Evklid fəzalarında altfəza və ortoqonal tamamlayıcı, ortoqonal, qoşma və simmetrik operatorlar və s. şərh olunur.

Dərs vəsaitinin sonuncu fəslində cəbrlərin təyini, onların əsas xassələri, bəzi sinifləri, kvaternionlar cəbri və s. şərh olunur.

Dərs vəsaiti müəllifin Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Riyaziyyat» fakültəsində bakalavr pilləsinin riyaziyyat ixtisası üzrə «Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi» fənnindən, riyaziyyat müəllimliyi ixtisası üzrə «Cəbr» fənnindən və Azərbaycan Müəllimlər İnstitutunun Sumqayıt filialında bakalavr pilləsinin riyaziyyat və informatika ixtisası üzrə «Cəbr» fənnindən oxuduğu mühazirələr əsasında yazılmışdır. Lakin bu vəsaitdən digər universitetlərin riyaziyyat, tətbiqi riyaziyyat, fizika, informatika, iqtisadi kibernetika ixtisasları və həmçinin müxtəlif mühəndis ixtisasları üzrə bakalavr pilləsində təhsil alanlar və başqaları istifadə edə bilərlər.

Dərs vəsaitində hər bir şərh olunan məlumatlar, üsullar xüsusi misallarla izah olunur. Hesab edirəm ki, bu da dərs vəsaitində baxılan məsələlərin daha yaxşı başa düşülməsinə və mənimsənilməsinə kömək edəcək.

Sonda dərs vəsaitinin əlyazmasını diqqətlə oxuyub və öz qiymətli fikirlərini bildirən rəyçilərə – Bakı Dövlət Universitetinin professorları S.S.Mirzəyevə və H.D.Orucova, Bakı Dövlət Universitetinin dosentləri R.M.Quliyevə və N.Q.Əhmədova, Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosentləri N.T.Qurbanova və Ə.C.Məmmədova öz minnətdarlığımı bildirirəm. Dərs vəsaitinin elmi redaktorları prof. H.F.Quliyeva və dosent P.F. Qəhrəmanova öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm. Bundan başqa, vəsaitin yazılması və elektron variantının hazırlanmasında böyük köməklik göstərmiş Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Diferensial tənliklər və riyazi kibernetika» kafedrasının əməkdaşlarına, xüsusilə də M.M. Hüseynovaya və Y.İ.Salmanovaya öz təşəkkürümü bildirirəm.

Sumqayıt Dövlət Universitetinin
«Diferensial tənliklər və riyazi
kibernetika» kafedrasının müdiri,
f.-r.e.d., prof. F.G.Feyziyev

FƏSİL 1. ÇOXLUQLAR, MÜNASİBƏTLƏR VƏ İNİKASLAR

§ 1. Çoxluqlar və onlar üzərində əməllər

1. Çoxluq və altçoxluq anlayışları. Çoxluq anlayışı riyaziyyatın əsas anlayışlarından biridir və ona dəqiq riyazi tərif verilmir, lakin müxtəlif nümunələrlə izah olunur. Məsələn, kitabda səhifələr, auditoriyada oturacaqlar və ya tələbələr, ali məktəbdə fakültələr, çantada kitablar və s. çoxluq əmələ gətirirlər.

Çoxluğu əmələ gətirən əşyalar, obyektlər onun elementləri, ünsürləri və s. kimi adlandırılır.

Adətən çoxluqları latın yaxud yunan əlifbasının və yaxud da hər hansı bir başqa əlifbanın böyük, onun elementlərini isə kiçik hərfləri ilə işarə edirlər. Çoxluq anlayışı çoxluğun elementi, altçoxluq anlayışları ilə sıx bağlıdır.

$x \in A$ yazılışı x elementinin A çoxluğuna daxil olmasını, $x \notin A$ yazılışı isə bu fikrin əksini, yəni x elementinin A çoxluğuna daxil olmamasını göstərir.

Əgər A çoxluğuna daxil olan hər bir element B çoxluğuna da daxil olarsa, onda A çoxluğu B çoxluğununun altçoxluğu adlanır. A çoxluğunun B çoxluğuna daxil olması $A \subseteq B$ kimi yazılır. Əgər A və B çoxluqlarına eyni bir elementlər daxil olarsa, onda bu çoxluqlar bərabər çoxluqlar adlanır. Əgər A və B çoxluqları bərabərdirlərsə, onda bu $A = B$ kimi yazılır. A və B çoxluqlarının bərabərliyini $A \subseteq B$ və $B \subseteq A$ kimi də yazmaq olar. $A \subset B$ yazısı $A \subseteq B$, lakin $A \neq B$ olmasını göstərir.

Qeyd edək ki, $x \in A$, $x \notin A$, $A \subseteq B$ yazılışlarının əvəzinə uyğun olaraq $A \ni x$, $A \not\ni x$, $B \supseteq A$ yazılışları da istifadə olunur. Bəzən $x \notin A$ əvəzinə $x \,\overline{\in}\, A$ yazılır.

A çoxluğunun bütün altçoxluqları çoxluğu onun buleanı adlanır və bu 2^A kimi işarə olunur.

Tutaq ki, ε hər hansı bir xassədir və bu xassəyə A çoxluğunun elementləri malik ola da bilər və ya malik olmaya da bilər. Bu halda

$$\{x \mid x \in A,\ x \text{ elementi } \varepsilon \text{ xassəsinə malikdir}\} \qquad (1)$$

yazısı vasitəsi ilə A çoxluğunun ε xassəsinə malik elementlərindən ibarət altçoxluğu işarə olunur. Məsələn, A tam ədədlər çoxluğudursa, onda

$$\{x \mid x \in A, x \geq 0\}$$

ilə A çoxluğunun mənfi olmayan tam ədədlərdən ibarət alt çoxluğu işarə olunur. Bəzən (1) yazısı əvəzinə

$$\{x : x \in A,\ x \text{ elementi } \varepsilon \text{ xassəsinə malikdir}\}$$

yazısı da istifadə olunur. Nümunə olaraq verilən həqiqi a və b ədədləri üçün $(a < b)$ $[a,b]$ parçasının təyinini göstərmək olar:

$$[a,b] = \{x : \ a \leq x \leq b\}.$$

Əgər A çoxluğunun elementləri $x_1, x_2, ..., x_n$ elemetləridirsə, onda A çoxluğu

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

kimi yazılır.

Heç bir elemetə malik olmayan çoxluğa boş çoxluq deyilir. Boş çoxluq $\varnothing$ simvolu ilə işarə olunur. Çoxluğun ümumi təyininə görə istənlilən A çoxluğu üçün $\varnothing \subseteq A$.

Aydındır ki, $A \subseteq B$ və $B \subseteq C$ olmasından alınır ki, $A \subseteq C$.

2. Çoxluqlar üzərində əməllər. Çoxluqlar üzərində əməllərə aşağıdakı əməllər aiddir: çoxluqların birləşməsi, çoxluqların kəsişməsi, çoxluqların fərqi, çoxluqların simmetrik fərqi, çoxluqların dekart hasili və s. Əgər A və B hər hansı bir çoxluqlardırsa, onda bu çoxluqların kəsişməsi və birləşməsi uyğun olaraq $A \cap B$ və $A \cup B$ kimi yazılır. $A \cap B$ və $A \cup B$ çoxluqları

$$A \cap B = \{x \mid x \in \text{A və } x \in B\},$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in \text{A və ya } x \in B\}$$

kimi təyin olunan çoxluqlardır.

Əgər $A \cap B = \varnothing$ olarsa, onda $A \cup B$ birləşməsi dizyunkt, əks halda sərbəst birləşmə adlanır.

A və B çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətlər ekvivalentdirlər: 1) $A \subseteq B$; 2) $A \cap B = A$; 3) $A \cup B = B$.

A və B çoxluqlarının fərqi A / B kimi işarə olunur və bu çoxluq aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in \text{A və } x \notin B\}.$$

Əgər $B \subset A$ olarsa, onda $A \setminus B$ çoxluğu B çoxluğunun A çoxluğuna tamamlanması adlanır. Aydındır ki, $A \setminus A = \varnothing$.

İstənilən A, B və C çoxluqları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$$A \cap A = A, \qquad A \cup A = A,$$
$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cap (A \cup B) = A, \qquad A \cup (A \cap B) = A,$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing, \qquad A \cup \varnothing = A,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$
$$A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B),$$
$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

Çoxluqların fərqi əməli ilə yanaşı çoxluqların simmetrik fərqi əməli də təyin olunur. A və B çoxluqlarının simmetrik fərqi $A + B$ ilə işarə olunur və $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ kimi təyin olunur. Simmetrik fərq üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C),$$
$$A + \varnothing = A, \quad A + A = \varnothing, \quad A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C.$$

Birləşmə və kəsişmə əməli istənilən sayda çoxluqlar üçün təyin oluna bilər. Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_n$ - lər hər hansı bir çoxluğun altçoxluqlarıdır. Ola bilər ki, hər hansı bir $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, cütü üçün $A_i = A_j$ olsun. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ birləşməsi və $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ kəsişməsi əvəzinə uyğun olaraq $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ və $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ yazılışı da istifadə olunur və bu birləşmə və kəsişmə uyğun olaraq aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \text{hər hansı bir } i \in \{1, ..., n\} \text{ üçün } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \text{ bütün } i \in \{1,\dots,n\} \text{ üçün } x \in A_i\}.$$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ birləşməsi $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, olduqda dizyunkt, əks halda sərbəst birləşmə adlanır. Çoxluqların birləşmə və kəsişməsinin distributivlik xassəsini ümumiləşdirmək olar:

$$B \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (B \cup A_i), \quad B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i),$$

$$\bigcap_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_{ij} \right) = \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{ij} \right).$$

Tutaq ki, qeyd olunmuş M çoxluğunun altçoxluqlarına baxırıq və $A \subseteq M$. Onda $M \setminus A$ fərqi A çoxluğunun tamamlanması adlanır və $\overline{A}$ kimi işarə olunur. Bu halda aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\overline{M} = \varnothing, \ \overline{\varnothing} = M, \ \overline{\overline{A}} = A, \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \ \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Sonuncu münasibətlər de Morqan qanunları adlanır və onların ümumiləşmələri

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

kimidir.

A çoxluğunun boş olmayan altçoxluqlarının $\{A_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ çoxluğu üçün $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olarsa, onda $\{A_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ çoxluğu A çoxluğunun örtüyü adlanır. Əgər $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, olarsa, onda $\{A_i \mid i = 1,2,\dots,n\}$ örtüyü A çoxluğunun bölünməsi adlanır. Bu tərifdən görünür ki, A çoxluğu öz bölünmsəinin dizyunk birləşməsidir. Başqa sözlə desək, əgər A çoxluğunun istənilən bir elementi bu çoxluğun boş olmayan altçoxluqları çoxluğuna daxil olan ancaq bir altçoxluğa daxil olarsa, onda bu altçoxluqlar çoxluğu A çoxluğunun bölünməsidir.

3. Çoxluqların dekart hasili. Tutaq ki, A və B ixtiyari çoxluqlarıdır. (a,b) -yə elementlər (simvollar) cütü deyəcəyik, harada ki, $a \in A$, $b \in B$. (a,b) və (a',b') cütləri üçün $a = a'$ və $b = b'$ olarsa, onda bu cütlərə bərabər cütlər deyilir. A və B çoxluqlarından olan elementlərin $\{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ çoxluğuna baxaq. Bu çoxluq A və B çoxluqlarının düz (və ya dekart) hasili adlanır.

Qeyd edək ki, (a,b) cütünün iki elementli $\{a,b\}$ çoxluğundan fərqi ondan ibarətdir ki, $\{a,b\}$ çoxluğu ilə $\{b,a\}$ çoxluğu eyni bir çoxluqdur, lakin (a,b) və (b,a) cütləri ancaq $a = b$ olduqda bərabərdirlər.

Tutaq ki, $A_1, A_2, ..., A_n$ istənilən sonlu çoxluqlardır. n simvoldan ibarət olan ($a_1, a_2, ..., a_n$) simvollar yığımına baxaq, harada ki, $a_i \in A_i, i = \overline{1,n}$. ($a_1, a_2, ..., a_n$) simvollar yığımı n - uzunluqlu ardıcıllıq və ya sətr və ya kartej adlanır. Əgər $a_i = a'_i$, $i = \overline{1,n}$ olarsa, onda ($a_1, a_2, ..., a_n$) və ($a'_1, a'_2, ..., a'_n$) n - uzunluqlu ardıcıllıqları (bəzən onları n - ardıcıllıqlar da adlandırırlar) bərabər hesab olunur. Bütün belə n uzunluqlu ardıcıllıqlar çoxluğu $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ və ya $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ilə işarə olunur. Bəzən belə hasili $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$ kimi də işarə edirlər.

§ 2. Uyğunluqlar, inikaslar, münasibətlər

1. Uyğunluq və inikaslar. Tutaq ki, A və B iki ixtiyari çoxluqlardır. $A \times B$ çoxluğunun R altçoxluğu A və B çoxluqları arasında uyğunluq (və ya binar münasibəti) adlanır. Əgər $(a,b) \in R$ olarsa, onda deyirlər ki, $a \in A$ elementi $b \in B$ elementi ilə R münasibətindədirlər. $(a,b) \in R$ əvəzinə bəzən aRb bəzən də $R(a,b)$ yazılışı istifadə olunur.

Əgər $A = C$, $B = D$ və $R = \Sigma$ bərabərlikləri çoxluqların bərabərlikləri mənada olarsa, onda $R \subseteq A \times B$ və $\Sigma \subseteq C \times D$ uyğunluqları bərabər uyğunluqlar adlanırlar.

Əgər R uyğunluğu A və B çoxluqları arasında uyğunluqdursa, onda R' ilə B və A çoxluqları arasında aşağıdakı kimi təyin olunan uyğunluğu işarə edək:

$$R' = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}.$$

R' uyğunluğunu R uyğunluğuna tərs uyğunluq da adlandırırlar. Bundan başqa, R' əvəzinə R^{-1} işarələməsini də istifadə edirıər.

R uyğunluğunun birinci proyeksiyası və ya oblastı

$$Dom\, R = \{a \mid a \in A \text{ və hər hansı bir } b \in B \text{ üçün } (a,b) \in R\}$$

çoxluğuna, obrazı və ya qiymətlər oblastı isə

$$\mathrm{Im}\, R = \{b \mid b \in A \text{ və hər hansı bir } a \in A \text{ üçün } (a,b) \in R\}$$

çoxluğuna deyilir. Aydındır ki, $Dom\, R = \mathrm{Im}\, R'$ və $\mathrm{Im}\, R = Dom\, R'$.

Əgər $Dom\, R = A$ olarsa, onda deyirlər ki, R uyğunluğu hər yerdə təyin olunub. Hər yerdə təyin olunmuş uyğunluğa çoxqiymətli inikas deyilir. Əgər $a \in A$ olarsa, onda $R(a) = \{b \mid b \in B, (a,b) \in R\}$ çoxluğu a elementinin R uyğunluğuna görə obrazı adlanır. Əgər $X \subseteq A$ olarsa, onda

$$R(X) = \bigcup_{x \in X} R(x)$$

çoxluğuna X çoxluğunun R uyğunluğuna görə obrazı və ya kəsiyi deyilir. Əgər $b \in B$ olarsa, onda

$$R^{-1}(b) = \{a \mid a \in A, (a,b) \in R\}$$

çoxluğu b elementinin R uyğunluğuna görə proobrazı adlanır. $Y \subseteq B$ çoxluğunun R uyğunluğuna görə proobrazı

$$R^{-1}(Y) = \bigcup_{y \in Y} R^{-1}(y)$$

kimi təyin olunan çoxluğa deyilir. Əgər uyğunluq $A \times B$ ilə üst – üstə düşərsə, onda o tam uyğunluq adlanır. Əgər hər bir $a \in Dom\, R$ üçün $R(a)$ çoxluğu birelementli çoxluq olarsa, onda R uyğunluğu A çoxluğunun B çoxluğuna qismən inikası adlanır.

A çoxluğundan B çoxluğuna R qismən inikası üçün $Dom\, R = A$ olarsa, onda R inikas (tam inikas və ya funksional uyğunluq) adlanır. Aydındır ki, A çoxluğundan B çoxluğuna R qismən inikasına $Dom\, R$ çoxluğundan B çoxluğuna tam inikas kimi baxmaq olar. $\varphi : A \to B$ yazısı A çoxluğundan B çoxluğuna φ inikasını göstərir.

Tutaq ki, $\varphi: A \to B$. Onda $a \in A$ üçün $\varphi(a) \in B$ elementi a elementinin obrazı adlanır. φ inikası halında verilmiş $b \in B$ elementi üçün elə $a \in A$ olarsa ki, $\varphi(a) = b$ olsun, onda a elementinə b elementinin proobrazı deyilir. b elementinin tam proobrazı dedikdə $\{a | \varphi(a) = b, a \in A\}$ çoxluğu nəzərdə tutulur. Verilən hər hansı bir elementin tam proobrazı boş çoxluq ola bilər. $X \subseteq A$ altçoxluğunun $\varphi(X)$ obrazı $\varphi(X) = \{\varphi(x) | x \in X\}$ düsturu ilə, $Y \subseteq B$ altçoxluğunun tam proobrazı isə

$$\varphi^{-1}(Y) = \{x | x \in A, \varphi(x) \in Y\}$$

düsturu ilə təyin olunur.

$\varphi(A)$ çoxluğu φ inikasının obrazı adlanır və $\mathrm{Im}\,\varphi$ kimi işarə olunur.

Əgər $\varphi: A \to B$ və $X \subseteq Y \subseteq A$, onda $\varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$. A çoxluğunun istənilən $A_1, A_2, \ldots, A_n$ altçoxluqları üçün

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(A_i), \quad \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(A_i), \quad \varphi\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$$

münasibətləri doğrudur.

Tutaq ki, $\varphi: A \to B$ inikası üçün elə $b \in B$ elementi mövcuddur ki, bütün $x \in A$ üçün $\varphi(x) = b$ olur. Onda φ inikası sabit inikas adlanır.

Əgər $\varphi: A \to A$ inikası A çoxluğunun istənilən elementini həmin elementin özünə inikas etdirirsə, onda φ inikası eynilik inikası adlanır. Belə inikas $1_A: A \to A$ kimi bəzən də id_A kimi işarə olunur.

$\varphi: A \to B$ inikasına baxaq. Əgər istənilən $a', a'' \in A$ üçün $\varphi(a') = \varphi(a'')$ bərabərliyindən $a' = a''$ münasibəti alınarsa, onda φ inikası daxilə inikas və ya *inyektik* inikas adlanır. Başqa sözlə, inyektiv inikas halında A çoxluğunun müxtəlif elementləri B çoxluğunun müxtəlif elementlərinə inikas olunur. Əgər φ inikası halında hər bir $b \in B$ elementi üçün elə $a \in A$ tapmaq olarsa ki, $\varphi(a) = b$ olsun, onda φ inikası üzərinə inikas və ya *suryektiv* inikas adlanır. Başqa sözlə, suryektiv inikas halında B çoxluğundan olan istənilən elementin heç olmazsa, bir proobrazı mövcuddur. Eyni zamanda həm üzərinə və həm daxilinə inikas olan inikasa qarşılıqlı birqiymətli inikas və ya *biyektiv* inikas və ya da qısaca biyeksiya deyilir.

Tutaq ki, $\varphi : A \to A$. Əgər hər hansı bir $a \in A$ elementi üçün $\varphi(a) = a$ olarsa, onda a elementi φ inikasına nəzərən invariant və ya tərpənməz element adlanır. Əgər $X \subseteq A$ altçoxluğu üçün $\varphi(X) \subseteq X$ olarsa, onda X altçoxluğu φ inikasına nəzərən invariant adlanır.

2. Münasibətlər. Faktor çoxluqlar. A çoxluğunda münasibət (binar münasibət) $A \times A$ çoxluğunun altçoxluğuna deyilir. Başqa sözlə, münasibət A çoxluğunun özü – özünə uyğunluğudur. $\{(a,a) | a \in A\}$ münasibəti *diaqonal* və ya *eynilik* münasibnəti adlanır və Δ_A ilə işarə olnur (həmçinin E_A və ya O_A işarələmələri də istifadə olunur).

A çoxluğunda R münasibətinə baxaq. Əgər bütün $x \in A$ üçün $(x,x) \in R$ olarsa, onda R münasibəti *refleksiv* münasibət adlanır. Başqa sözlə, əgər $\Delta_A \subseteq R$ olarsa, onda R refleksivdir. Əgər $(x,y) \in R$ olmasından həm də $(y,x) \in R$ alınarsa, onda R *simmetrik* münasibət adlanır. Əgər $(x,y) \in R$ və $(y,x) \in R$ olmasından $x = y$ alınarsa, onda R *antisimmetrik* münasibət adlanır. Əgər $(x,y) \in R$ və $(y,z) \in R$ olmasından $(x,z) \in R$ alınarsa, onda R münasibəti *tranzitiv* münasibət adlanır. Əgər $R_1, R_2, ..., R_n$ münasibətləri A çoxluğunda refleksiv (simmetrik, antisimmetrik, tranzitiv) münasibətlər olarsa, onda onların $\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ birləşməsi də A çoxluğunda refleksiv (simmetrik, antisimmetrik, tranzitiv) münasibət olar. A çoxluğunda refleksiv və ya simmetrik $R_i, i = \overline{1,n}$ münasibətləri halında $\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ birləşməsi də A çoxluğunda refleksiv və ya simmetrik olar. Lakin antisimmetrik və ya tranzitiv münasibətlər halında bu fikir, ümumiyyətlə desək, doğru deyildir. Verilən R münasibətini daxilinə alan bütün tranzitiv münasibətlərin kəsişməsi tranzitiv münasibətdir və bu münasibət R münasibətinin tranzitiv qapanması adlanır. Əgər $\overline{R}$ münasibəti R münasibətinin qapanmasıdırsa və elə $x_0, x_1, ..., x_n \in A$ elementləri tapılarsa ki, $a = x_0, x_n = b$ və bütün $i = 0,1,...,n-1$ halında $(x_i, x_{i+1}) \in R$, onda və ancaq onda $(a,b) \in \overline{R}$ olar.

Əgər A çoxluğunda R münasibəti refleksiv, simmetrik və tranzitiv olarsa, onda ona ekvivalentlik və ya ekvivalentlik münasibəti deyilir.

Əgər A çoxluğunda R ekvivalentlik münasibətidirsə, onda

$$R(a) = \{x | x \in A, (a,x) \in R\}$$

altçoxluğu R ekvivalentlik sinifi adlanır (bəzən buna qonşu siniflər də deyirlər). Müxtəlif ekvivalentlik sinifləri çoxluğu A çoxluğunun bölünməsidir. A çoxluğunda ekvivalentlik münasibətlərinin istənilən çoxluqlarının kəsişməsi ekvivalentlik münasibətidir. Verilən R münasibətini özündə saxlayan bütün ekvivalentliklərin kəsişməsi bu münasibətin ekvivalent qapanması adlanır. Əgər $\{R_1, R_2, ..., R_n\}$ çoxluğu A çoxluğunda olan hər hansı bir ekvivalentliklər çoxluğudursa, onda hər bir R_i, $i = \overline{1,n}$ münasibətini özündə saxlayan ən kiçik ekvivalentlik $R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_n$ birləşməsinin tranztiv qapanması ilə üst – üstə düşür. Əgər R_1 və R_2 - A çoxluğunda istənilən ekvivalentliklərdirsə və istənilən R_1 ekvivalentlik sinfinin istənilən R_2 ekvivalentlik sinifi ilə kəsişməsi ya boşdursa ya da ki, onların biri ilə üst – üstə düşürsə, onda və ancaq onda $R_1 \cup R_2$ birləşməsi ekvivalentlik olar.

A çoxluğunda R ekvivalentlik sinifləri çoxluğuna baxaq. Aydındır ki, bu elə uyğun bölünməni əmələ gətirən altçoxluqların çoxluğudur. Bu çoxluq A çoxluğunun R ekvivalentliyinə görə *faktor çoxluğu* adlanır və A/R ilə işarə olunur.

Misal 1. Bütün Z tam ədədlər çoxluğuna baxaq. Tutaq ki, B və C uyğun olaraq tək və cüt ədədlər çoxluğudur. Aydındır ki, $\{B, C\}$ çoxluğu Z çoxluğunun bölünməsidir. Tutaq ki, R münasibəti aşağıdakı kimidir: əgər verilən $a, b \in Z$ elementləri B və

C çoxluqlarından birinə daxildirlərsə, onda $(a,b)\in R$. Onda A/R faktor çoxluqdur və B və C elementlərindən ibarətdir.

Əgər R münasibəti A çoxluğunda ekvivalentlik münasibəti olarsa, onda A çoxluğunun A/R faktor çoxluğuna φ inikası təbii və ya kanonik inikas adlanır. Bu inikasla hər bir $a\in A$ elemetinə bu elementin daxil olduğu ekvivalentlik sinfi qarşı qoyulur.

Misal 2. Misal 1 – də baxılan faktor çoxluq halında $\varphi(x)$ inikası aşğıdakı inikasdır:

$$\varphi(x)=\begin{cases} A, & \text{əgər } x \text{ təkdirsə,} \\ B, & \text{əgər } x \text{ cütdürsə.} \end{cases}$$

$\varphi : A \to B$ inikasının nüvəsi

$$\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in A, \varphi(x_1)=\varphi(x_2)\}$$

münasibətinə deyilir və Ker φ kimi işarə olunur. Aydındır ki, $A/Ker\varphi$ faktor çoxluğuna baxmaq olar.

Refleksiv və simmetrik münasibət tolerant münasibət və ya tolerantlıq adlanır. Əgər R münasibəti A çoxluğunda tolerantlıqdırsa və $a\in A$, onda $\{x|(a,x)\in R\}$ altçoxluğu tolerantlıq sinfi adlanır. Tolerantlıq sinifləri A çoxluğunun örtüyünü əmələ gətirir. Əgər A çoxluğunun $\{A_1,...,A_n\}$ örtüyü verilibsə, onda

$$R=\{(x,y)\mid \text{hər hansı bir } i\in\{1,...,n\} \text{ üçün } x,y\in A_i\}$$

münasibəti tolerantlıq olar.

Binar və ya ikiyerli münasibətin təyininin n - yerlik halına ümumiləşməsinə baxaq. Tutaq ki, A hər hansı çoxluqdur, P isə

$$A^n=\underbrace{A\times ...\times A}_{n}$$

düz hasilinin (dekart hasilinin) hər hansı bir altçoxluğudur. Onda P alt çoxluğuna A çoxluğunda n - ar (və ya n - yerli) münasibət və ya predikat deyilir. Əgər istənilən $a_1,...,a_{n-1},b,c\in A$ üçün $(a_1,...,a_{n-1},b)\in P$ və $(a_1,...,a_{n-1},c)\in P$ olmasından alınarsa ki, $b=c$, onda P n - ar münasibəti funksional münasibət adlanır. Bu halda əgər istənilən $a_1,...,a_{n-1}\in A$ üçün alınırsa ki, hər hansı bir $a\in A$ üçün $(a_1,...,a_{n-1},a)\in P$, onda P münasibəti A^{n-1} çoxluğunun

A çoxluğuna inikasını təyin edir.

3. Uyğunluq və inikasların vurulması. Əgər ρ uyğunluğu A və B çoxluqları, σ uyğunluğu isə B və C çoxluqları arasında uyğunluqdursa, onda onların hasili aşağıdakı kimi təyin olunan və yazılan uyğunluğa deyilir:

$$\rho\sigma = \{(a,c) \mid \text{hər hansı bir } x \in B \text{ üçün } (a,x) \in \rho \text{ və } (x,c) \in \sigma\}.$$

Uyğunluqların vurulması assosialivlik xassəsinə malikdir: İstənilən ρ, σ və τ uyğunluqları üçün $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$.

Əgər φ və ψ inikasları uyğun olaraq A-dan B-yə və B-dən C-yə qismən inikaslar olarsa, onda ümumi təyinə görə

$$Dom\,\varphi\psi = \{x \mid x \in Dom\,\varphi \text{ və } \varphi(x) \in Dom\,\psi\}$$

və bütün $x \in Dom\varphi\psi$ üçün $\varphi\psi(x) = \psi(\varphi(x))$.

Bəzən φ və ψ inikaslarının hasili $\varphi \circ \psi$ kimi də yazılır və bu da aşağıdakı bərabərlik vasitəsilə təyin olunur:

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)).$$

Aydındır ki, iki qismən inikasın hasili də qismən inikas olar. Bu fikir çoxqiymətli inikaslar və refleksiv münasibətlər üçün də doğrudur. ρ münasibətinin tranzitivliyi $\rho\rho \subseteq \rho$ daxil olmasına eynigüclüdür.

θ_1 və θ_2 ekvivalentliklərinin hasili ancaq və ancaq o halda ekvivalentlik olar ki, θ_1 və θ_2 yerdəyişən olsunlar, yəni $\theta_1\,\theta_2 = \theta_2\,\theta_1$ olsun.

İki inikasın hasili də inikasdır. İki suryektiv, inyektiv və biyektiv inikasların hasili də uyğun olaraq suryektiv, inyektiv və biyektiv inikaslardırlar.

Əgər $\varphi\psi$ inikası inyektiv olarsa, onda φ inyektiv olur. $\varphi\psi$ inikası suryektiv olarsa, onda ψ suryektiv olur. φ inikası ancaq və ancaq o halda inyektiv olar ki, $\varphi\varphi^{-1} = 1_A$ olsun, ancaq və ancaq o halda suryektiv olar ki, $\varphi^{-1}\varphi = 1_B$ olsun. Tutaq ki, $\varphi : A \to B$. Əgər $\psi : B \to A$ inikası üçün $\varphi\psi = 1_A$ və $\psi\varphi = 1_B$ olarsa, onda ψ inikası φ inikasına tərs inikas adlanır. φ inikası ancaq və ancaq biyektiv olduqda ona tərs inikas vardır.