Профессор
Мaариф Әкбәров

ҸӘБРДӘН МҮҺАЗИРӘЛӘР

Дәрс вәсаити

Азәрбајҹан Республикасы Тәһсил Назирлији Елми-Методики Шурасы «Ријазијјат» бөлмәсинин (21.10.2000-ҹи ил, 13 сајлы протоколу) төвсијјәси вә Назирин 11 јанвар 2001-ҹи ил тарихли 37 сајлы әмри илә дәрс вәсаити кими тәсдиг едилмишдир.

Бакы -2001

Китаба рә'ј верәнләр: 1. Физика-ријазијјат елмләри доктору, профессор Сабир Мирзәјев
2. Республика Мүәллимләр Институтунун «Физика вә ријазијјатын тәдриси методикасы» кафедрасынын коллективи

Елми редакторлары: Физика-ријазијјат елмләри доктору, профессор Мәммәд Јагубов вә физика-ријазијјат елмләри намизәди, досент Лоғман Әбдулкәримов

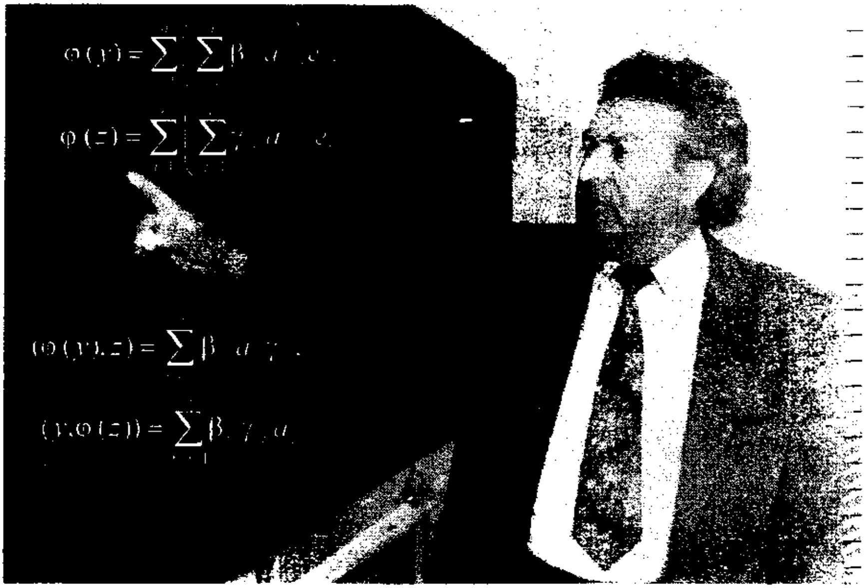
Редактор: Мүбариз Намазов, али категоријалы ријазијјат мүәллими

Мүәллифин узун илләрдән бәри Бакы Дөвләт Университетинин механика-ријазијјат факүлтәсиндә, «Нахчыван» Университетиндә, Республика Мүәллимләр Институтунда вә дикәр али мәктәбләрдә охудуғу мүһазирәләр әсасында јазылан бу китаб али мәктәб тәләбәләри (о чүмләдән Университетләрин ријазијјатчы кадрлары һазырлајан факүлтәләри) вә орта мәктәбин ријазијјат мүәллимләри (о чүмләдән тәкмилләшдирмә курсунун динләјичиләри) үчүн дәрс вәсаити кими нәзәрдә тутулмушдур.

Ријази билијини дәринләшдирмәк вә кенишләндирмәк истәјән бүтүн ријазијјат һәвәскарлары үчүн дә китаб фајдалы олар.

$$M\,\frac{1602040000}{658(07)-015}-2001$$

БАКЫ-2001



Бөјүк ријазијјатчылардан бири јахшы дејиб: "Һәјаты бәзәјән, ону көзәлләшдирән ики шеј вар, бири ријазијјатла (о чүмләдән чәбрлә - М.Ә.) мәшғул олмаг, икинчиси исә ону тәдрис етмәкдир".

<u>М.Әкбәров</u>

ӨН СӨЗ

Чәбр елми олдугча сәхавәтлидир, әксәр һалларда бизим ондан умачағымыздан о даһа чох шеј верир...

Д'Аламбер

Китаб мүәллифин илләрдән бәри Бакы Дөвләт Университетиндә, «Нахчыван» Университетиндә, Республика Мүәллимләр Институтунда вә гисмән дә Бакы Мүәллимләри Тәкмилләшдирмә Институтунда охудуғу мүһазирәләр әсасында јазылыб.

Е'тираф едәк ки, индијә гәдәр ихтисасартырма, тәкмилләшмә вә јенидән һазырлама курслары үчүн ријазијјатдан, о чүмләдән чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси фәнниндән хүсуси јығчам дәрслик вә ја дәрс вәсаити јазылмајыб. Бу бахымдан китаб республикамызда илк тәшәббүсдүр.

Лакин бу да бир һәгигәтдир ки, һәр бир мүәллиф үчүн хош олар ки, онун китабынын охучусу чох олсун, о даһа кениш охучу күтләсинин марағына сәбәб олсун, о даһа артыг фајда версин. Мәшһур инкилис философу Френсис Бекон дејирди ки, «китаблар заман далғаларында үзүб сәјаһәт едән вә өз гијмәтли јүкүнү нәсилләрдән нәсилләрә чатдыран фикир кәмиләридир». Бу хош нијјәтлә әлагәдар олараг «мүһазирәләр» елә истигамәтдә јенидән ишләниб ки, китабдан нәинки тәкчә тәкмилләшмә вә јенидән һазырлама курсларынын динләјичиләри олан ријазијјат мүәллимләри, һабелә ондан али мәктәбләримизин, о чүмләдән университетләримизин ријазијјат ихтисасы верән, хүсусилә дә ријазијјат мүәллими һазырлајан факултәләринин бакалавр вә макистрләри дә дәрс вәсаити кими истифадә едә биләрләр.

Бурадакы мөвзулар елә сечилиб ки, бә'зи чүз'и зәрури олан тәкрарлар истисна олмагла бунлар бизим әввәлләр чап олунмуш «Али чәбр» (Бакы, 1976) вә «Хәтти фәзалар вә хәтти операторлар» (Бакы, 1984) адлы дәрс вәсаитләринә дахил олмајан програм материалыны гисмән дә олса әһатә едә билсин. Бу мә'нада «мүһазирәләр» һәмин китабларын давамы кими нәзәрдә тутулур.

Китабын «Кириш әвәзи» һиссәсиндә чәбр вә бурада ишләдилән бә'зи символларын әһәмијјәтинә даир үмуми мә'луматлар, сонракы бөлмәләрдә исә «Чәбр вә әдәдләр нәзәријјәси» фәннинә аид бир сыра мүһүм бәһсләрлә таныш олачагсыныз. Амма белә дүшүнмәјин ки, чәбрин вә әдәдләр нәзәријјәсинин әсаслары елә тәкчә бу китабда шәрһ едиләнләрдән ибарәтдир; ријазијјат елми, онун тәркиб һиссәси олан чәбр диби вә саһили көрүнмәјән учсуз-бучагсыз бир дәрјадыр. Бизим мүһазирәләр топлусу олан бу китабдакы материаллар исә бу һүдудсуз дәрјадан сечилмиш кичик дамлалардыр.

Гој бу «дамлалар» мөһтәшәм, әзәмәтли чәбр елминин дәринликләринә нүфуз етмәк ишиндә Сизә јардымчы олсун!

Фүрсәтдән истифадә едәрәк китабын әлјазмасы илә таныш олуб дәјәрли гејдләр едән һөрмәтли һәмкарларыма, хүсусилә дә БДУ-нун «Механика-ријазијјат» факултәсинин бир груп әмәкдашына, Республика Мүәллимләр Институтунун «Физика вә ријазијјат тәдриси методикасы», «Нахчыван» Университетинин «Ријазијјат вә дәгиг елмләр» кафедрасынын үзвләринә, һабелә китабын редакторларына өз дәрин тәшәккүрүмү билдиририм.

Китабын нәшри үчүн тәшәббүс вә дәстәјинә көрә Республика Мүәллимләр Институтунун вә «Нахчыван» Универсистетинин рәһбәрлијинә миннәтдарлығымы билдиририм.

Китаб һаггында рә'ј вә тәклифләрини билдирән һөрмәтли охучуларымыза әввәлчәдән разылығымы билдиририм.

Мүәллиф

ЧӘБР ЕЛМИ ҺАГГЫНДА ГЫСА МӘ'ЛУМАТ
(Кириш әвәзи)

Чидди ријази тә'лим
анчаг чәбрдән башлајыр...
Н.Лобачевски

Чәбр бүтөв, ваһид ријазијјат елминин вачиб бир тәркиб һиссәсидир, о әдәдләр нәзәријјәси илә бирликдә ријазијјатын гәдим вә сон дәрәчә кәрәкли олан бир саһәси кими јаранараг узун тарихи инкишаф јолу кечмишдир. Инди дә, кәләчәкдә дә ријазијјаты чәбрсиз тәсәввүр етмәк гәтијјән мүмкүн дејилдир.

Әдәдләр һаггында елм олан һесабын (арифметиканын) әсасында јаранан чәбр елминин тарихән илк објекти чәбри тәнликләри өјрәнмәк олуб.

Тәәссүф ки, чәбрин инкишаф тарихи вә бу ишдә мүхтәлиф халгларын төһфәләри барәдә сөһбәт ачмаға китабын һәчми имкан вермир. Тәкчә буну гејд едәк ки, «чәбр» елминин ады IX әсрдә јазыб јарадан өзбәк ријазијјатчысы Мүһәммәд ибн Муса әл-Хорәзмин «Әл-чәбр вә Әл-мүкәбалә һесабына даир гыса китаб» адлы трактатындакы «әл-чәбр» сөзүндән алынмышдыр (русларын вә бир чох дикәр халгларын ишләтдији «алгебра» сөзү дә «әлчәбр» сөзүнүн латынчаја тәрчүмәсиндән алынмышдыр. Јери кәлмишкән ону да дејәк ки, һазырда елмдә ишләдилән «алгорифм» сөзү дә Әл-Хорәзм сөзүнүн латынлашдырылмасындан алыныб). Мүһәммәд-Әл-Хорәзмин әсәриндә «Әл-чәбр» термини тәнликләр үзәриндә ону каноник шәкилә кәтирмәклә әлагәдар олараг апарылан чевирмәләрдән бирини, мүсбәт һәдди бир тәрәфдән дикәр тәрәфә кечәндә бурада мәнфи ишарәнин бәрпасы илә көстәрмәк мә'нада, «Әл-мүкәбалә» исә тәнликдә охшар һәдләрин ислаһыны нәзәрдә тутан термин кими ишләдилирди. Бунун өзү бир даһа көстәрир ки, әввәлләр чәбр елми тәнликләр һаггында тә'лим иди. Лакин индинин өзүндә дә чәбри тәнликләр бәһси чәбрин тәркибиндә онун әсас објектләрдән бири кими галса да, мүасир чәбри һеч дә тәкчә тәнликләр һагтында елм кими сәчијјәләндирмәк дүзкүн олмаз. Китабда чәбри тәнликләр, онларын бә'зи нөвләри барәдә хүсуси фәсил вардыр. Амма бурада ону гејд едәк ки, мүасир чәбр о гәдәр инкишаф едиб, о гәдәр абстракт шәкил алыб ки, онун мәшғул олдуғу објектләр системини чәбри тәнликләрлә мәһдудлашдырмаг мүмкүн дејил.

Чохлуглар нәзәријјәсинин вә аксиоматик методун мүасир ријазијјатда һаким мөвге тутмасы вә бунун чәбрә нүфуз етмәси сајәсиндә чәбрдә чәбри структуралар анлајышы формалашмышдыр. Бу нүфузетмә о дәрәчәдә кениш вүс'әт алыб ки, индики чәбр елмини чәбри структуралары өјрәнән елм кими сәчијјәләндирирләр.

Чәбри структура ријазијјатын өјрәндији ријази структураларын әсас нөвүдүр вә бу керчәклијин шүурда мигдар-фәза, үмумиләшмиш кәмијјәт мүнасибәт вә формаларынын сон дәрәчә абстракт шәкил алмыш ин'икасыдыр. Бурадан бир даһа ајдын олур ки, чәбр елми бүтөв, ваһид ријазијјат елминин ајрылмаз тәркиб һиссәсидир. Бәс бүтөв ријазијјат елми, о чүмләдән онун тәркиб һиссәси олан чәбр үчүн дә характерик олан: «чохпилләли», «абстраксијаларын абстраксијасы» кими формалашан вә бу сәбәбдән дә өз керчәк мәнбәјиндән чох-чох «узаг дүшән», «чәбри структура» анлајышына ријазијјатын дахилиндә нечә бахылыр? Чаваб беләдир: Чәбри структура, - елементләри үзәриндә бир вә ја бир нечә чәбри әмәлин тә'јин едилдији мүхтәлиф тәбиәтли чохлугдур. Буну нәзәрә алсаг, ону дејә биләрик ки:

Чәбр елми ваһид ријазијјат елминин елә саһәсидир ки, о, мүхтәлиф тәбиәтли чохлугларда тә'јин едилән чәбри әмәлләри вә бунларын хассәләрини өјрәнән елмдир.

Чәбри әмәл, онларын хассәләри, чәбри структура вә онларын әсас нөвләринә аид китабда хүсуси фәсил ајрылдығы үчүн бурада бу тә'рифин изаһына еһтијач көрмүрүк. Амма бурада «чәбр» сөзү илә әлагәдар олараг мүасир ријазијјатда јаранан бир термин долашыглығыны охучуларын нәзәринә чатдырмаг истәрдик.

Биз чәбр термининдән һәм елмин адында, һәм дә чәбр елминин дахилиндә формалашан «мејдан үзәриндә верилән чәбр» кими хүсуси чәбри структуранын адландырылмасында истифадә едирик. Бунлары гарышдырмамаг кәрәкдир. (Бу барәдә дә китабын чәбри структуралара аид фәслиндә сөһбәт кедир).

«Әдәдләр нәзәријјәсинә» кәлинчә, ону гејд едәк ки, бу, ријазијјатын там әдәдләри, онларын хассәләрини өјрәнән саһәсидир. Бә'зи әлаһиддә, сәчијјәви чәһәтләри илә фәргләнән бу саһә ријазијјатын гәдим, мараглы вә һеч заман көһнәлмәјән әзәмәтли бир һиссәсидир. Өз инкишафында бу саһә ријазијјатын дикәр саһәләри илә, хүсусилә дә чәбр илә елә «гајнајыб гарышыб ки», ону чәбрдән ајырмаг олмур. Тәдрис просесиндә артыг чохдандыр ки, әдәдләр нәзәријјәси чәбр фәннинин тәркиб һиссәси кими өјрәнилир. Буну нәзәрә алараг әдәдләр нәзәријјәсинин бир сыра вачиб бөлмәләри дә китаба дахил едилиб.

Бүтөвлүкдә ријазијјат елми, о чүмләдән дә онун чәбр саһәсинин мүһүм бир хүсусијјәти дә бу елмдә мүхтәлиф ишарәләр дилиндән, символлардан даһа кениш сурәтдә истифадә едилмәсидир. Һәтта чәбрә, онун тәркибинә аид олан әдәбијјатларда чәбрин мүстәгил бир елм кими јаранмасына бирбаша орада символлардан истифадә едилмәси илә әлагәләндирирләр. Бу ишдә јунан ријазијјатчысы Диофантын илк тәшәббүсләри, сонралар исә франсыз ријазијјатчысы Ф.Вијетин хидмәтләри хүсуси гејд едилмәлидир. Буну нәзәрә алараг ријазијјата, о чүмләдән чәбрдә ишләнән «ишарәләр дили» һаггында, бурада ән чох истифадә едилән бир нечә вачиб символларын әһәмијјәти барәдә гыса мә'лумат вермәклә «Кириш»и тамамлајаг.

Ријази мәнтиг ишарәләри. Ријази мәнтигдә мәнтиги анлајыш вә мүһакимәләри, мәнтиги әмәлијјатлары ишарә етмәк үчүн бир чох вачиб ишарәләр тәтбиг едилир ки, бунлардан ријазијјатын бүтүн саһәләриндә дә мүвәффәгијјәтлә истифадә едилир. Инкар,конјунксија, дизјунксија, импликасија, еквиваленсија кими мәнтиги әмәлијјатлар үчүн ишләдилән ујғун $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ишарәләр буна ән јахшы мисалдыр.

Әввәлчә ону гејд едәк ки, доғру вә јалан олмасы барәдә фикир сөјләмәк мүмкүн олан һәр бир нәгли чүмлә ријази мәнтигдә мүлаһизә вә ја һөкм адланыр.[1]

А мүлаһизәсинин тәсдиг етдијини тәкзиб едән мүлаһизәјә, А-нын инкары дејиб ону $\rceil A$ вә ја $\overline{A}$ кими ишарә едирләр (А доғру оланда $\rceil A$ јалан, А јалан оланда $\rceil A$ доғру олур).

А вә В мүлаһизәләриндән «вә» бағлајычысынын көмәји илә дүзәлдилән А вә В мүлаһизәсинә А вә В мүлаһизәләринин конјунксијасы дејилир вә $A \wedge B$ јахуд А&В кими ишарә едилир (А вә В мүлаһизәләринин конјунксијасы анчаг А вә В-нин һәр икисинин доғру олдуғу һалда доғрудур).

А вә В мүлаһазиләринин «јахуд» («вә ја») бағлајычысынын көмәји илә дүзәлдилмиш «А јахуд В» мүлаһизәсинә бунларын дизјунксијасы дејиб, $A \vee B$ кими ишарә едилир (А вә В мүлаһизәсинин дизјунксијасы бунлардан һеч олмаса биринин доғру олдуғу һалда доғрудур).

А вә В мүлаһизәсинин «әкәр А-дырса, онда В-дир» шәклиндә бирләшмәсиндән алынан мүлаһизәјә бунларын импликасијасы дејилир вә $A \rightarrow B$ (јахуд $A \Rightarrow B$) кими ишарә едилир (А вә В мүлаһизәләринин импликасијасы јалныз вә јалныз А доғру, В исә јалан оланда јалан, галан һалларда исә доғру һесаб едилир.) Бурада А-ја шәрт, В-јә нәтичә, јахуд А-ја антесседент, В-јә исә консеквент дејирләр.

А вә В мүлаһизәләриндән «А јалныз вә јалныз онда олур ки, В олсун» кими дүзәлдилән мүлаһизәјә А вә В-нин еквиваленсијасы дејилир вә $A \Leftrightarrow B$ кими ишарә едилир (А вә В-нин еквиваленсијасы јалныз вә јалныз һәр икисинин ејни заманда доғру, ја да һәр икисинин ејни заманда јалан ол-

[1] Азәрбајчан дилиндә бу мәсәләдә һәләлик сабитләшмиш терминолокија олмадығындан ријази әдәбијјатда «мүддәа», «тәклиф» вә ја «чүмлә» терминләриндән дә истифадә едилир.

дуғу һалында доғру олур). Еквиваленсијада В мүлаһизәси А үчүн һәм зәрури, һәм дә кафи шәрт олур.

Бир гајда олараг мүлаһизә доғру олдугда онун гијмәтини «1», јалан олдугда исә «0» илә ишарә едирләр. Онда јухарыда көстәрилән мәнтиги әмәлијјатларын «һәгигилик гијмәтләри» чәдвәли ашағыдакы кими олар:

A	$\neg$A	A	B	A$\wedge$B	A$\vee$B	A	B	A$\Rightarrow$B	A	B	A$\Leftrightarrow$B
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
		0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
		0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Ријазијјатда, хүсусилә дә ријази мәнтигдә чох ишләдилән ишарәләрдән бири дә кванторлар адланан: $\forall$ – үмумилик квантору вә $\exists$ – варлыг квантору ишарәләридир.

Үмумилик квантору $\forall$ «һәр һансы», «ихтијари» мә'насында ишләнир, варлыг квантору $\exists$ исә «вар ки» демәкдир. Мәсәлән: X кәмијјәтинин јанында бунлары јазанда $\forall X$ буну чүмләдә «ихтијари X», «һәр һансы X», «истәнилән X», «бүтүн X-ләр үчүн» кими, $\exists X$ исә «елә бир X вар ки» дејә охујурлар. $\forall$ вә $\exists$ ишарәләриндән, онларын $\forall X, \forall Y, \exists X, \exists Y$ вә с. кими мүәјјән бир објектә истинад едилән јазылышларында истифадә едилир. $\exists! X$ ишарәси исә “јеканә бир х вар ки” демәкдир.

Ријази мәнтиг ишарәләриндән истифадә едилән бир чох әдәбијјатда $\vdash$, $\rightleftarrows$ ишарәләринә дә раст кәлинир. Бурада $\vdash$ ишарәси «нәтичә чыхармаг», «алмаг» мә'насында ишләдилир. Буну «тәсдигетмә» символу адландырыр вә А$\vdash$В јазылышыны «А-дан В алыныр», «А-дан В чыхыр», «А һөкмү В-ни верир» кими, А$\rightleftarrows$В ишарәси исә «А елә В демәкдир» кими мә'наландырылыр.

$\sum$ **вә** $\prod$ **ишарәләри.** Бу ишарәләр ујғун олараг топлама вә вурма әмәлләринин нәтичәләри олан чәм вә һасили көстәрир. Белә ки, мәсәлән, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ кәмијјәтләринин чәми вә һасилләрини бу ишарәләрин көмәјилә гыса шәкилдә јаза биләрик:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

a_i кәмијјәтләри сонсуз сајда оларса, онда ујғун олараг:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ вә } \prod_{i=1}^{\infty} a_i$$

Бунлар бир сыра хассәләрә маликдир. Мәсәлән: $\sum$ символунун бә'зи хассәләри илә таныш олаг.

Тутаг ки, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ кими n топланандан ибарәт һәр һансы бир чәм верилмишдир. Бу чәм $\sum$ символунун көмәји илә:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (1)$$

кими ишарә едилир вә беле охунур: $i = 1$-дән n–ә гәдәр олмагла a_i чәми јахуд

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_N = \sum_{i=m}^{N} a_i \quad (2)$$

јә'ни $i = m$-дән N–ә гәдәр a_i чәми. Бә'зән $\sum_{i=1}^{n} a_i$ әвәзинә $\sum_{1 \le i \le n} a_i$, јахуд $\sum_{i=m}^{n} a_i$ әвәзинә $\sum_{m \le i \le n} a_i$ јазырлар.

Бунун кими дә ашағыдакы һасилләрин чәмини $\sum$ символунун көмәјилә гыса шәкилдә ишарә етмәк олар:

$$a_1 \cdot \beta_1 + a_2 \beta_2 + \ldots + a_n \beta_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \beta_k \quad (3)$$

(2) вә (3) ифадәләриндәки i вә k –ја чәмләмәнин индекси дејирләр.

$\sum$ символундан истифадә етмәклә, чәмин ашағыдакы хассәләрини көстәрмәк олар.

1. Чәмләмә индексини дәјишдикдә чәм дәјишмир:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{s=1}^{n} a_s.$$

Доғрудан да, мәсәлән, һәм $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

һәм дә $\sum_{s=1}^{n} a_s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

2. Чәмләмә индексиндән асылы олмајан вуруғу чәм ишарәси харичинә чыхармаг олар:

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Ашкардыр ки,

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n = c \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i$.

Доғрудан да,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) =$$

$$= (a_1 + \beta_1) + (a_2 + \beta_2) + \ldots + (a_n + \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + \beta_1).$$

4. Топлананлары a_{ij} кими гоша индексли кәмијјәтләр ($i = 1, 2, \ldots, n$ вә ја $j = 1, 2, \ldots, m$) олдугда

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ јә'ни икигат сонлу чәмдә чәм ишарәләринин јерини дәјишмәк олар, чүнки i вә j кими икигат индексә малик олан a_{ij} кәмиј̌јәтләрини топладыгда, i индексини гејд едиб әввәлчә $j=1,2,\ldots,m$ гијмәтләринә нәзәрән $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ чәмини, сонра исә $i=1,2,\ldots,n$ гијмәтләринә ујғун олараг алынан $\sum_{j=1}^{m} a_{ij},\ldots,\sum_{j=1}^{m} a_{nj}$ «чәмләринин чәмини» тапмаг мүмкүндүр:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j}+\sum_{i=1}^{n} a_{2j}+\ldots+\sum_{j=1}^{m} a_{nj}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$$

Лакин a_{ij} топлананларынын икинчи индексләрини гејд едиб, бунлары $i=1,2\ldots n$ гијмәтләринә нәзәрән топламагла

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1},\sum_{i=1}^{n} a_{i2},\ldots,\sum_{i=1}^{n} a_{im}$$

чәмләрини тапдыгдан сонра бу чәмләри топламаг олар:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}+\sum_{i=1}^{n} a_{i2}+\ldots+\sum_{i=1}^{n} a_{im}=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

Алынан нәтичәләр көстәрир ки,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Хүсуси һалда, әкәр i вә j чәмләмә индексләринин һәр икиси ејни $1,2,\ldots,m$ гијмәтләрини алырса, онда икигат чәми:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$$

кими дә көстәрирләр .

Инди исә $\prod$ («Пи») символу һаггында.

Јухарыда дедијимиз кими, бу символла һасили ишарә едирләр. Белә ки:

$$a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{1 \le i \le n} a_i = \prod_{1}^{n} a_i$$

Чох асанлыгла көстәрмәк олур ки:

$$\prod_{i=1}^{k} a_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_{k+i} = \prod_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\prod_{i=1}^{k} (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Хүсуси һалда, a әдәдинин мисли вә дәрәчәси үчүн:

$$a \cdot n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad a^n = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Чәмдә олдуғу кими, һасилдә дә $\prod$ – нин индексиндән асылы олмајан вуруғу бу ишарәнин харичинә чыхармаг олар, јә'ни:

$$\prod_{i=1}^{n} c\, a_i = c \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

$\sum$ вә $\prod$ символларындан ријазијјатын мүхтәлиф саһәләриндә истифадә едилир.

Кронекер символу. Бу ишарә алман ријазијјатчысы Леополд Кронекерин ады илә бағлыдыр. Мә'насы беләдир ки, i вә k индексләри үчүн

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k \text{ олдугда} \\ 0, & i \ne k \text{ олдугда} \end{cases}$$

јахуд: $\delta_i^i = 1$; $\delta_k^i = 0,\ k \ne i$. Буну бә'зән «Кронекер» делтасы адландырырлар.

Бә'зи ријази әдәбијјатда Кронекер символуну δ_{ij} кими дә ишарә едирләр.

Кронекер символундан һәм чәбрдә, һәм дә ријазијјатын дикәр саһәләриндә истифадә едилир.

*   *   *

Ријазијјатда символларын ролу, о чүмләдән чәбрдә ишарәләрин әһәмијјәти кениш мөвзудур вә бурада, әлбәттә, бунларын һамысы үчүн әтрафлы бәһс етмәк имкан харичиндәдир. Биз бурада даһа чох истифадә едилән вә чәбр, әдәдләр нәзәријјәси үчүн даһа характерик олан бир нечәсинин үзәриндә дајандыг. Күман едирик ки, бу фајдасыз олмајачаг.

I ФӘСИЛ

ЧОХЛУГЛАР НӘЗӘРИЈЈӘСИНИН ЕЛЕМЕНТЛӘРИ

Чохлуг - мүәјјән хассәләрә малик олан, бир-бири илә вә башга чохлугларын елементләри илә мүәјјән мүнасибәтдә ола билән елементләрдән јараныр...

Н.Бурбаки

Ријазијјата бәләд олан охучулар јахшы билир ки, мүасир ријазијјаты чохлуг анлајышы олмадан бир елм кими тәсәввүр етмәк олмаз. Бу фәсилдә чохлуг анлајышы вә бунунла бағлы олан нәзәријјәнин бә'зи вачиб елементләрини хатырламагла охучунун бу саһәдә билик даирәсини кенишләндирмәјә чалышачағыг. Бу һәм дә она көрә вачибдир ки, китабын сонракы бөлмәләри бу вә ја дикәр шәкилдә чохлуг анлајышы илә әлагәлидир.

§1.1. ЧОХЛУГ, ОНУН ВЕРИЛМӘСИ, АЛТ ЧОХЛУГ АНЛАЈЫШЫ

Чохлуг анлајышы ријазијјатын әсас анлајышы олуб XIX әсрдә формалашыб. Бунун баниси алман ријазијјатчысы Кеорг Кантордур (1854-1918). О, тригонометрик сыраларын јығылма мәсәләси илә мәшғул оларкән бунлары әдәди ардычыллыгларла мүгајисә едиб, әдәдләри әһатә едән чохлугларла гаршылашыр вә чохлуг анлајышына еһтијач јараныр. Бу тәләбатын нәтичәси олараг әввәлләр ријазијјатын анчаг бә'зи саһәләриндә хүсуси мәгсәдлә истифадә едилән бу анлајыш кетдикчә, даһа кениш вүс'әт алараг тезликлә ријазијјатын дикәр саһәләринә дә нүфуз едир, чохлугла әлагәдар тәдгигатлар кенишләнир вә мүасир ријазијјатын әсасыны тәшкил едән мүстәгил чохлуглар нәзәријјәси јараныр. Чохлуглар нәзәријјәсинин илкин анлајышы кими чохлуға бу нәзәријјә дахилиндә тә'риф верилә билмир, лакин ону изаһ етмәк мүмкүндүр. Мүәјјән әламәтләрә көрә һәр һансы објектләрин јығыны, мәсәлән, бир шәһәрдә јашајан адамлар чохлуғу, сүрүдәки гојунлар чохлуғу, мәктәбдәки шакирдләр чохлуғу, тамаша залында стуллар чохлуғу, мешәдә ағачлар чохлуғу, гаражда автомашынлар чохлуғу вә с.

Чохлуғу тәшкил едән објектләр онун елементләри адланыр.

Ријазијјатда өјрәнилән чохлугларын елементләри нөгтәләр, әдәдләр, фигурлар, функсијалар, матрисләр, векторлар, тензорлар вә с. објектләрдир.

Елементләринин сајынын сонлу вә сонсуз олмасына ујғун олараг чохлуглары да сонлу вә сонсуз адландырырлар. Мәсәлән, 3-ә бөлүнән икирәгәмли әдәдләр чохлуғу, бир китабханада олан китаблар чохлуғу,әлифбадакы һәрфләр чохлуғу, n дәрәчәли чәбри тәнлијин көкләри чохлуғу сонлу, натурал, расионал, һәгиги әдәдләр чохлуғу, $[0,1]$ парчасында нөгтәләр чохлуғу исә сонсуз чохлуглардыр. Чохлуглары адәтән A, B, C, D вә с. бөјүк һәрфләрлә, елементләри a, b, c, d вә с. кичик һәрфләрлә ишарә едирләр.

Јери кәлмишкән гејд едәк ки, ријазијјатда ән чох раст кәлинән натурал, там, расионал, һәгиги вә комплекс әдәдләр чохлугларыны ујғун олараг N, Z, Q, R вә C һәрфләри илә ишарә едирләр. a елементинин A-ја дахил олмасы (она аидлији) $a \in A$ кими, дахил олмамасы $a \notin A$ (јахуд $a \bar{\in} A$) кими ишарә едирләр. $M \ni a$ ишарәси исә "M чохлуғу a елементини өз дахилинә алыр"-демәкдир.

M чохлуғу $a_1, a_2, ..., a_n$ кими сонлу сајда елементләрдән ибарәтдирсә, ону $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ кими ишарә едирләр. Лакин чох заман чохлуғу ишарә едәндә онун елементләри үчүн бу елементләрин һамысы үчүн характерик олан үмуми әламәти көстәриб ашағыдакы кими ишарәләрдән дә истифадә едирләр:

$$M = \{x \mid P(x)\} \qquad (1)$$

Бурада x чохлуғун елементи, P исә онун әламәти, јә'ни бүтүн x–ләрин малик олдуғу характерик хассәсини көстәрир; (1) ишарәси беләә охунур: M елә x–ләрин чохлуғудур ки, онлар P әламәтинә, јахуд P хассәсинә маликдир. Мәсәлән, там әдәдләр чохлуғу:

$\{x \mid x - \text{там әдәддир}\}$, јахуд $\{x \mid x \in Z\}$;

Јахуд чүт әдәдләр чохлуғу:

$\{x \mid x - \text{там әдәд олуб 2 - јә бөлүнүр}\}$

Бунун кими дә

$\{x \mid x - \text{һәгиги әдәд вә һәм дә } x \geq e\}$ символу e–дән (Непр әдәди) кичик олмајан һәгиги әдәдләр чохлуғуну көстәрир.

Беләликлә, чохлуг онун елементләринин верилмәси илә мүәјјән олунур вә о, ики үсулла вериләә биләр: 1) елементләринин садаланмасы; 2) елементләринин һамысына аид олан үмуми бир хассәни вә ја әламәти көстәрмәклә.

Ашкардыр ки, бир чох чәһәтдән 2)-чи үсул даһа үмуми характер дашыјыр.

Һеч бир елементи олмајан чохлуг бош чохлуг адланыб $\varnothing$ кими ишарә едилир. Мәсәлән, верилән ејни бир чеврәнин мүхтәлиф узунлугда олан радиуслар чохлуғу, бунун мүхтәлиф нөгтәләриндә кәсишән диаметрләри чохлуғу, $x^2 + 1 = 0$ тәнлијинин һәгиги көкләри чохлуғу бош чохлуглардыр. Зиддијјәтли хассәли һәр бир чохлуға бош чохлуг кими бахмаг олар; мәсәлән,

$\{x \mid x \neq x\}$-бош чохлугдур.

<u>**Тә'риф:**</u> Јалныз вә јалныз ејни елементләрдән ибарәт олан чохлуглара бәрабәр чохлуглар дејилир. (Хүсуси һалда бош чохлуглар бир-биринә бәрабәр сајылыр).

Башга сөзлә: А вә В чохлугларынын бәрабәрлиіи (А=В) о демәкдир ки, А-нын һәр бир елементи ејни заманда В–нин вә В–нин һәр бир елементи ејни заманда А–нын елементидир. Ики А вә В чохлугларынын бәрабәрлијини символларын көмәји илә белә јазмаг олар:

$$A = B \overset{\det}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Әкәр А вә В чохлуглары бәрабәр дејилләрсә, онда бу факт $A \neq B$ кими јазылыр вә мә'насы да будур ки, А вә В чохлугларынын бириндә һеч олмаса, елә бир елемент вар ки, бу елемент о бири чохлуға дахил дејил.

Вачиб анлајышлардан бири алтчохлугдур.

S чохлуғунун һәр бир елементи M–ә дахилдирсә, онда S–ә M -ин алт чохлуғу (вә ја һиссәси) дејилир.

Мәсәлән, натурал әдәдләр чохлуғу там әдәдләр чохлуғунун алт чохлуғу, там әдәдләр чохлуғу расионал әдәдләр чохлуғунун алт чохлуғу, расионал әдәдләр чохлуғу һәгиги әдәдләр чохлуғунун алт чохлуғудур.

M -ин өз ихтијари S алт чохлуғу илә мүнасибәти дахилолма анлајышы илә сәчијјәләнәрәк $S \subset M$, јахуд $M \supset S$ кими ишарә едилир.[1]

Символларын дили илә десәк:

$S \subset M \Leftrightarrow (x \in S \Rightarrow x \in M)$.

S-ин M үчүн алт чохлуг олмамасыны (јә'ни S–дә M -ә дахил олмајан елементләрин варлығыны $S \not\subset M$, јахуд $M \not\supset S$ кими ишарә едирләр.)

Тә'рифдән билаваситә ашкар олан ашағыдакы садә тәклифләри јада салмаг фајдалыдыр.

---

[1] $\subset$ вә $\in$ символларыны фәргләндирмәк лазымдыр; белә ки, бунларын бириничиси елементин чохлуға дахил олмасыны, икинчиси исә бу чохлуғун дикәр чохлуг үчүн алт чохлуг олдуғуну көстәрир.

1. Һәр бир M чохлуғу өзү өзүнүн алт чохлуғудур: $M \subset M$. Бурада ону гејд едәк ки, M-ин өзүндән фәргли һәр һансы S алт чохлуғуна $(S \neq M)$ онун мәхсуси, јахуд дүзкүн алт чохлуғу дејилир.[2]

Бош чохлуг $\varnothing$ истәнилән M чохлуғунун алт чохлуғу, о чүмләдән өзү өзүнүн алт чохлуғу кими гәбул едилир.

2. Дахилолма мүнасибәти транзитивлик хассәсинә маликдир, јә'ни $T \subset S$ вә $S \subset M$ исә онда $T \subset M$.

Дахилолма мүнасибәтинин көмәји илә ики А вә В чохлугларынын бәрабәрлијинә белә бир тә'риф вермәк олар: $A \subset B$ вә $B \subset A$ оларса, онда А вә В чохлугларына бәрабәр чохлуг дејилир, јә'ни

$$(A = B) \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$$

§1.2. ЧОХЛУГЛАРЫН КҮЧҮ АНЛАЈЫШЫ

Чохлуғун күчү ону тәшкил едән елементләрин сајы, һабелә чохлуглара еквивалентлик анлајышы илә әлагәдар олараг јаранан абстракт анлајышдыр. Сонлу чохлуғун күчү онун елементләринин сајыдыр. Бу анлајышы сонсуз чохлуглар үчүн үмумиләшдирәндә күч вә кардинал әдәд анлајышы јаранмышдыр.

Сонлу чохлугларда күчләрин мүгајисәси о гәдәр дә чәтинлик төрәтмир. Белә ки, верилән чохлугларын елементләрини сајыб буну көстәрән натурал әдәдләри мүгајисә едиб бәрабәрми, кичикми вә ја бөјүкмү олдуғуну мүәјјәнләшдирмәк мүмкүндүр. Бурада сонлу чохлуг дедикдә бош олмајан елә чохлуг нәзәрдә тутулур ки, бунун елементләринин сајыны мүсбәт там әдәдлә ифадә етмәк мүмкүн олсун.

---

[2] Бә'зи ријази әдәбијјатларда чохлуғун өзүнүн дә өзү үчүн алт чохлуғу олмасы фактыны нәзәрдә тутулан дахилолма анлајышы үчүн, $\subseteq$ (јахуд $\supseteq$)мәхсуси алт чохлуглар үчүн исә ујғун олараг $\subset$ (јахуд $\supset$) ишарәләри ишләдилир. $S \subset M$ олмасы $S = M$ олдуғуну инкар етмәдији үчүн дә әксәр мүәллифләр $\subset$ символундан истифадә едирләр.

Мараглы бурасындадыр ки, мүхтәлиф чохлугларда елементләри сајмадан да мүгајисә етмәк мәсәләсинә киришмәк мүмкүндүр. Мәсәлән, латын һәрфләриндән ибарәт олан сонлу

$$A = \{a, b, c, d\}$$

чохлуғу илә јунан һәрфләринин сонлу

$$B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

чохлуғуну мүгајисә едәк. Бунларын елементләрини ашағыдакы схемдәки кими гаршылашдыраг:

A	a	b	c	d
B	α	β	γ	δ

Сајмадан да бу чохлугларын ејни сајда елементә малик олдуғуну көрә биләрик. Бу мүгајисәнин әсас хүсусијјәти бундадыр ки, верилән чохлуғун һәр бир елементинә о бири чохлуғун јеканә бир елементи гаршы гојулуб вә тәрсинә! Ади сајма гајдасындан фәргли олараг бу гаршыгојма үсулу илә мүгајисәетмә гајдасынын үстүнлүјү бундан ибарәтдир ки, бу гајда сонсуз чохлуглары да бу мә'нада мүгајисә етмәк ишинә јарајыр. Мәсәлән, N бүтүн натурал әдәдләр чохлуғу, M исә $\frac{1}{n}$ шәклиндә көстәрилән әдәдләр чохлуғу олсун. (n-натурал әдәдир). Бу ики сонсуз чохлуғун елементләрини ашағыдакы чәдвәлдә јерләшдириб гаршылашдыраг:

N	1	2	3	4...
M	1	1/2	1/3	1/4...

Истәр N, истәрсә дә M сонсуз чохлугларынын елементләри сајы сонсуздур, лакин буна бахмајараг бу чүр гаршыгојма гајдасы илә бунлардакы елементләр сајынын ејни олмасы нәтичәсинә кәлирик. Белә мүгајисә гајдасы бунунла әлагәдар мәсәләләр чохлуглар нәзәријјәсиндә «чохлугларын күчү» вә «еквивалент чохлуглар» анлајышларынын јаранмасына кәтириб чыхармышдыр. A чохлуғунда һәр бир α елементинә B–нин јалныз вә јалныз бир b елементини гаршы гојан φ гајдасы варса вә өз нөвбәсиндә тәрсинә B чохлуғунун һәр бир b елементи A-нын јалныз вә јалныз a елементинә гаршы дурурса, онда бу гаршығојма гајдасына A вә B чохлуглары арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг дејилир. Әкәр ин'икас анлајышыны хатырласаг дејә биләрик ки, A вә B чохлугларынын арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јарадан φ гајдасы A-нын B-јә мәһз бијектив ин'икасыдыр: $\varphi : A \longrightarrow B$

A вә B чохлуглары арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг варса, бунлары еквивалент чохлуглар адландырыб дејирләр ки, бунларын күчү ејнидир вә буну адәтән $A \sim B$ кими ишарә едирләр.[3]

Ашкардыр ки, елементләринин сајы бәрабәр олан сонлу чохлуглар һамысы ејникүчлү чохлуглардыр. Чохлугларын күчү анлајышы бир-бири илә еквивалент чохлугларын һамысы үчүн үмумилик хассәси олуб, бу үмумилијин «көстәричисидир».

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ натурал әдәдләр чохлуғуна еквивалент олан чохлуглара һесаби чохлуглар, јахуд һесаби күчлү чохлуглар дејирләр. Бу күчү χ_0 («әлиф сыфыр») илә ишарә едирләр. Буну бә'зән $\overline{N} = \chi_0$, јахуд $|N| = \chi_0$ вә ја $m(N) = \chi_0$ кими јазырлар. Бу натурал әдәдләр чохлуғуна еквивалент олан бүтүн чохлугларын, о чүмләдән расионал әдәдләр чохлуғунун, чүт әдәдләр чохлуғунун, там әмсаллы $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ чохһәдлиләри чохлуғунун көкләри ола биләчәк әдәдләр (чәбри әдәдләр) чохлуғунун вә дикәр һесаби чохлугларын күчүдүр. Амма һесаби олмајан чохлуглар да вардыр. Мәсәлән, $[0,1]$ парчасында олан һәгиги әдәдләр гејри-һесаби чохлугдур. $[0,1]$

---

[3] Чох асанлыгла исбат етмәк олур ки, еквивалентлик мүнасибәти ашағыдакы үч хассәни бирләшдирир:

1. A~A(рефлексивлик),
2. A~B исә B~A (симметриклик),
3. A~B вә B~C исә онда A~C (транзитивлик)

парчасындакы һәгиги әдәдләр чохлуғуна вә буна еквивалент олан чохлуглара континиум күчлү чохлуглар дејирләр вә бу күчү бә'зән χ («әлиф»), јахуд садәчә олараг с илә ишарә едирләр. Ријази анализдә раст кәлинән сонсуз чохлуглар бир гајда олараг ја һесаби, јахуд да континиум күчлү чохлуглардыр.

Сонлу күчлү чохлугларын күчү бунларын елементләринин сајыны көстәрән натурал әдәд олдуғундан онлары, =, <, > ишарәләринин көмәји илә мүгајисә етмәк олар. Сонсуз чохлугларда күчләрин мүгајисәси ишинә чохлуглар нәзәријјәсиндә мүһүм әһәмијјәтә малик олан ашағыдакы теорем көмәк едир.

<u>Кантор-Шрејдер–Бернштејн теореми:</u> Ики чохлугдан һәр бири дикәринин алт чохлуғуна (һиссәсинә) еквивалентдирсә, бу чохлуглар өз араларында да еквивалентдир.

Тутаг ки, А вә В ихтијари чохлуглар m(A) вә m(B) исә ујғун олараг бунларын күчләридир.

Мәнтиги чәһәтдән мүмкүн олан ашағадыкы һаллара бахаг:

1. А чохлуғу В–нин, В чохлуғу исә А–нын һәр һансы бир һиссәсинә еквивалентдир.

2. А чохлуғунда В илә еквивалент һиссә олдуғу һалда В чохлуғунда А–ја еквивалент олан һиссә јохдур.

3. В чохлуғунда А илә еквивалент һиссә вар, лакин А-да В илә еквивалент һиссә јохдур.

4.Верилән чохлугларын һеч бириндә дикәри илә еквивалент олан һиссә јохдур.

Биринчи һалда Кантор-Бернштејн теореминә әсасән $A \sim B$ олур вә буна кәрә дә $m(A)=m(B)$, икинчи һалда тәбии олараг $m(A)>m(B)$, үчүнчү һалда исә $m(A)<m(B)$ гәбул едилир. Дөрдүнчү һалда исә күчләри мүгајисә етмәк олмур.

Беләликлә, истәнилән А вә В чохлугларынын күчләринин мүгајисәсиндә белә бир нәтичәјә кәлмәк олур ки, бунлар арасында $m(A)=m(B)$, $m(A)>m(B)$, $m(A)<m(B)$ кими мүнасибәтләрдән бири олмалыдыр. Инди бу

бахымдан һесаби чохлугларла, континиум күчлү чохлугларын күчләрини мүгајисә едәк. Һесаби чохлугларын ән јахшы нүмајәндәси натурал әдәдләрин $N=\{1,2,3,...\}$ чохлуғу, континиум күчлү чохлугларын исә ән јахшы нүмајәндәси $U=[0;\ 1]$–дир. m(N)=α, m(U)=c олсун. $[0;\ 1]$ парчасындакы һәгиги әдәдләр чохлуғу һесаби олмадығындан N вә U чохлуглары еквивалент дејилләр. Лакин U–нун елә U_1 һиссәси вар ки, $N \cap U_1$ олур, белә ки:

$$U_1=\left\{1,\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3},....\right\}\subset U,\ N\{1,2,3,...\}\approx\left\{1,\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3},....\right\}$$

она көрә дә m(N)<m(U) јахуд $a<c$ олур.

Илк бахышда әһәмијјәтсиз көрүнән бу мәсәләјә ријазијјатын үмуми инкишафы бахымындан јанашдыгда бу мәсәләнин вачиблији ајдын олур. Мәсәлән, ријазијјатда кардинал әдәдләр анлајышынын јаранмасы мәһз чохлугларын күчү вә бунларын мүгајисәси илә бағлы олмушдур. Һесаби вә гејри-һесаби чохлугларын күчүнүн мүгајисәси хүсусилә чидди әһәмијјәт кәсб етмишдир. Континиум һипотез буна јахшы мисал ола биләр. Исбат едилмишдир ки, континиум күч $c=2^{\chi_0}$ олуб һесаби чохлугларын күчүндән бөјүкдүр: $2^{\chi_0}>\chi_0$ јахуд $c>a$.

Суал чыхыр ки, континиум күч һесаби күчдән бөјүк олан илкин күчдүрмү? Башга сөзлә: с әдәди a–ја ән јахын a–дан бөјүк олан әдәдләрдән a–ја јахындырмы, јохса с илә a арасында башга бир күчү көстәрән әдәд дә вармы?

Чохлуглар нәзәријјәсинин јарадычысы К.Кантор белә бир фәрзијјә ирәли сүрмүшдү ки, континиум күч илкин гејри-һесаби күчдүр (јә'ни a–ја ән јахын әдәддир). Бу проблемин исбаты чохдан бәри бөјүк ријазијјатчыларын нәзәрини чәлб етмишдир. (Һилбертин көстәрдији мәшһур проблемләрдән биридир). Нәһајәт, 1963-1964-чү илдә американ ријазијјатчысы П.Ч.Коен бу һипотезин асылы олмазлығыны исбат етди, јә'ни о көстәрди ки, бу һипотези гәбул етсәк дә, рәдд етсәк дә чохлуглар нәзәријјәсинин аксиоматик гурулмасы ишинә хәләл кәтирмир. Доғрудур, континиум һипотезин доғрулуғуну гәбул етмәк вә ја ону тәкзиб етмәјин һеч дә чохлуглар нәзәријјәсинин аксиоматикасында зидцијјәт јаратмадығыны исбат етмәк чох бөјүк елми наилијјәтдир. Амма бу јолда атылан аддымлар (К.Һөдел, В.Серпински) тәшәббүсләр дә һәдәр кетмәмиш вә атылан аддымлар, проблемлә әлагәдар олараг көрүлән ишләр һамысы үмумијјәтлә ријазијјатын инкишафына дәјәрли хидмәт кими гијмәтләндирилмәлидир. Мәсәлән, континиум-һипотезин Сермело аксиому илә әлагәләндирилмәси ријази мәнтиг вә ријазијјатын әсаслары үчүн чидди әһәмијјәтә малик олмушдур. Бунунла әлагәдар олараг чохлугларын Һөдел-Бернајс, һабелә Сермело-Франк аксиоматик нәзәријјәләри гурулду.[4]

§1.3. ЧОХЛУГЛАР ҮЗӘРИНДӘ ӘМӘЛЛӘР

Чохлуглар үзәриндә апарылан бирләшмә, чыхма, кәсишмә, тамамлама әмәлләрини јада салаг.

Бирләшмә. А вә В чохлугларынын бирләшмәси елә чохлуға дејилир ки, онун елементләри бу чохлуглардан һеч олмаса биринин бүтүн елементләриндән ибарәт олсун.

А илә В–нин бирләшмәсини $A \cup B$ јахуд $A + B$ кими ишарә едирләр. ($A \cup B = C$ јазылышында A вә B топлананлар, С исә чәм адланыр). Тә'рифи ријази дилдә јазсаг:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ вә јахуд } x \in B\}$$

Бирләшмәнин ики чохлуг үчүн бу тә'рифини истәнилән сајда чохлугларын бирләшмәсинә дә аид етмәк

---

[4] Алман ријазијјатчысы Е.Сермелонун ады илә бағлы олан аксиом (1904)ријазијјатда «Сечмә акиому» ады илә мәшһурдур. Бу аксиомун мүхтәлиф дејим формалары вар. Бири беләдир. Тутаг ки, S елә чохлуглар аиләсидир ки, 1) S бош дејил, 2) S аиләсинә дахил олан һәр бир чохлуг да бош дејил. 3) S–ә дахил олан истәнилән ики мүхтәлиф чохлуг кәсишмир. Онда Сермело аксиому тәсдиг едир ки, бу шәртләр дахилиндә S–ә дахил олан һәр бир чохлуг илә јеканә бир ортаг елементә малик олан һеч олмазса бир чохлуг вар.

олар. Бу һалда $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ бирләшмәсини әксәр һалларда

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

кими, топлананлар сонсуз сајда олдугда исә $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ јахуд

$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ кими ишарә едирләр.

Топланан чохлуглар ортаг елементә малик ола да биләр, олмаја да биләр. О елементләр ки, һәм А-да, һәм дә В–дә вар, онда чәмдә онларын јалныз бири јазылыр.

Мисал 1. $A = \{a, b, c, d, e\}$ вә $B = \{x, y, c, e\}$ чохлугларынын бирләшмәси

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y\}$$

Чыхма. Чыхма әмәлинин нәтичәси фәргдир, A вә В чохлугларынын фәрги елә чохлуға дејилир ки, о јалныз A -нын елементләриндән ибарәт олуб, В–нин елементләрини өзүнә дахил етмир (јахуд гыса десәк A чохлуғунун В–јә дахил олмајан елементләри чохлуғуна A вә В–нин фәрги дејилир). A вә В–нин фәрги А\В (јахуд А-В) кими ишарә едилир. Фәргин тә'рифинин символик јазылышы

$$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

Мисал. $A = \{1,2,3,4,5\}$ вә $B = \{4,2,6,7\}$ чохлуглары үчүн

$A \setminus B = \{1,3,5\}$ вә $B \setminus A = \{6,7\}$

олур.

А вә В чохлугларынын ортаг елементләри јохдурса, бу һалда

$A \setminus B = A$ вә $B \setminus A = B$

олур.

Ону да гејд едәк ки, А=В һалында А\В=В\А олур.

Кәсишмә. A вә В чохлугларынын кәсишмәси бу чохлугларын јалныз вә јалныз ортаг елементләриндән ибарәт олан чохлуға дејилир вә $A \cap B$, јахуд АВ кими ишарә едилир.

Тә'рифи символик шәкилдә беләјазмаг олар:

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ вә } x \in B\}$

Мәсәлән, A вә B чохлугларынын кәсишмәси $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$ үчүн $A \cap B = \{c, d\}$ олур.

Кәсишмә әмәлини $A_1, A_2, \dots, A_k$ кими k сајда чохлуглар үчүн үмумиләшдириб

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \prod_{i=1}^{k} A_i$$

кими јаза биләрик.

Сонсуз сајда чохлуглар үчүн: $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$

<u>**Чохлуғун тамамлајычысы.**</u> Бурада әслиндә сөһбәт алтчохлуғун тамамлајычысындан кедир. Беләки, $A \subset B$ олдугда B/A фәргини көстәрән чохлуға A чохлуғуну B–јә тамамлајан чохлуг адландырараг ону адәтән $\overline{A_B}$, A_B вә ја $C_B A$ кими ишарә едирләр.

Мәсәлән, тәк әдәдләр чохлуғуну там әдәдләр чохлуғуна тамамлајан чохлуг чүт әдәдләр чохлуғу, бәрабәрјанлы үчбучаглар чохлуғуну бүтүн үчбучаглар чохлуғуна тамамлајан чохлуг бәрабәрјанлы олмајан үчбучаглар чохлуғу олур вә с.

Чох заман бахылан бүтүн чохлуглары һәр-һансы бир гејд едилән чохлуғун алтчохлуглары һесаб едәрәк һәмин гејд олунан чохлуғу универсал чохлуг адландырырлар. Универсал чохлуғу адәтән U илә ишарә едирләр. Әкәр мүәјјән бир чохлуғун мәһз һансы чохлуға тамамланмасы конкрет көстәрилмирсә, онда чохлуғун тамамланмасы онун универсал чохлуға тамамланмасы кими баша дүшүлүр вә бу да A_B әвәзинә $\overline{A_B}$ јахуд да $\overline{A}$ кими ишарә едилир, јә'ни

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x | x \in U, x \overline{\in} A\}$$

Инди исә таныш олдуғумуз әмәлләрин бә'зи хассәләрини гејд едәк.

1. Коммутативлик хассәси:

$A \cup B = B \cup A$ (бирләшмәдә);

$A \cap B = B \cap A$ (кәсишмәдә);

2. Ассосиативлик хассәси:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (бирләшмәдә);

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (кәсишмәдә);

3. Дистрибутивлик хассәси:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (кәсишмәнин бирләшмәјә нәзәрән);

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (бирләшмәнин кәсишмәјә нәзәрән);

4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (фәргин кәсишмәјә нәзәрән);

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (фәргин бирләшмәјә нәзәрән)

Хүсуси һалда:

4'. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$,

$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

Бу хассәләрин доғрулуғуну асанлыгла исбат етмәк олар. Мәсәлән, нүмунә үчүн кәсишмәнин бирләшмәјә нәзәрән дистрибутивлик

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

хассәсини исбат едәк. Бунун үчүн көстәрмәлијик ки,

$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$.

Тутаг ки, $x \in (A \cup B) \cap C$. Онда ашкардыр ки, x елементи $A \cup B$ бирләшмәси C чохлуғунун ортаг елементи олмалыдыр: $x \in A \cup B$ вә $x \in C$. Әкәр $x \in A$ исә онда $x \in C$ олур вә онда $x \in A \cap C$ олмалы вә демәли, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ Әкәр $x \in B$ исә, онда $x \in C$ олур, онда $x \in B \cap C$ олмалы вә демәли, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Беләликлә, ајдын олур ки, сол тәрәфин ихтијари елементи сағдакы чохлуға дахилдир: бу исә о демәкдир ки:

$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.