Ә. ҺӘБИБЗАДӘ
Проф., физика-ријазијјат елмләри доктору

ФУНКСИОНАЛ АНАЛИЗ

ДӘРСЛИК

Азәрбајҹан ССР Али вә Орта Ихтисас Тәһсили Назирлији тәрәфиндән тәсдиг едилмишдир

„МААРИФ“ НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы — 1978

Мүвафиг дәрс програмы әсасында јазылмыш бу дәрсликдә гошма фәзалар вә гошма операторларла әлагәдар олан бир нечә мүһүм теоремин исбаты верилмиш, гијмәтләри мүәјјән Банах фәзасына дахил олан скалјар аргументли һоломорф функсијалар үчүн Коши нәзәријјәсинин бә'зи тәклифләри әсасландырылмыш, мүасир функсионал анализ курсунун чох мүһүм шө'бәси олан спектрал нәзәријјәјә хүсуси јер верилмиш, мәһдуд вә гејри-мәһдуд операторларын үмуми спектрал нәзәријјәси вә Һилберт фәзасында тамам кәсилмәз операторларын бә'зи спектрал мәсәләләринә ајрыча фәсил һәср олунмушдур.

Дәрсликдән университет вә дикәр али мәктәбләрин јухары курс тәләбәләри, аспирантлар вә елми ишчиләр истифадә едә биләрләр.

Елми редактору: *Ч. Аллаһвердијев*
проф., физика-ријазијјат елмләри доктору

Дәрслијә Азәрбајҹан ССР ЕА-нын Механика-Ријазијјат Институту рә'ј вермишдир.

$\frac{2-3-1}{М-652}$ 134—78

Унудулмаз мүәллимимиз
академик Заһид Хәлиловун
хатирәсинә һәср едирәм

КИРИШ

Функсионал анализ, тәхминән XX әсрин әввәлләриндә јаранмыш, лакин ријази фәнн кими анчаг 1930—1940-чы илләрдә формалашараг сәрбәст инкишаф етмишдир. Бу саһәдә ән гијмәтли әсәрләрдән бири мәшһур полјак ријазијјатчысы С. Банаха мәхсусдур. С. Банахын „Функсионал анализ курсу“ адлы монографијасы 1948-чи илдә Украјна дилинә тәрчүмә олунараг дәрч едилмишдир. Белә бир әсәрин нәшри бу фәннин инкишафында чох мүһүм рол ојнамышдыр. Беләликлә, „Функсионал анализ“ фәннинин јаранма тарихинин гыса олмасына бахмајараг, бу мүддәт әрзиндә хејли сүр'этлә инкишаф етмишдир. Бу инкишаф, демәк олар ки, әсасән ики истигамәтлә әлагәдардыр: бир тәрәфдән, классик анализ васитәсилә һәлл олмајан бир чох мүһүм мәсәләләрин һәлли, дикәр тәрәфдән исә функсионал анализин классик нәзәријјәсинин үмумиләшмәси, јә'ни даһа мүчәррәд шәкилдә тәдгиг олунмасыдыр.

Бу саһәдә алынан нәтичәләр мүхтәлиф бөлмәләр үзрә шахәләнәрәк һәр бири ајрыча нәзәријјә шәклиндә инкишаф етдирилмишдир.

Мүасир ријази физика тәнликләринин вариасија үсулу илә һәллинин арашдырылмасы вә бир чох тәдгигаты олан мәсәләләрин һәлли функсионал анализдә диференсиал вә интеграл һесабынын мүасир инкишафына сәбәб олмушдур. Белә бир инкишаф истәр мәһдуд вә истәрсә дә мәһдуд олмајан хәтти операторлу тәнликләрин тәбии олараг чидди арашдырылмасы илә әлагәләндирилмишдир. Бир чох мәсәләләрин һәлләри классик анализ курсунун чәрчивәсинә сығышмыр вә она көрә дә курсун верилмиш аксиомларынын јүксәк ријази сәвијјәдә үмумиләшмәсини тәләб едир. Функсионал анализин мүасир нәтичәләринин мүхтәлиф мәсәләләрә тәтбиги бу мәсәләләр илә елә үзви сурәтдә бағлыдыр ки, һәмин мәсәләләр бу фәннә мүәјјән бөлмә кими дахил олур.

Тәгдим олунан бу курс 12 фәсилдән ибарәт олмагла, мувафиг програм әсасында јазылараг функсионал анализ курсунун классик нәзәријјәси верилмиш вә бә'зи мүһүм нәтичәләр дә дахил едилмишдир.

Китабын әввәлиндә мүчәррәд фәзалар тә'риф олунараг мүәјјән тәснифат верилир. Бу фәзалардан ән вачибләриндән бири олан хәтти фәзаларда хәтти функсионаллар вә хәтти операторлар нәзәријјәсинин әсас чәһәтләри көстәрилир. Еләчә дә Һилберт фәзасына хүсуси јер верилмиш вә бир чох параграфлар бурада мүфәссәл шәрһ олунур.

Хәтти фәзаларла әлагәдар ән мүһүм мәсәләләрдән бири олан Хан—Банах теореми вә ондан алынан нәтичәләр дахил едилмәклә хәтти фәзаларда тамам кәсилмәз операторларын аналитик нәзәријјәси вә еләчә дә Рисс нәзәријјәси верилир вә белә тәнликләрин нормал һәллолма шәртләри көстәрилир. Хәтти мәһдуд вә мәһдуд олмајан гапалы операторларын үмуми спектриал нәзәријјәси нәзәрдән кечирилир, ваһиди олан вә ваһиди олмајан Банах чәбрләри өјрәнилир. Верилмиш чәбрин регулјар вә сингулјар елементләри тә'риф олунмагла бунларла әлагәдар бир чох тәклифләр исбат едилир. Бурада алынан мүһүм нәтичәләр резолевентин вә дисолвентин биринчи вә икинчи тәнликләри илә әлагәдардыр.

Дәрсликдә конкрет сингулјар операторлу тәнликләрин бә'зи мәсәләләри верилир, сонлу өлчүлү фәзаларда тә'сир едән хәтти операторлара ујғун матрисләрин нормал шәклә кәтирилмәси һаггында бир нечә тәклиф исбат едилир. Хәтти интеграл тәнликләрлә әлагәдар олан Фредһолмун алтернативи гыса јазылараг симметрик нүвәли тәнликләрә нисбәтән мүфәссәл јер верилир. Хүсусән симметрик нүвәнин, бунун итерасијаларынын, резолвентинин вә һәлләрин мәхсуси функсијалара көрә мүәјјән ајрылышлары, еләчә дә симметрик нүвәли тәнликләр үчүн Шмидт үсулу верилир.

Нәһајәт, С. Л. Соболев мә'нада үмумиләшмиш төрәмәләр һаггында мүәјјән фәсил верилир вә бурада үмумиләшмиш төрәмәләрин бир нечә хассәләри илә әлагәдар олан мүәјјән тәклифләр гејд олунур. Потенсиал типли интегралын бир нечә хассәси көстәрилир, сонра $W_p^{(l)}$ вә $L_p^{(l)}$ фәзалары тә'риф олунараг мүәјјән проjексијалајычы операторлар васитәсилә нормалашмаларынын мүмкүнлүјү гејд едилир. $W_p^{(l)}$ фәзасында С. Л. Соболевин хүсуси интеграл көстәришинин исбаты верилләрәк ики дахилолма теоремләринин исбатлары илә тамамланмышдыр.

I ФӘСИЛ

ТОПОЛОЖИ ФӘЗАЛАР

§ 1. ТОПОЛОЖИ ФӘЗАЛАР

Фәрз едәк ки, X үмумиjjәтлә мүәjjән абстракт елементләрдән ибарәт мүәjjән чохлугдур. Бундан әлавә τ илә X-ин алтчохлугларындан дүзәлмиш елә чохлуғу ишарә едәк ки, τ чохлуғу ашағыдакы аксиомлары өдәсин:

Тә'риф. 1. *Бош чохлуг вә һәм дә X чохлуғу τ-ја дахил олсун;*

2, τ-дан олан истәнилән сајда чохлугларын бирләшмәси τ-ја дахил олсун;

3. τ-дан олан истәнилән сонлу сајда чохлугла ын кәсишмәси τ-ја дахил олсун, онда X топоножи ф за адланыр.

τ чохлуғу бу фәзанын тополокиjасыны тә'јин едир вә бура дахил олан һәр бир елемент, jә'ни һәр бир чохлуг бу фәзанын ачыг чохлуғу адланыр. $x \in X$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр бир ачыг чохлуг бу нөгтәнин әтрафы адланыр. Әкәр мүәjjән шәртләшмә олмаса биз фәза дедикдә мүәjjән бир (X, τ) чүтүнүн верилдиjини баша дүшәчәjик. Беләки, X верилмиш чохлуг, τ исә һәмин чохлуғун тополокиjасыны тә'јин едир. Лакин конкрет фәзаларын өjрәнилмәсиндә һәр дәфә тополокиjа геjд олундугда (X, τ)-ну садәчә олараг X топоножи фәзасы адландырачағыг. Фәрз едәк ки, X чохлуғунда мүхтәлиф τ_1 вә τ_2 тополокиjалары верилмишдир. Әкәр $\tau_1 \subset \tau_2$ оларса, онда τ_1 чохлуғу τ_2-jә нисбәтән зәиф тополокиjа вә jахуд да τ_2 чохлуғу τ_1-ә нисбәтән күчлү тополокиjа адланыр. Әкәр X_1 вә X_2 верилмиш топоножи фәзаларынын елементләри арасында гаршылыглы биргиjмәтли уjғунлуг варса, беләки, бу ин'икасда jалныз ачыг чохлуг ачыг чохлуға ин'икас олунур, онда белә фәзалар һомеоморф фәза адланыр. Топоножи фәзаларын нәзәриjjәсиндә белә фәзалар еjни фәзалар, jә'ни $X_1 \Leftrightarrow X_2$ кими гәбул олунур. Ашкардыр ки, һәр бир чохлуг үчүн тривиjал тополокиjа вардыр. Мәсәлән, M мүәjjән чохлугдурса, τ_0 илә бош чохлуғу вә M-дән ибарәт олан чохлуғу ишарә етсәк, 1,2 вә 3 аксиомлары өдәнмәклә M-ин тривијал тополокијасыны аларыг. M чохлуғу сонлу елементләрдән ибарәт оларса, буна дахил олан бүтүн алтчохлуглары, бош чохлуғу вә M-ин өзүнү көтүрсәк M-дә мүәјјән τ' тополокијаны аларыг. Доғрудан да 1, 2 вә 3 аксиомларынын өдәнилмәсини јохламаг олар. Бу һалда τ', M-ин дискрет тополокијасы адланыр. Бурада, һәмчинин бир елементдән ибарәт олан чохлуг, ачығдыр. N, X тopoложи фәзасында верилмиш чохлуг исә бу чохлуғун бүтүн ачыг чохлугларынын бирләшмәси олан һиссәси һәмин чохлуғун дахили һиссәси адланыр вә $\operatorname{int} N$ илә ишарә олунур. Һәр бир $x \in \operatorname{int} N$ x нөгтәси N-ин дахили нөгтәси адланыр. x, N-нин о заман лимит нөгтәси адланыр ки, x-ин истәнилән әтрафында $x \neq y$ олан N-дән һеч олмаса бир y нөгтәси олсун.

$X_0 \in X$олан ачыг чохлуглар системи X_0-ын о заман базиси адланыр. X-ә дахил олан һәр ачыг чохлуг X_0-дан олан чохлугларын бирләшмәси кими көстәрилсин. x нөгтәси тopoложи X фәзасындан көтүрүлмүш нөгтә исә M_x әтрафлар чохлуғу о заман бу нөгтәнин базиси адланыр ки, m, x-ин истәнилән әтрафы олдугда $m_x \in M_x$ олан елә m_x олсун ки, $m_x \subset m$. Бу тә'рифи нәзәрә алсаг, X-ин базиси ашағыдакы кими тә'риф олунур.

Тә'риф 2. *$x \in X$ истәнилән нөгтә олдугда бүтүн M_x базисләринин чохлуғу X-ин базиси адланыр. Тopoложи фәзада верилмиш F-чохлуғуна о заман гапалы чохлуғу дејилир ки, онун тамамлајычысы ачыг чохлуг олсун.*

Тә'риф 3. *Әкәр верилмиш X тopoложи фәзасында истәнилән кәсишмәјән F_1 вә F_2 гапалы чохлуглары үчүн елә кәсишмәјән ујғун G_1 вә G_2 ачыг чохлуглара варса ки, $F_1 \subset G_1$ вә $F_2 \subset G_2$ олур. Онда белә фәза нормал фәза адланыр.*

Бә'зән верилмиш τ тополокијасы ашағыдакы әлавә шәрти өдәјир; јә'ни истәнилән x_1, $x_2 \in X$ олан мүхтәлиф $x_1 \neq x_2$ нөгтәләринин τ-ја дахил олан кәсишмәјән әтрафлары вардыр. Әлавә олан бу аксиом *ајрылма аксиому*, X исә ајрылан вә јахуд *һаусдорф фәзасы* адланыр. Белә фәзалар олдугча кениш тәдгигатлара малик олмагла функсионал анализин мүһүм мәсәләләринин һәлләринә сәбәб олмушдур. Гејд едәк ки, кәләчәкдә биз тopoложи фәза дедикдә јалныз Һаусдорф фәзаларыны нәзәрдә тутачаjыг.

Фәрз едәк ки, X һәгиги охдур. Бурада тополокијаны ашағыдакы кими тә'јин едәк. τ илә сонлу чохлуглары тамамлајан чохлуглары, бош вә X-и көтүрсәк мүәјјән бир тополокија аларыг. Лакин бурада истәнилән ики ачыг чохлуг бош олмајан чохлуг үзрә кәсишир, она көрә бу тополокијаја көрә һәгиги ох Һаусдорф фәзасы дејилдир. Әкәр һәгиги охда τ әвәзинә бош чохлуг, һәгиги ох вә сонлу интерваллар чохлуғу көтүрдүкдә исә һәгиги ох Һаусдорф фәзасына чеврилир. Доғрудан да, белә чохлуг 1, 2 вә 3 аксиомаларыны өдәмәклә һәгиги охун истәнилән $x_1 \neq x_2$ нөгтәләринин елә әтрафларыны көстәрмәк олар ки, кәсишмәсин.

§ 2. КВАЗИ МЕТРИК ФӘЗА

Тә'риф 4. *Фәрз едәк ки, X чохлуғу верилмишдир. Белә ки, X-дән олан истәнилән x вә y-ә гаршы мүәјјән гајда үзрә* мүәјјән $\rho(x, y)$ *һәгиги әдәди гаршыја гојулур.*

$\rho(x, y)$-дән әлавә ашағыдакы шәртләрин өдәнилдијини фәрз едәк.

1. $x = y$ олдугда $\rho(x, y) = 0$ олсун.

2. X-дә истәнилән x, y вә z елементләри үчүн $\rho(x, y) \leqslant \rho(z, x) + \rho(z, y)$ өдәнилир. Бу һалда X *квази метрик* фәза $\rho(x, y)$ исә x вә y арасында *квази мәсафә* адланыр.

1 вә 2-дән истифадә едәрәк $\rho(x, y)$-ин бир нечә хассәләри өдәдијини көстәрәк. Көстәрәк ки, истәнилән z вә x үчүн.

3. $\rho(z, x) \geqslant 0$ доғрудур. Әкәр 2-дә $x = y$ оларса, 3 тәләби дә өдәниләр.

4. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ олдуғуну көстәрәк. 2-дә $z = y$ јазсаг, $\rho(x, y) \leqslant \rho(y, x)$; $\rho(y, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(z, x)$-дә исә $z = x$ јазсаг $\rho(y, x) \leqslant \rho(x, y)$ нәзәрә алсаг 4-үн өдәнилдији алыныр.

5. $|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leqslant \rho(x, z)$—өдәнилдијини көстәрәк:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$
$$\rho(z, y) \leqslant \rho(z, x) + \rho(y, x) = \rho(x, z) + \rho(x, y).$$

Бу бәрабәрсизликләрдән

$$-\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) - \rho(z, y) \leqslant \rho(x, z)$$

5-ин өдәнилдији алыныр.

$x = x_0$ гејд олунмуш елемент r верилмиш мүсбәт әдәд исә $\rho(x, x_0) \leqslant r$ бәрабәрсизлијини өдәјән x елементләр чохлуғу мәркәзи x_0 вә радиусу r олан *квази күрә* адланыр.

§ 3. МЕТРИК ФӘЗА

Тә'риф 5. Фәрз едәк ки, бизә мүәјјән X фәзасы верилмишдир. Бундан әлавә елә мүәјјән бир ин'икас вар ки, $X' = X \cdot X$ тоположи һасилини мүәјјән әдәдләр чохлуғуна ин'икас етдирир.

Белә ки, $x, y \in X$ истәнилән елементләр исә, белә чүтә биргијмәтли олараг елә мүәјјән $\rho(x, y)$ әдәди гаршы гојулурса, ашағыдакы шәртләр өдәниләр.

1. $\rho(x, y) = 0$ *јалныз вә јалныз о заман өдәнилир ки: $x = y$ олсун,*

2. $x, y, z \in X$ *истәнилән елеменләри исә* $\rho(x, y) \leqslant \rho(z,x)+$ $+\rho(z, y)$ *олур. Бу һалда X метрик фәза адланыр.*

Һәр бир метрик фәза квази метрик олдуғундан әлавә көстәрдијимиз 3, 4 вә 5 шәртләри өдәнилир. Бә'зән метрик фәза һәмчинин ашағыдакы аксиомлар шәклиндә тә'риф олунур. Истәнилән x, y үчүн:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. Истәнилән x, y, z үчүн үчбучаг аксиому, јә'ни

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу үчбучаг аксиому адланыр.

§ 4. ТАМ ФӘЗАЛАР ВӘ МЕТРИК ФӘЗАНЫН ТАМАМЛАНМАСЫ

Тә'риф 6. *Фәрз едәк ки,* $\{x_n\}$ *метрик X фәзасында верилмиш ардычыллыгдыр. Әкәр ихтијари* $\varepsilon > 0$ *әдәдинә гаршы елә* N_ε *нөмрәси варса ки, ихтијари* $n \geqslant N_\varepsilon$ *олдугда X-ә дахил олан x елементи үчүн* $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ *бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда һәмин ардычыллыг јығылан адланыр.*

Верилмиш $\{x_n\}$ ардычыллығы о заман фундаментал ардычыллыг адланыр ки, ихтијари $\varepsilon > 0$-на гаршы елә N_ε нөмрәси олсун ки, $n, m \geqslant N_\varepsilon$ олан истәнилән n вә m үчүн $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ олсун. X-дә олан һәр бир фундаментал ардычыллыг јығыларса, онда һәмин фәзаја там фәза дејилир. Биз һәләлик бу јығылма илә кифајәтләнәчәјик вә кәләчәкдә мүхтәлиф јығылма анлајышлары верәчәјик.

Теорем 1. Фәрз едәк ки. X **метрик фәзадыр. Онда** X**-и там фәзаја гәдәр тамамламаг олар.**

Исбаты. Бу фәзадан олан ики фундаментал $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$ ардычыллыглары о заман еквивалент адланырлар ки,

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0 \tag{1}$$

өдәнилсин. Бурада ρ, X-дә верилмиш метрикадыр. X-дән олан вә өз араларында еквивалент олан фундаментал ардычыллыглары бир синфә дахил едәк. Онда X белә синифләрә ајрылыр, һәмин синифләр чохлуғуну $\widetilde{X}$ илә ишарә едәк. $\widetilde{X}$-ин тә'јининдән көрүндүјү кими, X-дән олан һәр бир фундаментал ардычыллыг $\widetilde{X}$-ә дахил олан синифләрдән јалныз бирисинә дахил ола биләр.

$\{x_n\} \in \xi$ вә $\{y_n\} \in \eta$ олсун, әввәлчә $\{\alpha_n\}$ ардычыллығынын јығылдығыны көстәрәк. Белә ки, $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$.

$$\alpha_n - \alpha_m = \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) =$$

$$= \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) + \rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_n)$$

бурадан исә үчбучаг аксиомуна көрә

$$\alpha_n - \alpha_m \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \tag{2}$$

олдуғуну алырыг. Бурада n вә m-ин јерләрини дәјишсәк:

$$-(\alpha_n - \alpha_m) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \tag{3}$$

(2) вә (3) көрә

$$|\alpha_n - \alpha_m| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \tag{4}$$

олур, $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$ ардычыллыгларынын фундаментал олмаларындан $\{\alpha_n\}$-нин јығылдығы алынып. $\xi, \eta \in \widetilde{X}$ фәрз едәрәк, $\widetilde{X}$-дә ашағыдакы мәсафәни тә'јин едәк:

$$\widetilde{\rho}(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{5}$$

Инди $\widetilde{\rho}$-нын биргијмәтли тә'јин олдуғуну көстәрәк. Она көрә дә ξ вә η-дан ујғун олараг $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$-дан фәргли $\{x_n'\}$ вә $\{y_n'\}$ фундаментал ардычыллыгларыны кәтүрә:

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, y_n') + \rho(y_n, y_n') \tag{6}$$

олдуғундан

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n') \leqslant \rho(x_n, y_n') + \rho(y_n, y_n') - \rho(x_n', y_n')$$

вә

$$\rho(x_n, y_n') \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(x_n', y_n') \tag{7}$$

бәрабәрсизлијинә көрә исә

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n', y_n') \leqslant \rho(y_n', y_n) + \rho(x_n', x_n) \tag{8}$$

өдәнилир. Еләчә дә $\rho(x_n', y_n') - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n', x_n) + \rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_n)$ вә $\rho(x_n, y_n') \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_n')$ бәрабәрсизлијинә көрә

$$\rho(x_n', y_n') - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x_n') + \rho(y_n, y_n')$$

олмагла

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n' y_n')| \leqslant \rho(y_n', y_n) + \rho(x_n, x_n') \tag{9}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Она көрә дә $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n', y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = 0$ олдугларындан

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n') \tag{10}$$

алынып. Беләликлә дә $\widetilde{\rho}$-нын ξ вә η-ја көрә биргијмәтли тә'јин олдуғу исбат олунур. $\widetilde{\rho}(\xi, \eta)$-нын метрика аксиомаларыны өдәдијини јохламаг, асандыр. $\widetilde{\rho}(\xi, \eta)$-нын мәнфи олмамасы симметриклик, вә үчбучаг аксиомлары билаваситә ρ-нын хассәләрдән чыхыр. Нәһајәт, $\tilde{\rho}(\xi,\eta)=0$ оларса, (5)-дән $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=$ $=0$ олмагла $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$ ардычыллыгларын еквивалент олмалары алыныр. Беләликлә $\tilde{\rho}(\xi,\eta)=0$ бәрабәрлијиндән $\xi=\eta$ олур. Еләчә дә, әксинә $\xi=\eta$-дән, $\tilde{\rho}(\xi,\eta)=0$. Беләликлә, $\tilde{X}$ фәзасы метрик фәзаја чеврилир. Инди көстәрәк ки, $\tilde{X}$-ә X-ин алт чохлуғу кими бахмаг олар. Әкәр $x\in X$ оларса, x елементини $(x, x, ..., x, ...)$ ардычыллығына гаршы гојараг бу ардычыллығын дахил олдуғу синфи ξ_x илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, ξ_x-ә дахил олан һәр бир ардычыллыг x-ә јығылан ардычыллыгдыр. Үмумијјәтлә ејни синфә дахил олан $\{x_n\}$ вә $\{x'_n\}$, ардычыллыглардан бири, мәсәлән, $\{x_n\}$, x-ә јығыларса, онда $\{x'_n\}$ дә һәмин елементә јығылар. Бу

$$\rho(x'_n, x)\leqslant\rho(x'_n, x_n)+\rho(x_n, x) \tag{11}$$

бәрабәрсизлијиндән ашкардыр. Дикәр тәрәфдән $\tilde{\rho}(\xi_x, \xi_y)=$ $=\rho(x, y)$ өдәнилмәси $\tilde{\rho}$-нын тә'јининдән асанлыгла көрүнүр. Бу нәтичәләри нәзәрә алсаг, X-ин $\tilde{X}$-ә изометрик дахил олмасы алыныр. $\xi\in\tilde{X}$ көтүрәк вә $\{x_n\}\in\xi$ олдуғуну фәрз едәк вә көстәрәк ки, $\xi_{x_n}\to\xi$ олур. $\tilde{\rho}$-нын тә'рифинә көрә:

$$\tilde{\rho}(\xi_{x_n}, \xi)=\lim_{m\to\infty}\rho(x_n, x_m), \tag{12}$$

$\{x_n\}$ фундаментал олдуғундан ихтијари $\varepsilon>0$ үчүн елә $N(\varepsilon)$ вар ки, $n, m>N(\varepsilon)$ олдугда $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$ олур. (12)-дән алырыг ки, $\xi x_n\to\xi$. Беләликлә, биз көстәрдик ки, $\xi\in X$ олан һәр бир ξ үчүн ξ_{x_n} вар ки,

$$\tilde{\rho}(\xi_{x_n}, \xi)<\varepsilon \tag{13}$$

өдәнилир. Һәр бир ξ_{x_n}-ә X-дән x_n елементи ујғун олдуғундан дејә биләрик ки, $\xi\in\tilde{X}$ олан һәр бир ξ үчүн X-дән олан ән азы бир $x_n=x$ вар ки,

$$\tilde{\rho}(x, \xi)<\varepsilon$$

өдәнилир.

Бу нәтичәни нәзәрә алараг $\hat{X}$-ин там олдуғуну көстәрәк. $\{\xi^{(m)}\}$-нын фундаментал олдуғуну гәбул едәрәк көстәрәк ки, бу ардычыллыг $\tilde{X}$-дән олан мүәјјән ξ-јә јығылыр.

$\varepsilon_n\to0$ мүсбәт әдәдләр ардычыллығыны көтүрәк. Көстәрдијимиз кими, ε_n верилдикдә $\xi^{n()}$-ә гаршы X-дән елә ујғун $x^{(n)}$ елементи вар ки,

$$\tilde{\rho}(x^{(n)}, \xi^{(n)})<\varepsilon_n \tag{14}$$

өдәнилир. (14)-ә көрә

$$\tilde{\rho}\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) \leqslant \tilde{\rho}\left(x^{(n)}, \xi^{(n)}\right) + \tilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}\right) + \tilde{\rho}\left(\xi^{(m)}, x^{(m)}\right)$$

бәрабәрсизлијиндән

$$\tilde{\rho}\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) < 2\varepsilon_n + \tilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}\right) \tag{15}$$

олдуғуну алырыг. $\{\xi^{(m)}\}$-нын фундаментал олдуғуну нәзәрә алсаг, (15)-дән $\lim\limits_{n, m \to \infty} \tilde{\rho}\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = 0$ олмагла $\{x^{(n)}\}$-нын фундаментал олдуғу алыныр.

$\{x^{(m)}\}$, X-дә олан фундаментал ардычыллыг олдуғундан, беләликлә, $\{x^{(n)}\}$ ардычыллығы мүәјјән бир ξ синфи тә'јин едир вә һәмчинин көстәрдијимиз кими

$$\tilde{\rho}\left(x^{(n)}, \xi\right) \to 0. \tag{16}$$

Нәһајәт,

$$\tilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, \xi\right) \leqslant \tilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, x^{(m)}\right) + \tilde{\rho}\left(x^{(n)}, \xi\right) \tag{17}$$

бәрабәрсизлијиндән (14) вә (16)-ја көрә $\xi^{(n)} \to \xi$ олмагла $\tilde{X}$-ин там фәза олдуғу чыхыр вә беләликлә дә X-и там фәзаја гәдәр тамамламаг олар. Бунунла да теорем исбат олунур.

§ 5. МЕТРИК СЕПЕРАБЕЛ ФӘЗА

X һәгиги ох оларса, бу фәзанын рассионал әдәдләр чохлуғундан ибарәт олан елә алт X_0 һиссәси вар ки, X_0, X-дә сыхдыр. X_0, X-ин әсас һиссәси һесаб олараг X-и бу чохлуг васитәсилә гурмаг олар. Сых чохлуг анлајышы метрик фәзаларда ашағыдакы кими тә'риф олунур.

Тә'риф 7. *Фәрз едәк ки, X метрик фәзадыр X_1 вә X_2 бу фәзаја дахил олан алт чохлуглардыр. X_1, X_2-дә о заман сых чохлуг адланыр ки, $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олдугда $x \in X_2$-олан истәнилән нөгтә оларса, X_1-дә елә y нөгтәси олсун ки, $\rho(x, y) < \varepsilon$ өдәнилсин.*

Сыфра јахынлашан мүсбәт $\{\varepsilon_n\}$ әдәдләр ардычыллығыны вә $x \in X_2$-дән гејд олунмуш нөгтә көтүрәк, онда гејд етдијимиз кими һәр $\varepsilon_n > 0$ әдәдинә гаршы X_1-дән олан елә ујғун x_n нөгтәси вар ки, $\rho(x_n, x) < \varepsilon_n$ өдәнилир. Бу бәрабәрсизлик көстәрир ки, X_2-дән олан һәр x нөгтәсинә X_1-дән бу нөгтәјә јығылан $\{x_n\}$ ардычыллығы сечмәк олар вә әксинә, X_2-дән олан һәр бир x-ә гаршы X_1-дән бу нөгтәјә јығылан ујғун $\{x_n\}$ ардычыллығы олдугда X_2, X_2 дә сых чохлуг олур. Демәли $X_1 \subset \overline{X}_2$, бурада, $\overline{X}_2$, X_2-нин гапанмасыдыр. Хүсуси һалда, X_1 X-дә сыхдырса, онда $\overline{X}_1 = X$ олур.

Әкәр верилмиш фәзада һесаби сых чохлуг варса, белә фәза Сеперабел фәза адланыр.

§ 6. КОМПАКТ ЧОХЛУГЛАР

X һәгиги ох көтүрүләрсә бу фәзадан көтүрүлмүш һәр бир мәһдуд чохлугдан јығылан алт ардычыллыг сечмәк олар. Хүсуси мисалларла көстәрмәк олар ки, бу хассә ихтијари метрик фәзаларда өдәнилмир.

Тә'риф 8. *Метрик X фәзасына дахил олан X_1 чохлуғу бу фәзада о заман компакт чохлуг адланыр ки, X_1-дән көтүрүлмүш истәнилән $\{x_n\}$ ардычыллығындан X-дә јығылан алт ардычыллыг сечмәк олсун. Хүсуси һалда X өзү, өзүндә компакт оларса, X метрик фәзасы компакт фәза адланыр.*

Теорем 2. Һәр бир компакт метрик фәза тамдыр.
Фәрз едәк ки, X компакт метрик фәзадыр.

$$\{x_n\} \tag{1}$$

ардычыллығы исә фундаменталдыр. X компакт олдуғундан (1)-дән јығылан

$$\{x_{n_k}\} \tag{2}$$

алт ардычыллығыны сечмәк олар. Фәрз едәк ки, (2) x_0 нөгтәсинә јығылыр.

$$x_0 \in X, \quad \rho\left(x_k,\ x_0\right) \leqslant \rho\left(x_k,\ x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k},\ x_0\right) \tag{3}$$

бәрабәрсизлијини көтүрәк. (1) фунтаментал ардычылыг олдуғундан

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_k,\ x_{n_k}\right) = 0 \tag{4}$$

eләчә дә, $x_{n_k} \to x_0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) = 0$, (3)-дән $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$.

Беләликлә, X-дән көтүрүлмүш һәр бир фундаментал ардычыллыг јығыландыр. Она көрә дә X там фәзадыр.

§ 7. ҺАУСДОРФ ТЕОРЕМИ

Тәриф 9. *Фәрз едәк ки, X метрик фәзадыр. M_1 вә M_2-алт чохлуглардыр. Әкәр $\varepsilon > 0$ верилмиш әдәд олдугда $x \in M_2$ олан истәнилән x үчүн M_1-дә елә y нөгтәси варса ки, $\rho(x\ y) < \varepsilon$ олур. Онда M_1, M_2 үчүн ε-шәбәкә адланыр.* **Бунунла әлагәдар олараг ашағыдакы тәклиф исбат олунур.**

Һаусдорф теореми 3.

X метрик фәзасында верилмиш M_1 чохлуғунун компакт олмасы үчүн истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн M_1-дә сонлу ε шәбәкәнин олмасы зәрури вә X там олдугда исә һәмчинин кафи шәртдир.

Шәртин зәрурилији фәрз едәк ки, M_1 компактдыр. Көстәрсәк ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн M_1 дә ε шәбәкә олмадыгда M_1 компакт деjилдир. Онда шәртин зәрури олдуғу алыныр.

M_1-ин компактлығыны гәбул едәк вә фәрз едәк ки, елә $\varepsilon > 0$ әдәди вар ки, бу әдәдә уjғун M_1 дә сонлу ε шәбәкә jохдур. $x_1 \in M_1$ нөгтәсини көтүрәк, онда x_1, M_1 үчүн $\varepsilon > 0$ шәбәкә ола билмәз. Она көрә дә $x_2 \in M_1$ олан елә x_2 нөгтәси вар ки, $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$ олур. Еләчә дә x_1, x_2 нөгтәләри M_1 үчүн ε шәбәкә ола билмәз, онда $x_3 \in M_1$ олан елә нөгтә вар ки, еjни заманда $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$ вә $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$. Доғрудан да белә x_3 олмасаjды, онда M_1-нин истәнилән x нөгтәси үчүн $\rho(x_2, x) < \varepsilon$ оларды. Дикәр тәрәфдән $\rho(x_1, x_1) = 0$ олдуғундан x_1, x_2 нөгтәләри M_1-ин сонлу ε шәбәкәси оларды. Еjни мүлаһизәjә көрә x_1, x_2, x_3 нөгтәләри M_1 үчүн ε шәбәкә ола билмәз она көрә дә, $x_4 \in M_1$ олан елә нөгтә вар ки, $\rho(x_j, x_4) \geqslant \varepsilon (j = \overline{1, 3})$ олур, бу гаjда илә мүлаһизәни давам етдирсәк M_1-ә дахил олан елә сонсуз $\{x_n\}$ ардычыллығы гурмаг олар ки, $n \neq m$ олдугда $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$ олур. Бу исә ону көстәрир ки, бу ардычыллыгдан jығылан алт ардычыллыг сечмәк олмаз, бу исә M_1-ин компакт олмасына зиддир. Она көрә дә M_1 компакт олдугда бу чохлуг үчүн истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн сонлу ε шәбәкә олмалыдыр. Бунунла зәрури шәрт исбат олунур.

Шәртин кафилиjи. Фәрз едәк ки, X тамдыр вә M_1 үчүн истәнилән сонлу ε шәбәкә вар. M_1-ин компакт олдуғуну көстәрәк. Она көрә дә M_1-дән истәнилән сонсуз

$$\{x_n\} \tag{1}$$

ардычыллығыны көтүрәрәк бурадан jығылан алт ардычыллығын сечилдиjини көстәрәк. $\varepsilon_n \to 0$ олан

$$\{\varepsilon_n\} \tag{2}$$

ардычыллығыны көтүрәк. Белә ки, $\varepsilon_n > 0$. ε_1 әдәдини көтүрәк, шәртә көрә M_1 үчүн сонлу ε_1 шәбәкәси вар, бу шәбәкәни M_{ε_1} илә ишарә едәк. M_{ε_1} сонлу ε_1 шәбәкә олдуғундан M_{ε_1}-нын нөгтәләри үзәриндә гурулмуш сонлу саjда сфералар вар ки, M_1-ин нөгтәләринин һамысы бу сфераларын дахилиндәдир.

(1) сонсуз олдуғундан бу сфераларын ичәрисиндә eләси вар ки, бу сферанын дахилиндә (1)-дән сонсуз саjда елементләр вардыр. Бу сфераны $\sigma_{\varepsilon_1}(t_1)$ илә ишарә едәк. M_1-ин ε_2 сонлу шәбәкәсини M_{ε_2} илә ишарә едәк. Еләчә дә бурада елә сонлу саjда сфералар вар ки, бунлар да өз дахилләринә M_1-ин бүтүн нөгтәләрини, сахлаjыр. Онда бу сфералардан елә бириси вар ки, (1)-дән $\sigma_{\varepsilon_1}(t_1)$-ә дахил олан сонсуз саjда нөгтәләриндән өз дахилиндә сонсуз саjда нөгтәләр сахлаjыр. Бу сфераны $\sigma_{\varepsilon_2}(t_2)$ илә ишарә едәк. Бу схемдән аjдын көрүнүр ки, һәр бир M_{ε_n} шәбәкәсини гурдугда бу шәбәкәjә дахил олан елә $\sigma_{\varepsilon_n}(t_n)$ сферасы вар ки, (1)-дән $\sigma_{\varepsilon_{n-1}}(t_{n-1})$-ә дахил олан сонсуз саjда нөгтәләриндән, һәмчинин $\sigma_{\varepsilon_n}(t_n)$-ә дахил олан сонсуз саjда нөгтәләр вардыр. Демәли, нәтичәдә елә $\{\sigma_{\varepsilon_n}(t_n)\}$

сфералар ардычыллығыны алырыг ки, бунларын ихтијари сајда кәсишмәләриндә (1)-дә сонсуз сајда елементләр вардыр. $x_{n_k} \in \bigcap\limits_{i}^{k} \sigma_{\varepsilon i}(t_i)$ нөгтәләрини көтүрәк, белә ки, $(n_k > n_{k-1})$. Бу $\{x_{n_k}\}$ ардычыллығынын гурулмасындан көрүндүјү кими; $n_\mu \geqslant n_\nu$ олдугда x_{n_ν} вә x_{n_μ} нөгтәләри M_{ε_μ}-јә ујғун $\sigma_{\varepsilon_\mu}(x_\mu)$ сферасынын дахилиндәдирләр.

$$\rho(x_{n_\nu}, x_{n_\mu}) \leqslant \rho(x_\mu, x_{n_\mu}) + \rho(x_{n_\nu}, x_\mu)$$

бәрабәрсизлијини көтүрәк. x_{n_ν}, $x_{n_\mu} \in \sigma_{\varepsilon_\mu}(x_\mu)$ олдуғундан (1)-дән

$$\rho(x_{n_\nu}, x_{n_\mu}) < 2\varepsilon_\mu.$$

$n \to \infty$ олдугда, һәмчинин $\nu \to \infty$, Дикәр тәрәфдән $\varepsilon_\mu \to 0$ олдуғундан $\rho_{\substack{\nu\to\infty \\ \mu\to\infty}}(x_{n_\nu}, x_{n_\mu}) \to 0$. Бу ону көстәрир ки, $\{x_{n_\nu}\}$ фундаментал ардычыллыгдыр. Шәртә көрә X там олдуғундан бу ардычыллыг X-ин мүәјјән бир x_0 нөгтәсинә јығылыр. Нәтичәдә биз көстәрдик ки, X_1 үчүн истәнилән сонлу шәбәкә олдугда X_1-дән көтүрүлмүш истәнилән $\{x_n\}$ ардычыллығындан јығылан алт ардычыллыг сечмәк олар, јә'ни X_1 компакт чохлугдур. Бунунла да, X там олдугда кафи шәртин исбаты тамамланыр.

§ 8. АРСЕЛ ТЕОРЕМИ

Теорем 4. $C = C[a, b]$ **фәзасында верилмиш** $C_1 = C_1[a, b]$ **чохлуғунун компакт олмасы үчүн һәмин чохлуғун мүнтәзәм мәһдуд вә ејни дәрәчәдән кәсилмәз олмалары зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.**

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, $C_1[a, b]$ компакт чохлугдур. Онда Һаусдорф теореминә көрә C_1-дә истәнилән сонлу шәбәкә вардыр. Фәрз едәк ки, $\varepsilon > 0$ верилмиш мүсбәт әдәддир. Бу әдәдә ујғун сонлу ε шәбәкәни C_ε илә ишарә едәк. Онда $\varphi(t) \in C_1$ олан истәнилән функсија олдугда C_ε-да елә $\varphi_k(t)$ функсијесы вар ки, $\rho(\varphi(t), \varphi_k(t))$ јә'ни

$$\max_{b \leqslant t < a} |\varphi(t) - \varphi_k(t)| < \varepsilon, \tag{1}$$

бурадан

$$|\varphi(t)| \leqslant \max|\varphi(t) - \varphi_k(t)| + \max|\varphi_k(t)|. \tag{2}$$

C_ε-на дахил олан функсијаларын сајы сонлу олдуғундан елә сабит мүсбәт M әдәди вар ки, $|\varphi_k(t)| \leqslant M$ олар. Бу бәрабәрсизлик вә (1)-ә көрә (2)-дән $|\varphi(t)| < Q$, беләки, $Q = M + \varepsilon$ бу бәрабәрсизлик C_1-ә дахил олан истәнилән $\varphi(t)$ үчүн доғрудур. Демәли, C_1-ә дахил олан функсијалар чохлуғу мүнтәзәм мәһдуддур. Сонра ашкардыр ки, C_ε-на дахил олан $\varphi_j(t)$ $(j = \overline{1, n})$ функсијалары мүнтәзәм кәсилмәздир. Она көрә дә верилмиш $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta(\varepsilon) > 0$ әдәди вар ки, $[a, b]$-јә дахил олан

$$|t' - t''| < \delta, \tag{3}$$

өдәјән истәнилән t' вә t'' нөгтәләри үчүн,

$$|\varphi_к(t') - \varphi_к(t'')| < \varepsilon \quad (к = \overline{1, n}). \tag{4}$$

Инди $\varphi(t) \in C_1$ олан ихтијары $\varphi(t)$ функсијасыны көтүрәк. Онда C_1-дан олан елә $\varphi_к(t)$ вар ки,

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t) - \varphi_к(t)| < \varepsilon, \tag{5}$$

t' вә t'' (3)-ү өдәјән нөгтәләр фәрз едәрәк $\varphi(t') - \varphi(t'')$ фәргини гијмәтләндирәрәк:

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \max |\varphi(t') - \varphi_к(t')| +$$

$$+ |\varphi_к(t') - \varphi_к(t'')| + \max_к |\varphi_к(t'') - \varphi(t'')|, \tag{6}$$

(4), (5) вә (6)-дан

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < 3\varepsilon. \tag{7}$$

Демәли, биз исбат етдик ки, ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta(\varepsilon) > 0$ әдәди вар ки, $|t' - t''| < \delta$-ни өдәјән $[a, b]$-нын истәнилән t' вә t'' нөгтәләри үчүн C_1-ә дахил олан истәнилән функсија үчүн (7)-и өдәнилир. Бу о дејән сөздүр ки, C_1-ә дахил олан функсијалар чохлуғу ејни дәрәчәдән кәсилмәздир. Бунунла зәрури шәрт исбат олунур.

Шәртин кафилији. Һаусдорф теореминә көрә $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олдугда C_1 дә сонлу ε шәбәкәнин варлығыны исбат етмәк кифајәтдир. Онун үчүн дә фәрз едәк ки, C_1-ә дахил олан функсијалар мүнтәзәм мәһдуд олмагла ејни дәрәчәдән кәсилмәздир. Јә'ни, елә мүсбәт сабит M әдәди вар ки, $\varphi(t) \in C_1$ олан истәнилән $\varphi(t)$ үчүн:

$$|\varphi(t)| < M. \tag{8}$$

$\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олдугда елә $\delta(\varepsilon)$ әдәди вар ки, $[a, b]$-нын $|t' - t''| < \delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари t' вә t'' нөгтәләри үчүн C_1-дән олан истәнилән $\varphi(t)$ функсијасы үчүн

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon, \tag{9}$$

өдәнилир.

$[a, b]$ вә $[-M, M]$ парчаларыны ујғун олараг $t_к\left(к = \overline{1, n}\right)$ вә $y_к\left(к = \overline{1, m}\right)$ нөгтәләри илә елә һиссәләрә ајыраг ки, ујғун олараг алынан парчаларын узунлуглары δ вә ε-дан кичик олсун.

$\varphi(t) \in C_1$ олан $\varphi(t)$ функсијасыны, ашағыдакы кими тә'јин олунан сыныг хәтли $\psi(t)$ функсијасына гаршы гојаг.

$t_к\left(к=\overline{1, n}\right)$ вә $y_к\left(к=\overline{1, m}\right)$ бөлкү нөгтәләриндән координат охларына паралел хәтләр чәкәрәк мүәјјән бир шәбәкә дүзәлдәк. $(t_к, y_m)$ нөгтәләриндән кечән елә $\psi(t)$ сыныг хәттини көтүрәк ки, $t=t_к\left(к=\overline{1, n}\right)$ нөгтәсиндә

$$|\varphi(t_к)-\psi(t_к)|<\varepsilon \tag{10}$$

$t_к$-ны $t_{к+1}$ илә әвәз етсәк

$$|\varphi(t_{к+1})-\psi(t_{к+1})|<\varepsilon \tag{11}$$

$|t_к-t_{к+1}|<\delta$ олдуғундан

$$|\varphi(t_к)-\varphi(t_{к+1})|<\varepsilon \tag{12}$$

$\psi(t_к)-\psi(t_{к+1})$ фәргини гијмәтләндирәрәк

$$|\varphi(t_к)-\varphi(t_{к+1})|\leqslant|\varphi(t_к)-\varphi(t_к)|+$$

$$+|\varphi(t_к)-\varphi(t_{к+1})|+|\varphi(t_{к+1})-\psi(t_{к+1})| \tag{13}$$

(10), (11) вә (12) бәрабәрсизликләринә көрә

$$|\psi(t_к)-\psi(t_{к+1})|<3\varepsilon$$

$t_к$ вә $t_{к+1}$ нөгтәләри арасында сыныг хәтт һиссәси парча олдуғундан $t\in[t_к, t_{к+1}]$ олдугда ејни мүлаһизәјә көрә

$$|\psi(t)-\psi(t_к)|<3\varepsilon \tag{14}$$

өдәнилир.

$t\in[a, b]$ олан истәнилән t нөгтәсини көтүрәк. Ашкардыр ки, елә $t_к$ нөгтәси вар ки, $|t-t_к|<\delta$ олур. Онда шәртә көрә

$$|\varphi(t)-\varphi(t_к)|<\varepsilon$$

$\varphi(t)-\psi(t)$ фәргини гијмәтләндирәк:

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant|\varphi(t)-\varphi(t_к)|+$$

$$+|\varphi(t_к)-\psi(t_к)|+|\psi(t_к)-\psi(t)|$$

(10) вә (14) бәрабәрсизликләринә көрә, бурадан:

$$|\varphi(t)-\psi(t)|<5\varepsilon \tag{16}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Биз көстәрдик ки, C_1-дән олан истәнилән $\varphi(t)$-јә гаршы ујғун $\psi(t)$ функсијасы вар ки, (16) өдәнилир. Дикәр тәрәфдән $\psi(t)$ функсијасы гурдуғумуз шәбәкәнин нөгтәләриндән кечмәлидир. Һәмин шәбәкәнин дүјүм нөгтәләри сонлу олдуғундан $\psi(t)$ кими функсијаларын сајы сонлудур, бунларын чохлуғуну $C_{1\varepsilon}$ илә ишарә етсәк $C_{1\varepsilon}$-нун истәнилән ε үчүн C_1 үчүн сонлу ε_1 шәбәкә олдуғу алынып вә беләликлә дә Һаусдорф теореминә көрә компакт чохлугдур. Бунунла да кафи шәрт-исбат олунур.

II ФӘСИЛ

ХӘТТИ ФӘЗАЛАР

§ 1. ХӘТТИ ФӘЗАЛАР

Тә'риф 1. *Фәрз едәк ки, мүчәррәд X чохлуғу вә Φ ја һәгиги әдәдләр, јахуд да комплекс әдәдләр чохлуғу олсун. Бундан әлавә X-дән X-ә тә'сир едән мүәјјән хәтти чевирмәләрин верилдијини гәбул едәк;*

1. $x, y \in X$ олан истәнилән елементләр олдугда бунлар васитәсилә биргиіјмәтли тә'јин олунан вә X-ә дахил олан мүәјјән елемент вар, бу елементи x вә y-ин чәми адландырыб $x+y$ ишарә едәк. Һәмчинин $\alpha \in \Phi$ истәнилән әдәд вә $x \in X$ истәнилән елемент олдугда бунлар васитәсилә биргијмәтли тә'јин олунан вә X-ә дахил олан мүәјјән елемент вар. Бу елемент α-нын x-ә һасили адланараг αx кими јазылыр.

2. X чәм әмәлинә көрә Абел групу тәшкил едир, јә'ни x, y вә z, X-дән олан ихтијари елементләр олдугда чәм әмәлинә көрә ашағыдакы аксиомлар өдәнилир:

1) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

2) Елә θ елементи вар ки, истәнилән x үчүн $x+\theta=x$ олур,

3) Һәр бир x-ә гаршы елә $-x$ вар ки,

$$x+(-x)=\theta,$$

θ, X-ин сыфры адланыр, $-x$ исә x-ин әкс елементи адланыр.

4) Истәнилән x вә y үчүн $x+y=y+x$.

$x, y \in X$ олан истәнилән елементләр вә α, $\beta \in \Phi$ истәнилән әдәдләр олдугда ашағыдакы аксиомлар өдәнилир:

5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, 6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, 8) $1\cdot x=x$.

X 1ˋ вә 2, 5), 6), 7), 8) шәртләрини өдәјирсә, онда X хәтти вә јахуд да *хәтти вектор фәза*, бура дахил олан һәр бир x исә вектор адланыр. Φ һәгиги әдәдләр чохлуғу олдугда X һәгиги хәтти вектор фәзасы вә Φ комплекс әдәдләр чохлуғу олдугда исә X хәтти *комплекс вектор фәзасы* адланыр. Һәр ики һалда дејилир ки, X, Φ әдәдләр мејданында верилмишдир. X_0 чохлуғу о заман алт хәтти чохлуг адланыр ки, $x, y \in X_0$ вә α, $\beta \in \Phi$ олан истәнилән елементләр вә әдәдләр үчүн $\alpha x+\beta y \in X_0$.

Тә'риф 2. *Хәтти метрик фәза о заман суперметрик фәза адланыр ки, X фәзасына дахил олан ихтијари x, y вә z елементләри үчүн*

$$\rho(x, y+z)=\rho(x-z, y)$$

72415—2

бәрабәрлији өдәнилсин.

Һәр бир суперметрик X фәзасында истәнилән x, y, z вә t елементләри үчүн

$$\rho(x+y,\ z+t) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(y,\ t) \qquad (1)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Тә'рифә көрә

$$\rho(x+y,\ z+t) = \rho(x,\ z+t-y),$$

үчбучаг аксиомуна көрә

$$\rho(x,\ z+t-y) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(z,\ z+t-y),$$

дикәр тәрәфдән

$$\rho(z,\ z+t-y) = \rho(z-z+y,\ t) = \rho(y,\ t),$$

олдуғундан (1) өдәнилир.

Хәтти фәзаларла әлагәдар бир нечә мисаллар кестәрәк:

Мисал 1.

$$x = (x_1,\ x_2, \dots,\ x_n, \dots) \qquad (2)$$

кими һәгиги әдәдләр ардычыллығы васитәсилә дүзәлмиш бүтүн x-ләр чохлуғу котүрәк вә l_2 илә ишарә едәк, белә ки,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$$

$x,\ y \in l_2$ олдугда $x + y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n, \dots)$ (3)

бурада x (2) илә вә y исә $y = (y_1,\ y_2, \dots,\ y_n, \dots)$ бәрабәрлији илә тә'јин олунур, α, R һәгиги әдәдләр меjданындан. көтүрүлмүш истәнилән әдәд исә:

$$\alpha x = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots) \qquad (4)$$

кими тә'јин олунур.

Нәһајәт:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \qquad (5)$$

вә

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha x_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \qquad (6)$$

мүнасибәтләрини нәзәрә алсаг, (3) вә (4) чәбри әмәлләрә әсасән l_2 хәтти вектор фәза олур.

Мисал 2. $[a,\ b]$ парчасында верилмиш бүтүн кәсилмәз һәгиги вә јахуд да комплекс функсијалар чохлуғуну $C = C[a;\ b]$ илә ишарә едәк. C-дән олан ихтијари ики функсијанын ҹәми ади мә'нада вә һәмчинин әдәдә вурма, ади мә'нада, јә'ни $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a, b]$ олдугда, $(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ еләҹә дә $(\alpha\varphi)(t) = \alpha\varphi(t)$ кими көтүрүләрсә, бу чохлуг хәтти вектор фәза олур.

Хәтти өртүк. Әкәр M, Ф меіданында тә'јин олунмуш хәтти X вектор фәзасында верилмиш чохлуг исә бу чохлуғу өз дахилиндә сахлајан ән кичик хәтти чохлуг вар. Белә чохлуг M-и өз дахилинә алан бүтүн хәтти чохлугларын кәсишмәсиндән алыныр. Һәмин чохлуға M-ин хәтти өртүјү дејилир вә $L_1(M)$ илә ишарә олунур.

Фәрз едәк ки, M X-дә верилмиш чохлугдур. Бурадан истәнилән $x_1, x_2, \ldots, x_n$ елементләрини вә Ф-дән истәнилән $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ әдәдләрини көтүрәрәк бүтүн мүмкүн олан хәтти

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

комбинасијаларыны дүзәлдәк вә һәмин чохлуғу $L(M)$ илә ишарә едәк. Көстәрәк ки, $L(M) = L_1(M)$. $L_1(M)$-ин хәтти $L(M)$ чохлуғуна дахил олмасы ашкардыр. Әкәр M, $L_1(M)$-и өз дахилинә алан хәтти чохлуг исә, онда M һәмчинин $L(M)$-и өз дахилинә алар. Беләликлә, $L(M) = L_1(M)$ олдуғу алыныр.

Базис. X фәзасында верилмиш $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторлары заман хәтти асылы олмајан адланыр ки,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \text{ оларса, } \lambda_k = 0 \text{ олсун } \left(k = \overline{1, n}\right).$$

Әкс һалда һәмин векторлар хәтти асылы олан адланыр. Сонсуз $\{x_i\}$ векторлар системи о заман хәтти асылы олмајан адланыр ки, бу системдән көтүрүлмүш истәнилән сонлу систем хәтти асылы олмасын. Хәтти асылы олмајан $E = \{x_i\}$ системи үчүн $L_1(E) = X$ оларса, онда бу систем X-ин ҹәбри базиси адланыр.

Әкәр X нормалашмыш фәза исә, норманын кәсилмәзлијиндән вә фәзанын хәтти олмасындан алыныр ки, хәтти чохлуғун гапанмасы да хәттидир. M чохлуғу верилдикдә $L_1(M)$-ин гапанмасы, јә'ни $\overline{L_1(M)}$, M-и өз дахилиндә сахлајан ән кичик гапалы хәтти чохлуг олар. Нормалашмыш X фәзасында верилмиш $E_1 = \{y_i\}$ системи о заман там адланыр ки, $\overline{L_1(E_i)} = X$ олсун.

§ 2. НОРМАЛАШМЫШ ФӘЗА

Фәрз едәк ки, X мүәјјән, Φ меіанында верилмиш хәтти фәзадыр. $x \in X$ олан истәнилән x елементини көтүрәрәк бу елементә гаршы мүәјјән мәнфи олмајан әдәд гаршы гојараг ашағыдакы аксиомларын өдәнилдијини фәрз едәк:

Тә'риф 1. $\|x\|=0$ олмасы үчүн $x=0$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Истәнилән $x\in X$ вә $\alpha\in Ф$ олдугда:

2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.

3. $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. Бу үчбучаг аксиом адланыр. *Бу шәртләр дахилиндә хәтти X фәзасы нормалашмыш адланыр.* Әкәр X нормалашмыш фәза исә бу фәзаны һәмишә метрик фәзаја чевирмәк олар. Доғрудан да, әкәр

$$\rho(x,\ y)=\|x-y\| \tag{1}$$

оларса, ашкардыр ки:

1) $\rho(x,\ y)\geqslant 0$ олур;

2) $\rho(x,\ y)=0$ бәрабәрлијиндән $x=y$ олмасы вә әксинә, $y=x$ олдугда бунун өдәнилдији алыныр;

3) Нәһајәт, $\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$ өдәнилир.

Беләликлә, X метрик фәзаја чеврилир. Ола билсин ки, хәтти фәза метрик фәза олдуғу һалда һәмин фәзаны нормалашдырмаг мүмкүн олмасын. Лакин хәтти метрик фәзада верилмиш метрикадан ихтијари x, y вә z елементләри вә ихтијари λ әдәди үчүн

$$\rho(x,\ y)=\rho(x+z,\ y+z), \tag{2}$$
$$\rho(\lambda x,\ \lambda y)=|\lambda|\rho(x,\ y)$$

шәртләринин өдәнилмәсини тәләб етсәк, онда метрик фәзаны нормалашмыш фәзаја чевирмәк олар. Бу һалда норма $\rho(x,0)=\|x\|$ бәрабәрлији васитәсилә тә'јин олунур. Бурада $\|x\|\geqslant 0$, $x=0$, *олдугда* $\|x\|=0$ вә әксинә $\|x\|=0$ олдугда исә $\rho(x,0)=0$, $x=0$ олур. $y=0$ олдугда $\rho(\lambda x,\ 0)=\lambda\rho(x,\ 0)$-дан $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$. Үчбучаг аксиомунун өдәнилдијини көстәрәк

$$\|x+y\|=\rho(x+y,\ 0)=\rho(x,\ -y)\leqslant\rho(x,\ 0)+$$
$$+\rho(0,\ -y)=\|x\|+\|y\|,$$

беләликлә

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

олмагла метрик фәза нормалашмыш фәзаја чеврилир.

X фәзасында метриканын вә норманын верилмәсилә әлагәдар олараг ујғун тополокија бунлар васитәсилә верилә биләр.

Әкәр X нормалашмыш хәтти фәзасы там исә онда белә фәза Банах фәзасы адланыр. Кәләчәкдә X Банах фәзасыдыр әвәзинә $X-(B)$ фәзадыр јазачағыг.

§ 3. ФАКТОР ФӘЗА

Функсионал анализдә бир чох мәсәләләрин һәллиндә верилмиш фәзадан мүәјјән типли фәзанын дүзәлмәси лазым кәлир ки, белә фәзалардан бири фактор фәза адланыр. Биз һәмин фәзанын тә'рифини вермәклә бир нечә хассәләрини көстәрәк. Фәрз едәк ки, X хәтти вектор фәзадыр вә $M \subset X$ олан мүәjjән хәтти алт чохлугдур. $x \in X$ олан гејд олунмуш елемент көтүрәк. X-дән елә y елементләрини сечәк ки, $y - x \in M$ олсун. Бу һалда y вә x M модулуна көрә мүгајисә олунан адланараг: ашағыдакы кими ишарә олунур.

$$y \equiv x (mod M). \tag{1}$$

M хәтти алт чохлуг олдуғундан еләчә дә,

$$x \equiv y (mod\, M) \tag{2}$$

өдәнилир.

Һәмчинин ашкардыр ки, $x \equiv x\ (mod\ M)$. (1)-и өдәјән y-ләр чохлуғуну ξ_x илә ишарә едәк. $x_2 \equiv x_1 (mod\ M)$ вә $x_2 \equiv \equiv x_3 (mod\ M)$ оларса, $x_1 \equiv x_3 (\mathrm{mod}\ M)$. Доғрудан да тә'рифә көрә

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \in M, \\ x_2 - x_3 \in M, \end{aligned} \tag{3}$$

өдәнилдикләриндән, бурадан $x_1 - x_3 \in M$ олмагла $x_1 \equiv x_3 (mod\ M)$ өдәнилир.

Көстәрәк ки, әкәр $y \in \xi_x$ исә $\xi_y = \xi_x$ олур. Она көрә дә фәрз едәк ки, $y \in \xi_x$. Онда тә'рифә көрә $y - x \in M$.

Инди $z \in \xi_y$ олсун еләчә дә тә'рифә көрә

$$z - y \in M, \tag{4}$$

M алт хәтти чохлуг олдуғундан (2) вә (4)-дән

$$z - x \in M. \tag{5}$$

Бурадан $z \in \xi_x$ олур, демәли, көстәрдик ки, $z \in \xi_y$ олдугда, онда $z \in \xi_x$ олур. Јә'ни:

$$\xi_y \subseteq \xi_x \tag{6}$$

өдәнилир.

Инди $z \in \xi_x$ олдуғуну гәбул едәк. Онда:

$$z - x \in M. \tag{7}$$

x вә y-ин һәр икиси ејни синифдән олдуғундан:

$$x - y \in M \tag{8}$$

(7) вә (8)-дән $z - y \in M$ ајдындыр ки, $z \in \xi_y$.

Јә'ни:

$$\xi_x \subseteq \xi_y \tag{9}$$

(6) илә мүгајисә олунарса, $\xi_x = \xi_y$. Биз бурада X-дан көтүрүлмүш һәр бир x елементинә гаршы мүәjjән гајда илә бир гијмәтли ξ_x чохлуғуну гаршы гојдуг. Инди елементләри ξ_x кими чохлуглардан ибарәт олан мүәjjән бир фәза дүзәлдәрәк һәмин фәзаны X/M кими ишарә едәк. X/M фәзасы X фәзасынын M хәтти алт чохлуғуна көрә фактор фәзасы адланыр.

X/M фәзасынын бир нечә хассәләрини көстәрәк. X/M фәзасында чәбри әмәлләр дахил едәк. Мәсәлән, ξ_x, $\xi_y \in X/M$ исә, онда $\xi_x = x + M$, $\xi_y = y + M$. Бу бәрабәрликләрдән:

$$\xi_x + \xi_y = x + y + M. \tag{10}$$

Бурадан алырыг ки, ξ_{x+y} (10) васитәси илә тә'јин олунур. X/M-дән олан ξ_{x+y} елементи ξ_x вә ξ_y елементләринин чәми адланыр.

Беләликлә:

$$\xi_{x+y} = \xi_x + \xi_y. \tag{11}$$

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, јухарыда гејд етдијимиз белә бир чәм биргијмәтли тә'риф олунур. Башга сөзлә ξ_{x+y}, $x_1 \in \xi_x$, $y_1 \in \xi_y$ дахил олан x_1 вә y_1-дән асылы дејилдир.

$x_1 - x \in M$ вә $y_1 - y \in M$ олдугларындан $x_1 + y_1 - (x+y) \in M$, она көрә көстәрмишдик ки, $\xi_{x_1+y_1} = \xi_{x+y}$. Јери кәлмишкән гејд едәк ки, M-ин X/M фәзасынын сыфры олмасы ашкардыр. Буну ξ_0 илә ишарә едәк. Инди α әдәдини ξ_x һасилини тә'јин едәк. $\xi_x = x + M$ олдуғундан, бурадан:

$$\alpha\xi_x = \alpha x + M.$$

бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндән көрүндүјү кими, X/M-ә дахил олан мүәјјән бир елемент алыныр ки, бу да αx васитәсилә тә'јин олунур. Бу елемент α-нын ξ_x-ә һасили адланараг $\xi_{\alpha x} = \alpha\xi_x$ јазылыр. Беләликлә, бу чәбри әмәлләрдән сонра X/M хәтти фәзаја чеврилир.

Теорем 1. X нормалашмыш фәза вә M, X-ин алт фәзасы олдугда X/M нормалашмыш фәзаја чевирмәк олар.

Исбаты. Бу фәзада норманы ашағыдакы кими тә'јин едәк:

$$\| \xi_x \| = \inf_{x \in \xi_x} \| x \| . \tag{12}$$

Исбат едәк ки, бу гајда үзрә тә'јин олунмуш норма, норма аксиомларыны өдәјир. X фәзасынын сыфры ξ_0-ә дахил олдуғундан (12)-дән $\| \xi_0 \| = 0$. Инди фәрз едәк ки, мүәјјән бир ξ_x үчүн $\| \xi_x \| = 0$. Онда $\xi_x = \xi_0$ олдуғуну көстәрәк. Онда $\| \xi_x \|$-ин тә'рифинә көрә:

$$\inf_{x \in \xi_x} \| x \| = 0. \tag{13}$$

Она көрә $x_n \in \xi_x$ елә $\{x_n\}$ ардычыллығы гурмаг олар ки,

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| = 0.$$

Демәли, $x_n \to 0$ олдуғундан ξ_x-ин гапалы олдуғуну нәзәрә алсаг, $0 \in \xi_x$, $\xi_x = \xi_0$ олур. Беләликлә:

1. $\| \xi_x \| = 0$ олмасы үчүн $\xi_x = \xi_0$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир,

2. $\| \alpha\xi_x \| = | \alpha | \, \| \xi_x \|$ өдәнилмәси $\alpha\xi_x$-ин тә'рифиндән ашкардыр,