211. Elnarə.

X.M.QULİYEV, K.Q.HƏSƏNOV

DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR. MƏSƏLƏ VƏ MİSALLAR HƏLLƏRİ İLƏ

Dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi tərəfindən təsdiq edilmişdir

Çaşıoğlu

BAKI - 2001

Rə'y verənlər: *Yaqubov M.N.* – BDU-nun professoru, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru
Süleymanov C.N. – ADPU-nun dosenti, fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

Quliyev X.M., Həsənov K.Q. Diferensial tənliklər. Məsələ və misallar həlləri ilə. Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti. Bakı: Çaşıoğlu, 2001. – 322 s.

Ders vesaiti adi diferensial tenlikler və onlara aid meselələr və misallar həlline hesr olunub və universitetlərin, institutlann tələbələri, elmi işçilər, mühəndislər, məşğələ dərsləri aparan müəllimlər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Kitabda adi diferensial tenliklere aid qısa nezeri me'lumatlar verilir, onlara aid çoxsaylı məsələ və misallar həll olunur, diferensial tənliklərin qurulmasına geniş yer ayrılır.

Sərbəst çalışmaq üçün məsələ və misalların, yoxlama suallann olması kitabdan məşğələ dərslərində və kollokviumlarda istifadə etməyə imkan yaradır.

$$Q\,\frac{1602070100-377}{082-01}$$

GİRİŞ

ALLAH SƏNƏ RƏHMƏT
ELƏSİN ATA!

Diferensial tənliklər kursu riyazi fənnlər arasında mühüm yer tutur. Bu da təsadüfi deyil. Çünki həyatda baş verən bə'zi hadisələr, gedən proseslər, elmin, texnikanın bir çox məsələləri diferensial tənliklərə gətrilərək həll olunur.

Diferensial tənliklər adi və xüsusi törəməli tənliklərə bölünür. Birdəyişənli funksiyanın törəmələri daxil olan tənliklər adi diferensial tənliklər, çoxdəyişənli funksiyanın xüsusi törəmələri daxil olan tənliklər xüsusi törəməli diferensial tənliklər adlanır.

Dərs vəsaiti adi diferensial tənliklər kursuna aid qısa nəzəri mə'lumatlar verir, məsələ və misallar həllinə həsr olunmuşdur və dörd fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsil birtərtibli diferensial tənliklərin həll üsullarına həsr olunmuşdur. Əvvəlcə izoklin üsuluna, dəyişənlərinə ayrıla bilən, bircins, xətti, Bernulli, tam diferensiallı, Rikkati tənliklərinə və inteqrallayıcı vuruğun tapılmasına aid misal və məsələlərin həll numunələri verilir. Sonra isə törəməyə nəzərən həll olunmamış birtərtibli diferensial tənliklərə aid misallar həll edilir. Fəslin sonunda trayektoriyaya aid misalların həlli, təqribi həllin tapılması üçün Eyler və ardıcıl yaxınlaşmaların tətbiqi verilmişdir.

İkinci fəslin əvvəlində tərtibi aşağı salına bilən ikitərtibli tənliklərə aid misaların həlli verilmiş, ikitərtibli xətti tənliklərin ümumi həllinin tapılması üsullarına aid misallar həll olunmuşdur. Analoji misallar daha yüksək tərtibli tənliklər üçün də verilir, tənliklər sisteminin həllinə aid müxtəlif misallar, dayanıqlıq məsələsi, sərhəd məsələsi və həllin qüvvət sırasının köməkliyi ilə tapılmasına aid misallar həll olunur.

Üçüncü fəsildə elmin, texnikanın müxtəlif sahələrini əhatə edən və adi diferensial tənliklərə gətirilən məsələlərin həlli verilir. Burada əsas məsələ diferensial tənliyin qurulmasıdır. Diferensial tənliyin tapılmasını asanlaşdırmaq məqsədi ilə əlavə izahatlar verilir, tənliyin qurulma üsulları göstərilir.

Dördüncü fəsildə qiyabi oxuyan tələbələr və diferensial tənlikləri sərbəst öyrənənlər üçün adi diferensial tənliklərin bütün sahələrinə aid misalların həlləri, müstəqil həll edilmək üçün əlavə misallar, məsələlər və fərdi tapşırıqların variantları verilmişdir.

Hər fəslin axırında müstəqil həll etmək üçün misallar, məsələlər, yoxlama sualları verilmişdir.

I FƏSİL

BİRTƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

1. Adi diferensial tənliklər. Ümumi anlayışlar və tə'riflər

Sərbəst dəyişən x, axtarılan $y = y(x)$ funksiyası və onun y', $y'', \ldots, y^{(n)}$ törəmələri arasındakı

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

münasibətinə *n-tərtibli adi diferensial tənlik deyilir.*
Diferensial tənliyə funksiyanın törəmələrinin daxil olması vacibdir.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (2)$$

tənliyə *ən yüksək tərtibli törəməyə nəzərən həll olunmuş* tənlik deyilir. Tənliyə daxil olan ən *yüksək tərtibli törəmənin tərtibinə diferensial tənliyin tərtibi* deyilir.

1) $y' - 2y = x + 1$, 2) $y' + 3y = 1$, 3) $y'' + 5y' + 6y = \sin x$,

4) $yy' + 2x = 0$, 5) $y''' = x^2 + 3$, 6) $y'' = tgx$.

tənliklərdən 1), 2), 4)-birtərtibli, 3), 6)-ikitərtibli, 5)-üçtərtiblidir.

Tənliyin (a,b) intervalında *həlli elə* $y = \varphi(x)$ funksiyasına deyilir ki, bu funksiyanın tənliyə daxil olan tərtibdən törəmələri olsun, özünü və törəmələrini tənlikdə yazdıqda alınan bərabərlik $x \in (a,b)$ nəzərən eynilik kimi ödənsin, yə'ni

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0, \quad x \in (a,b).$$

Tənliyin $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$ -aşkar, $\Phi(x,y) = 0$ -qeyri-aşkar və $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ parametrik şəkildə həlli verilə bilər.

Tənliyin həllinin qrafiknə *inteqral əyrisi* deyilir.

(1) tənliyinin

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \qquad (3)$$

şərtlərini ödəyən həllinin tapılmasına *Koşi məsələsi* deyilir.

Xüsusi halda, törəməyə nəzərən həll olunmuş

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

tənliyinin

$$y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

şərtini ödəyən həllinin tapılmasına birtərtibli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsi deyilir. Həndəsi olaraq, bu (4) tənliyinin (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaqdan ibarətdir.

$f(x, y)$ funksiyası (x_0, y_0) nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməz olduqda, (4)-(5) *Koşi məsələsinin həlli var.* Əlavə olaraq (x_0, y_0) nöqtəsi ətrafında $\frac{\partial f}{\partial y}$ kəsilməz xüsusi törəməsi varsa, Koşi məsələsinin həll yeganə olur.

$f(x, y)$ funksiyasının x və y dəyişənlərinə nəzərən k tərtibə qədər bütün xüsusi törəmələri varsa, onda (4) tənliyinin istənilən həllinin $k+1$ tərtibə qədər törəməsi olur.

Tənliyin $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ inteqral əyrisi üzərindəki hər bir nöqtədə Koşi məsələsinin həlli yeganə olarsa, ona *xüsusi həll* deyirlər.

$y = \psi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ inteqral əyrisi üzərindəki hər bir nöqtədə Koşi məslesinin həllinin yeganəliyi pozularsa, bu həll *məxsusi həll* adlanır.

Ancaq tənliyin ixtiyari xüsusi həllini $y = \varphi(x, c)$ ailəsindən c sabitinə qiymət verməklə almaq mümkündürsə, $y = \varphi(x, c)$ *ailəsinə (4) tənliyinin ümumi həlli* deyilir. Tənliyin ümumi həlli qeyri-aşkar $\Phi(x, y) = c$ şəkildə verildikdə $\Phi(x, y)$-ə tənliyin *inteqralı* deyilir. Ümumi həllin $x = \varphi(t, c)$, $y = \psi(t, c)$, $t \in (\alpha, \beta)$ ifadəsinə parametrik şəkildə *ümumi həll* deyilir.

Tənliyin $y = \varphi(x, c)$ ümumi həlli mə'lum olduqda Koşi məsələsinin həllini almaq üçün $y_0 = \varphi(x_0, c)$ bərabərliyini c-ə nəzərən həll edib, $c = c_0$ tapınq və c_0 ümumi həlldə yazınq: $y = \varphi(x, c_0)$. Ümumi həll qeyri-aşkar $\Phi(x, y, c) = 0$ şəkildə verildikdə Koşi məsələsinin həllini tapmaq üçün $\Phi(x_0, y_0, c) = 0$ tənliyinin c_0 həllini tapınq. Onda $\Phi(x, y, c_0) = 0$ Koşi məsələsinin qeyri-aşkar şəkildə həlli olur.

Tənliyin *məxsusi həlli həllər ailəsinin qurşayanı kimi* tapılır. $\Phi(x,y,c)=0$ ailəsinin qurşayanı

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases}$$

sistemindən c sabitini yox etməklə alınır. Ailənin qurşayanı varsa, 0, məxsusi həll olur.

Ümumi həll mə'lum olmadıqda, məxsusi həll diskrimat əyriləri arasında axtarılır.

$$F(x,y,y')=0$$

tənliyinin *diskrimat* əyrisi

$$\begin{cases}F(x,y,y')=0,\\ F'_{y'}(x,y,y')=0\end{cases}$$

sistemindən y' yox etməklə alınan $R(x,y)=0$ tənliyi ilə tə'yin olunur. Tənlik $y'=f(x,y)$ şəklində verilmişdirsə $\frac{1}{f'_y(x,y)}=0$ tənliyi ilə tə'yin olunan əyrilərə məxsusi həll üçün *şübhəli əyrilər* deyilir. Məxsusi həll məxsusi həll üçün şübhəli əyrilər arasında axtarılır.

Tutaq ki, $f(x,y)$ funksiyası xoy müstəvisinin D oblastında tə'yin olunmuşdur. Hər bir $(x,y)\in D$ nöqtəsi üçün bu nöqtədən bucaq əmsalı $k=f(x,y)$ olan düz xətt keçirək. Onda D oblastında *istiqamətlər meydanı* yaranır.

Həndəsi olaraq diferensial tənliyi həll etmək qrafiki D oblastında yerləşən elə əyrilər tapmaqdan ibarətdir ki, bu əyrilərin hər bir nöqtəsində çəkilən toxunan meydanın həmin nöqtəsindəki istiqaməti ilə üst-üstə düşsün.

1. $y=x\ln x$ funksiyasının $xy'-y=x$ tənliyinin həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y=x\ln x$ funksiyasının verilmiş tənliyin həlli olması üçün $y'=(x\ln x)'=\ln x+1$ törəməsinin olması vacibdir və y, y'-in qiymətlərini tənlikdə yazdıqda onu eyniliyə çevirməlidir:

$$x(\ln x + 1) - x\ln x = x, \quad x = x.$$

Deməli, $y = x\ln x$ funksiyası verilmiş tənliyin həllidir.

2. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ funksiyasının $y' + 2y = e^{x}$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ funksiyası və onun $y' = -2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ törəməsini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$-2Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x} + 2Ce^{-2x} + \frac{2}{3}e^{x} = e^{x},$$

Deməli, $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ funksiyası C-sabitinin ixtiyari qiymətində verilən tənliyin həlli olur. İxtiyari $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtinə baxaq. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ funksiyasında x, y əvəzinə verilən x_0, y_0 qiymətlərini yerinə yazaq: $y_0 = Ce^{-2x_0} + \frac{1}{3}e^{x_0}$. Alınan bərabərliyi C-yə nəzərən həll edib, yerinə yazaq. Onda alınan $y = \left(y_0 - \frac{1}{3}e^{x_0}\right)e^{2(x_0 - x)} + \frac{1}{3}e^{x}$ funksiyası $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həll olur. Deməli, $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$ ailəsi verilən tənliyin ümumi həlli olur.

3. Qeyri-aşkar şəkildə verilmiş $e^{-y} - cx = 1$ funksiyasının $xy' + 1 = e^{y}$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. Verilən $e^{-y} - cx = 1$ bərabərliyindən $y = -\ln(1 + cx)$

funksiyasını tapaq. Buradan $y' = -\dfrac{c}{1+cx}$ alınq. Bunları verilən tənlikdə yazaq. $-\dfrac{cx}{1+cx}+1 = e^{-\ln(1+cx)}$. Buradan $\dfrac{1}{1+cx} = \dfrac{1}{1+cx}$. Deməli, ixtiyari c ədədi üçün $y = -\ln(1+cx)$ funksiyası verilən tənliyin həlli olur. İxtiyari $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən həllə baxaq. $y_0 = -\ln(1+cx_0)$ bərabərliyindən c sabitini tapaq. $x_0 \neq 0$ olduqda $cx_0 = e^{-y_0} - 1$, $c = \dfrac{1}{x_0}\left(e^{-y_0} - 1\right)$ olur. Onda qeyri-aşkar şəkildə verilmiş $e^{-y} - \dfrac{x}{x_0}\left(e^{-y_0} - 1\right) = 1$ funksiyası Koşi məsələsinin həlli olur.

Deməli, $\Phi(x,y) = \dfrac{1}{x}\left(e^{-y} - 1\right)$ funksiyası verilən tənliyin inteqralı olur.

4. Parametrik şəkildə verilmiş $x = te^{t}$, $y = e^{-t}$ funksiyasının $(1+xy)y' + y^2 = 0$ tənliyinin həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t = e^{t}(1+t)$, $y'_t = -e^{-t}$ olduğundan,

$y'_x = -\dfrac{e^{-t}}{e^{t}(1+t)} = -\dfrac{e^{-2t}}{1+t}$. x, y və y'-in ifadələrini verilmiş tənlikdə yazsaq,

$$\left(1+te^{t}e^{-t}\right)\left(-\frac{e^{-2t}}{1+t}\right) + \left(e^{-t}\right)^2 = -(1+t)\frac{e^{-2t}}{1+t} + e^{-2t} = -e^{-2t} + e^{-2t} = 0$$

Deməli, verilmiş $x = te^{t}$, $y = e^{-t}$ funksiyası verilən tənliyin həlli olur.

5. $y = c\sin(\omega x + \varphi)$ funksiyasının φ və $c \geq 0$ ədədləri üçün $y'' + \omega^2 y = 0$ $(\omega \geq 0)$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. İxtiyari φ və $c \geq 0$ ədədləri üçün $y = c\sin(\omega x + \varphi)$ funk-

8

siyasının verilən tənliyin həlli olduğunu göstərək. $y' = c\omega\cos(\omega x+\varphi)$, $y'' = -c\omega^2\sin(\omega x+\varphi)$. y və y''-in ifadələrini verilmiş tənlikdə yazaq:

$$-c\omega^2\sin(\omega x+\varphi)+c\omega^2\sin(\omega x+\varphi)=0.$$

İxtiyari $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$ başlanğıc şərtlərini ödəyən həllini c və φ sabitlərinə ədədi qiymətlər verməklə almaq mümkün olduğunu göstərək:

$$\begin{cases} y_0 = c\sin(\omega x_0+\varphi), \\ y_1 = c\omega\cos(\omega x_0+\varphi) \end{cases}$$

sistemindən

$$\begin{cases} \sin(\omega x_0+\varphi)=\dfrac{y_0}{c}, \\ \cos(\omega x_0+\varphi)=\dfrac{y_1}{\omega c} \end{cases}$$

tapıb, bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldib, tərəf-tərəfə toplasaq $y_0^2+\dfrac{y_1^2}{\omega^2}=c^2$, bərabərliyin hər iki tərəfini tərəf-tərəfə bölsək alarıq: $tg(\omega x+\varphi)=\dfrac{y_0\omega}{y_1}$.

Onda $c=\sqrt{y_0^2+\left(\dfrac{y_1}{\omega}\right)^2}$, $\varphi = arctg\dfrac{y_0\omega}{y_1}-\omega x_0$.

Tapılan ifadələri verilən funksiyada yazsaq:

$$y=\frac{1}{\omega}\sqrt{(y_0\omega)^2+y_1^2}\sin\left(\omega(x-x_0)+arctg\frac{y_0\omega}{y_1}\right).$$

Onda alınan ifadə Koşi məsələsinin həlli olur.

6. Parametrik şəkildə verilmiş $x=c\cos t$, $y=c\sin t$ funksiyasının $x+yy'=0$ tənliyinin ümumi həlli olduğunu göstərin.

HƏLLİ. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{c\cos t}{-c\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$. x, y, y'_x -in ifadələrini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$c\cos t + c\sin t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) = 0, \quad 0 = 0.$$

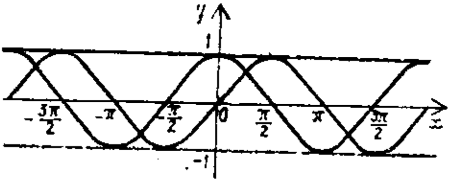
Deməli, istənilən c üçün $x = c\cos t$, $y = c\sin t$ funksiyası verilmiş tənliyin həlli olur. Bu funksiya tənliyin ümumi həllidir. Doğrudan da, ixtiyari $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən həll $c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos t_0$, $t_0 = \arccos\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ götürməklə alınır:

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\cos t, \\ y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\sin t. \end{cases}$$

7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ tənliyinin həllin varlığı və yeganəliyini tə'min edən oblastı tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ funksiyası $\overline{D} = \{-\infty < x < +\infty, -1 \le y \le 1\}$ oblastında kəsilməzdir. Deməli, ixtiyari $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisi var. $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ törəməsi $D = \{-\infty < x < +\infty, \ -1 < y < 1\}$ oblastında kəsilməzdir. Ona görə də $(x_0, y_0) \in D$ nöqtəsindən tənliyin yeganə inteqral əyrisi keçir. $y = \pm 1$ olduqda törəmə sonsuzluğa çevrilir. Bu, $y = \pm 1$ düz xətləri məxsusi həll üçün şübhəli əyrilər olur. $y = \pm 1$ düz xətləri tənliyi ödəyir. Göstərək ki, bunlar məxsusi həllərdir. Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, $y = \sin(x + c)$ tənliyin həllidir. $y = 1$ düz xətti üzərində ixtiyari $(x_0, 1)$ nöqtəsi götürək. Onda bu nöqtədən iki $y =$

$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - x_0\right)$ və $y = 1$ həlləri keçir. Deməli, $y = 1$ düz xətti üzərində həllin yeganəliyi pozulur, yə'ni $y = 1$ tənliyin məxsusi həlli olur. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $y = -1$ də məxsusi həlldir (şəkil 1).



Şəkil 1.

8. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$ tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyini tə'min edən oblastı tapın.

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y} - x$ funksiyası $\overline{D} = \left\{-\infty < x < +\infty,\ y \le x^2\right\}$ oblastında kəsilməzdir. Onda hər bir $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ nöqtəsindən tənliyin inteqral əyrisi keçir. $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - y}}$ törəməsi $D = \left\{-\infty < x < +\infty,\ y < x^2\right\}$ oblastında kəsilməzdir. $y = x^2$ əyrisi üzərində $\frac{\partial f}{\partial y}$ törəməsi sonsuzluğa çevrilir. Lakin $y = x^2$ funksiyası verilən tənliyi ödəmir: $2x \ne \sqrt{x^2 - x^2} - x$. Ona görə də tənliyin məxsusi həlli yoxdur. Deməli, $\overline{D}$ oblastında həll var və bu həll yeganədir.

9. $y' = x + y^{\frac{7}{3}}$ tənliyinin həllinin koordinat başlanğıcının ətrafında neçə tərtib törəməsi var?

HƏLLİ. Tənliyin sağ tərəfi $f(x,y) = x + y^{\frac{7}{3}}$ funksiyası koordinat başlanğıcının ətrafında kəsilməzdir və x, y dəyişənlərinə görə

$$f_x'(x,y) = 1,\quad f_y'(x,y) = \frac{7}{3}y^{\frac{4}{3}},\quad f_{xx}''(x,y) = 0,\quad f_{xy}''(x,y) = 0,$$

$f''_{yy}(x,y)=\frac{28}{9}y^{\frac{1}{3}}$ kəsilməz törəmələri var. Aydındır ki,

$f'''_{yyy}(x,y)=\frac{28}{9}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{28}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$ törəməsi $y=0$ olduqda sonsuzluğa çevrilir. Odur ki, $f(x,y)$ funksiyasının $(0,0)$ nöqtəsi ətra-fında x və y dəyişənlərinə nəzərən ikinci tərtibə qədər kəsilməz xü-susi törəmələri olur. Onda baxılan tənliyin həllinin 0 nöqtəsi ətrafında üçüncü tərticə qədər törəməsi var.

2. İzoklin üsulu

Tutaq ki,

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

tənliyi verilmişdir. Burada $f(x,y)$ funksiyası xoy müstəvisinin D oblastında kəsilməzdir və kəsilməz xüsusi törəmələri var. Verilən $M(x,y)\in D$ nöqtəsində meydanın istiqamətini bu nöqtədən keçən və bucaq əmsalı $k=f(x,y)$ olan düz xətt tə'yin edir. *Meydanın eyni istiqamətli nöqtələrinin həndəsi yerindən ibarət olan əyriyə izoklin de-yilir.* (1) tənliyinin izoklinləri

$$f(x,y)=k \tag{2}$$

tənliyi ilə tə'yin olunur. Burada k-parametrdir. k-parametrinin hər bir qiymətində (2) bərabərliyi bir və ya bir neçə əyri verə bilər və bu əyrilər izoklinlər olur. k-parametrinə bir-birinə yaxın qiymətər verməklə bir-birinə yaxın izoklinlər qurmaq olur. Bu da inteqral əyrilərinin daha dəqiq təqribi təsvirini verməyə imkan yaradır. $f(x,y)=0$ bərabərliyi ilə verilən izoklin *ekstremal* adlanır, çünki inteqral əyrilər bu izoklin ilə kəsişdiyi nöqtədə maksimum və ya minimum qiymət ala bilər. D oblastının $f(x,y)>0$ şərtini ödəyən hissəsində (nöqtələr üçün) inteqral əyriləri artan, $f(x,y)<0$ olan hissəsində azalan olur.

$$y''=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)y'=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)f(x,y)$$

olduğundan

$$f'_x(x,y)+f(x,y)f'_y(x,y)>0$$

olduqda, inteqral əyriləri çökük,

12

$$f'_x(x,y) + f(x,y)f'_y(x,y) < 0$$

olduğu hissədə qabarıq olur.

$$f'_x(x,y) + f(x,y)f'_y(x,y) = 0$$

tənliyini tə'yin etdiyi əyri nöqtələri inteqral əyriləri üçün əyilmə nöqtəsi olur (əgər varsa).

1. $y' = y - x$ tənliyinin inteqral əyrilərinin izoklin üsulu ilə təqribi qrafikini qurun.

HƏLLİ. Tənlikdə $y' = k$ əvəzləməsini aparsaq, $k = y - x$ alarıq. Deməli, $y = x + k$ tənliyin izoklin əyrilərinin parametrik tənliyi olur. $k = 0$ olduqda $y = x$ ekstremal izoklin alınır. Bu düz xətt üzərindəki hər bir nöqtədə meydanın istiqaməti ox oxuna paralel olur. İnteqral əyriləri ekstremal əyrisi ilə kəsişdiyi nöqtədə özünün maksimum və ya minimum qiymətini ala bilər. $k = 1$ olduqda $y = x + 1$ izoklin üzərində meydanın istiqaməti 45^0 olur, $\left(k = y' = 1 = tg\,45^0\right)$. $k = -1$ olduqda $y = x - 1$ izoklin üzərindəki hər bir nöqtədə meydanın istiqaməti 135^0 olur. $y > x$ olduqda $y' > 0$, $y < x$ olduqda isə $y' < 0$ olur. Deməli, $y = x$ düz xəttindən yuxanda inteqral əyriləri artan, $y = x$ düz xəttindən aşağıda inteqral əyriləri azalan olur.

Verilmiş tənlikdən

$$y'' = y' - 1 = y - x - 1 > 0,$$

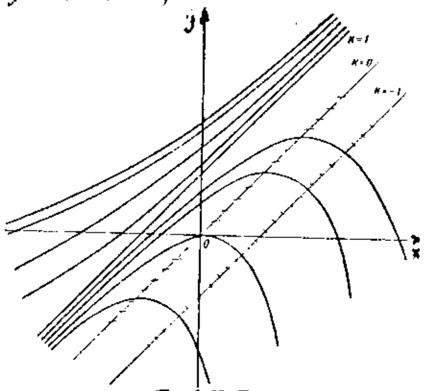
ye'ni $y > x + 1$ olduqda inteqral əyriləri çökük,

$$y'' = y - x - 1 < 0,$$

ye'ni $y < x + 1$ olduqda isə inteqral əyriləri qabarıq olur.

$y = x + 1$ funksiyası verilən tənliyi ödəyir ($1 = x + 1 - x$), odur ki, tənliyin inteqral əyrilərinin əyilmə nöqtəsi yoxdur.

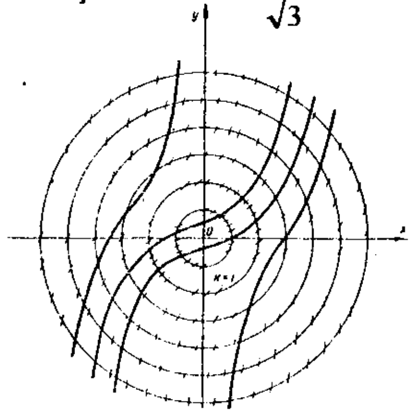
Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq verilən tənliyin inteqral əyrilərinin təqribi qrafikini qurmaq olar. (şəkil 2).



Şəkil 2.

2. İzoкlin üsulu ilə $y' = x^2 + y^2$ tənliyinin inteqral əyrilərinin təqribi qrafiкini qurun.

HƏLLİ. $y' = k$ əvəzləməsini aparsaq, $x^2 + y^2 = k$, $(k > 0)$ izoкlin əyrilərini alarıq. $y' > 0$ olduğundan inteqral əyriləri həmişə ar-tan olur. $k = 0$ olduqda $x^2 + y^2 = 0$, yə'ni $(0,0)$ nöqtəsi alınır. De-məli, inteqral əyrilərinin eкstremumu yoxdur. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduqda $x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ izoкlini üzərində meydanın istiqaməti 30^0, $k = 1$ olduqda, $x^2 + y^2 = 1$ izoкlini üzərində meydanın istiqaməti 45^0, $k = \sqrt{3}$ olduqda isə $x^2 + y^2 = \sqrt{3}$ izoкlini üzərində meydanın istiqaməti 60^0, və s. olur.



Şəкil 3.

Bunları nəzərə alaraq verilən tənliyin inteqral əyrilərinin təqribi qra-fiкini qurmaq olar (şəкil 3).

3, $y' = y - x^2$ tənliyinin inteqral əyrilərinin əyilmə nöqtələrinin hən-dəsi yerindən ibarət olan əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyrinin əyilmə nöqtəsi üçün $y'' = 0$. Verilən tənliyi x-ə nəzərən diferensiallayaq. $y'' = y' - 2x$. Tənliкdən $y' = y - x^2$ qiy-mətini axırıncı bərabərliкdə yazaq: $y'' = y - x^2 = 2x$.

Buradan $y'' = 0$ olduğunu nəzərə alaq. Alınan $y = x^2 + 2x$ əyrisi verilmiş tənliyin inteqral əyrilərinin əyilmə nöqtələrinin həndəsi yeridir.

3. Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər

Tutaq ki, törəməyə nəzərən həll olunmuş birtərtibli diferensial tənliyin sağ tərəfi iki funksiyanın hasili şəklində verilmişdir. Bu funksiyalardan biri yalnız x-dən, o biri yalnız y-dən asılıdır:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)\,, \tag{1}$$

Onda (1) tənliyinə *dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlik* deyilir.

Bu tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vurub $\varphi(y)$-ə bölsək,

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx \tag{2}$$

dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik alarıq. Bu tənliyi inteqrallayaq

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+C\,. \tag{3}$$

Bu, verilən tənliyin ümumi inteqralı olur. Bundan başqa $\varphi(y)=0$ şərtini ödəyən y_0 üçün $y=y_0$ tənliyin həlli olur. Bu həllin ümumi həlldən alınmayanları məxsusi həll olur.

Dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliklər

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx+f_2(x)\varphi_2(y)dy=0 \tag{4}$$

şəklində də verilə bilər.

(4) tənliyini həll etmək üçün bərabərliyin hər iki tərəfini $\varphi_1(y)f_2(x)$ hasilinə bölsək

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0 \tag{5}$$

dəyişənlərinə ayrılmış diferensial tənlik alarıq. Bu tənliyi inteqrallasaq

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C\,. \tag{6}$$

(6) ifadəsi (4) tənliyinin ümumi inteqralıdır. Nəzərə almaq lazımdır ki, (4) tənliyinin hər iki tərəfini $\varphi_1(y)f_2(x)$ hasilinə böldükdə, bu ha-

sili sıfıra çeviren nöqtelere uyğun $y = y_k$, $x = x_i$ heller de alına biler: $\varphi_1(y_k) = 0$, $f_2(x_i) = 0$. Bu hellerden ümumi helldən alınmayanları mexsusi hell olur.

1. $xyy' = 1 - x^2$ tenliyini hell edin.

HƏLLİ. Tenlik deyişenlerine ayrılan diferensial tenlikdir. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ olduğunu nezere alsaq ve beraberliyin her iki terefini dx-e vurub, x-e bölsek alarıq. $ydy = \dfrac{1 - x^2}{x}dx$.

Bu tenlik deyişenlerine ayrılmış tenlikdir. Tenliyi inteqrallasaq

$$\int ydy = \int \frac{dx}{x} - \int xdx + \ln C, \quad y^2 + x^2 = 2\ln|Cx|.$$

2. $x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$ tenliyini hell edin ve mexsusi hellin olub-olmadığını araşdırın.

HƏLLİ. Tenlik deyişenlerine ayrılan diferensial tenlikdir. Beraberliyin her terefini $(1 - y^2)(1 - x^2)$ hasiline bölek ve inteqrallayaq.

$$\int \frac{xdx}{1 - x^2} + \int \frac{ydy}{1 - y^2} = C,$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{1 - x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - y^2)}{1 - y^2} = -\frac{1}{2}\ln C_1, \quad \left(C = -\frac{1}{2}C_1\right),$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| - \frac{1}{2}\ln|1 - y^2| = -\frac{1}{2}\ln C_1, \quad (1 - x^2)(1 - y^2) = C_1.$$

Bu, verilmiş tenliyin ümumi inteqralıdır. İndi mexsusi helli araşdıraq. Bunun üçün $(1 - x^2)(1 - y^2) = 0$ tenliyini hell edek. Bu tenliyin bütün köklerini (ye'ni $x = \pm 1$, $y = \pm 1$) ümumi inteqraldan $C_1 = 0$ götürmekle almaq olar. Demeli, verilmiş tenliyin mexsusi helli yoxdur.

3. $xydx + (1+y^2)\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ tənliyini həll edin və məxsusi həllin varlığını araşdırın.

HƏLLİ. Tənliyin hər iki tərəfini $y\sqrt{1-x^2}$ hasilinə bölsək, dəyişənlərinə ayrılmış tənlik alarıq: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{1+y^2}{y}dy = 0$. Alınan tənliyi inteqrallayaq.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{1+y^2}{y}dy = \ln C,$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dy}{y} + \int ydy = \ln C,$$

$$-\sqrt{1-x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = \ln C, \quad y = Ce^{\sqrt{1-x^2} - \frac{y^2}{2}}.$$

Bu, verilmiş tənliyin ümumi həllidir. $y\sqrt{1-x^2} = 0$ tənliyinə baxaq. $y = 0$ həlli ümumi həlldən $C = 0$ götürməklə alındığından xüsusi, $x = \pm 1$ həlləri isə C sabitinə ədədi qiymətlər verməklə alınmadığından verilmiş tənliyin məxsusi həlli olur.

4. Radioaktiv maddənin parçalanma sür'əti maddənin miqdarı ilə mütənasibdir. Başlanğıc $t = 0$ anında maddənin miqdarının m_0 olduğunu bilərək, onun parçalanma qanununu tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, t anında radioaktiv maddənin kütləsi $m(t)$, $t + \Delta t$ anında $m + \Delta m$ (Δm qədər azalır) olur. Δt müddətində radioaktiv parçalanmanın orta sür'əti $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ olar. Ani sür'ət isə $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$ olar. Onda məsələnin şərtinə görə yaza bilərik

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

Burada k -mütənasiblik əmsalıdır (mənfi işarə kütləsinin zaman keçdikcə azalmasını göstərir). Beləliklə, qoyulan məsələni həll etmək üçün alınan tənliyin həllini tapmaq lazımdır.

$$\frac{dm}{m} = -kdt, \quad \int \frac{dm}{m} = -k\int dt + \ln C, \quad \ln m = -kt + \ln C,$$

$$m = Ce^{-kt}.$$

$t = 0$ olduqda $m = m_0$ olduğundan $m_0 = C$ alırıq. Beləliklə, verilmiş məsələnin həlli $m = m_0 e^{-kt}$. Mütənasiblik əmsalı k təcrübə yolu ilə tə'yin olunur, məsələn, radium üçün $k = 0{,}00044$ götürülür.

5. Əyri üzərində götürülmüş hər bir nöqtə üçün koordinat oxları, əyrinin özü və götürülmüş nöqtənin ordinatı ilə məhdud olan fiqurun sahəsi həmin nöqtənin koordinatları üzərində qurulmuş düzbucaqlının sahəsinin $\frac{1}{3}$-nə bərabərdir. Bu əyrini tapın.

HƏLLİ. Əyri üzərində götürülmüş nöqtəni $M(x, y)$ qəbul etsək, məsələnin şərtinə görə yaza bilərik:

$$\int_0^x y(s)ds = \frac{1}{3}xy.$$

Bərabərliyin hər tərəfini x dəyişəninə görə diferensiallayaq:

$y = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}xy'$, Buradan $xy' = 2y$. Dəyişənləri ayırıb, tənliyi inteqrallasaq $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$, $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$, $y = Cx^2$.

Deməli, axtarılan əyri $y = Cx^2$ parabolalar ailəsini verir.

4. Bircins diferensial tənliklər

$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ şərtini ödəyən $f(x, y)$ funksiyasına m

dərəcəli bircins funksiya deyilir. Məsələn, $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ funksiyası ikidərəcəli bircins funksiyadır. Doğrudan da $f(tx,ty)=$ $=t^2x^2-txty+t^2y^2=t^2\left(x^2-xy+y^2\right)=t^2f(x,y)$.

$f(x,y)=\dfrac{3xy}{x^2+2y^2}$ funksiyası isə sıfır dərəcəli bircins funksiyadır: $f(tx,ty)=\dfrac{3txty}{t^2x^2+2t^2y^2}=\dfrac{t^2(3xy)}{t^2\left(x^2+2y^2\right)}=t^0f(x,y)$.

$f(x,y)$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiyadırsa $y'=$ $=f(x,y)$ diferensial tənliyi *bircins tənlik adlanır.* Bircins tənliyi

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

şəklində göstərmək olar. Bircins tənliyi $\dfrac{y}{x}=z$ $(y=xz)$ əvəzləməsi ilə (z yeni axtarılan funksiyadır) dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənliyinə gətirilir. $y=xz$ ifadəsini diferensiallasaq alarıq: $\dfrac{dy}{dx}=z+$ $+x\dfrac{dz}{dx}$. y və y'-in qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$$z+x\frac{dz}{dx}=\varphi(z), \qquad \frac{dz}{\varphi(z)-z}=\frac{dx}{x} \tag{2}$$

Bu tənliyi həll edib, $z=\dfrac{y}{x}$ əvəzləməsini nəzərə alsaq, verilən tənliyin həllini taparıq. z_0 ədədi $\varphi(z)=z$ tənliyinin həlli olduqda $y=z_0x$ funksiyası da həll olur. Bu həll ümumi həldən alınmadıqda məxsusi həll olur.

$M(x,y)$, $N(x,y)$ funksiyaları *eyni dərəcəli bircins olduqda*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3}$$

tənliyi bircins olur.

1. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ funksiyası sıfır dərəcəli bircins funksiyadır:

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=t^0\frac{x+y}{x-y}=f(x,y).$$

Verilmiş tənlik bircins diferensial tənlikdir. $y=xz$ əvəzləməsini aparaq. Onda $y'=z+xz'$. y və y'-in qiymətlərini verilən tənliyində yerinə yazsaq alarıq:

$$z+xz'=\frac{x+xz}{x-xz},\quad xz'=\frac{1+z^2}{1-z},\quad \frac{1-z}{1+z^2}dz=\frac{dx}{x}.$$

Axırıncı tənlik dəyişənlərinə ayrılmış tənlikdir. Bu tənliyi inteqrallayaq.

$$\int\frac{1-z}{1+z^2}dz=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad \int\frac{dz}{1+z^2}-\int\frac{zdz}{1+z^2}=\ln|x|+\ln C,$$

$arctgz-\frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)=\ln|x|+\ln C,\quad z=\frac{y}{x}$ olduğundan

$$arctg\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}.$$

2. $\left(3y^2+3xy+x^2\right)dx=\left(x^2+2xy\right)dy$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $M(xt,yt)=3(yt)^2+3(xtyt)+(xt)^2=t^2M(x,y)$

$$N(xt,yt)=(xt)^2+2xtyt=t^2\left(x^2+2xy\right)=t^2N(x,y)$$

olduğundan $M(x,y)$ və $N(x,y)$ ikidərəcəli bircins funksiyalardır. Deməli, verilən tənlik bircinsdir. $y=xz$ əvəzləməsini aparaq. Onda $dy=zdx+xdz$. y-in və dy-in bu qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq.

$$\left(3x^2z^2+3xxz+x^2\right)dx=\left(x^2+2xxz\right)(zdx+xdz)$$

Buradan

$$\left(z^2+2z+1\right)dx=x(1+2z)dz,\quad \int\frac{1+2z}{(1+z)^2}dz=\int\frac{dx}{x}+\ln C,$$

$$\int\left(\frac{2}{1+z}-\frac{1}{(1+z)^2}\right)dz=\ln|x|+\ln C,$$

$$2\ln|1+z|+\frac{1}{1+z}=\ln|x|+\ln C.$$

$z=\dfrac{y}{x}$ əvəzləməsini nəzərə alsaq $Cx^3=(x+y)^2e^{\frac{x}{x+y}}$.

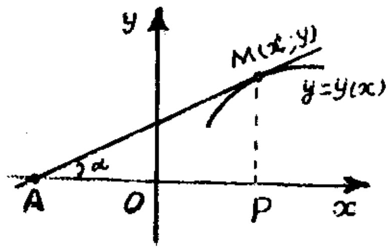
3. Hər bir nöqtəsində toxunma nöqtəsinin koordinatlarının cəmi toxunanaltının uzunluğuna bərabər olan əyrini tapın.

HƏLLİ. Tutaq ki, $y=y(x)$ əyrisinə $M(x,y)$ nöqtəsində çəkilən toxunan ox oxunu A nöqtəsində kəsir (şəkil 4). Onda AM parçasının ox oxu üzərində proyeksiyası, yə'ni AP parçası toxunanaltı olur.

ΔAMP-dən: $\dfrac{MP}{AP}=tg\alpha=y'$, $MP=y$.

Onda $AP=\dfrac{y}{y'}$, $y'=\dfrac{y}{AP}$. Məsələnin şərtinə görə $AP=x+y$.

Onda $y'=\dfrac{y}{x+y}$ diferensial tənliyini alarıq. Alınan tənlik bircins tənlikdir. $y=xz$ əvəzləməsini və $y'=z+xz'$ ifadəsini tənlikdə yerinə yazaq:



Şəkil 4.

$$z+xz'=\frac{xz}{x+xz},\quad xz'=-\frac{z^2}{1+z},\quad \frac{1+z}{z^2}dz=-\frac{dx}{x},$$

$$-\int\frac{dz}{z^2}-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad \frac{1}{z}-\ln|z|=\ln|x|+\ln C,$$

$$\frac{1}{z}=\ln|zxC|,\quad \ln|Cy|=\frac{x}{y},\quad x=y\ln|Cy|.$$

5. Bircins tənliyə gətirilə bilən tənliklər

$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ şəklində verilmiş diferensial tənlik *bircins tənliyə* gətirilə bilir. Burada aşağıdakı halları nəzərdən keçirək:

1) $c = c_1 = 0$ olduqda tənlik bircins olur. Odur ki, c, c_1 ədədlərindən heç olmazsa birinin sıfırdan fərqli halına baxaq.

2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ olduqda, $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$ sistemini həll edib, $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ əvəzləməsi aparmaqla bircins olan

$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right)$ tənliyini alırıq.

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ olduqda, $a_1x + b_1y = k(ax + by)$, $(k = const)$ olur və verilmiş tənlik $y' = F(ax + by)$ şəklinə düşür və $z = ax + by$ əvəzləməsi ilə həll olunur.

1. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənliyi $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$ şəklində yazaq. Onda $c_1 = 6$, $c = -3$ və $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ olduğundan

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases}$$

sistemini həll edib $\alpha = 1$, $\beta = 2$ tapınq. Onda $x = 1 + \xi$, $y = 2 + \eta$ əvəzləməsinin köməkliyi ilə verilmiş tənlik $2(\xi - 2\eta)d\xi + (\xi + \eta)d\eta = 0$ bircins tənliyinə gətirilir. Tənliyini həll etmək üçün $\eta = \xi u$ əvəzləməsini aparaq. Onda tənlik $\left(2 - 3u + u^2\right)d\xi + \xi(1 + u)du = 0$ şəklinə düşür. Dəyişənləri ayırıb, həll etsək:

$$-\int \frac{1+u}{u^2 - 3u + 2}du = \int \frac{d\xi}{\xi} + \ln C, \quad 2\ln|u - 1| - 3\ln|u - 2| =$$

$$= \ln|\xi| + \ln C, \quad C\xi = \frac{(u-1)^2}{(u-2)^3}, \quad u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{y-2}{x-1},$$

$$C(y - 2x)^3 = (y - x - 1)^2.$$

2. $(2x + y - 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan (3-cü hal) $z = 2x + y$ əvəzləməsini aparaq. Onda $dy = dz - 2dx$ və əvəzləməni nəzərə alsaq verilmiş tənlik $(z - 1)dx - (2z - 3)(dz - 2dx) = 0$, $(5z - 7)dx = (2z - 3)dz$ şəklinə düşər. Dəyişənləri ayırsaq və inteqrallasaq

$$\frac{2z - 3}{5z - 7}dz = dx, \quad \int \frac{2z - 3}{5z - 7}dz = \int dx - \ln C, \quad \frac{2}{5}\int \frac{5z - 7}{5z - 7}dz -$$

$$-\frac{1}{5}\int \frac{dz}{5z - 7} = \int dx - \ln C, \quad \frac{2}{5}\int dz - \frac{1}{5}\int \frac{dz}{5z - 7} = x - \ln C,$$

$$\frac{2}{5}z - \frac{1}{25}\ln|5z - 7| = x - \ln C, \quad 10z - \ln|5z - 7| = 25x - 25\ln C,$$

$$\ln|5z - 7| - \ln C_1 = 10z - 25x, \quad \left(\ln C_1 = 25\ln C\right).$$

$$\frac{5z - 7}{C_1} = e^{5(2y - x)}, \quad 10x + 5y - 7 = C_1 e^{5(2y - x)}.$$

6 Ümumiləşmiş bircins diferensial tənliklər

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y'\right) = t^m F(x, y, y')$$

bərabərliyi ödəndikdə $F(x, y, y') = 0$ *ümumiləşmiş bircins tənlik* adlanır və $y = \pm x^k z$ əvəzləməsinin köməkliyi ilə dəyişənlərə ayrılan tənliyə gətrilir. Bə'zi tənliklər $y = \pm z^m$ əvəzləməsi ilə bircins tənliyə gətirilir.

1. $2x^2 y' = y^3 + xy$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $x \to tx$, $y \to t^k y$, $y' \to t^{k-1} y'$ əvəzləməsini aparsaq $2t^2 x t^{k-1} y' - t^{3k} y^3 - txt^k y = t^m\left(2x^2 y' - y^3 - xy\right)$ ödənməsi üçün $2 + k - 1 = 3k = 1 + k$ bərabərlikləri ödənilməlidir. Buradan $k = \frac{1}{2}$ alarıq. Onda $y = x^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{x}\,z$, $(x > 0)$ əvəzləməsi aparsaq: $y' = \frac{z}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,z'$. y və y'-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$2x^2\left(\frac{z}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,z'\right) = \left(\sqrt{x}\,z\right)^3 + x\sqrt{x}\,z, \quad 2xz' = z^3, \quad \frac{2dz}{z^3} = \frac{dx}{x},$$

$$2\int \frac{dz}{z^3} = \ln|x| + \ln C, \quad -\frac{x}{y^2} = \ln Cx, \quad y^2 \ln Cx + x = 0.$$

$x < 0$ olduqda, $y = \sqrt{-x}\,z$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır.

2. $\frac{2}{3} xyy' = \sqrt{x^6 + y^4} + y^2$ tənliyini $x > 0$ üçün həll edin.

HƏLLİ. $y = z^m$ əvəzləməsi aparaq. Onda verilmiş tənlik

$\frac{2}{3}mxz^{2m-1}z' = \sqrt{x^6 + z^{4m}} + z^{2m}$ şəklinə düşür. Bu tənliyin bircins olması üçün $1 + 2m - 1 = \frac{6}{2} = \frac{4m}{2} = 2m$ şərti ödənməlidir. Buradan $m = \frac{3}{2}$. Deməli, $y = z^{\frac{3}{2}}$ əvəzləməsini aparmaqla $z' = \sqrt{\frac{x^4}{z^4} + \frac{z^2}{x^2}} + \frac{z}{x}$ bircins tənliyini alanq.

Bu tənlik $z = xt$ əvəzləməsi ilə dəyişənlərinə ayrılın $xt' = \frac{\sqrt{1+t^6}}{t^2}$ tənliyinə gətirilir. Onun ümumi inteqralı $\frac{1}{3}\ln\left|t^3 + \sqrt{1+t^6}\right| = \ln(c_1x)$ olar. Onda $t = \frac{z}{x} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x}$ olduğunu nəzərə alsaq $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y^2}{x^3} + \sqrt{1 + \frac{y^4}{x^6}}\right| =$ $= \ln(c_1x)$, $\frac{1}{3}\ln\frac{y^2 + \sqrt{x^6 + y^4}}{x^3} = \ln(c_1x)$, $y^2 + \sqrt{x^6 + y^4} = cx^6$ $c = c_1^3$.

7. Tam diferensiallı tənliklər

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

tənliyinin sol tərəfi hər hansı $F(x,y)$ funksiyasının tam diferensialı şəklində göstərilə bilərsə, yə'ni

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x,y) \qquad (1')$$

bərabərliyi doğrudursa, *(1) tənliyi tam diferensiallı tənlik* adlanır (burada $M(x,y)$, $N(x,y)$ kəsilməzdir və kəsilməz $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ törəmələri var). Belə $F(x,y)$ funksiyası üçün

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

Buradan tənliyin ümumi inteqralı

$$F(x,y)=c \tag{3}$$

şəklində tapılır. Tənliyin tam diferensiallı tənlik olması üçün

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

şərti zəruri və kafidir.

Əgər (4) şərti ödənirsə, (1) tənliyinin ümumi inteqralı

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta=c \tag{5}$$

və ya

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x,\eta)d\eta=c \tag{6}$$

şəklində olar. Burada (x_0,y_0) nöqtəsi $M(x,y)$, $N(x,y)$ funksiyalarının tə'yin oblastından götürülür. (5) düsturunu almaq üçün $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ götrülür və x-ə nəzərən inteqrallamaqla alınır.

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi+\varphi(y). \tag{7}$$

Burada y-ə nəzərən törəmə alıb $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bərabərliyini nəzərə

alsaq $\frac{\partial F}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(\xi,y)}{\partial \xi}d\xi+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y).$

$\varphi'(y)=N(x_0,y)$ götürülərsə, $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$ şərti alınır. Deməli, $F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)d\eta+C$ funksiyası üçün (1') bərabərliyi ödənir.

1. $2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 - y^2$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

olduğundan, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ alırıq. Deməli, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Tənliyi həll etmək üçün elə $F(x,y)$ funksiyası tapmaq lazımdır ki, $\frac{\partial F}{\partial y} = M(x,y) = 2xy$ ödənsin. Bu bərabərliyi x-ə nəzərən

inteqrallayaq. $F(x,y) = \int\limits_0^x 2\xi y d\xi + \varphi(y) = x^2 y + \varphi(y)$.

Buradan $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - y^2$ olması üçün $x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2$,

$\varphi'(y) = -y^2$, $\varphi(y) = -\frac{y^3}{3}$. Onda $F(x,y) = x^2 y - \frac{y^3}{3}$ axtarılan funksiya və $3x^2 y - y^3 = C$ verilmiş tənliyin ümumi inteqralı olur.

2. $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy + xy\cos xy) = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy$,

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \cos xy\right) = 2x\cos xy - x^2 y \sin xy$. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Odur ki, (6) düsturuna əsasən ümumi inteqralı tapınq:

$$\int\limits_0^x (\sin \xi \cdot 0 + \xi \cdot 0 \cos \xi \cdot 0)d\xi + \int\limits_0^y \left(x^2 \cos x\eta\right)d\eta = C, \quad x\sin xy = C.$$

3. $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan, verilmiş tənlik tam diferensiallı tənlikdir. Digər tərəfdən, bu tənlik həm də bircins tənlikdir. Bu tip tənlikləri müəyyən qruplaşdırmalar aparmaqla daha asan həll etmək olar. Verilmiş tənliyi $x^3dx+xy(ydx+xdy)+$ $+y^3dy=0$ şəklində yazaq. Onda

$$d\left[\frac{x^4}{4}+\frac{(xy)^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right]=0,\quad \frac{x^4}{4}+\frac{(xy)^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C_1,$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4=C,\quad C=4C_1.$$

8. İnteqrallayıcı vuruq

Bə'zi hallarda

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1}$$

tənliyi tam diferensiallı tənlik olmadıqda, elə sıfırdan fərqli $\mu(x,y)$ funksiyası seçmək olur ki, onu (1) tənliyinin hər tərəfinə vurduqda o tam diferensiallı tənliyə çevrilir:

$$du=\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy. \tag{2}$$

Onda $\mu(x,y)$ funksiyasına *inteqrallayıcı vuruq* deyilir. İnteqrallayıcı vuruğun tə'rifinə görə yaza bilərik: $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \tag{3}$$

Bu xüsusi törəməli diferensial tənliyi həll etməklə $\mu(x,y)$ inteqrallayıcı vuruğu tapırıq. Lakin (3) tənliyini həll etmək həmişə mümkün olmur və ya çətin olur. Ona görə də xüsusi hallara baxaq.

1). Tutaq ki, $\mu=\mu(x)$, yə'ni inteqrallayıcı vuruq x dəyişənindən asılıdır. Onda (3) tənliyi

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{4}$$

şəklinə düşür. Belə vuruğun varlığı üçün (4) bərabərliyinin sağ tərəfi yalnız x-dən asılı funksiya olmalıdır. Onda (4) tənliyini həll etməklə $\mu(x)$ inteqrallayıcı vuruğunu tapırıq.

2). İnteqrallayıcı vuruq ancaq y-dəyişənindən asılı olarsa, (3)-dən

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

alarıq. Bu bərabərliyin doğru olması üçün, bərabərliyin sağ tərəfi yalnız y-dəyişənindən asılı olmalıdır. Buradan inteqrallamaqla $\mu=\mu(y)$ vuruğunu tapırıq.

1. $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. $\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-2y,\quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilmiş tənlik tam diferensiallı deyil. Lakin $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$ olduğundan, onun ancaq x-dən asılı $\mu(x)$ inteqrallayıcı vuruğu var. Onda (4)-ə əsasən $\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{2}{x}$, $\ln\mu=-2\ln|x|$, $\mu=\frac{1}{x^2}$. Verilmiş tənliyi $\mu=\frac{1}{x^2}$-na vurmaqla tam diferensiallı

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-2\frac{xy}{x^2}dy=0.$$

tənliyini alırıq. Buradan $\int\limits_1^x\left(\frac{1}{\xi}+0\right)d\xi-\int\limits_0^y\frac{2\eta}{x}d\eta=\ln C,\ \ln|x|-\frac{y^2}{x}=$

$= \ln C, \quad y^2 = x \ln C_1 x, \quad C_1 = \frac{1}{C}.$

2. $2xy \ln y dx + \left(x^2 + y^2 \sqrt{y^2+1}\right) dy = 0$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş misal üçün alırıq:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy \ln y} = \frac{2x - 2x \ln y - 2x}{2xy \ln y} = -\frac{1}{y}.$$

Deməli, tənliyin yalnız y -dəyişənindən asılı inteqrallayıcı vuruğu var:

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{1}{y}, \quad \ln \mu = -\int \frac{dy}{y} = -\ln y, \quad \mu = \frac{1}{y}.$$

Onda verilmiş tənliyin hər tərəfini $\mu = \frac{1}{y}$ vuruğuna vursaq

$$2x \ln y dx + \frac{x^2 + y^2 \sqrt{y^2+1}}{y} dy = 0$$

tam diferensiallı tənlik alınar. Bu tənliyi inteqrallasaq

$$\int_0^x 2\xi \ln y d\xi + \int_1^y \eta \sqrt{\eta^2 + 1} d\eta = C, \quad x^2 \ln y + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = C.$$

9. Xətti diferensial tənliklər

Axtarılan funksiya və onun törəməsi tənliyə birinci dərəcədən daxildirsə, ***belə tənliyə xətti diferensial tənlik*** deyilir.

Xətti diferensial tənliyi belə yazmaq olar:

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1}$$

Burada $P(x)$ və $Q(x)$ kəsilməz funksiyalardır.

Xətti diferensial tənliklərin Bernulli üsulu ilə həllini tapaq. Tənliyin həllini iki $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarının hasili şəklində axtaraq. Yə'ni

$y = u(x)v(x)$. Onda $y' = u'v + uv'$ olar. y və y'-in qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazaq.

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x).$$

Alınan bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq.

$$v[u' + P(x)u] + uv' = Q(x). \tag{2}$$

$u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını

$$u' + P(x)u = 0, \quad uv' = Q(x) \tag{3}$$

şərtləri daxilində seçək.

Birinci tənliyi dəyişənlərinə ayırma üsulu ilə həll edək:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx, \quad \ln|u| = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}.$$

$u(x)$-in bu qiymətini (3) bərabərliyinin ikinci tənliyində nəzərə alsaq

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x), \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \tag{4}$$

$u(x)$ və $v(x)$-in qiymətlərini $y = u(x)v(x)$-də nəzərə alsaq (1) tənliyinin ümumi həllini alarıq:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]. \tag{5}$$

Xətti diferensial tənliyin sabitin variasiyası (Laqranj üsulu) ilə həllinə baxaq: Əvvəlcə bircins

$$y' + P(x)y = 0 \tag{6}$$

tənliyinin ümumi həllini tapaq:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{7}$$

(1) tənliyinin ümumi həllini

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{8}$$

şəklində axtaraq, burada $C(x)$ namə'lum funksiyadır. Bu əvəzləməni və

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

törəməni (1) tənliyində yerinə yazsaq alanq:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \quad dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Buradan tapılan

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

(8)-də yerinə yazsaq (1) tənliyinin (5) şəklində ümumi həllini taparıq.

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş xətti tənliyi Bernulli üsulu ilə həll edək. $y = uv$ qəbul edək. Onda $y' = u'v + v'u$ alanq. y və y'-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + v'u = x$$

Burada u və v funksiyalarını

$$u' - \frac{u}{x} = 0, \quad v'u = x$$

bərabərliklərinə əsasən tə'yin edək. Birinci tənliyi həll edək.

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int\frac{du}{x} = \int\frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = \ln|x|, \quad u = x.$$

u-nun bu qiymətini ikinci tənlikdə yazaq.

$$v'x = x, \quad v' = 1, \quad dv = dx, \quad v = x + C.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli üçün alınq:

$$y = x(x + C).$$

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ tənliyinin $y(0) = 1$ şərtini ödəyən həllini tapın.

HƏLLİ. $y' + 2xy = 0,\quad \frac{dy}{dx} = -2xy,\quad \int \frac{dy}{y} = -2\int x dx + \ln C,$

$\ln|y| = -x^2 + \ln C,\quad y = Ce^{-x^2}$. Bircins olmayan tənliyin ümumi həllini sabitin variasiyası üsulu ilə tapaq: $y = C(x)e^{-x^2}$ əvəzləməsini və $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2}$ törəməsini verilmiş tənlikdə yazaq:
$C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2} + 2C(x)xe^{-x^2} = xe^{-x^2}$.

Buradan $C'(x) = x,\quad dC(x) = xdx,\quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C$.

Onda əvəzləməyə əsasən $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$ verilmiş tənliyin ümumi həlli olur. Burada, başlanğıc şərtini nəzərə alsaq $1 = (0 + C)\cdot 1$, $C = 1$.

Beləliklə, verilmiş tənliyin başlanğıc şərtini ödəyən həllini alırıq:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x^2}.$$

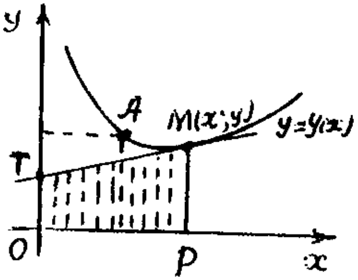
3. $A(a, a)$ nöqtəsindən keçən elə əyri tapın ki, onun ixtiyari nöqtəsində çəkilən toxunan, toxunma nöqtəsinin ordinatı və koordinat oxları ilə əhatə olunmuş trapesiyanın sahəsi sabit olub, a^2-na bərabər olsun.

HƏLLİ. Əyri üzərində götürülmüş $M(x, y)$ nöqtəsindən keçən toxunanın tənliyini yazaq: $Y - y = y'(X - x)$. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı OT parçasını (şəkil 5.) tapmaq üçün toxunanın tənliyində $X = 0$ qəbul etmək kifayətdir. Onda $Y = OT = y - y'x$. $PM = y$, $OP = x$ olduğundan məsələnin şərtinə əsasən

$$\frac{y - y'x + y}{2}x = a^2,\quad y' - \frac{2y}{x} = -\frac{2a^2}{x^2}.$$

Alınan xətti tənliyi ümumi həll üçün hazır düsturdan istifadə etməklə alırıq:

$$y = e^{2\ln x}\left(-2a^2\int\frac{e^{-2\ln x}}{x^2}dx + C\right)$$



Şəkil 5.

Buradan

$e^{2\ln x} = x^2$, $e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$ olduğunu nəzərə alsaq

$$y = x^2\left(-2a^2\int\frac{dx}{x^4} + C\right) =$$

$= x^2\left(\frac{2a^2}{3x^3} + C\right) = \frac{2a^2}{3x} + Cx^2$. Başlanğıc şərtdən istifadə etsək

$(x = a, \quad y = a)$ $C = \frac{1}{3a}$. Beləliklə, $y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}$.

4. Sarğının müqaviməti R, avtoinduksiya əmsalı L, ilk cərəyan $L_0 = a$ olarsa və elektrik hərəkətetdirici qüvvə $E = E_0 \sin\omega t$ qanunu üzrə dəyişərsə, sarğıda cərəyanın t zamanından asılı olaraq dəyişməsini tapın.

HƏLLİ. Özünüinduksiyanın elektrik hərəkətetdirici qüvvəsi cərəyan şiddətinin artma sür'əti ilə mütənasibdir. Mütənasiblik əmsalı burada L-dir. Şəbəkə qapanarkən iki əks elektrik hərəkətetdirici qüvvə: E gərginliyi və özünüinduksiyanın elektrik hərəkətetdirici qüvvəsi $E_1 = L\frac{di}{dt}$ yaranır. Kirxhof qanununa əsasən $E - L\frac{di}{dt}$ şəbəkədə yaranan Ri gərginliyinə bərabərdir. Yə'ni

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri, \quad L\frac{di}{dt} + Ri = E \quad .$$

Buradan $L\frac{di}{dt}+Ri=E_0\sin\omega t$ diferensial tənliyini alırıq.

Əvvəlcə bircins $L\frac{di}{dt}+Ri=0$ tənliyi həll edək:

$$\int\frac{di}{i}=-\frac{R}{L}\int dt,\quad \ln i=-\frac{R}{L}t+\ln C,\quad i=Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Bircins olmayan tənliyinin həllini $i=C(t)e^{-\frac{R}{L}t}$ şəklində axtaraq. Onda bu əvəzləməni və $i'=C'(t)e^{-\frac{R}{L}t}-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}C(t)$ törəməsini tənlikdə nəzərə alsaq

$$L\left(C'(t)e^{-\frac{R}{L}t}-\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}C(t)\right)+\mathrm{R}e^{-\frac{R}{L}t}C(t)=E_0\sin\omega t.$$

Buradan $C'(t)=\frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\sin\omega t,\ C(t)=\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt+C$.

İki dəfə hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edərək alırıq:

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t-\frac{L\omega}{R}\left(\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t+\right.$$

$$\left.+\frac{L\omega}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt\right);$$

Buradan

$$\left(1+\frac{L^2\omega^2}{R^2}\right)\cdot\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t-\frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right),$$

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt=\frac{R^2}{R^2+L^2\omega^2}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t-\frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right).$$

Onda $C(t)=\frac{E_0R}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\left(\sin\omega t-\frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right)+C$.

Beləliklə, $i=\frac{E_0R}{R^2+L^2\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{L\omega}{R}\cos\omega t\right)+Ce^{-\frac{R}{L}t}$ verilmiş məsələnin ümumi həlli olur. $t=0$ olduqda $i=0$ olduğundan $C=$ $=\frac{E_0L\omega}{R^2+L^2\omega^2}$, $i(t)=\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\left(L\omega e^{-\frac{R}{L}t}+R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t\right)$.

10. Bernulli tənliyi

Elə birtərtibli diferensial tənliklər var ki, onlar xətti olmasalar da xətti tənliyə gətirilə bilirlər. Belə diferensial tənliklərə misal olaraq Bernulli tənliyini göstərmək olar:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (1)$$

$n=1$ olduqda (1) tənliyi bircins, $n=0$ olduqda xətti tənliyə çevrilir. n sıfırdan və vahiddən fərqli olduqda (1) tənliyinin hər iki tərəfini y^{-n}-ə vursaq və alınan

$$y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x) \qquad (2)$$

tənliyində $z=y^{1-n}$ əvəzləməsini aparsaq,

$$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x) \qquad (3)$$

tənliyi alınar. (3) tənliyi z-ə nəzərən xətti diferensial tənlikdir. (3) tənliyini həll edib $z(x)$-i tapırıq. Əvvəlki y dəyişəninə qayıdaraq (1) tənliyinin ümumi həllini alırıq. $0<n<1$ olduqda $y=0$ həlli Bernulli tənliyinin məxsusi həlli olur. Bernulli tənliyini xətti tənliyə gətirmədən də $y=u(x)v(x)$ əvəzləməsi aparmaqla həll etmək olar.

1. $xy'+y=y^2\ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş tənlik Bernulli tənliyidir. Burada $n=2$-dir. Verilmiş tənliyin hər tərəfini y^{-2}-na vuraq: $xy^{-2}y' + y^{-1} = \ln x$.

$z = y^{-1}$ əvəzləməsini aparaq. Onda $-xz' + z = \ln x$. Bircins tənliyin ümumi həllini tapaq:

$$-xz' + z = 0, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C, \quad z = xC.$$

$z = C(x)x$ əvəzləməsi aparaq:

$$-x[C'(x)x + C(x)] + xC(x) = \ln x, \quad x^2C'(x) = \ln x,$$

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}, \quad C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx + C.$$

Axırıncı inteqralı hissə-hissə inteqrallasaq $\left(u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{x^2}\right)$

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{1}{x}(\ln x + 1) + C.$$

$C(x)$-in bu qiymətini $z = C(x)x$ ifadəsində yerinə yazsaq

$$z = \ln x + 1 + Cx.$$

Burada $z = y^{-1}$ olduğunu nəzərə alsaq: $y(\ln x + 1 + Cx) = 1$.

2. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$ tənliyini həll edin.

HƏLLİ. Verilmiş Bernulli tənliyində $y = u(x)v(x)$ əvəzləməsini aparaq. Onda $v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = u^2v^2 \ln x$.

Burada $u(x)$ və $v(x)$ funksiyalarını $u' + \frac{u}{x} = 0, \quad v' = uv^2 \ln x$ bərabərliklərinə əsasən seçək. Bu tənlikləri həll edək.

$$u' + \frac{u}{x} = 0, \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = -\ln|x|, \quad u(x) = \frac{1}{x}.$$

$$v' = -\frac{1}{x}v^2\ln x, \quad \int\frac{dv}{v^2} = -\int\frac{\ln x}{x}dx + \frac{C}{2}, \quad -\frac{1}{v} = -\int \ln x\, d(\ln x) + \frac{C}{2},$$

$$-\frac{1}{v} = -\frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{C}{2}, \quad v(x) = \frac{-2}{C+(\ln x)^2}.$$

Beləliklə, $y = u(x)v(x) = \dfrac{-2}{x\left[C+(\ln x)^2\right]}$ ümumi həllini alınq.

3. Elə əyri tapın ki, onun hər bir nöqtəsində çəkilmiş toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parçanın uzunluğu, radiusu toxunma nöqtəsinin ordinatı olan dairənin sahəsinə qiymətcə bərabər olsun.

HƏLLİ. Tutaq ki, $M(x,y)$ əyrinin ixtiyari nöqtəsidir. Onda həmin nöqtədə əyriyə çəkilən toxunanın tənliyi $Y - y = y'(X - x)$ şəklində olur. Toxunanın ordinat oxundan ayırdığı parça $y - xy'$ və radiusu $|y|$-ə bərabər olan dairənin sahəsi πy^2 olduğundan, şərtə görə $y - xy' = \pi y^2$ Bernulli diferensial tənliyini alarıq. Hər tərəfi y^{-2}-yə vursaq

$$-xy^{-2}y' + y^{-1} = \pi.$$

$z = y^{-1}$ əvəzləməsini aparaq. Onda $xz' + z = \pi$, $x\dfrac{dz}{dx} = \pi - z$,

$$\int\frac{dz}{\pi - z} = \int\frac{dx}{x} - \ln C, \quad -\ln|\pi - z| = \ln x - \ln C, \quad \ln|\pi - z| = \ln C - \ln x,$$

$$\pi - z = \frac{C}{x}, \quad z = \pi - \frac{C}{x}, \quad z = \frac{\pi x - C}{x}.$$

$z = y^{-1}$ olduğundan $y = \dfrac{x}{\pi x - C}$.

11. Rikkati tənliyi

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0$$

şəklində tənliyə *Rikkati tənliyi* deyilir. Rikkati tənliyi $b(x) = 0$ olduqda