М. Ә. ӘЗИМОВ, Ф. Һ. СӘЛИМОВ, Ш. Ф. МӘММӘДОВ

ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Али мәктәбләр үчүн дәрс вәсаити

Азәрбајҹан Республикасы Халг Тәһсили Назирлији тәрәфиндән тәсдиг едилмишдир.

«МААРИФ» НӘШРИЈЈАТЫ
БАКЫ — 1991

Вәсаитин әлјазмасына физика-ријазијјат елмләри намизәди, досент *Г. Ә. Оручов* рә'ј вермишдир.

Елми редактору: Ф. Г. Магсудов, Азәрбајҹан Республикасы ЕА-нын академики.

М. Ә. Әзимов вә б.

Ә 38 Диференсиал тәнликләр. Али мәктәбләр үчүн дәрс вәсаити, Бакы.: «Маариф» нәшријјаты, 1991-чи ил,— 676 сәһ. шәкилли.

Дәрс вәсаити, әсасән ади диференсиал тәнликләрин вә биртәрәфли ху-
суси төрәмәли диференсиал тәнликләрин үмуми нәзәријјәсинә һәср едилмиш
дир. Вәсаитин әввәлиндә бу вә ја дикәр тип диференсиал тәнлијә кәтирилән
бир чох физики мәсәләләрин һәлли мүфәссәл олараг верилир. Нәзәри һиссә-
дән сонра методик чәһәтдән типик мәсәлә вә мисалларын һәлли, һабелә һәр
фәслин ахырында ујғун чалышмалар верилир ки, бу да нәзәри материалы
мәнимсәнилмәсиндә хејли көмәк едәчәкдир.

Педагожи институтларын ријазијјат факултәләринин тәләбәләри үчүн
јазылмыш бу дәрс вәсаитиндән физика факултәсинин вә техники институт-
ларын тәләбәләри дә истифадә едә биләрләр.

$Ә\,\frac{1602120000-58}{М\,652-91}\,5-89$ 22. 161. 6

ISBN 5-556-00122-7

КИРИШ

Ријази тәһсилини тамамлајан һәр бир шәхсин бу елмин инкишаф јолу илә даһа јахындан таныш олмасы вачибдир. Бу бахымдан тәгдим олунан „Диференсиал тәнликләр“ әсәри марағлы инкишаф јолу кечмишдир. Диференсиал тәнлик термини биринчи дәфә 1676-чы илдә Готфрид Вилһелм Лејбнис (1646—1716) тәрәфиндән ишләдилмишдир. Бундан башга дүнјанын бир чох даһи ријазијјатчыларындан Јакоб Бернулли (1654—1705), Исаак Нјутон (1643—1727), Иоһан Бернулли (1667—1748), Леонард Ејлер (1707—1783), Жан Лерон Даламбер (1717—1783), Жозеф Луи Лагранж (1736—1813), Гаспар Монж (1746—1818), Пјер Симон Лаплас (1749—1827), Адриен Мари Лежандр (1752—1833), Жан Батист Жозеф Фурје (1768—1830), Симеон Дени Пуассон (1781—1840), Јузеф Һени—Вронск (1776—1853), Карл Фридрих Гаус (1777—1855), Огјустен Луи Коши (1789—1857), Карл Густав Јакоб (1804—1851), Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859), Кеорг Фридрих Бернһард Риман (1826—1866), Карл Теодор Вилһелм Вејерштрас (1815—1897), Софја Василјевна Ковалевскаја (1850—1891), Анри Жјүл Пуанкаре (1854—1912), Емил Пикар (1856—1941), Гастон Дарбу (1842—1917), Александр Михајлович Лјапунов (1857—1918), Владимир Андрејевич Стеклов (1864—1926), J. П. Шаудер (1898—1943), Стефан Банах (1892—1945), Ф. Рис (1880—1956), Керман Вејл (1885—1955), Джон фон Нејман (1903—1957), Жак Саламон Адамар (1865—1963), И. Г. Петровски (1901—1973), J. Б. Лопатински (1906—1981) вә башгалары мәшғул олмағла, бу елмин инкишафында (истәр диференсиал тәнлијин һәллинин варлығы, истәрсә јеканәлији вә ја һәллин тапылмасына аид мүхтәлиф методлар вермәклә фундаментал әсәрләр јаранмышдыр) бөјүк рол ојнамышлар. Мүасир елми сәвијјәдә јазылмыш бу вәсаит диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинә һәср едилмишдир. Диференсиал тәнликләр тәбиәт елмләринин бүтүн саһәләриндә, практики башланғыч вә сәрһәд мәсәләләринин һәллиндә бөјүк әһәмијјәт кәсб едир.

Әлјазмасыны охујуб дәјәрли мәсләһәтләр вердијинә көрә китабын елми редактору, Азәрбајчан Республикасы ЕА-нын Механика вә Ријазијјат Институтунун директору, академик Ф. Г. Магсудова вә һәмин институтун елми ишчиси, физика—ријазијјат елмләри намизәди Г. М. Әзимоваја тәшәккүрүмүзү билдиририк. Бундан башга, әсәрин әлјазмасыны охумуш, нәшрә һазырланмасында јахындан көмәк етмиш вә мәсләһәтләр вермиш, М. Ә. Рәсулзадә адына Бакы Дөвләт Университетинин функсијалар нәзәријјәси вә функсионал анализ кафедрасынын мүдири, әмәкдар елм хадими проф. Ә. Ш. Һәбибзадәјә вә ријази анализ кафедрасынын мүдири Азәрбајҹан Республикасы ЕА-нын мүхбир үзвү, проф. А. Ә. Бабајева дәрин миннәтдарлығымызы билдиририк, Нәһајәт, бу китабын јазылмасында хош арзуларыны билдирдикләри үчүн АПИ-нин ријази анализ кафедрасынын мүдири Г. Ә. Оручова вә һәмин кафедранын әмәкдашларына тәшәккүр едирик.

I ФӘСИЛ

ТӨРӘМӘЈӘ НӘЗӘРӘН ҺӘЛЛ ОЛУНМАМЫШ БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН ИНТЕГРАЛЛАМА МЕТОДЛАРЫ

§ 1. ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР ВӘ ТӘ'РИФЛӘР

Тәбиәтдә олан мүхтәлиф һадисәләр просесләринин ријази ифадә едилмәси, чох һалларда сәрбәст дәјишән, ахтарылан функсија вә бу функсијанын төрәмәси иштирак едән тәнлијә кәтирилир.

Тә'риф. *Верилмиш тәнликдә ахтарылан функсија төрәмә вә ја диференсиал ишарәси алтында оларса, белә тәнлијә диференсиал тәнлик дејилир.*

Диференсиал тәнлик истилаһыны илк дәфә 1676-чы илдә мәшһур алман ријазијјатчысы Готфрид Вилһелм Лејбнис (1646—1716) ишләтмишдир.

Диференсиал тәнликләр ади вә хүсуси төрәмәли олмагла ики һиссәдән ибарәтдир. Диференсиал тәнликдә ахтарылан функсија анчаг бир аргументдән (бир сәрбәст дәјишәндән) асылы олдугда она *ади*, ики вә даһа чох дәјишәндән асылы олдугда *хүсуси төрәмәли* диференсиал тәнлик дејилир. Диференсиал тәнликләр тәртибләри вә һәм дә дәрәчәләри илә фәргләнир. Тәнликдә ахтарылан функсијанын төрәмәсинин вә ја диференсиалынын ән јүксәк тәртибинә *тәнлијин тәртиби* дејилир. Тәнликдә иштирак едән јүксәк тәртибли төрәмәнин вә ја диференсиалын дәрәчәсинә *тәнлијин дәрәчәси* дејилир.

1. $y' = x^2 + y^2$ (биртәртибли, бирдәрәчәли ади диференсиал тәнлик)
2. $y'^3 - y^2 + x^4 = 0$ (биртәртибли үчдәрәчәли ади диференсиал тәнлик).
3. $y'' = (1 + y')^{\frac{3}{2}}$ (икитәртибли бирдәрәчәли ади диференсиал тәнлик)
4. $xdy - ydx = 0$ (биртәртибли бирдәрәчәли ади диференсиал тәнлик)
5. $y'' - y'^2 = y^2$ (икитәртибли бирдәрәчәли ади диференсиал тәнлик)

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (икитәртибли, бирдәрәҹәли хүсуси төрәмәли диференсиал тәнлик), бурада $u=u(x, y)$.

7. $\frac{d}{dx}(\sin x)+y+x=0$ (тәнликдә ахтарылан функсија төрәмә вә ја диференсиал ишарәси алтында олмадығындан, бу диференсиал тәнлик дејилдир).

Бурада һәләлик анҹаг ади диференсиал тәнликләрдән бәһс едәҹәјик. Диференсиал тәнлијин һәлли мәсәләсини формал ријази мә'нада диференсиалламанын тәрс мәсәләси кими баша дүшмәк лазымдыр. Доғрудан да

$$y'=f(x)\ (1)\ \text{төрәмәси вә ја}\ dy=f(x)dx \qquad (1_1)$$

диференсиалы мә'лум олан y функсијасынын тапылмасы мәсәләси ејникүчлү*) (1) вә (1_1) диференсиал тәнликләринин һәлли илә бағлыдыр. (1) вә ја (1_1) тәнлијини һәлл етмәк, төрәмәси мә'лум олан y функсијасыны тапмаг демәкдир.

Беләликлә, диференсиалы мә'лум олан функсијанын тапылмасы

$$\int_{y_0}^{y} dy=\int_{x_0}^{x} f(x)dx \qquad (2)$$

интегралынын һесабланмасына кәтирилир.

Интеграл һесабындан мә'лумдур ки, (1) вә (1_1) тәнлијини өдәјән ән үмуми функсија

$$y=\int f(x)dx+C\ (3) \quad \text{вә ја} \quad y=\varphi(x, C)\ (3_1)$$

шәклиндә ифадә олунур. Бурада C ихтијари сабитдир. Ашкардыр ки, ахтарылан ибтидаи y функсијасы (1) вә (1_1) тәнликләриндән биргијмәтли олараг тә'јин едилмир. Һәгигәтән, (3) вә (3_1) ифадәсиндә C сабитинә истәнилән әдәди гијмәтләр вермәклә (1) вә (1_1) диференсиал тәнлијинин сонсуз сајда хүсуси һәллини алмыш оларыг.

Тә'риф. *Мүәјјән областда, аргументин истәнилән гијмәтиндә верилмиш диференсиал тәнлији ејнилијә чевирән функсијаја, тәнлијин һәлли вә ја интегралы дејилир.*

$$y=\varphi(x, C) \qquad (3)$$

ифадәсиндә C сабитинә ихтијари гијмәтләр вермәклә верилмиш (1) тәнлијинин бүтүн хүсуси һәлләрини алмаг мүмкүн оларса, белә һәллә тәнлијин үмуми һәлли, C-нин ихтијари гејд олунмуш гијмәтиндә алынан һәллә исә тәнлијин хүсуси һәлли дејилир

Мисал 1. $y^{(n)}=0$ (4)

*) (1) вә (1_1) тәнликләринин һәр бир һәлли дикәринин дә һәллидирсә, онда белә тәнликләрә ејникүчлү тәнликләр дејилир.

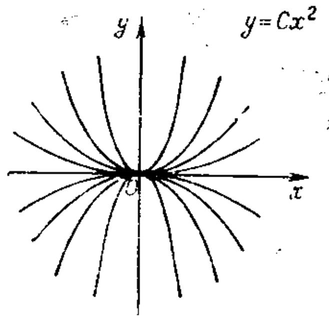
тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = P_{n-1}(x) \quad (5)$$

вә ја $y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$ чохһәдлисидир. Һәмин тәнлијин хүсуси һәлләриндән бири

$$y = Ax^{n-1} \qquad (6)$$

олар.



Шәкил 1

Мисал 2. $xy' - 2y = 0$ (7) диференсиал тәнлијинин үмуми һәлли $y = Cx^2$ функсијасыдыр. Бу исә симметрија оху ординат оху олан параболалар анләсидир (шәкил 1).

Дифенсиал тәнлијин һәллинин графикинә интеграл әјриси дејилир. Диференсиал тәнлијин һәллинин тапылмасы просесинә тәнлијин интегрәлланмасы дејилир. Биртәртибли ади диференсиал тәнлик үмуми ш килдә $F(x, y, y') = 0$ (8) вә ја

$$y' = f(x, y) \quad (8_1)$$

кими ифадә олунур. Бурада $f(x, y)$ функсијасыны сонсуәлуға чевирән нөгтәләрдә исә

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \quad (8_2)$$

көтүрүлүр. Чох һалларда (8_1) вә (8_2) тәнликләри əвəзинә онларла ејникүчлү

$$dy - f(x, y)dx = 0 \quad (8_3)$$

тәнлијинә бахмаг даһа мәгсәдәујғун олур. (8_3) тәнлијинә дахил олан x вә y дәјишәнләриндән ихтијари бирини функсија, дикәрини исә аргумент гәбул етмәк олар. (8_3) тәнлијинин һәр ики тәрәфини, $N(x, y) \neq 0$ функсијасына вуруб $-N(x, y)f(x, y) = M(x, y)$ ишарә етсәк, (8_3) тәнлији ашағыдакы кими олар:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (9)$$

§ 2. БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКДӘ БӘ'ЗИ АНЛАЈЫШЛАРЫН ҺӘНДӘСИ ИЗАҺЫ

Бу мәсәләни изаһ етмәк үчүн

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

диференсиал тәнлијинә бахаг. Бурада (x, y) чүтләри мүстәви үзәриндә дүзбучаглы координат системиндә нөгтәнин координатларыдыр. Сонра $f(x, y)$ функсијасынын һәр-һансы D областында тә'јин олундуғу вә һәм дә сонлу олмасы нәзәрдә тутулур.

Аналитик һəндəсəдəн мəлумдур ки, һəр бир (x, y) чүтүнə мүстəви үзəриндə мүəјјəн бир $M(x, y)$ нөгтəси вə һəр бир нөгтəјə гаршы (1) тəнлијинин көмəји илə бир y' əдəди тапылыр. Бу гајда илə тапылмыш y' əдəдини бу нөгтəлəрдəн чыхан мүəјјəн бир истигамəтин бучаг əмсалы һесаб едиб (1) тəнлијинин көмəји илə мүстəви үзəриндə көтүрүлмүш һəр бир нөгтə үчүн мүəјјəн истигамəт гаршы гојулур ки, буна да истигамəтлəр мејданы дејилир. Јухарыда гејд едилдији кими (1) тəнлијинин һəр бир $y=\varphi(x)$ һəлли һəндəси олараг мүстəвидə мүəјјəн əјрини ифадə етдијиндəн һəллин тə'рифинə əсасəн, мүстəвинин һəр бир нөгтəсиндə һəллин $\varphi'(x)$ төрəмəси, һəмин нөгтəдəн чыхан истигамəтин бучаг əмсалына бəрабəрдир. Демəли, интеграл əјрисинин истəнилəн нөгтəсинə чəкилмиш тохунанын истигамəти бу нөгтəдəн чыхан истигамəтлəр мејданы илə үст-үстə дүшəр.

Гејд: $f(x, y)$ функсијасынын D областынын һəр бир нөгтəсиндə сонлу олмасы истигамəтлəрин сонлу олдуғуну көстəрир. Белə олан һалда Oy охуна паралел олан истигамəтлəри чыхармыш олуруг. Бу истигамəтлəри нəзəрə алмагдан өтрү (1) тəнлији əвəзинə

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)} \qquad (1^*)$$

тəнлијинə бахмаг лазымдыр. (1) тəнлијинин сағ тəрəфи мүəјјəн бир нөгтəдə $\frac{0}{0}$ шəкилли гејри-мүəјјəнлијə чеврилирсə онда (1^*) тəнлијинин сағ тəрəфи һəмин нөгтəдə $\frac{0}{0}$ шəкилли гејри мүəјјəнлик олар. Белəликлə, бу нөгтəдə һеч бир истигамəт тə'јин едилмир вə ондан һеч бир интеграл əјриси кечмир. Буна уйғун олараг, ејни заманда $M(x, y)=0$, $N(x, y)=0$ олан нөгтəдəн $Mdx+Ndy=0$ тəнлијинин һеч бир интеграл əјриси кечмир. (1) тəнлијинин интеграл əјрисинин гурулмасы мəсəлəси бə'зи һалларда изоклин анлајышынын дахил едилмəси илə һəлл едилир. Интеграл əјрисинə ејни истигамəтдə тохунанларын тохунма нөгтəлəринин һəндəси јеринə *изоклин* дејилир.

$y'=\operatorname{tg}\alpha$ олдуғуна көрə изоклинин тəнлији

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x, y) \quad (2)$$

олур, бурада α—интеграл əјрисинə чəкилмиш тохунанла абсис охунун мүсбəт истигамəти арасындакы бучағын гијмəтидир. Белəликлə α бучағы верилдикдə, интеграл əјрилəринə мүəјјəн истигамəтдə чəкилмиш тохунанларын тохунма нөгтəлəринин һəндəси јеринин (изоклинин) тəнлији мə'лум олур. Бə'зи һалларда (1) тəнлији əвəзинə

$$f(x, y)=\beta \qquad (3)$$

көтүрүлүр. Бурада β параметрдир. Изоклинин графики, истигамəт мејданыны ајдынлашдырыр вə интеграл əјрилəринин тəгриби гурулмасына имкан верир.

α вә ја β-ја чох јахын гијмәтләр вермәклә (1) тәнлијинин интеграл әјриләрини даһа дәгиг гурмаг олар.

Мисал 1. $y' = \frac{y}{x}$ (4)

диференсиал тәнлији үчүн изоклинләр аиләсинин тәнлији

$$\frac{y}{x} = \beta \quad (5)$$

шәклиндә олур. (5) тәнлији координат башланғычындан кечән дүз хәтләр аиләсидир. (4) тәнлијинин үмуми һәллини ашағыдакы гајда илә тә'јин едәк, јә'ни: $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$.

$(\ln|y|)' = (\ln|x|)'$ олдуғундан вә $\ln|y|$, $\ln|x|$ — функсијаларынын бири-бириндән анчаг сабитлә фәргләндијини нәзәрә алсаг $\ln|y| = \ln|x| + \ln c$ вә ја $|y| = cx$, $y = \pm cx$ олар. c сабитинин гаршысындакы мәнфи ишарәсини атсаг, ахтарылан интеграл әјрисинин тәнлији $y = cx$ олар. $O(0, 0)$нөгтәси (4) диференсиал тәнлији үчүн мәхсуси нөгтәдир. Беләликлә, верилмиш (4) тәнлијинин изоклинләринин өзү дә бу тәнлик үчүн интеграл әјриләридир.

§ 3. КОШИ МӘСӘЛӘСИ

Диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин јаранмасында Огјүстен Луи Коши (1789—1857) көркәмли јер тутур. Мәшһур Коши мәсәләси онун ады илә бағлыдыр. Коши 1789-чу ил августун 21-дә Парисдә һүгугшүнас аиләсиндә анадан олмушдур. 1807-чи илдә политехник мәктәби гуртарыр вә дәниз лиманларыны тикмәк үчүн мүһәндис тә'јин едилир. 1811-чи илдә Парис академијасына чохүзлүләр һаггында өзүнүн елми ишини тәгдим едир. Бу иш Франса алимләри тәрәфиндән чох бәјәнилир. 1816-чы илдә Парис академијасынын үзвү сечилмишдир. 1930-чу илдә аиләси илә бирликдә харичә кедир. Исвечрәдән сонра Туриндә јашајыр вә бурада Ријази физика кафедрасыны тәшкил едир, онун мүдири вәзифәсиндә ишләјир.

1833-чү илдә Прагаја кедир вә беш ил X Карл императорунун оғлуну тәрбијә едир. Буна көрә она Барон рүтбәси верилир. 1838-чи илдә франсаја гајыдыр.

Коши бүтүн дөврләрин даһи ријазијјатчысы олмагла анализ, һәндәсә, әдәдләр нәзәријјәси, ријази-физика, чәбр вә механика саһәсиндә 800-дән артыг фундаментал әсәрин мүәллифидир. Кошинин бизә мә'лум олан 789 чап олунмуш ријази әсәри вардыр.

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

тәнлији үчүн Коши мәсәләси белә гојулур. Бу тәнлијин һәлләриндән еләсини тапмалы ки, $x = x_0$ олдугда $y = y_0$ шәртини өдәсин.

x_0 вә y_0 мә'лум әдәдләрдир. Башга сөзлә: елә $y = \varphi(x)$ функсиjасыны тапмалы ки, бу функсиjа (1) тәнлиjини $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ еjнилиjинә чевирсин вә $\varphi(x_0) = y_0$ олсун. Бурада x_0, y_0 әдәдләри уjғун олараг аргументин вә ахтарылан функсиjанын башланғыч гиjмәти адланыр. Үмумиjjәтлә, x_0 вә y_0 әдәдләринә (1) тәнлиjи һәллинин башланғыч гиjмәти вә jа башланғыч шәрти деjилир. Коши мәсәләсинин һәндәси мә'насы беләдир: (1) тәнлиjинин елә интеграл әjрисини тапмалы ки, бу әjри $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән кечсин. Коши мәсәләсинин һәлли jеканә олмаjа да биләр, jә'ни $x = x_0$ олдугда $y = y_0$ олан бир нечә һәлл ола биләр. $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндә (1) тәнлиjи меjданын бир истигамәтини тә'jин етмәсинә бахмаjараг бу нөгтәдән бир нечә интеграл әjриси кечә биләр. Коши мәсәләси һәллинин варлығына һәмишә һөкм вермәк олмаз. Һәллин варлығы вә jеканәлиjи мүхтәлиф анлаjышлардыр. Башга сөзлә ола биләр ки, һәлл вар, анчаг бу һәлл jеканә деjил. Коши мәсәләси һәллинин jеканә олмасынын һансы шәртләрдә мүмкүн олмасы II фәсил § 1-дә изаһ едиләчәкдир.

§ 4. КОШИ МӘСӘЛӘСИНДӘ МӘХСУСИ ҺАЛ

Коши мәсәләсинин һәллиндә (1) тәнлиjинин сағ тәрәфиндәки функсиjанын $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндәки гиjмәти вә x_0, y_0 әдәдләринин сонлу олдуғу нәзәрдә тутулмушдур. Башга сөзлә (1) тәнлиjинин $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндә тә'jин етдиjи истигамәтин Oy охуна паралел олмадығы фәрз едилмишдир. (1) тәнлиjинин сағ тәрәфи $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндә сонсузлуг оларса бу тәнлиjин әвәзинә $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$ тәнлиjинә бахмаг даһа мәгсәдәуjғундур. Бу һал үчүн мәсәлә белә гоjулур: $y = y_0$ олдугда $x = x_0$ шәртини өдәjән $x = \psi(y)$ һәллини тапын. Мәсәләнин мәхсусилиjи $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндә интеграл әjрисинә чәкилмиш тохунанын Oy охуна паралел олмасы һалыдыр.

$f(x, y)$ функсиjасы $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндә $\frac{0}{0}$ шәклиндә геjри-муәjjәнлиjә чеврилирсә, Коши мәсәләси мә'насыны итирир. Чүнки бу һалда $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән һеч бир интеграл әjриси кечмир.

§ 5. МӘХСУСИ ҺӘЛЛ

Тә'риф. *Ихтиjари C ($\pm$ гиjмәтини дахил етмәклә) сабитинин һеч бир хүсуси гиjмәтиндә верилмиш диференсиал тәнлиjин үмуми һәллиндән алынмаjан һәллә бу тәнлиjин мәхсуси һәлли деjилир.*

Бу тә'рифин һәндәси мә'насы беләдир: үмуми һәлли тәшкил едән әjриләр аиләсинә дахил олмаjан интеграл әjриси мәхсуси һәллә уjғундур.

Тә'риф. *Әјриләр аиләсинин һәр бири башга бир әјријә тохунандырса вә бу икинчи әјри тохунма нөгтәләринин һәндәси јеридирсә, она аиләнин бүрүјәни дејилир.*

Үмуми һәлләр аиләсинин бүрүјәни варса, бу мәхсуси һәллә ујғун хәтдир.

Гејд 1 Әјриләр аиләси мүәјјән бир диференсиал тәнлијин интеграл әјрисидирсә, онларын бүрүјәни дә һәмин тәнлијин интеграл әјриси олар.

Мисал 1. $y^2(1+y'^2)=a^2$, (1)

бурада a—сабитдир.

(1) тәнлијини y'-ә нәзәрән һәлл етсәк,

$$y' = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \quad (\sqrt{a^2-y^2}\neq 0)$$

гәбул едиб һәмин ифадәјә бөлсәк

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{a^2-y^2}} = dx,$$

интегралласаг, $\pm\sqrt{a^2-y^2} = x+c$ аларыг ки, бурадан да

$$(x+c)^2+y^2 = a^2. \qquad (2)$$

Бу әјри, мәркәзи $(C, 0)$ вә радиусу a-ја бәрабәр олан чevрәләр аиләсидир. C сабитинә истәнилән мүсбәт, мәнфи гијмәтләр вермәклә алынан чevрәләр аиләсинин мәркәзләри абсис охуну долдурур, јә'ни Ox дүз хәтти (2) чevрәләр аиләсинин мәркәзләри чохлуғудур (шәкил 2).

Беләликлә, $-a<y<a$ золағында јерләшән мүстәвинин һәр бир нөгтәсиндән ики кәсишән чevрә кечир. Башга сөзлә бу нөгтәдән кәсишән ики интеграл әјриси кечир. Бурада $y=a$ вә $y=-a$ дүз хәтләри (2) интеграл әјриләринин тохунма нөгтәләринин һәндәси јери олмагла аиләнин бүрүјәнләридир. Тохунма нөгтәләри чevрәләр үзәриндә олдуғундан бу дүз хәтләр верилмиш диференсиал тәнлији өдәјир.

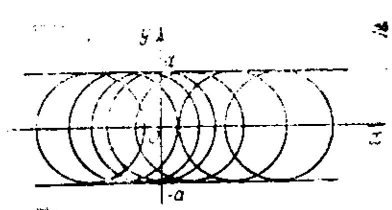
Гејд 2. $y=a$ вә $y=-a$ һәлләри (1) тәнлијини квадратураја кәтирдикдә, $\sqrt{a^2-y^2}\neq 0$ ифадәсинә бөлән заман тәнлијин итән көкләридир. Беләликлә, (2) тәнлији верилмиш (1) тәнлијинин үмуми һәлли, $y=\pm a$ исә онун мәхсуси һәлләридир.

Гејд 3. Диференсиал һәндәсәдән мә'лум олдуғу кими әјриләр аиләсинин бүрүјәнини тә'јин етмәк үчүн

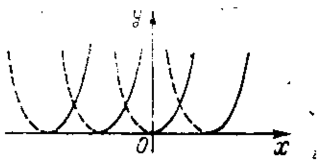
$$F(x, y, C) = 0 \quad (3)$$

верилмиш әјриләр аиләсиндән параметрә көрә төрәмә алсаг

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0$$



Шәкил 2



Шәкил 3

гәбул едиб

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial C} = 0 \end{aligned}\right\}$$

системиндән C-ни јох етмәк лазымдыр. Беләликлә, алынан $y = \varphi(x)$ хәтти, әјриләр аиләсинин бүрүјәни, һәмчинин тәнлијин мәхсуси вә ја (3) әјриләр аиләсинин мәхсуси нөгтәләринин һәндәси јери олачагдыр.

Мисал 2.

$$y' = 2\sqrt{y}$$

тәнлијинә бахаг. Бурада көк һесаби көкдүр. Тәнлији һәлл етсәк, $y^{\frac{1}{2}} = x + C$ вә ја $y = (x + C)^2$ олар. Бу, $-\infty < x < +\infty$ $0 < y < +\infty$ областында тәнлијин үмуми һәллидир. Интеграл әјриләри параболалар аиләсинин анчаг сағ будаглары үзрә $y' > 0$ олмагла бурада тохунанларын истигамәти меіданын истигамәтләри илә үст-үстә дүшәр. $y = 0$ дүз хәтти (абсис оху) верилмиш тәнлијин мәхсуси һәллидир. Бу һәлли C-нин һеч бир гијмәтиндә үмуми һәлдән алмаг мүмкүн дејилдир (шәкил 3). Бу мисал үчүн Коши мәсәләси белә гојулур: $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапын, бурада $y_0 > 0$.

Мәсәлән,

$$\sqrt{y} = x + C$$

бәрабәрлијиндә x, y әвәзинә x_0, y_0 јазсаг

$$\sqrt{y_0} = x_0 + C$$

олар. Бурадан $C = -x_0 + \sqrt{y_0}$ гијмәтини јеринә јазмаг лазымдыр. Бу гајда илә Коши мәсәләсинин һәлли

$$y = \left(x - x_0 + \sqrt{y_0}\right)^2$$

шәкилдә олур.

Гејд 4. Һәр һансы диференсиал тәнлији квадратураја кәтирән заман бә'зи һалларда тәнлији $\omega(x, y)$ шәклиндә функсијаја бөлмәк лазым кәлир. Бу һалда алынан тәнлик әввәлки илә биркүчлү олмаја да биләр. Бөлмә заманы $\omega(x, y)$ функсијасыны сыфыра чевирән вә үмуми һалдан C-нин һеч бир гијмәтиндә алынмасы мүмкүн олмајан $y = \varphi(x)$ вә ја $x = \psi(y)$ кими һәлләри итмиш олур ки, бунларын да мәхсуси һәлл олмасы ашкардыр.

Диференсиал тәнликләрин үмуми интегралларынын тапылма просесинә диггәтлә јанашыларса, интеграллама апармадан бүтүн мәхсуси һәлләри тапмаг олар.

§ 6. ДӘЈИШӘНЛӘРИНӘ АЈРЫЛА БИЛӘН ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

тәнлијинин верилдијини фәрз едәк.

Ашағыдакы һаллары нәзәрдән кечирәк:

1. $M = f_1(x)$; $N = f_2(y)$ олсун, бурада $f_1(x)$ вә $f_2(y)$ ихтијари кәсилмәз функсијалардыр. Бу һалда (1) тәнлији

$$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

шәклинә дүшүр. Белә тәнлик, дәјишәнләринә ајрылмыш тәнлик адланыр.

(2) тәнлијини интегралламыб

$$\int f_1(x)\,dx = \varphi_1(x), \quad \int f_2(y)\,dy = \varphi_2(y) \tag{3}$$

$$\text{вә } \varphi_1(x) + \varphi_2(y) = \varphi(x, y)$$

илә ишарә етсәк,

$$d\varphi(x, y) = \frac{d\varphi_1(x)}{dx}\,dx + \frac{d\varphi_2(y)}{dy}\,dy. \tag{4}$$

Дикәр тәрәфдән (3)-дән

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx} = f_1(x), \quad \frac{d\varphi_2(y)}{dy} = f_2(y) \tag{5}$$

вә (5) илә (4)-ү мүгајисә етсәк,

$$d\varphi = f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy \tag{6}$$

алынар.

(2) тәнлијинә көрә ахырынчы ифадәнин сағ тәрәфи сыфыр олдуғундан $d\varphi(x, y) = 0$. Интеграллаcаг $\varphi(x, y) = C$ вә ја

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(y)\,dy = C.$$

2. (1) тәнлијинин һәр тәрәфини һәр һансы $\mu(x, y)$ функсијасына вурдугда ујғун олараг:

$$\mu(x, y)\,M(x, y) = f_1(x)$$
$$\mu(x, y)\,N(x, y) = f_2(y)$$

оларса, онда (1) тәнлији дәјишәнләринә ајрылмыш олур:

$$f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = 0.$$

3. (1) тәнлији

$$y' = f(x)\,\varphi(y) \tag{7}$$

шәклиндә олсун. Бу һалда ашағыдакы теорем доғрудур.

Теорем. ***$f(x)$ вә $\varphi(y)$ функсијалары ујғун олараг $[a, b]$ вә $[c, d]$ парчаларында кәсилмәздирсә вә $\varphi(y) \neq 0$ оларса (7) тәнлији квадратура васитәси илә ифадә олунур, јә'ни***

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

◀ Шәртә көрә $\varphi(y) \neq 0$ олдуғундан (7)-дән

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx \tag{7}$$

олур. $\frac{1}{\varphi(y)}$ вә $f(x)$ функсијалары кәсилмәз олдуғундан бунларын ибтидаи функсијалары вардыр. Бунлары ујғун олараг

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \Phi(y) \qquad (8) \qquad\qquad \int f(x)\,dx = F(x) \qquad (8_1)$$

ишарә етсәк, (8) вә (8_1)-дән

$$d\Phi(y) = dF(x) \tag{8_2}$$

олур. Диференсиаллары бәрабәр олан функсијалар бир-бириндән анҹаг ихтијары сабитлә фәргләндијиндән,

$$\Phi(y) = F(x) + C. \tag{9}$$

Бу ахырынҹы, (7) тәнлијинин үмуми интегралыдыр. Һәгигәтән,

$$g(x, y) = F(x) - \Phi(y) + C \tag{10}$$

ашкар олмајан функсија һаггында Јунг теореминин шәртләрини өдәјир:

$$g'_x(x, y) = F'(x) = f(x), \quad g'_y(x, y) = -\Phi'_y = -\frac{1}{\varphi(y)}.$$

$g(x, y)$ функсијасы $\begin{pmatrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{pmatrix}$ областында кәсилмәз олмагла вә һәм дә $g'_y \neq 0$ олдуғундан Јунг теореминә әсасән (10)-дан y, x-ин функсијасы кими тә'јин едилир вә верилмиш тәнлијин һәллини ифадә едир, јә'ни

$$y' = -\frac{g'_x(x, y)}{g'_y(x, y)} = f(x)\cdot\varphi(y). \tag{11}$$

4. (1) тәнлијиндә

$$M(x, y) = f_1(x)\,\varphi_1(y),$$
$$N(x, y) = f_2(x)\,\varphi_2(y)$$

оларса, бу һал үчүн тәнлик,

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dy + f_2(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0 \tag{12}$$

шәклинә дүшәр. Бурада $f_i(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i = 1, 2)$ функсијалары ујғун олараг $[a, b]$ вә $[c, d]$ парчаларында кәсилмәздир. Бундан башга $(x_0, y_0) \in R$ нөгтәсиндә $f_2(x_0) \neq 0$, $\varphi_1(y_0) \neq 0$ нәзәрдә тутулур. Ахырынҹы шәрти нәзәрә алсаг, $(x_0, y_0) \in R$ нөгтәсинин әтрафында (12) тәнлијинин һәр тәрәфини $\mu = \frac{1}{f_2(x)\,\varphi_1(y)}$ функсијасына вурмаг олар. Нәтичәдә (12) тәнлији

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0 \qquad (13)$$

шәклинә дүшәр. Бу тәнлик дәјишәнләринә ајрылмыш тәнликдир. (13) тәнлијини $d\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy\right)=0$ кими јазмаг олар. Бурада (x_0, y_0) әдәдләри ихтијары сабитләр олса да елә сечилмәлидир ки, интегралларын мә'насы олсун. Ахырынчыдан,

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C \qquad (14)$$

алынар. Хүсуси һалда $C=0$ олдугда

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$$

ифадәси, верилмиш диференсиал тәнлијин $x=x_0$, $y=y_0$ башланғыч шәртини өдәјән хүсуси һәлли олур.

Гејд 1. (14) интеграллары һесаблајаркән (x_0, y_0) гијмәтләриндән асылы олан һиссәни C сабитинә дахил етмәклә бу дүстуру сәрһәдсиз дә јазмаг олар:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C.$$

Бу дүстурдан башланғыч шәртини өдәјән (Коши мәсәләсини һәлл етмәк үчүн) хүсуси һәлли тапмаг үчүн үмуми гајда үзрә һәрәкәт етмәк лазымдыр.

Гејд 2. (12) тәнлијинин һәлләринин һамысыны, үмумијјәтлә десәк, (14) дүстуру васитәси илә тапмаг мүмкүн дејил. Доғрудан да (12) тәнлијини квадратураја кәтирмә просесиндә тәнлији $f_2(x)\varphi_1(y)$ һасилинә бөлдүк. Бөлмә заманы үмуми һәлдән алынмасы мүмкүн олмајан $\varphi_1(y)=0$, $f_2(x)=0$ тәнликләрини өдәјән һәлләри итирә биләрдик. Доғрудан да $y=b$, $\varphi_1(y)=0$ тәнлијинин һәллидирсә, онда (12)-дә y әвәзинә b јазсаг тәнлик, $f_1(x)\varphi_1(b)+f_2(x)\varphi_2(b)db=0$ шәклиндә алынар вә $y=b$ верилмиш тәнлијин һәлли олмасы ашкардыр. Аналожи олараг $x=a$, $f_1(x)=0$ тәнлијинин һәллидирсә бу һәлл (12) тәнлијинин дә һәллидир. Беләликлә, $x=a$ вә $y=b$ һәлләрини (14) дүстурундан C сабитини сечмәклә алмаг мүмкүн дејилсә, онда бу һәлләр (12) тәнлијинин мәхсуси һәлләридир.

5. (1) тәнлијиндә x вә y дәјишәнләрини јени дәјишәнләрлә әвәз етмәк һалы, јә'ни

$$x=f_1(\xi,\eta), \quad y=f_2(\xi,\eta), \qquad (15$$

бурада η вә ξ ујғун олараг јени ахтарылан функсија вә аргумент олсун. f_1, f_2—диференсиалланан олмагла, ξ вә η-ја нәзәрән һәлл олуна билән ихтијари функсијалардыр, јә'ни

$$\xi = \varphi_1(x, y), \qquad \eta = \varphi_2(x, y) \tag{15$_1$}$$

ифадә етмәк вә

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \tag{16}$$

јазмаг олар. Бурада x, y әвәзиндә f_1, f_2 функсијалары нәзәрдә тутулур. (1) тәнлијиндә иштирак едән $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функсијаларында $x = f_1(\xi, \eta)$, $y = f_2(\xi, \eta)$ илә әвәз етдикдән сонра алынан функсијалары ујғун олараг $M^*(\xi, \eta)$ вә $N^*(\xi, \eta)$ илә ишарә етсәк,

$$\begin{aligned} M(x, y) &= M(f_1(\xi, \eta), f_2(\xi, \eta)) = M^*(\xi, \eta), \\ N(x, y) &= N(f_1(\xi, \eta), f_2(\xi, \eta)) = N^*(\xi, \eta) \end{aligned} \tag{16$_1$}$$

алынар. Онда (1) тәнлији ашағыдакы кими олар:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = M^*(\xi, \eta)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \partial\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta\right) +$$

$$+ N^*(\xi, \eta)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta\right) = \left[M^*(\xi, \eta)\frac{\partial x}{\partial \xi} + N^*(\xi, \eta)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right] d\xi +$$

$$+ \left[M^*(\xi, \eta)\frac{\partial x}{\partial \eta} + N^*(\xi, \eta)\frac{\partial y}{\partial \eta}\right] d\eta;$$

$$M_1 = M^*(\xi, \eta)\frac{\partial x}{\partial \xi} + N^*(\xi, \eta)\frac{dy}{\partial \xi},$$

$$N_1 = M^*(\xi, \eta)\frac{\partial x}{\partial \eta} + N^*(\xi, \eta)\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

ишарә етсәк, тәнлик

$$M_1 d\xi + N_1 d\eta = 0 \tag{17}$$

шәклинә дүшәр.

(17) тәнлијинин әмсаллары олан M_1 вә N_1 ихтијари ики $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$— функсијаларындан асылы олдуғуна көрә бу функсијалары чох һалларда елә сечмәк олур ки, (17) тәнлији дәјишәнләринә ајрылсын. Тутаг ки, f_1, f_2 функсијалары белә сечилмишдир, јә'ни тәнлик

$$d\psi(\xi, \eta) = M_2(\xi)\, d\xi + N_2(\eta)\, d\eta = 0$$

шәклинә дүшмүшдүр. Бурадан

$$\psi(\xi, \eta) = C \tag{18}$$

вә (15$_1$) әвәзләмәсиндән ξ вә η-нын гијмәтләрини (18)-дә јазсаг алынан

$$\varphi(x, y) = C \tag{19}$$

ифадәсинин (1) тәнлијинин үмуми һәлли олдуғуну көстәрәк. Бу мәгсәдлә (19)-дан там диференсиал алсаг,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\partial y. \tag{20}$$

$\varphi(x, y)$ функсиjасы $\psi(x, y)$ функсиjасында ξ вә η-нин гиjмәтләрини jаздыгдан сонра алындығындан, jә'ни:

$$\psi(\xi, \eta) = [\varphi_1(x, y),\ \varphi_2(x, y)] = \varphi(x, y)$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}. \end{aligned} \tag{21}$$

Дикәр тәрәфдән (18)-дән

$$d\psi = \frac{d\psi}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\eta = 0 \quad \text{вә} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}}{\dfrac{d\psi}{\partial\eta}}$$

олдуғундан (17) тәнлиjи

$$M_1\frac{\partial\psi}{\partial\eta} - N_1\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0$$

олар вә jа

$$\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi}}{M_1} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}}{N_1} = \lambda(\xi, \eta) \quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \lambda M_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \lambda N_1 \tag{22}$$

алынар. Бурада $\lambda = \lambda(\xi, \eta)$, ξ вә η-дан асылы функсиjадыр (22)-дән тапылан гиjмәтләри (21)-дә jазсаг

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\left(M_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + N_1\frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lambda\left(M_1\frac{\partial\xi}{\partial y} + N_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) \tag{23}$$

олур. (23) вә (20)-дән:

$$d\varphi = \lambda\left\{\left(M_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + N_1\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)dx + \left(M_1\frac{\partial\xi}{\partial y} + N_1\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dy\right\} \tag{24}$$

алынар, бурада M_1, N_1 функсиjаларында ξ вә η-ны (15) бәрабәрлиjиндән x, y илә әвәз етмәк лазымдыр.

(16) бәрабәрлиjини нәзәрә алсаг

$$\begin{aligned} M_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + N_1\frac{\partial\eta}{\partial x} &= \left[M^*(\xi, \eta)\frac{\partial x}{\partial\xi} + N^*(\xi, \eta)\frac{\partial y}{\partial\xi}\right]\frac{\partial\xi}{\partial x} + \\ &+ \left[M^*(\xi, \eta)\frac{\partial x}{\partial\eta} + N^*\frac{\partial y}{\partial\eta}\right]\frac{\partial\eta}{\partial x} = M^*\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right] + \\ &+ N^*\left[\frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right] \end{aligned} \tag{25}$$

алынар. (15) әвәз[illegible]ләриндән x-ә көрә төрәмә алсаг

$$1 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$
$$0 = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{26}$$

олар. (25) вә (26)-дан

$$M_1\frac{\partial \xi}{\partial x} + N_1\frac{\partial \eta}{\partial x} = M^*(\xi, \eta)$$

олур. (16_1)-дән $M^*(\xi, \eta) = M(x, y)$ олдуғуна көрә (27) бәрабәрлији

$$M_1\frac{\partial \xi}{\partial x} + N_1\frac{\partial \eta}{\partial x} = M(x, y) \tag{27}$$

шәклинә дүшәр. Буна охшар олараг

$$M_1\frac{\partial \xi}{\partial y} + N_1\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left[M^*(\xi, \eta)\frac{\partial x}{\partial \xi} + N^*(\xi, \eta)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]\frac{\partial \xi}{\partial y} +$$
$$+\left[M^*(\xi, \eta)\frac{dx}{\partial \eta} + N^*\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\frac{\partial \eta}{\partial y} = M^*(\xi, \eta)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) +$$
$$+ N^*(\xi, \eta)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right). \tag{28}$$

Дикәр тәрәфдән (15) әвәзләмәләриндән y-ә көрә төрәмә алсаг,

$$0 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{dy},$$
$$1 = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{29}$$

алынар. (28) вә (29)-дан нәтиҹәдә

$$M_1\frac{\partial \xi}{\partial y} + N_1\frac{\partial \eta}{\partial y} = N^*(\xi, \eta) \tag{30}$$

(16_1)-дән һәмчинин

$$N^*(\xi, \eta) = N(x, y) \tag{31}$$

олдуғуна көрә

$$M_1\frac{\partial \xi}{\partial y} + N_1\frac{\partial \eta}{\partial y} = N(x, y) \tag{32}$$

олур. (24), (27) вә (32) бәрабәрликләриндән

$$d\varphi = \lambda(Mdx + Ndy). \tag{33}$$

Сағ тәрәф $Mdx + Ndy = 0$ олдуғуна көрә

$$d\varphi = 0$$

вә интегралласаг,

$$\varphi(x, y) = C$$

верилмиш диференсиал тәнлијин үмуми һәллидир.

§ 7. ДӘЈИШӘНЛӘРИНӘ АЈРЫЛАН ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘРӘ АИД БИР НЕЧӘ МӘСӘЛӘНИН ҺӘЛЛИ

1. Температуру T, ону әһатә едән мүһитин температуру сабит олмагла $T_C (T > T_C)$ олан ҹисим сојумаға башлајыр. Ҹисмин $T|_{t=0} = T_0$ башланғыҹ шәртини өдәјән истәнилән андакы температуруну тә'јин един.

■ Нјутон ганунуна көрә сонсуз кичик dt мүддәтиндә ҹисмин итирдији истилик мигдары dQ, ҹисмин температуру илә ону әһатә едән мүһитин температурунун фәрги $T - T_0$ илә мүтәнасиб олдуғундан

$$dQ = -k(T - T_0)dt \quad (1)$$

олар. Бурада k мүтәнасиблик әмсалыдыр. Истилик итдијинә көрә ишарә мәнфи көтүрүлүр. Дикәр тәрәфдән

$$Q = mC(T - T_C) \quad (2)$$

(бурада m—ҹисмин күтләси, C исә онун истилик тутумудур) олдуғуну нәзәрә алыб бу ахырынҹыны диференсиалласаг

$$dQ = mC\,dT \quad (3)$$

алынар. (Бурада истилик тутумунун температурдан асылы олмадығы нәзәрдә тутулур).

(1) вә (3) бәрабәрликләриндән

$$mCdT = -k(T - T_C)dt$$

вә ја

$$\frac{dT}{T - T_C} = -k\frac{dt}{mC} \quad (4)$$

олур. Бу тәнлик дәјишәнләринә ајрылмыш диференсиал тәнлик олдуғундан ону интегралласаг

$$T = T_C + Ce^{\frac{-kt}{mC}} \quad (5)$$

алыныр. Бу ахырынҹы (4) диференсиал тәнлијинин үмуми һәллидир. Бурада C-ни тә'јин етмәк үчүн $t = 0$ олдугда $T = T_0$ башланғыҹ шәртиндән истифадә едирик: $C = T_0 - T_C$. C-нин гијмәтини 5-дә јаздыгда

$$T = T_C + (T_0 - T_C)e^{\frac{-kt}{mC}} \quad (6)$$

алынар, бурада k әмсалы ја билаваситә верилир вә ја әлавә шәртдән тапылыр. Ахырынҹы (6) дүстуру гојулмуш мәсәләнин һәллидир. ■

Хүсуси һалда һаванын температуру 20°C олдугда 20 дәгигә мүддәтиндә ҹисим 100°-дән 60°-јә гәдәр сојујарса о һалда бу ҹисмин температуру нечә дәгигә мүддәтиндә 30°-јә гәдәр сојујар?

■ Јухарыда көстәрилән кими чисмин температуруну T (C дәрәчә) вә заманы t (дәгигә) илә ишарә етсәк, гојулмуш мәсәләнин диференсиал тәнлији

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T - 20) \quad \text{вә ја,} \quad \frac{dT}{T-20} = kdt \tag{7}$$

олар. Бу тәнлији интегралласаг

$$\int_{100}^{60} \frac{dT}{T-20} = k\int_0^{20} dt.$$

Ахырынчыдан

$$\ln (T - 20)\Big|_{T=100}^{60} = 20k$$

вә сонра
$$\ln (60 - 20) - \ln (100 - 20) = 20k$$

$$\ln \frac{40}{80} = 20k, \quad \ln \frac{1}{2} = 20k, \quad k = -\frac{\ln 2}{20}. \tag{8}$$

Дикәр тәрәфдән (7) тәнлијини сол тәрәфдән T-јә көрә 100-дән 30-а гәдәр, сағ тәрәфдән t-јә көрә, 0-дан t-јә гәдәр интегралласаг,

$$\int_{100}^{30} \frac{dT}{T-20} = k\int_0^{t} dt,$$

$$\ln (T-20)\Big|_{100}^{30} = kt,$$

$$\ln (30 - 20) - \ln (100 - 20) = kt,$$

$$\ln\frac{10}{80} = kt, \quad \ln\frac{1}{8} = kt,$$

$$kt = -\ln 8$$

вә ја,

$$kt = -\ln 2^3, \quad kt = -3\ln 2, \quad t = -\frac{3}{k}\ln 2. \tag{9}$$

(8)-дән K-нын гијмәтини (9)-да јазсаг,

$$t = \frac{20}{\ln 2}\cdot 3\ln 2 = 60 \ \text{(дәгигә)}.$$

Беләликлә, верилмиш шәртләри нәзәрә алсаг, чисмин 30°-јә гәдәр сојумасына бир саат вахт лазымдыр. ■

k-нын сечилмәси үчүн әлавә шәртин верилмәсиндән истифадә едәк.

Доғрудан да, $t = t_1$ олдугда $T = T_1$ олдуғуну фәрз едәк. Бу һал үчүн (6) бәрабәрлијиндән:

$$T_1 - T_C = \left(T_0 - T_C\right) e^{\frac{-kt_1}{mC}}$$

Бурадан

$$e^{\frac{-kt_1}{mC}} = \frac{T_1 - T_C}{T_0 - T_C}$$

вә ја

$$e^{\frac{-k}{mC}} = \left(\frac{T_1 - T_C}{T_0 - T_C}\right)^{\frac{1}{t_1}}.$$

Ахырынчы гијмәти (6)-да јазсаг,

$$T = T_C + (T_0 - T_C)\left(\frac{T_1 - T_C}{T_0 - T_C}\right)^{\frac{t}{t_1}} \tag{10}$$

алынар. Хүсуси һалда мүһитин температуру $T_C = 20°C$ вә чисим $t = 10'$ дәгигә мүддәтиндә $T_0 = 100°C$-дән $T_1 = 60°C$-јә гәдәр сојудугда

$$T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}. \tag{11}$$

Чисмин мүәјјән температура гәдәр сојума мүддәти (11) дүстуру васитәси илә тә'јин едилир. Бу мәгсәдлә чисмин 25°C-јә гәдәр сојума мүддәтини тә'јин едәк.

■ (11) дүстурунда $T = 25$ јазсаг, $25 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$ вә ја

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$, $\frac{t}{10} = 4$, $t = 40$ дәгигә. ■

2. Печдән чыхарылмыш чисмин температуру 20 дәгигә мүддәтиндә 200°C-дән 150°C-јә дүшмүшдүр. Һаванын температуру 25°C-јә бәрабәрдир. Чисим сојумага башладыгы андан нә гәдәр вахт сонра онун температуру 30°C олар?

■ Чисмин температуру T вә буну әһатә едән мүһитин температуру T_C (бахылан һал үчүн 25°C) олсун.

Сојума сүр'әти $\frac{dT}{dt}$ олдуғундан истиликкечирмә ганунуна көрә чисмин сојума сүр'әти, чисмин температуру илә буну әһатә едән мүһитин температуру фәрги илә мүтәнасибдир.

Соjуманын диференсиал тәнлији

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_C) \tag{12}$$

олар, бурада k мүтәнасиблик әмсалыдыр.

(1)-дән $\frac{dT}{T - T_C} = kdt$ вә мәсәләнин шәртини нәзәрә алсаг,

$$\frac{dT}{T - 25} = kdt. \tag{13}$$

Буну интегралласаг,

$$\int \frac{d(T-25)}{T-25} = k\int dt \text{ вә ја}$$

$$\ln(T-25) = kt + \ln C, \quad T-25 = e^{kt+C}, \quad T-25 = e^{C}e^{kt}.$$

Јенидән $e^C = C$ ишарә едәк, онда

$$T-25 = Ce^{kt} \tag{14}$$

C-ни тә'јин етмәк үчүн башланғыч шәртиндән истифадә едәк. Мәсәләнин шәртинә көрә $t=0$ олдугда $T=200°C$ (14) бәрабәрлијиндән $200-25=ce^{k+0}$; $c=175$. e^k-ны әлавә шәртдән тә'јин едәк, јә'ни $t=20$ дәгигә олдугда $T=160°C$ олсун.

Онда (14) бәрабәрлијиндән

$$160-25 = 175\left(e^k\right)^{20}$$

вә ја

$$e^k = \left(\frac{135}{175}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{27}{35}\right)^{\frac{1}{20}}. \tag{15}$$

Беләликлә, (14) тәнлији

$$T = 175\left(\frac{27}{35}\right)^{\frac{t}{20}} + 25 \tag{16}$$

олар. Мәсәләнин шәртиндә $T=30°C$ олдуғундан (16) бәрабәрлији $5 = 175\left(\frac{27}{35}\right)^{\frac{t}{20}}$; $\frac{1}{35} = \left(\frac{27}{35}\right)^{\frac{t}{20}}$ вә нәһајәт $t = -\frac{20\cdot\ln 35}{\ln 27 - \ln 35} = \frac{-20\cdot 3{,}555}{-0{,}260} \approx 273{,}5 \approx 274$ дәгигә. Башга сөзлә, чисмин 30°C гәдәр соjумасы үчүн 4 саат 34 дәгигә вахт лазымдыр. ■

3. Күллә $V_0=400$ м/сан сүр'әти илә галынлығы $h=20$ см олан дивара дәјиб $V_1=100$ м/сан сүр'әти илә ондан чыхыр. Диварын мүгавимәт гүввәсинин күлләнин һәрәкәт сүрәтинин квадраты илә мүтәнасиб олдуғуну биләрәк, күлләнин дивардакы һәрәкәт мүддәтини тапын.

■ Нјутонун икинчи ганунa көрә $F=ma$, бурада a—тә'чил вә m—күтләдир.

$a = \frac{dV}{dt}$ олдуғундан вә мәсәләнин шәртини нәзәрә алсаг,

$$m\frac{dV}{dt} = -kV^2. \tag{17}$$

(Диварын мүгавимәт гүввәси күлләнин сүр'әти илә экс истигамәтдә олдуғуна көрә о, мәнфи көтүрүлүр) $\frac{k}{m} = k_1$ ишарә етсәк,

(17) тәнлиjи $\frac{dV}{V^2} = -k_1 dt$ шәклинә дүшәр. Бу тәнлик дәјишәнләринә ajрылмыш биртәртибли тәнлик олдуғундан ону интегралламаг олар. Нәтичәдә $-\frac{1}{V} = -k_1 t - C$ вә ja

$$\frac{1}{V} = k_1 t + C \tag{18}$$

алынар. (18) тәнлиjиндә иштирак едән C сабитини тә'jин етмәк үчүн башланғыч шәртиндән истифадә едәк. Белә ки $t = 0$ олдугда $V = V_0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $C = \frac{1}{V_0}$ тә'jин едилир. c-нин гиjмәтини (18)-дә jазсаг,

$$\frac{1}{V} = k_1 t + \frac{1}{V_0} \tag{19}$$

олар. Дикәр тәрәфдән (19)-да $t = T$ олдугда $V = V_1$ олдуғундан.

$$\frac{1}{V_1} = k_1 T + \frac{1}{V_0}. \tag{20}$$

Ахырынчыдан,

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}\right) \tag{21}$$

тә'jин едилир. Бурада k_1 мәчһулдур, ону тапмаг үчүн (19) тәнлиjини $\frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{1 + k_1 V_0 t}$ $\left(V = \frac{dx}{dt}\right)$ шәклиндә ифадә етдикдән сонра интеграллаcаг, $x = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1 V_0 t) + C$ олар. Шәртә көрә $t = 0$ олдугда $x = 0$ (күллә дивара дахил олур), одур ки, бурадан $C_1 = 0$, лакин $t = T$ олдугда $x = h$ (күллә дивардан чыхыр) олдуғундан.

$$h = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1 V_0 T) \tag{22}$$

алынар. (20)-дән, $1 + k_1 V_0 T = \frac{V_0}{V_1}$ гиjмәтини (22)-да jазмагла

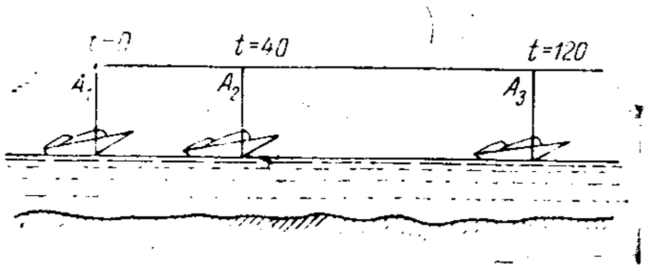
$$h = \frac{1}{k_1}\ln\frac{V_0}{V_1} \quad \text{вә ja} \quad \frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln\frac{V_0}{V_1}}. \tag{23}$$

Бу ифадәни (21)-дә jазсаг,

$$T = \frac{h}{\ln\frac{V_0}{V_1}}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}\right) \tag{24}$$

олур. (24) дүстуру верилмиш мәсәләнин үмуми шәкилдә һәллидир. Хүсуси һалда мәсәләдә верилән гиjмәтләри (24)-дән jазсаг $T = 0{,}00108$ саниjа олар. ■

4. Маторлу гајыг $v_0 = 20$ км/саат сүр'эти илә дурғун суда һәрәкәт едир. Максимум һәрәкәт етдији заман матор сөндүрүлүр вә 40-чы санијәдә онун сүр'әти $v_t = 8$ км/саата гәдәр азалыр. Сујун мүгавимәти гајығын һәрәкәт сүр'әти илә мүтәнасиб олдуғуну биләрәк маторун сөнмәсиндән 2 дәгигә кечмиш, гајығын сүр'әтини тә'јин един (шәкил 4).



Шәкил 4

■ Һәрәкәт едән гајыға

$$F = -kv \tag{25}$$

гүввәси тә'сир едир. Бурада k мүтәнасиблик әмсалыдыр. Бу гүввә Нјутонун икинчи ганununа көрә

$$F = ma \quad \left(a = \frac{dv}{dt}\right). \tag{26}$$

(25) вә (26)-дан

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt.$$

олар. Интегралладыгдан сонра

$$\ln v = \frac{-kt}{v} + C_1.$$

Ахырынчыдан

$$v = e^{\frac{-kt}{m} + C_1} = e^{C_1} e^{\frac{-kt}{m}} = Ce^{\frac{-kt}{m}}.$$

(Бурада $e^{C_1} = C$ ишарә едилмишдир.) Башланғыч шәртинә көрә $t = 0$ олдугда $v = 20$ км/саат олдуғундан $20 = Ce^{\frac{-k}{m}\cdot 0}$, $C = 20$ олур. Беләликлә,

$$v = 20e^{\frac{-kt}{m}} \tag{25$_1$}$$

Коши мәсәләсинин һәллидир. Әлавә шәрти нәзәрә алсаг, јә'ни $t = 40$ сан $= 1/90$ саат олдугда гајығын сүр'әти 8 км/саат олдуғу үчүн $8 = 20\cdot e^{\frac{-k}{m}\cdot\frac{1}{90}}$, бурадан

$$e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

Бу гијмәти (25_1)-дә јазсаг,

$$v = 20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$$

вә ја

$$v = \frac{32}{25} \approx 1{,}28 \text{ км/саат.}$$ ■

5. Ағырлыг гүввәсинин тә'сири алтында јухарыдан дүшән чисмин тә'чили

$$a = \frac{k}{r^2} \qquad (27)$$

дүстуру илә тә'јин едилир. Бурада k мүтәнасиблик әмсалы вә „r" дүшән чисимлә јерин мәркәзи арасындакы мәсафәдир. Чисим јердән $R = 60{,}27\, r_з$ мәсафәдә олдугда һәмин чисмин јерә дүшмә мүддәтини тә'јин един. Бурада $r_з = 6377$ км $= 6{,}377 \cdot 10^6$ м јерин радиусудур (шәкил 5).

■ Ајдан јерин мәркәзинә гәдәр олан мәсафә R вә јерин сәтһиндә ағырлыг гүввәсинин тә'чили g олсун. Мәсәләнин шәртинә әсасән

$$a = \frac{k}{r_з^2} = -g. \qquad (28)$$

Бурадан

$$k = -g r_з^2$$

алынар. k-нын гиjмәтини (27)-дә јазсаг

$$a = -\frac{g r_з^2}{r^2} \qquad (29)$$

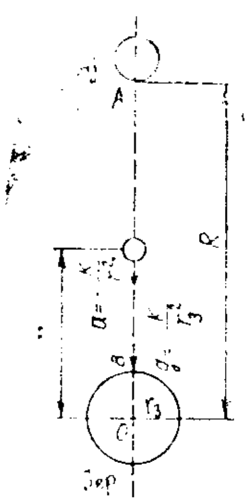
олур. Чисмин јерин мәркәзинә доғру дүз хәтт бојунча дүшдүјүнү фәрз етсәк, бу һал үчүн $v = \frac{dr}{dt}$; $a = \frac{dv}{dt}$ олар. Бу ахырынчылардан

$$\frac{a}{v} = \frac{dv}{dr}, \quad a = v\frac{dv}{dr}. \qquad (30)$$

(29) вә (30)-дан

$$\frac{v\,dv}{dr} = -g\frac{r_з^2}{r^2}.$$

Бу тәнлик дәјишәнләринә ајрылан тәнлик олдуғундан ону интегралласаг,



Шәкил 5

$$v^2 = \frac{2gr_3^2}{r} + C$$

алынар. Бурада C сабитини тә'јин етмәк үчүн башланғыч шәртиндән истифадә едәк. Јә'ни $r = R$ олдугда $V = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг $C = -2g\frac{r_3^2}{R}$ вә

$$v = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2gr_3^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

вә ја

$$dt = -\sqrt{\frac{Rr}{2gr_3^2(R-r)}}\,dr$$

олар. Ахырынчыны интегралласаг,

$$t = -\int_R^{r_3}\sqrt{\frac{Rr}{2gr_3^2(R-r)}}\,dr = \int_{r_3}^{R}\sqrt{\frac{Rr}{2gr_3^2(R-r)}}\,dr. \qquad (31)$$

Бу интегралы һесабламаг үчүн $\frac{r}{R-r} = \mathrm{tg}^2\varphi$ әвәзләмәсини апарсаг

$$r = \frac{R\,\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = R\sin^2\varphi,$$

$$dr = 2R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

r	φ
r_3	$\varphi_1 = \arcsin\sqrt{\frac{r_3}{R}}$
R	$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

Тапылан гијмәтләри (31)-дә јазсаг

$$t = \sqrt{\frac{R}{2gr_3^2}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{tg}\,\varphi\, 2R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}2\sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$t = \frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(1-\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\sin 2\varphi_2}{2} + \right.$$

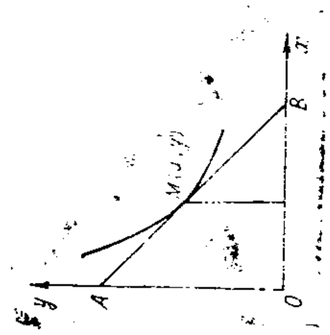
$$\left. + \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right) = \frac{R}{r_3}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r_3}{R}} + \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right) \qquad (32)$$

олур. Мәсәләнин шәртиндә верилмиш әдәди гијмәтләри (32)-дә јазсаг,

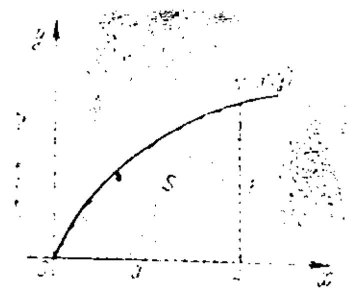
$$t = \frac{60{,}27}{360}\sqrt{\frac{60{,}27\cdot 6{,}377\cdot 10^6}{19{,}62}}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 + \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right) \approx 116 \text{ саат}. \blacksquare$$

$$(\varphi_1 = 7°, 24', 33'' \approx 0{,}1292 \text{ радиан}).$$

Демәли, јердән ај мәсафәсиндә олан чисмин јерә дүшмәси үчүн тәгрибән 116 саат вахт лазымдыр. ■



Шәкил 6



Шәкил 7

6. Әјринин ихтијари нөгтәсинә чәкилмиш тохунанын Oy охундан кәсдији парча бу нөгтәнин ординатынын ики мислинә бәрабәрдир. Әјрини тә'јин един.

■ Ахтарылан әјри үзәриндә $M(x, y)$ нөгтәси көтүрәк (шәкил 6). $M(x, y)$ нөгтәсиндә әјријә чәкилмиш тохунанын тәнлији

$$Y - y = y'(X - x)$$

олар, бурада (x, y) тохунанын чари нөгтәсинин координатларыдыр. Тохунанын X, Y охундан ајырдығы OA парчасыны тә'јин етмәк үчүн $X = 0$ етмәк лазымдыр. Белә олдугда

$$OA = Y = y - xy'$$

алынар. Шәртә көрә $OA = 2y$ олдуғундан

$$y - xy' = 2y$$

вә ја

$$xy' + y = 0, \quad xdy + ydx = 0, \quad d(x, y) = 0, \quad xy = C$$

олур. Бу, бәрабәрјанлы һиперболалар аиләсидир. C сабитини тә'јин етмәк үчүн әлавә олараг әјринин (1, 1) нөгтәсиндән кечдијини фәрз едәк. Онда $x = 1$, $y = 1$ олдугда $C = 1$ вә нәтичәдә ахтарылан әјри $xy = 1$ олар. ■

7. Координат башланғычындан кечән әјри, Ox оху вә бу әјри үзәриндә көтүрүлмүш чари нөгтәнин ординаты илә әһатә олунмуш саһә, бу нөгтәнин ординаты кубуна бәрабәр олан әјрини тапын.

■ Шәртә көрә

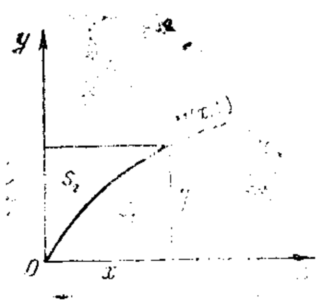
$$S_{\Delta OMA} = y^3 \tag{33}$$

(шәкил 7). Дикәр тәрәфдән

$$S_{\Delta OMA} = \int_0^x ydx \tag{34}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг (33) вә (34)-дән

$$\int_0^x ydx = y^3 \tag{35}$$



Шәкил 8

олар. (35) тәнлијини x-ә көрә диференсиалласаг, $ydx = 3y^2dy$ вә ја $dx = 3y\,dy$ аларыг. Ахырынчыны интегралласаг $x = \frac{3}{2}y^2 + C$ вә $x = 0$, $y = 0$ башланғыч шәртини нәзәрә алсаг $C = 0$ олар. Нәтичәдә $y^2 = \frac{2}{3}x$ алынар. Бу әјри симметрија оху Ox олан параболадыр. ■

8. Координат башланғычындан кечән әјринин чари нөгтәсинин координатлары илә координат охлары үзәриндә бир дүзбучаглы гурулмушдур (шәкил 8). Әјри бу дүзбучаглынын саһәсини $\frac{a}{b}$ нисбәтиндә бөләрсә вә $P(1, 1)$ нөгтәсиндән кечәрсә бу әјрини тапын.

■ Шәкилдән көрүндүјү кими шәртә көрә

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b} \tag{36}$$

вә

$$S_1 + S_2 = xy \tag{37}$$

олар. (36) вә (37)-дән

$$S_1 = \frac{a}{a+b}xy \tag{38}$$

$$S_1 = \int_0^x y\,dx \tag{39}$$

олдуғундан (38), (39)-дан $\int_0^x y\,dx = \frac{a}{a+b}xy$. Ахырынчыны диференсиалласаг,

$$ydx = \frac{a}{a+b}(xdy + ydx)$$

олар. Бу, ахтарылан әјринин диференсиал тәнлијидир.

9. Башланғыч гәбул едилән мүддәтдә әһалинин сајы X_0 вә бир ил кечдикдән сонра әһалинин артымы a % оларса, әһалинин артым сүр'әти онун сајы илә дүз мүтәнасибдирсә о һалда әһалинин X сајы илә t заманы арасындакы асылылығы тапын.

■ Әһалинин артма сүр'әти әһалинин сајынын замана көрә төрәмәси олар, јә'ни $\frac{dX}{dt}$. Мәсәләнин шәртинә көрә

$$\frac{dX}{dt} = kX \tag{40}$$

вә ја

$$\frac{dX}{X} = kdt \tag{41}$$

олур. (41) гојулмуш мәсәләнин диференсиал тәнлијидир. Интегралласаг

$$\ln X = \ln e^{kt+C_1}, \quad X = e^{C_1} e^{kt} = Ce^{kt} \tag{42}$$

алынар. Бир илдән сонра әһалинин сајы

$$X_0 + \frac{aX_0}{100} = \frac{(100+a)X_0}{100} \tag{43}$$

олар. (42)-дә C сабитини тә'јин етмәк үчүн башланғыч шәртиндән истифадә едәк, јә'ни $t=0$ олдугда $X = X_0$ олдуғундан

$$X_0 = Ce^{k\cdot 0} = Ce^{0} = C; \quad C = X_0, \quad X = X_0 e^{kt} \tag{44}$$

вә сонра бир илдән сонра ($t=1$) (43)-дәки әһалинин сајыны (44)-дә јазсаг,

$$\frac{(100+a)X_0}{100} = X_0 e^{k\cdot 1} = X_0 e^{k}$$

алынар. Бу ахырынчыдан

$$e^{k} = \frac{100+a}{100} \tag{45}$$

гијмәтини јенидән (44)-дә јазмагла алынан

$$X = X_0\left(\frac{100+a}{100}\right)^t$$

гојулмуш мәсәләнин һәллидир. ■

Гејд: Әдәди мисал илә изаһ едәк:

1962-чи ил јанварын бириндә ССРИ-дә әһалинин сајы $X_0 = 200$ милјон вә һәр илдә артым 2% олдуғуну биләрәк 2000-чи ил јанварын бириндә ССРИ-дә нә гәдәр әһали олдуғуну тапын.

■ (44) дүстурундан

$$X = 200\ e^{kt}$$

вә (45) дүстурундан $k = \ln\frac{102}{100} = \ln(1{,}02) = 0{,}02$ алынар. Демәли, $X = 200e^{0{,}02t}$ олар. 1 јанвар 2000-чи ил үчүн $t = 38$ олдуғундан: $X_{2000} = 200e^{0{,}02\cdot 38} = 428$ милјон әһали олмалыдыр.

10. Парчаланмаға башлајан радиумун парчаланма сүрәти әввәлки мигдары илә дүз мүтәнасибдир. Просесин башланғычында радиумун мигдары X_0 оларса вә 1600 илдән сонра радиумун башланғычдакы мигдарынын јарысы парчаланарса, а) нечә илдән сонра парчаланмајан радиумун мигдары башланғыч мигдарынын 80%-ни тәшкил едәчәк? б) 300 илдән сонра радиумун нечә фаизи галачагдыр?

■ X—радиумун мигдары вә t (ил һесабы илә) заман олсун. Мәсәләнин шәртинә көрә радиумун парчаланма просесинин тәнлији

$$\frac{dX}{dt} = kX \tag{46}$$

олар. (1) тәнлиjи дәjишәнләринә аjрылан тәнликдир. Интеграллаcаг

$$X = Ce^{kt} \tag{47}$$

алынар. Башланғыч шәртини нәзәрә алсаг, jә'ни $t = 0$ гиjмәтиндә $X = X_0$ олур. $C = X_0$ гиjмәтини (2)-дә jазсаг

$$X = X_0 e^{kt} \tag{48}$$

олар. (48) ифадәсиндә k-ны тә'jин етмәк үчүн мәсәләнин шәртиндән истифадә едәк. Белә ки $t = 1600$ олдугда

$$X = \frac{1}{2} X_0$$

олдуғуну нәзәрә алсаг (48)-дән

$$\frac{1}{2} X_0 = X_0 e^{k \cdot 1600} \quad \text{вә jа} \quad \frac{1}{2} = e^{1600 \cdot k}.$$

Ахырынчыдан $\ln \frac{1}{2} = 1600 \cdot k$, $1600 k = \ln 1 - \ln 2$.

$$k = -\frac{\ln 2}{1600} \approx -0{,}0043.$$

Демәли,

$$X = X_0 e^{-0{,}00013t} \quad \text{вә jа} \quad \frac{X}{X_0} = e^{-\frac{\ln 2}{1600}t} \tag{49}$$

олар. Инди исә гоjулан суаллара ҹаваб верәк.

а) Шәртә көрә $\frac{X}{X_0} = 0{,}8$ (80%) олдуғундан бу гиjмәти (49) бәрабәрлиjиндә jазсаг,

$$0{,}8 = e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}, \quad \ln 0{,}8 = -\frac{\ln 2}{1600} t;$$

$$t = -\frac{1600 \cdot \ln 0{,}8}{\ln 2} \quad \text{вә jа} \quad t = -\frac{1600(-0{,}22314)}{0{,}69315} \approx 515 \text{ ил.}$$

в) суалына ҹаваб вермәк үчүн (49)-да $t = 300$ ил jазаг. Онда

$$\frac{X}{X_0} = e^{-\frac{\ln 2}{1600} \cdot 300}, \quad \frac{X}{X_0} = e^{-\frac{0{,}69315}{1600} \cdot 300} \approx e^{-0{,}130} \approx 0{,}872 = 87{,}8\%$$

олур. Беләликлә, 300 илдән сонра радиумун әввәлки мигдарынын 87,8%-и галыр. Башга сөзлә һәмин мүддәтдә радиумун 12,2%-и парчаланыр. ■

11. (Физикаjа аид мисал.) Мадди нөгтәнин сүр'әти, гүввәнин тә'сир етдиjи истигамәт үзрә jөнәлдиләрсә, белә һәрәкәт дүзхәтли һәрәкәт олар. Бу дүзхәтли һәрәкәтин сүр'әтини тә'jин един.

Бу нөгтәнин һәрәкәт хәттини Ox оху гәбул едәк.