А. А. САМАРСКИ

ӘДӘДИ ҮСУЛЛАРА КИРИШ

ДӘРС ВӘСАИТИ

ССРИ Али вә Орта Ихтисас Тәһсили Назирлији тәрәфиндән али мәктәб тәләбәләри үчүн төвсијә олунмушдур

Русчасынын 1982-чи ил нәшриндән тәрчүмә едилмишдир

„МААРИФ" НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы—1987

Тәрчүмә едәни: **А. И. Һәсәнов**

Самарски А. А.

С 20 Әдәди үсуллара кириш. Али мәктәбләр үчүн дәрс вәсаити. Бакы.: „Маариф“ нәшријјаты, 1987, 288 сәһ.

Китаб мүәллифин М. В. Ломоносов адына МДУ-нун һесаблама ријазијјаты вә кибернетика факүлтәләриндә охудуғу мүһазирәләәр курсунун әсасында јазылмыш вә әдәди үсулларын башланғычы илә танышлыг үчүндүр. Әдәди үсуллар нәзәријјәси елементар ријази васитәләри тәтбиг етмәклә шәрһ олунур, үсулларын кејфијјәтин иллүстрасијасы үчүн исә садә ријази моделләрдән истифадә едилир.

Китабда фәрг тәнликләринин, ади диференсиал тәнликләрин, хәтти вә гејри-хәтти чәбри тәнликләрин һәлл үсуллары, хүсуси төрәмәли тәнликләр үчүн фәрг үсуллары нәзәрдән кечирилир.

Дәрс вәсаити али мәктәбләрин тәтбиги ријазијјат факүлтәси вә бөлмәләринин тәләбәләри үчүн нәзәрдә тутулур.

$С \frac{1702060000-70}{М\ 652-87} 85-87$ 22.131

МУГӘДДИМӘ

Бу китаб риjази анализин, хәтти чәбрин вә диференсиал тәнликләр нәзәриjjәсинин минимум мә'луматларындан истифадә едән әдәди үсуллар нәзәриjjәсинә киришдир. Китаб мүәллифин М. В. Ломоносов адына Москва Дөвләт Университетинин һесаблама риjазиjjаты вә кибернетика факүлтәсинин икинчи курс тәләбәләринә бир нечә ил мүддәтиндә охудуғу мүһазирәләрин ишләнмәси нәтичәсиндә jаранмышдыр.

Китабын мәзмуну ән'әнәвидир—интерполjасиjа вә апроксимасиjа (jахынлашма), әдәди интеграллама, геjри-хәтти тәнликләрин һәлли, хәтти чәбри тәнликләр системинин бирбаша вә итерасиjа үсуллары илә һәлли, ади диференсиал тәнликләр үчүн Коши вә сәрһәд мәсәләләринин фәрг үсуллары илә һәлли.

Мүәллиф диггәтини әдәди үсуллар нәзәриjjәсинин әсас анлаjышларына jөнәлдәрәк вә онлары мисаллар үзәриндә изаһ едәрәк, китабын илк оху үчүн садә олмасына чалышмышдыр.

Һазырда риjази физика тәнликләри илә тәсвир олунан бир чох физика вә техника мәсәләләринин әдәди һәлли үчүн сонлу фәргләр үсулу истифадә олунур. Фәрг үсуллары нәзәриjjәсинин әсас анлаjышларыны (апроксимасиjа, даjаныглыг, jығылма) биз ади диференсиал тәнликләрин фәрг схемләри үзәриндә көстәрәчәjик. Ади диференсиал тәнликләрин апроксимасиjасы заманы хүсуси типли (чохлу сыфыр елементи олан), мәсәлән, үчдиогоналлы матрисә малик jүксәк тәртибли хәтти тәнликләр системи алыныр. Белә тәнликләрин һәлли үчүн еффектив үсулларын (бирбаша вә итерасиjа) сечилмәси мүһүм рол оjнаjыр. Бунунла әлагәдар олараг китабда итерасиjа үсулларынын үмуми нәзәриjjәсинин әсаслары шәрһ олунур. Електрон һесаблама машынларында апарылан һесабламаларын даjаныглығы мәсәләсинә бөjүк диггәт верилир.

V фәслидә биртәртибли фәрг тәнликләри систем үчүн Коши мәсәләсинин дајаныглыг нәзәријјәсинин сазә шәрһи верилмишдир. Бурада фәрг схемләринин дајаныглығы үчүн дә ејни зүр зәрури вә кафи шәртләр алынмыш, һәмчинин фәрг схемләринин асимптотик дајаныглығы тәдгиг олунмушдур.

Китабын ахырынчы ики фәслиндә (VI вә VII фәсилләр) еллиптик тәнликләрин вә истиликкечирмә тәнлијинин һәлли үчүн фәрг үсулларына бахылыр. Бу фәсилләр әлавәләрдир вә хүсуси төрәмәли тәнликләр үчүн фәрг үсуллары нәзәријјәсинә кечмәјә имкан верир.

Әдәди үсулларын мүхтәлиф бөлмәләринин даһа там шәрһини Самарски А. А. Теория разностных схем. —М.: Наука, 1977, Самарски А. А., Николајев Ј. С. Методы решения сеточных уравнений —М: Наука, 1978 китабларында вә һәмчинин китабын ахырында сијаһысы көстәрилән вәсаитләрдә тапмаг олар.

Китаб тәтбиги ријазијјат вә ријази физика үзрә ихтисаслашан ашағы курс тәләбәләри үчүн нәзәрдә тутулмуш, һәмчинин әдәди үсуллары өјрәнән аспирант вә елми ишчиләр үчүн фајдалы ола биләр.

А. А. Самарски

КИРИШ

Електрон һесаблама машынларынын (ЕҺМ) јаранмасы вә мүнтәзәм сурәтдә тәкмилләшдирилмәси, елмдә вә хүсусилә ријазијјатда әсил ингилаби чеврилишә сәбәб олмушдур. Елми тәдгигатларын технолокијасы дәјишмиш, мүрәккәб просесләрин өјрәнилмәси вә онлар һаггында мә'луматын әввәлҹәдән верилмәси, мүһәндис конструксијаларынын лајиһәләшдирилмәси имканлары һәдсиз артмышдыр. Нүвә енержисинин әлдә олунмасы вә космосун фәтһ едилмәси кими бөјүк елми-техники проблемләрин һәлли ЕҺМ-дән истифадә едәрәк ријази моделләшдирмәнин вә јени әдәди үсулларын тәтбиги нәтиҹәсиндә мүмкүн олмушдур.

Биринчи бөјүк проблем —нүвә енержисинин әлдә олунмасы—физиканын вә механиканын мүрәккәб мәсәләләр комплексинин һәллини нүвә реакторунун ишинин идарә олунмасы, уран нүвәсинин бөлүнмәсиндән алынан енержинин истифадәси, реакторун диварларынын сојудулмасы, диварда истилик саһәләринин вә еластик кәркинликләрин өјрәнилмәси вә дикәр мәсәләләрин һәллини) тәләб едир. Бүтүн бу мәсәләләри реактор ишә башлајана гәдәр, ријази моделләшдирмәдән истифадә едәрәк вә ЕҺМ-дә әдәди һесабламалар апарараг һәлл етмәк лазымдыр. Икинҹи бөјүк проблем космосун фәтһи—учан апаратларын јарадылмасы вә бир чох аеродинамик вә баллистика мәсәләләринин һәлли илә бағлыдыр (мәсәлән, ракетин һәрәкәтинин һесабланмасы вә онун учушунун идарәси). Бурада да механиканын, физиканын вә техниканынын анҹаг әдәди үсулларын көмәји илә һәлл олуна биләҹәк мүрәккәб мәсәләләр комплекси вар.

Бәшәријјәт гаршысында дуран бир проблемә —јени енержи мәнбәләринин ахтарышы проблеминә дә нәзәр салаг. Енержи алынмасынын әсас лајиһәләриндән бири—дејтериум вә тритиум нүвәләринин идарә олуна билән истилик-нүвә синтези реаксијасынын истифадәсидир. Јерин истилик-нүвә јаначағы, демәк олар ки, түкәнмәздир, реаксија мәһсуллары исә әтраф мүһити чиркләндирмир. Лакин истилик-нүвә реаксијасы анчаг хүсуси шәртләр дахилиндә јүксәк температурда (он вә јүз милјон дәрәчәләрдә) вә дејтериумла тритиумун јүксәк тәзјигли (мин дәфәләрлә) сыхылмасы нәтичәсиндә баш верир; бундан башга, јаначаг мәһсулуну бу вәзијјәтдә јанма реаксијасынын (синтезин) инкишафы үчүн кифајәт едән вахт әрзиндә сахламаг лазымдыр. Бу шәртләрин јарадылмасы, һәлл олунмамыш елми-техники проблемдир. Истилик-нүвә јаначағынын (плазманын) гыздырылмасы, сыхылмасы вә сахланмасы үчүн бир нечә лајиһә мөвчуддур. Онларын ишләдилмәси заманы чохлу мәсәләләр мејдана чыхыр ки, бу мәсәләләри тәчрүби гурғулары лајиһәләшдирәнә гәдәр һәлл етмәк лазым кәлир. Һәр шејдән әввәл плазманын јүксәк температурда вә сыхылдыгда, һәмчинин магнит саһәсиндә хассәләрини өјрәнмәк вә истилик-нүвә синтези реаксијасынын өзүнүн башвермә шәртләрини ашкара чыхармаг лазымдыр.

Белә тәдгигатлар физики просесләрин ријази тәсвири (ријази модели) вә алынмыш ријази мәсәләләрин һесаблама алгоритмләри васитәсилә ЕҺМ-дә һәлли әсасында апарылыр.

Һазырда демәк олар ки, ријази тәсвири мүмкүн олан мүрәккәб просесләрин нәзәри тәдгиги үчүн јени үсул—һесаблама експерименти, јә'ни елми проблемләрин һесаблама ријазијјаты васитәсилә тәдгиги үсулу мејдана кәлмишдир. Бу тәдгигат үсулунун маһијјәтини һәр һансы бир физики проблем үзәриндә изаһ едәк. Тутаг ки, һәр һансы бир физики просеси өјрәнмәк тәләб олунур. Ријази тәдгигата башламаздан әввәл физики јахынлашманын сечилмәси, јә'ни һансы факторларын нәзәрә алыныб-алынмамасы мәсәләси һәлл олунур. Бундан сонра проблемин һесаблама експерименти үсулу или тәдгигаты апарылыр ки, бурада да бир нечә әсас мәрһәләни гејд етмәк олар.

Илк мәрһәләдә ријази модел сечилир, јә'ни ја чәбри, ја диференсиал, ја да интеграл тәнликләр формасында просесин тәгриби тәсвири верилир. Бу тәнликләр, адәтән, әсас физики кәмијјәтләрин (енержинин, һәрәкәт мигдарынын, күтләнин вә с.) сахланмасы ганунларыны ифадә едир. Алынмыш ријази модели діференсиал тәнликләр нәзәриjjәсинин методлары илә тәдгиг етмәк лазым кәлир. Бурада мәсәләнин дүзкүн гоjулушу, верилэнләрин кифаjәт едиб-етмәмәси вә онларын бир-биринә зидд олуб-олмамасы, гоjулан мәсәләнин һәллинин варлығы вә jеканәлиjи мүәjjән едилир. Бу мәрһәләдә классик риjазиjjатын методларындан истифадә олунур. Гејд етмәк лазымдыр ки, бир чох физики мәсәләләр, нәзәриjjәсинин ишләнмәси һәлә илк мәрһәләдә олан риjази моделләрә кәтирир. Практикада риjази физиканын елә мәсәләләрини һәлл етмәк лазым кәлир ки, онлар үчүн нә варлыг, нә дә jеканәлик теореми вар.

Һесаблама експериментинин икинчи мәрһәләси мәсәлә һәллинин тәгрибән әдәди үсулла гурулмасындан, башга сөзлә, һесаблама алгоритминин сечилмәсиндән ибарәтдир. Һесаблама алгоритми дедикдә, биринчи мәрһәләдә гоjулмуш риjази мәсәләнин һәлли үчүн лазым олан һесаби вә мәнтиги әмәлиjjатлар ардычыллығы баша дүшүлүр. Ашағыда биз мүасир ЕҺМ-дә истифадә олунмасы нәзәрдә тутулан һесаблама алгоритминә көстәрилән тәләбләри әтрафлы музакирә едәчәjик. Маһиjjәт е'тибарилә бу китаб бүтөвлүклә елементар һесаблама алгоритмләринин шәрһинә һәср олунмушдур.

Үчүнчү мәрһәлә һесаблама алгоритминин програмлашдырылмасындан, дөрдүнчү мәрһәлә исә ЕҺМ-дә һесабламаларын апарылмасындан ибарәтдир. Биз програмлашдырма, ЕҺМ-дә һесабламаларын тәшкили вә апарылмасы илә бағлы олан мәсәләләр үзәриндә даjанмаjачағыг, чүнки һәмин мәсәләләр китабын әһатә даирәсиндән кәнара чыхыр. Тәкчә ону гејд едәк ки, програмлашдырма саһәсиндәки фәалиjjәт конкрет әдәди үсулларын ишләнмәси илә сых әлагәдар олмалыдыр.

Нәһаjәт, һесаблама експериментинин бешинчи мәрһәләси олараг алынан әдәди нәтичәләрин анализини вә риjази моделин нөвбәти дәгигләшдирилмәсини көстәрмәк олар. Ола биләр ки, модел чох кобуд олсун һесабламаларын нәтичәси физики експериментлә уjғунлашмасын, вә jа модел чох мүрәккәб олсун вә һәлли кифаjәт гәдәр дәгигликлә даһа садә моделләрин көмәjи илә алынсын. Бу һалда jенидән биринчи мәрһәләjә гаjытмаг, jә'ни риjази модели дәгигләшдирмәк вә бүтүн мәрһәләләри тәкрар етмәк лазымдыр.

Гејд етмәлијик ки, һесаблама експерименти, адәтән, стандарт дүстурларла апарылан бирдәфәлик һесабат дејил, һәр шејдән әввәл мүхтәлиф ријази моделләр үчүн апарылан һесабламалар серијасыдыр.

Инди исә һесаблама алгоритмләринә аид олан бир сыра үмуми характеристикалар вә тәләбләр үзәриндә әтрафлы дајанаг. Һесаблама алгоритмләринин јарадылмасы вә тәдгиги, һабелә онларын конкрет мәсәләләрин һәллинә тәтбиги, мүасир ријазијјатын бөјүк бир бөлмәсинин мәзмуну һесаблама ријазијјатыны тәшкил едир.

Һесаблама ријазијјатыны, бу терминин һәм кениш мә’насында, јә’ни ријазијјатын ЕҺМ-дән истифадә олунмасы илә бағлы мәсәләләрә һәср олунмуш һиссәси кими, һәм дә дар мә’насында, јә’ни гојулмуш ријази мәсәләләрин һәлли үчүн әдәди үсуллар вә алгоритмләр нәзәријјәси кими ишләдирләр. Бундан сонра биз һесаблама ријазијјатыны бу терминин анчаг дар мә’насында ишләдәчәјик.

Гојулан ријази мәсәләнин сонлу өлчүлү мәсәләјә кәтирилмәси бүтүн әдәди үсуллар үчүн үмумидир. Буна, адәтән, верилмиш мәсәләнин дискретләшдирилмәси васитәсилә, јә’ни кәсилмәз аргументли функсијаларын дискрет аргументли функсијаларла әвәз едилмәси илә наил олурлар. Верилмиш мәсәләни дискрет һала кәтирдикдән сонра һесаблама алгоритми, јә’ни ЕҺМ-дә јеринә јетирилән вә сонлу сајда әмәллəрдән сонра дискрет мәсәләнин һәллини верән һесаб вә мәнтиги әмәлләр ардычыллығы гурмаг лазымдыр. Дискрет мәсәләнин алынмыш һәлли гојулмуш ријази мәсәләнин тәгриби һәлли кими гәбул олунур.

ЕҺМ-дә мәсәләни һәлл едән заман биз һәмишә гојулмуш мәсәләнин дәгиг һәллини дејил, тәгриби һәллини алырыг. Алынан хәта нә илә әлагәдардыр? Верилмиш мәсәләнин әдәди һәлли заманы алынан хәтанын мејдана кәлмәсинин үч әсас сәбәбини гејд етмәк лазымдыр. Һәр шејдән әввәл, мәсәләнин вериләнләри (башланғыч вә сәрһәд шәртләри, тәнлијин әмсаллары вә сағ тәрәфи) һәмишә мүәјјән хәта илә әлдә олунур. Әдәди үсулун мәсәләнин вериләнләринин хәтасы илә әлагәдар олан хәтасыны *арадан галдырыла билмәјән хәта* адландырмаг гәбул олунмушдур. Верилмиш мәсәләни дискрет мәсәлә илә әвәз едән заман *дискрет-*

ләшдирмә хәтасы (башга сөзлә, үсулун хәтасы) адланан хәта әмәлә кәлир. Мәсәлән $u'(x)$ төрәмәсини $(u(x+\Delta x)-u(x))/\Delta x$ сонлу фәрги илә әвәз едәркән, биз $\Delta x \to 0$ оланда тәртиби Δx-ә бәрабәр олан дискретләшдирмә хәтасына јол вермиш олуруг. Нәһајәт, ЕҺМ-дә әдәдләрин сонлу дәрәчә илә верилмәси *јуварлаглашдырма хәтасына* кәтирир ки, бу да һесаблама просесиндә арта биләр. Тәбиидир ки, мәсәләнин вериләнләринин хәтасы вә дискретләшдирмәдән алынан хәта дискрет мәсәләнин ЕҺМ-дә һәлли заманы алынан хәта илә ујғунлашмалыдыр.

Дејиләнләрдән ајдындыр ки, һесаблама алгоритминә верилән әсас тәләб дәгиглијин олмасыдыр. Бу о демәкдир ки, һесаблама алгоритми верилмиш мәсәләнин һәллини сонлу сајда $Q(\varepsilon)$ әмәлләринин көмәјилә әввәлчәдән *верилмиш* $\varepsilon > 0$ *дәгиглији илә* верилмәлидир. Алгоритм јеринә јетирилән олмалыдыр, јә'ни мәсәләнин һәллини гәбул олунмуш машын вахты әрзиндә вермәлидир. Алгоритмләрин әксәријјәтиндә мәсәләнин һәлли вахты (һесабламаларын һәчми) $Q(\varepsilon)$ дәгиглијинин артмасы, јә'ни ε-нун азалмасы илә артыр. Әлбәттә, ε-ну елә кичик көтүрмәк олар ки, мәсәләнин һесабланмасы вахты һәдсиз бөјүк олсун. Әсас ону билмәк лазымдыр ки, алгоритм мәсәләнин һәллини принсип е'тибарилә ихтијари дәгигликлә алмаға имкан верир. Амма практикада ε кәмијјәтини верилмиш ЕҺМ-дә алгоритмин јеринә јетирилмәси имканыны нәзәрә алараг сечирләр. Һәр бир мәсәлә, алгоритм вә машын үчүн ε кәмијјәтинин өз характерик гијмәти вар.

Тәбиидир ки, верилмиш мәсәлә үчүн $Q(\varepsilon)$ әмәлләр сајынын (вә демәли, мәсәләнин һәллинә сәрф олунан машын вахтынын) кичик олмасына чалышмаг лазымдыр. Ихтијари мәсәлә үчүн дәгиглик тәртиби ($\varepsilon \to 0$ олдуғда) $\varepsilon > 0$ ејни, анҹаг $Q(\varepsilon)$ әмәлләр сајы мүхтәлиф олан чохлу алгоритмләр тәклиф етмәк олар. Дәгиглик тәртибинә көрә еквивалент олан бу алгоритмләр ичәрисиндән һәлли ән аз машын вахты (әмәлләр (сајы $Q(\varepsilon)$) әрзиндә алмаға имкан верән алгоритми сечмәк лазымдыр. Белә алгоритмләри биз *сәмәрәли алгоритмләр* адландырачағыг.

Һесаблама алгоритминә верилән даһа бир тәләб үзәриндә—һесаблама просеси заманы ЕҺМ-дә гәза дајанмасынын баш вермәмәси јә'ни машын сыфрынын алынмамасы тәләби үзәриндә дајанаг.

Нәзәрә алмаг лазымдыр ки, ЕҺМ-дә әдәдләр гијмәтли рәгәмләр сајы сонлу олан вә мүтләг гијмәтчә бүтүн әдәд охуна дејил, анчаг (M_0, M_∞) $M_0 > 0$, $M_\infty < \infty$ интервалына дахил олан әдәд кими тәсвир олунур, бурада M_0—машын сыфры, M_∞—машын сонсузлуғудур. Һесаблама просесиндә $|M| < M_\infty$ шәрти позуларса, онда дәрәчә шәбәкәсинин долуб-дашмасы нәтичәсиндә ЕҺМ-дә гәза дајанмасы баш верир вә һесабламалар кәсилир. Гәза дајанмасынын баш вермәси һәм алгоритмдән, һәм дә верилмиш мәсәләдән асылыдыр.

Әкәр верилмиш мәсәләнин һәлли чох бөјүк (чох кичик) $|M| > M_\infty$ ($|M| < M_0$) әдәдләри илә ифадә олунарса, онда, адәтән, мәсәләни мигјасы дәјишмәклә модулча (M_0, M_∞) интервалына дахил олан кәмијјәтли мәсәләјә кәтирмәк олар. Бә'зән гәза дајанмасынын гаршысыны әмәлләрин јерини дәјишмәклә алмаг олур. Буну садә мисал үзәриндә изаһ едәк.

Мисал. Тутаг ки, $M_\infty = 10^p$, $M_0 = 10^{-p}$, $p = 2^n$, n—там әдәддир. $10^{p/2}$, $10^{p/4}$, $10^{-p/2}$, $10^{3p/4}$, $10^{-3p/4}$ әдәдләринин һасилини тапмаг тәләб олунур.

1-чи гајда. Әдәдләри онларын азалма сырасы илә нөмрәләјәк: $q_1 = 10^{3p/4}$, $q_2 = 10^{p/2}$, $q_3 = 10^{p/4}$, $q_4 = 10^{-p/2}$, $q_5 = 10^{-3p/4}$ вә $S_{k+1} = S_k q_{k+1}$, $S_1 = q_1$ һасилләрини дүзәлдәк. Онда елә илк аддымда гәза дајанмасы аларыг, чүнки

$$S_2 = q_1 q_2 = 10^{-5p/4} > M_\infty.$$

2-чи гајда. Әдәдләри онларын артма сырасында јенидән нөмрәләјәк: $q_1 = 10^{-3p/4}$, $q_2 = 10^{-p/2}$, $q_3 = 10^{p/4}$, $q_4 = 10^{p/2}$, $q_5 = 10^{3p/4}$. Бу һалда биз илк аддымда $S_2 = q_1 q_2 = 10^{-5p/4} < M_0$, јә'ни машын сыфры алырыг; бүтүн сонракы S_3, S_4, S_5 һасилләри дә машын сыфры олачаг; беләликлә, дәгиглијин бүтөвлүклә иткиси баш верир.

3-чү гајда. $q_1 = 10^{-3p/4}$, $q_2 = 10^{p/2}$, $q_3 = 10^{3p/4}$, $q_4 = 10^{-p/2}$, $q_5 = 10^{p/4}$ фәрз едәрәк әдәдләрин јерини дәјишәк. Онда, ардычыл олараг

$$S_2 = q_1 q_2 = 10^{-p/4}, \qquad S_3 = S_2 q_3 = 10^{p/2},$$

$$S_4 = S_3 q_4 = 10^0, \qquad S_5 = S_4 q_5 = 10^{p/4},$$

тапырыг, ја'ни һесаблама просесиндә $10^{p/2}$-дән бөјүк вә $10^{-p/4}$-дән кичик әдәдләр алынмыр. Белә алгоритм гәза дајанмасы олмајан алгоритмдир. III фәсилдә биз хәтти чәбри тәнликләрин һәлли үчүн һесабламаларын ардычыллығыны мүәјјән едән итерасија параметрләринин нөмрәләмә гајдасындан асылы олараг гәза дајанмасы олан вә ја олмајан итерасија үсулу илә таныш олачағыг.

Һесаблама просесинин һәр бир мәрһәләсиндә јуварлаглашдырма хәтасы мејдана кәлир. Алгоритмдән асылы олараг бу хәта һәм арта, һәм дә азала биләр.

Әкәр һесаблама просесиндә јуварлаглашдырма хәтасы гејри-мәһдуд артарса, онда белә алгоритм *дајанығсыз* (һесабламалара нәзәрән) алгоритм адланыр. Әкәр јуварлаглашдырма хәтасы артмырса, онда алгоритм дајаныглыдыр.

Мисаллар. 1. Тутаг ки, верилмиш y_0, d кәмијјәтләринә көрә $y_{i+1} = y_i + d$ дүстуру илә y_i-ни $(0 < i \leqslant i_0)$ тапмаг тәләб олунур. Фәрз едәк ки, y_i-ни һесаблајанда δ_i хәтасына (мәсәлән, јуварлаглашдырма хәтасына) јол верилмишдир, ја'ни y_i-нин дәгиг гијмәти әвәзинә $\tilde{y}_i = y_i + \delta$ тәгриби гијмәти алынмышдыр. Онда y_{i+1}-ин дәгиг гијмәти әвәзинә онун $\tilde{y}_{i+1} = (y_i + \delta_i) + d = y_{i+1} + \delta_i$ тәгриби гијмәтини алмыш олуруг. Беләликлә, һәр аддымда бурахылан δ_i хәтасы һесаблама просесиндә артмыр. Алгоритм дајаныглыдыр.

2. $y_{i+1} = qy_i$ $(i \geqslant 0$, y_0 вә q верилмишдир) тәнлијинә бахаг. Тутаг ки, мисалда олдуғу кими, y_i әвәзинә $\tilde{y}_i = y_i + \delta_i$ гијмәти верилмишдир. Онда y_i әвәзинә

$$\tilde{y}_{i+1} = q(y_i + \delta_i) = y_{i+1} + q\delta_i$$

тәгриби гијмәтини алырыг. Бурадан көрүнүр ки, y_{i+1}-и һесабладыгда алынан $\delta_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$ хәтасы δ_i хәтасы илә

$$\delta_{i+1} = q\delta_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

тәнлији илә бағлыдыр. Онда $|q| > 1$ оларса, һесаблама просесиндә хәтанын мүтләг гијмәти артачаг (алгоритм дајаныгсыздыр), $|q| \leqslant$ оларса, хәта артмыр, ја'ни алгоритм дајаныглыдыр. Дајаныгсызлығы, адәтән, јуварлаглашдырма хәтасынын експоненсиал артма хассәси илә әлагәләндирирләр. Әкәр бир әмәлијјатдан о бири-сонра кечән заман („аддымдан аддыма“) јуварлаглашдырма хәтасы гүввәт функсијасы кими артырса, онда белә алгоритми шәртли дајаныглы (јә'ни һесабламаларын һәчми вә тәләб олунан дәгиглик үзәринә гојулан мүәјјән мәһдудијјәт дахилиндә дајаныглы) алгоритм һесаб едирләр. Һесаблама просесини белә шәрһ етмәк олар: аддымдан аддыма кечәркән (јуварлаглашдырма хәтасы һесабына) ахырынчы гијмәтли рәгәмләр тәһриф олунур (јә'ни ахырынчы гијмәтли рәгәмләрдән башлајараг, солдан-сağа „јуварлаглашдырма хәтасы далғасы“ һәрәкәт едир). Бизә, адәтән, сыфырдан сонра бир нечә (4—5) гијмәтли рәгәм сахламаг лазым кәлир, она көрә дә, һесабламалар „јуварлаглашдырма хәтасы далғасы“ о рәгәмләрә чатана гәдәр дајандырылмалыдыр. Әкәр јуварлаглашдырма хәтасы аддымдан аддыма експоненсиал гајда илә артырса вә (2-чи мисалда олдуғу кими) $|q|^i \varepsilon_0 \geqslant M_\infty$ оларса, онда бу, адәтән, һесабламаларын аралыг мәрһәләсиндә гәза дајанмасына кәтирир.

Әкәр $M_\infty = 10^p$, $\varepsilon_0 = 10^{-k_0}$ оларса, онда гәза дајанмасы $i_0 > (p + k_0)/\lg|q|$ олдугда баш верир. Јуварлаглашдырма хәтасы гүввәт артымы кими олан да исә мәсәлә башга чүр олур. Тутаг ки, $|\delta y_i| \approx i^n \varepsilon_0 (n \geqslant 1)$; онда гәза дајанмасы $i_0^n \varepsilon_0 \geqslant M_\infty$ оланда, јә'ни $i_0 \geqslant \geqslant \left(\frac{1}{\varepsilon_0} M_\infty\right)^{1/n} = 10^{(p+k_0)/n}$ оланда баш верир.

Бурадан көрүнүр ки, $n = 1$ оланда мә'лум $i < < M_\infty = 10^p$ мәһдудијјәтинә көрә гәза дајанмасы баш вермир. $|\delta y_i| \leqslant \varepsilon$ бәрабәрсизлији $i \leqslant (\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/n} = 10^{(k_0-k)/n} = = i_0$ олдугда доғрудур, бурада $\varepsilon = 10^{-k}$ верилмиш дәгигликдир. Әкәр ε вә ε_0 верилмишсә, онда бәрабәрсизлик тәнликләрин сајы үзәринә гојулан $i \leqslant i_0$ мәһдудијјәтини көстәрир. Мәсәлән, $k_0 = 12$, $k = 6$ оланда $i \leqslant \leqslant 10^{6/n}$ аларыг; јә'ни $n = 2$ үчүн $i \leqslant 10^3$ аларыг. Ајдындыр ки, елә бөјүк n әдәди көстәрмәк олар ки, тәнликләрин мүмкүн сајы i_0 чох кичик олсун. Лакин практикада, адәтән, n-ин чох да бөјүк олмајан гијмәтләри илә растлашырыг (мәсәлән, говма үсулу үчүн (§ 3, 1 фәсил) $n = 2$, јә'ни хәта тәнликләрин сајы артанда квадратик гајда илә артыр).

Истәнилән мәсәләнин һәлли заманы вериләнләри ахтарылан функсијанын башланғыч, сәрһәд гијмәтләрини, әмсаллары, сағ тәрәфи вә с. билмәк зәруридир-

Һәр бир мәсәлә үчүн ејни суаллар мејдана чыхыр: мәсәләнин һәлли вармы, бу һәлл јеканәдирми вә верилләнләрдән нечә асылыдыр? Ики һал мүмкүндүр: Мәсәлә коррект гојулмушдур (мәсәлә корректдир); бу о демәкдир ки, 1) вериләнләрин мүмкүн гијмәтләриндә мәсәләнин һәлли вар; 2) һәлл јеканәдир; 3) мәсәләнин һәлли верилэнләрдән кәсилмәз асылыдыр (верилэнләрин кичик дәјишмәсинә һәллин кичик дәјишмәси ујғундур), башга сөзлә, мәсәлә дајаныглыдыр.

Әкәр һәлл верилэнләрә нәзәрән дајанығсыздырса (верилэнләрин кичик дәјишмәсинә һәллин бөјүк дәјишмәси ујғундур), онда мәсәлә гејри-коррект адланыр (мәсәлә гејри-корректдир).

Коррект мәсәләјә мисал олараг интегралламa мәсәләсини, гејри-коррект мәсәләјә мисал олараг диференсиаллама мәсәләсини көстәрмәк олар.

Мисаллар 1. Интеграллама мәсәләси. $f(x)$ функсијасы верилмишдир;

$$J=\int_0^1 f(x)\,dx)$$

интегралыны һесабламалы. f функсијасыны $\tilde{f}$-лә әвәз едәк, $\tilde{J}=\int_0^1 \tilde{f}(x)dx$ интегралына вә $\delta\tilde{J}=\tilde{J}-J-\int_0^1 \delta f dx$ ($\delta f=\tilde{f}(x)-f(x)$) фәргинә бахаг. Буралан көрүнүр ки, $|\delta f|\leqslant\varepsilon$ оларса, онда $|\delta J|\leqslant\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|\delta f(x)|\leqslant\varepsilon$, $|\delta J|\leqslant\varepsilon$ олар, јә'ни J интегралы f-дән кәсилмәз асылыдыр. J интегралынын һесабланмасы үчүн квадратура дүстурундан истифадә едәк:

$$J_N=\sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa f(x_\kappa), \qquad c_\kappa>0, \quad \sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa=1.$$

Јухарыдакы мүһакимәләри тәкрар едәрәк,

$$\delta J_N=\tilde{J}_N-J_N=\sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa(\tilde{f}_\kappa-f_\kappa)=\sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa\delta f_\kappa,$$

$$|\delta J_N|\leqslant\sum_{\kappa=1}^{N} c_\kappa\max_{1\leqslant\kappa\leqslant N}|\delta f_\kappa|=\max_{1\leqslant\kappa\leqslant N}|\delta f_\kappa|.$$

аларыг. Беләликлә, интегралын квадратура дүстуру илә һесабланма мәсәләси коррект мәсәләдир.

2. **Диференсиаллама мәсәләси.** Тәгриби верилмиш $u(x)$ функсијасынын диференсиалланмасы мәсәләси гејри-корректдир. Доғрудан да, тутаг ки, $\tilde{u}(x) = u(x) + \frac{1}{N}\sin N^2x$, N—кифајәт гәдәр бөјүк әдәддир. Онда C матрисиндәки һәр һансы $0 \leqslant x \leqslant \leqslant \delta\,(\delta > \pi/N^2)$ парчасында $N \geqslant 1/\varepsilon$ оларса, $\|\delta u\|_C = \|\tilde{u} - u_c\| = 1/N \leqslant \varepsilon$ аларыг. $\delta u' = u' - \tilde{u}' = N\cos N^2x$ төрәмәләринин хәтасы үчүн $\|\delta u'\|_c = N \geqslant 1/\varepsilon$ олур. Демәли, C-дә $u(x)$ функсијасынын $O(\varepsilon)$ кичик дәјишмәсинә онун төрәмәсинин $C(1/\varepsilon)$ бөјүк дәјишмәси ујғун кәлир.

Буна көрә әдәди диференсиаллама да гејри-корректдир. $\delta_i(|\delta_i| \leqslant \delta_0)$ хәтасы илә верилмиш функсија төрәмәсинин тәгриби гијмәтини $\varepsilon > 0$ дәгиглији илә фәрг төрәмәси дүстуру васитәсилә алмаг үчүн ε, δ_0 вә шәбәкәнин h аддымы арасында ујғунлуг шәрти, мәсәлән, $\varepsilon \geqslant k\sqrt{\delta_0}$ ($k = \text{const} > 0$ h вә δ_0-дан асылы дејил) шәрти өдәнилмәлидир; шәбәкәнин аддымы исә һәм јухарыдан, һәм дә ашағыдан мәһдуд олмалыдыр. Беләликлә, әдәди диференсиалламанын әлдә олунан дәгиглији функсијанын өзүнүн верилмәси дәгиглији илә мәһдудланыр.

Бу китабда биз ЕҺМ-дә истифадә олунмасы нәзәрдә тутулмуш анҹаг коррект мәсәләләрә вә коррект әдәди үсуллара бахаҹағыг.

Әдәди үсуллар мәсәләнин тәгриби һәллини верир. Бу о демәкдир ки, һәр һансы мәсәләнин u (функсија вә ја функсионалы) дәгиг һәллинин әвәзинә, биз башга мәсәләнин ахтарылан һәллә бу вә ја дикәр мә'нада (мәсәлән, нормаҹа) јахын олан y һәллини тапырыг. Көстәрилдији кими, бүтүн методларын әсас идејасы гојулмуш мәсәләни, ЕҺМ-дә һәлли даһа асан олан башга мәсәлә илә дискретләшдирмәкдән вә ја апроксимасија етмәкдән (әвәзетмә, јахынлашма) ибарәтдир; бурада апроксимасија едән мәсәләнин һәлли мүәјјән параметрләрдән асылыдыр ки, онлары да идарә етмәклә һәлли тәләб олунан дәгигликлә алмаг олур. Мәсәлән, әдәди интеграллама мәсәләсиндә белә параметрләр дүјүн нөгтәләри вә квадратура дүстурунун чәки функсијаларыдыр. Дискрет мәсәләнин һәлли сонлу өлчүлү фәзанын елементидир. Бу һагда әтрафлы данышаг.

Мәсәлән, $x \in [a, b]$ кәсилмәз аргументинин $f(x)$ функсијасы васитәсилә тә'јин олунмуш $H = \{f(x)\}$ фәзасынын дискретләшдирилмәсинә бахаг. $a \leqslant x \leqslant b$ парчасында *шәбәкә* адланан сонлу нөгтәләр чохлуғуна бахаг: $\omega = \{x_i, \ i = 0, 1, \ldots, N, \ x_0 = a, \ x_N = b, \ x_i \leqslant \leqslant x_{i+1}\}$. x_i нөгтәләрини ω шәбәкәсинин *дүјүн нөгтәләри* адландыраҹағыг. Әкәр дүјүн нөгтәләри арасындакы $h_i = x_i - x_{i-1}$ мәсафәси сабитдирсә (i-дән асылы дејилсә), $h_i = h$, $i = 1, 2, \ldots, N$, онда ω шәбәкәсини (h адымлы) *мүнтәзәм шәбәкә*, әкс һалда *гејри-мүнтәзәм шәбәкә* а ландырырлар. Бүтүн $x \in [a, b]$ үчүн тә'јин олунмуш функсијанын әвәзинә $i(i = 0, 1, 2 \ldots, N)$ там аргументли вә ја ω шәбәкәсинин x_i дүјүн нөгтәсинин $y_i = f(x_i)$ *шәбәкә функсијасына* бахаг вә $H = \{f(x), \ x \in [a, b]\}$ чохлуғуну исә сонлу $(N + 1)$ өлчүлү $H_{N+1} = \{y_i, \ 0 \leqslant i \leqslant N\}$ шәбәкә функсијалары фәзасы илә әвәз едәк. Ајдындыр ки, $y_i = f(x_i)$ шәбәкә функсијасына $y = (y_0, y_1, \ldots, y_N)$ вектору кими бахмаг олар.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$—$p$ өлчүлү Евклид фәзасынын ($p > 1$) нөгтәси оланда да чохдәјишәнли $f(x)$ функсијалар фәзасыны дискретләшдирмәк олар. Мәсәлән, (x_1, x_2) мүстәвиси үзәриндә $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1$ $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, i_1, $i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, перпендикулјар дүз хәтләринин кәсишмә нөгтәләриндән ибарәт $\omega = \{x_i = (i_1 h_1, i_2 h_2), \ i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ шәбәкәсини дахил етмәк олар, бурада h_1 вә h_2 мүвафиг олараг x_1 вә x_2 истигамәтләриндә шәбәкә аддымларыдыр. Ајдындыр ки, ω шәбәкәси ајрылыгда һәр бир дәјишәнә көрә мүнтәзәмдир. $f(x) = f(x_1, x_2)$ функсијасы әвәзинә

$$y_{i_1 i_2} = f(i_1 h_1, i_2 h_2)$$

шәбәкә функсијасына бахаҹағыг. Әкәр ω шәбәкәси анҹаг $(0 \leqslant x_1 \leqslant l_1, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2)$ дүзбуҹаглысына дахил олан дүјүн нөгтәләриндән ибарәтдирсә, белә ки $h_1 = l_1/N_1$, $h_2 = l_2/N_1$, онда шәбәкәдә сонлу сајда $N = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$ дүјүн нөгтәләри, $y = y_{i_1 i_2}$ шәбәкә функсијаларынын H_N фәзасы исә сонлу өлчүлү олур.

Биз һәр јердә шәбәкә функсијаларынын анҹаг сонлу өлчүлү фәзасына бахаҹағыг. Кәсилмәз аргументли функсијаларын $H = \{f(x)\}$ фәзасыны вә верилмиш мәсәләни шәбәкә функсијаларынын H_N фәзасы вә верилмиш мәсәләнин дискрет апроксимасијасы илә әвәз едәрәк әмин олмалыјыг ки, дүјүн нөгтәләринин сајыны артырмагла верилмиш мәсәләнин һәллинә даһа јахшы ахынлашачағыг. Јахынлашманын кејфијјәтинин гијмәтләндирилмәси вә апроксимасија үсулунун сечилмәси әдәди үсуллар нәзәријјәсинин әсас мәсәләсидир.

Китабын әсас мәзмуну бу вә ја дикәр дәрәчәдә фәрг үсулларынын диференсиал тәнликләрә тәтбиги илә әлагәдардыр. Бурада ики әсас мәсәләни гејд едәк:

—диференсиал тәнликләрин дискрет (фәрг) апроксимасијасынын алынмасы вә бу һалда алынан фәрг тәнликләринин тәдгиг олунмасы;

—фәрг тәнликләринин һәлли.

Дискрет апроксимасијаны (фәрг схемини) алан заман үмуми тәләб фәрг схеминин верилмиш диференсиал тәнлијин әсас хассәләрини мүмкүн гәдәр јахшы јахынлашдырмасы (моделләшдирмәси) тәләби ваҹиб рол ојнајыр. Белә фәрг схемләрини, мәсәлән, вариасија принсипләринин вә интеграл мүнасибәтләринин көмәји илә алмаг олар (IV фәслә бах). Фәрг схемидәгиглијинин гијмәтләндирилмәси схемин апроксимасија вә дајаныглыг хәталарынын өјрәнилмәсинә кәтирилир. Дајаныглығын өјрәнилмәси әдәди үсуллар нәзәријјәсинин мәркәзи мәсәләсидир вә бу китабда она бөјүк диггәт јетирилир. Мүрәккәб мәсәләләр үчүн олан алгоритмләри садә алгоритмләрин (модулларын) ардычыллығы (зәнҹири) кими тәсвир етмәк олар. Она көрә дә әдәди үсуллар нәзәријјәсинин бир чох принсипиал мәсәләләрини садә алгоритмләр үзәриндә изаһ етмәк олар.

I фәсилдә бирөлчүлү (тамгијмәтли бир аргументдән асылы) фәрг тәнликләринә бахылыр. Биз бир вә икитәртибли фәрг тәнликләринин өјрәнилмәси илә кифајәтләнирик. Икитәртибли фәрг тәнликләри үчдиагоналлы матрисә малик хәтти ҹәбри тәнликләр системиндән ибарәтдир. Бу тәнликләрә ујғун сәрһәд мәсәләсинин һәллинә говма үсулу адланан үсул тәтбиг олунур. I фәсилдә сонлу өлчүлү фәзаларда хәтти операторлар һаггында кириш мә'луматы верилир. Сонралар фәрг операторларынын хассәләри скалјар һасилә малик сонлу өлчүлү фәзаларда верилмиш хәтти операторларын хассәләри кими өјрәнилир. Бу заман ән садә ријази апарат—һасилин сонлу фәрг диференсиалланмасы вә һиссә-һиссә ҹәмләмә дүстурлары истифадә олунур.

Икинҹи фәсилдә әдәди анализин ән'әнәви материалы шәрһ олунур: интерполјасија, орта квадратик јахынлашма вә әдәди интеграллама.

Диференсиал тәнликләрин шәбәкәдә апроксимасиjасы заманы jүксәк тәртибли (шәбәкәнин дүjүн нөгтәләринин саjына бәрабәр) хүсуси типли (сеjрәкләшмиш, jә'ни чохлу сыфыр елементи олан) матрисә малик хәтти чәбри тәнликләр системи алыныр. Belә матрисә мисал олараг jухарыда көстәрилән үчдиагоналлы матриси көстәрмәк олар.

III фәсилдә

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u^j = f^i, \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (1)$$

хәтти чәбри тәнликләр системинин һәлли үчүн әдәди үсуллар шәрһ олунур; бу системи матрис формасында да jазмаг олар:

$$Au = f, \qquad (2)$$

бурада $A = (a_{ij}) - N \times N$ өлчүлү квадрат матрис, $u = (u^1 u^2, \ldots, u^N)$—ахтарылан вектор, $f = (f^1, f^2, \ldots, f^N)$ исә верилмиш вектордур (сағ тәрәф).

Тәнликләр системинин һәлли үчүн бирбаша вә итерасиjа үсуллары шәрһ олунур.

III фәсил, § 2-дә системин һәлли үчүн $O(N^3)$ һесаби әмәл тәләб едән бирбаша үсуллара—Гаусс үсулу вә квадрат көк үсулларына бахылыр.

Хәтти чәбри тәнликләр системинин һәлли үчүн итерасиjа үсулларыны өjрәнәркән (2) системини N өлчүлү H_N фәзасында верилмиш $(A: H_N \to H_N,\ u,\ f \in H_N)$ биринчи нөв оператор тәнлик кими шәрһ етмәк мүнасибдир. Матрис вә оператор jазылышларынын еквивалентлиjини геjд етмәк мәгсәдилә һәм матриси, һәм дә она уjғун оператору еjни A һәрфи илә ишарә едәчәjик.

Итерасиjа үсулларынын (биргат вә икигат) шәрһи заманы итерасиjа схеминин

$$B\,\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \ldots, \forall y_0 \in H_N \qquad (3)$$

каноник формасы вачиб рол оjнаjыр; бурада A, B: $H_N \to H_N$, $\{\tau_k\}$ итерасиjа параметрләридир.

Һәр jердә фәрз олунур ки, A оператору өз-өзүнә гошма вә мүсбәт-мүәjjәндир $(A = A^* > 0)$. Стасионар үсулун $(\tau_k = \tau = \mathrm{const})$ jығылмасы үчүн үмуми теорем исбат едилир. Jығылма үчүн кафи шәрт

$$\ldots > \frac{\tau}{2}(Ay, y), \quad \forall y \in H_N \qquad (4)$$

бәрабәрсизлиjи илә верилир; бурада $B \neq B^*$ өз-өзүнә гошма олмаjан оператордур. Бураған садә итерасиjа, Зеjдел вә jухары релаксасиjа үсулларынын jығылмасы алыныр.

Әкәр елә $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > \gamma_1$ сабитләри мә'лумдурса ки,

$$\gamma_1(Bx, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant \gamma_2(Bx, x), \ \forall x \in H_N \qquad (5)$$

олсун; бурада $B = B^* > 0$, онда Чебышев параметрләринин елә оптимал jығымыны $\{\tau_e^*\}$ тапмаг олар ки, һесаблама просеси даjаныглы олар вә гәза даjанмасы олмаз.

$\{\tau_k^a\}$ параметрләр jығымы вә

$$B = (D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2) \qquad (6)$$

оператору илә верилмиш универсал нөвбәли үчбучаг үсулуна бахылыр; бурада $D = D^* > 0$, $A_1^* = A_2$, $A_1 + A_2 = A$, A_1 вә A_2 үчбучаг матрисләридир. ω параметри үчүн дүстур алынмышдыр. Бу үсулун алгоритми чох садәдир. Һәр jердә тәләб олунан дәгиглиjә наил олмаға лазым олан итерасиjаларын саjы үчүн дүстур верилир. Мүхәлиф үсулларын мүгаjисәси $u''(x) = -f(x)\,(0 < x < 1)$, $u(0) = u(1) = 0$ сәрһәд мәсәләсинә уjғун олан икинчи тәртиб $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = -h^2 f_i$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $y_0 = y_N = 0$, $h = 1/N$ фәрг тәнлиjи үчүн модел мәсәлә үзәриндә верилир. Бу тәнлик Лаплас тәнлиjинин бирөлчүлү аналогудур. Итерасиjаларын саjы мәсәләнин өлчүсүндән асылы олмадығы үчүн, мүгаjисә заманы бу бирөлчүлү мәсәлә илә кифаjәтләнмәк олар. Нөвбәли үчбучаг үсулу $O\left(\frac{1}{\sqrt{h}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ саjда итерасиjа тәләб едир; бурада $\varepsilon > 0$ —верилмиш дәгигликдир.

Геjд едәк ки, III фәсилдә садә риjази васитәләрин көмәjи илә фактики олараг $Au = f(A = A^* > 0)$ тәнлиjинин һәлли үчүн итерасиjа үсулларынын үмуми нәзәриjjәси кифаjәт гәдәр там шәрһ олунмушдур.

Фәрг схемләринин әсас анлаjышлары—апроксимасиjа хәтасы, даjаныглыг, jығылма вә дәгиглик ади диференсиал тәнликләр үчүн гоjулмуш сәрһәд вә Коши мәсәләләринин үзәриндә шәрһ едилир (IV вә V фәсилләр). IV фәсилдә икинчи тәртиб ади диференсиал тәнликләр үчүн гоjулмуш

$$\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)=-f(x),\quad 0<x<1,$$
$$u(0)=u_1,\ u(1)=u_2,\ k(x)>0,\ q(x)\geqslant 0, \tag{7}$$

мәсәләси үчүн үчнөгтәли фәрг схемләри өјрәнилир. Бирчинс фәрг схемләринин гејри-мунтәзәм шәбәкәләрдә вә әмсаллар кәсилән оланда јығылма сүр'әти (дәгиглијин тәртиби) мәсәләләринә бахылыр. Бу, фәрг схеминин сағ тәрәфә нәзәрән дајаныглығына аид чох дәгиг априор гијмәтләндирмәләрин алынмасыны тәләб едир.

Фәрг схемләрини алмаг үчүн мүхтәлиф үсуллар— интегралла интерполјасија үсулу, квадратик функсионалын апроксимасијасы үсулу, Ритс вә Галјоркин үсуллары (IV фәсил. § 5) истифадә олуна биләр.

Биринчи тәртиб тәнлик үчүн гојулмуш

$$\frac{du}{dt}=f(t,\ u),\quad t>0,\quad u(0)=u_0 \tag{8}$$

Коши мәсәләсинин һәллинә V фәсилдә шәрһ олунан Рунге—Кутта вә Адамс үсуллары тәтбиг олунур. Бу үсуллар, f вә u векторлар олан һалда да тәтбиг олуна биләр.

V фәсилдә хүсуси јери хәтти тәнликләр системи үчүн Коши мәсәләси

$$\frac{du}{dt}+Au=f(t),\ t>0,\quad u(0)=u_0 \tag{9}$$

тутур, бурада $A=(a_{ij})$ — $N\times N$ өлчүлү квадрат матрис, $u(t)=(u^1,\ u^2,\ldots,u^N)$, $f(t)=(f^1,\ f^2,\ldots,f^N)$ — N өлчүлү векторлардыр.

Мәсәлән,

$$\frac{du}{dt}=\Delta u+f(x,\ t),\ \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ x=(x_1,x_2) \tag{10}$$

истиликкечирмә тәнлијиндә Δ Лаплас операторуну мувафиг фәрг оператору илә əвəз едәркән белә мәсәлә алыныр. Онда (9) мәсәләсини (10) истиликкечирмә тәнлији үчүн дүз хәтләр үсулу кими шәрһ етмәк олар. Бу мәсәләнин һәлли үчүн һәр һансы бираддымлы схемдән истифадә едәрәк, каноник шәкилдә

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau}+Ay_k=\varphi_k,\ k=0, 1, \dots,\ \forall y_0\in H_N \quad (11)$$

јазылан үмуми шәкилли икигат оператор-фәрг схеминә кәлирик; бурада A, $B: H_N \to H_N$—хәтти операторлар, τ исә t дәјишәнинә көрә шәбәкә адлымыдыр.

Исбат олунур ки, схемин дајаныглыгы үчүн зәрури вә кафи шәрт

$$B \geqslant \frac{\tau}{2}A \text{ вә ја } (Bx, x) \geqslant \frac{\tau}{2}(Ax, x), \quad \forall x\in H_N \quad (12)$$

шәклиндә верилир. Бу, оператор-фәрг схемләринин үмуми нәзәријјәсинин әсас теоремидир (мүгајисә етмәли: А. А. Самарский „Теория разностных схем") ки, о да ријази физиканын хүсуси төрәмәли тәнликләри үчүн фәрг схемләринин тәтбигиндә јарајыр (VII фәслә бах). Фактик оларағ § 4-дә фәрг схемләринин дајаныглыгынын, һәм дә асимптотик дајаныглыгынын, үмуми нәзәријјәсинин әсаслары шәрһ едилмишдир.

III—V фәсилләрдә верилмиш мә'луматлар хүсуси төрәмәли тәнликләр үчүн фәрг үсуллары нәзәријјәсинин өјрәнилмәсинә кечмәјә асанлыгла имкан верир. VI фәсилдә белә схемләрдән бир гисми—дүзбучаглыда биринчи нөв сәрһәд шәртләри илә верилмиш Пуассон тәнлијини вә еллиптик тип тәнликләри апроксимасија едән фәрг схемләри өјрәнилир. Бурада һәм фәрг схемләринин јығылмасы, һәм дә онларын һәлли мәсәләләринә бахылыр.

Икигат фәрг тәнликләри үчүн үмуми дајаныглыг нәзәријјәсинин олмасы (V фәсил) сабит вә дәјишән әмсаллы истиликкечирмә тәнлији үчүн фәрг схемләринин VII фәсилдә верилмиш шәрһини асанлашдырыр. Бурада һәмчинин чохөлчүлү мәсәләләр үчүн сәмәрәли (дәјишән истигамәтли, парчаланан вә с.) схемләрә, һәмчинин мүрәккәб мәсәләләри даһа садә мәсәләләр ардычыллыгына парчаламаға вә ријази физиканын чохөлчүлү мәсәләләринин һәллини хејли садәләшдирмәјә имкан верән үмуми чәм апроксимасијасы принсипинә бахылыр.

Гејд етмәк лазымдыр ки, китабын әсас мәзмуну ваһид бахымдан шәрһ едилир. Бу бүтөвлүк фәрг схемләринин скалјар һасилә малик сонлу өлчүлү фәзада верилмиш оператор вә ја оператор-фәрг тәнликләри кими шәрһи сајәсиндә әлдә олунур. Фәрг тәнликләри үчүн итерасија үсуллары нәзәријјәсини вә дајаныглыг нәзәријјәсини гуран заман операторларын (матрисләрин) ән садә хассәләриндән истифадә олунур: ишарә мүәјјәнлији, өз-өзүнә гошмалыг, мәхсуси әдәд вә векторларын бә'зи хассәләри; операторларын структру һаггында һеч бир әлавә шәрт гәбул олунмур. Конкрет фәрг схемләринин истифадәсиндә гурулан нәзәријјәнин бүтүн шәртләри чох мүнасиб олмушдур. VI вә VII фәсилләрин материалы [6, 9] китаблары үзрә даһа там нәзәријјәнин өјрәнилмәси үчүн әсас ола биләр.

I фәсил

ФӘРГ ТӘНЛИКЛӘРИ

Бу фәсилдә там әдәди аргументли шәбәкә функсијалары вә икитәртибли фәрг тәнликләри өјрәнилир. Шәбәкә функсијаларынын вә фәрг операторларынын өјрәнилмәси үчүн чох садә ријази апарат шәрh олунур. Икитәртибли фәрг тәнликләринин hәлли үчүн говма үсулу адланан јохетмә үсулу тәтбиг олунур.

§ 1. Шәбәкә функсијалары

1. Шәбәкә функсијалары вә онлар үзәриндә әмәлләр. Мә'лум олдуғу кими, тәгриби үсулларда, адәтән кәсилмәз аргументли функсијалары дискрет аргументли функсијаларла — шәбәкә функсијалары илә әвәз едирләр. *Шәбәкә функсијасына* там әдәди аргументли функсија кими бахмаг олар:

$$y(i) = y_i, \quad i = 0, \ \pm 1, \ \mp 2, \ldots,$$

$y(i)$ үчүн диференсиаллама вә интеграллама әмәлләринин дискрет (фәрг) аналогларыны дахил етмәк олар:

Биринчи тәртиб төрәмәнин аналогу *биринчи тәртиб* фәргдир:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \text{—}\textit{сағ фәрг};$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \text{—}\textit{сол фәрг};$$

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \text{—}\textit{мәркәзи фәрг};$$

бурадан асанлыгла көрмәк олар ки, $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$.

Сонра *икинчи тәртиб* фәргләри дә јазмаг олар:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\Delta\nabla y_i = \Delta(y_i - y_{i-1}) = (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}) =$$

$$= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1},$$

демәли,

$$\Delta^2 y_i = \Delta\nabla y_{i+1}$$

Аналожи гајда илә $y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+m}$ гијмәтләрини өзүндә сахлајан *m тәртибли фәрг* тә'јин олунур:

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i).$$

Ајдындыр ки,

$$\sum_{j=\kappa}^{i} \Delta y_j = y_{i+1} - y_\kappa, \qquad \sum_{j=\kappa}^{i} \nabla y_j = y_i - y_{\kappa-1}.$$

2. Һасилин диференсиалланмасы вә һиссә-һиссә интеграллама дүстурларынын фәрг аналоглары. Тутаг ки, y_i вә v_i ихтијари там гијмәтли аргументин ихтијари функсијаларыдыр. Онда, ашағыдакы дүстурлар доғрудур:

$$\Delta(y_i v_i) = y_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta y_i = y_{i+1} \Delta v_i + v_i \Delta y_i, \qquad (1)$$

$$\nabla(y_i v_i) = y_{i-1} \nabla v_i + v_i \nabla y_i = y_i \nabla v_i + v_{i-1} \nabla y_i. \qquad (2)$$

Бу дүстурларын доғрулуғуну билаваситә јохламаг олар. Мәсәлән,

$$\Delta(y_i v_i) = y_{i+1} v_{i+1} - y_i v_i;$$

$$y_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta y_i = y_i(v_{i+1} - v_i) + v_{i+1}(y_{i+1} - y_i) =$$
$$= y_{i+1} v_{i+1} - y_i v_i = \Delta(y_i v_i).$$

$\nabla(y_i v_i)$ үчүн дә ујғун дүстуру чыхармаг үчүн $\nabla(y_i v_i) = \Delta(y_{i-1} v_{i-1})$ олдуғуну нәзәрә алмаг кифајәтдир.

(1), (2) дүстурлары $(y(x)v(x))' = yv' + vy'$ һасилин диференсиалланмасы дүстурунун аналогларыдыр.

Һиссә-һиссә интеграллама дүстурунун аналогу һиссә-һиссә чәмләмә дүстурудур:

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i + (yv)_N - (yv)_0. \qquad (3)$$

Бу дүстуру ашағыдакы кими дә јазырлар:

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N-1} v_i \nabla y_i + y_{N-1} v_N - y_0 v_1 \qquad (4)$$

(3) дүстуруну чыхармаг үчүн (1) дүстурундан истифадә едәк:

$$y_i \Delta v_i = \Delta(y_i v_i) - v_{i+1} \Delta y_i = \Delta(y_i v_i) - v_{i+1} \nabla y_{i+1},$$

чүнки $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$; бурадан аларыг:

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i + \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \Delta(y_i v_i) - \sum_{i=0}^{N-1} v_{i+1} \nabla y_{i+1} + \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i =$$

$$= y_N v_N - y_0 v_0 - \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i + \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i = (yv)_N - (yv)_0.$$

Әкәр $y_0 = 0$, $y = 0$ оларса, онда $\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i =$
$= -\sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i$.

Һиссә-һиссә чәмләмә дүстурундан чәмләрин һесабланмасында истифадә етмәк олар.

Мисаллар 1. $S_N = \sum_{i=1}^{N} i 2^i$ чәмини һесабламалы. $v_i = i$, $\nabla y_i = 2^i$ гәбул едәк. Демәли,

$$y_i = y_{i-1} + 2^i = y_0 + \sum_{j=1}^{i} 2^j = y_0 + 2^{i+1} - 2.$$

$y_0 = 2 - 2^{N+1}$ көтүрәк; онда $y_N = 0$, $v_0 = 0$, $\Delta v_i = 1$ олдуғундан (3)-дән

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} v_i \nabla y_i = - \sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = \sum_{i=0}^{N-1} y_i =$$

$$= - N(y_0 - 2) - \sum_{i=0}^{N-1} 2^{i+1} = N 2^{N+1} 2^{N+1} - 2)$$

аларыг. Демәли, $S_N = (N-1)2^{N+1} + 2)$.

2. $S_N = \sum_{i=1}^{N} i(i-1) = \sum_{i=1}^{N-1} i(i+1)$ чәмини һесабламалы. $y_i = i$, $\nabla v_i = i + 1$ гәбул едәк. Онда $v_{i+1} = v_i + (i+1) = v_1 + (2 + 3 + \ldots + (i+1)) = (v_i - 1) + (i+1)(i+2)/2$, $v_i = v_1 - 1 + i(i+1)/2$. v_1-и $v_N = 0$ шәртиндән сечәк, јә'ни $v_1 = 1 - N(N+1)/2$. (3) дүстуруну