ҺЕСАБЛАМА МЕТОДЛАРЫ ВӘ ЕҺМ-ин ТӘТБИГИ

Дәрс вәсаити

Азәрбајҹан Республикасы
Халг Тәһсили Назирлији тәрәфиндән
төвсијә олунмушдур

Бакы
Университети нәшријјаты
1 9 9 1

ББК
22.12+32.973—01
И 78

**Ә. Исмајылов, М. Әлијев, Ч. Әлизадә,
И. Нәбијев**

Рә'јчиләр:
Ч. Илдырым адына Азәрбајҹан Политехник Институтунун «Һесаблама техникасы» кафедрасы; техника елмләри намизәди, дос. *А. Садыхов*.

Елми редактору: физика-ријазијјат елмләри доктору *Ч. Бабајев*.

Исмајылов Ә., Әлијев М. вә б.

И 78 Һесаблама методлары вә ЕҺМ-ин тәтбиги. Дәрс вәсаити. —Бакы, Бакы Университети нәшријјаты, 1991.—236 сәһ., шәкилли.

Китабда хәталар нәзәријјәсинин әсас анлајышлары, интерполјасија чохһәдлиләринин вә емпирик дүстурларын гурулмасы, сыраларын тәгриби топланмасы, әдәби интеграллама вә диференсиаллама мәсәләләри, хәтти вә гејри-хәтти, еләҹә дә ади вә хусуси төрәмәли диференсиал тәнликләрин һәлли методлары әтрафлы нәзәрдән кечирилир. Шәрһ олунан методларын әксәријјәти муасир ЕҺМ-ләрдә истифадә етмәк үчүн ФОРТРАН вә БЕЈЗИК дилләриндә јазылан мүвафиг програмларла мүшајиәт олунур.

Дәрс вәсаити техники али мәктәб тәләбәләри үчүн нәзәрдә тутулмушдур.

$И\frac{2404000000-019}{М\ 65-91}$ 14—89

ISBN 5—8025—0013—1

КИРИШ

Елм вә техниканын мүасир дөврдә сүр'әтли инкишафы илә әлагәдар олараг мүһәндис вә конструкторларын елми фәалиjjәтиндә електрон һесаблама машынларындан (ЕҺМ) кениш истифадә едилмәси күнүн вачиб мәсәләләриндән биридир. Електрон һесаблама машынларындан истифадә олунмасы мүрәккәб характерли обjектләрин тәһлил едилмәсинә, бу обjектләрдә кедән просесләрин риjази моделләринин гурулмасына сәрф едилән вахтын хеjли азалмасына имкан верир.

Чох вахт практикада мүрәккәб характерли обjектләрин вә просесләрин моделләшдирилмәси заманы меjдана чыхан риjази мәсәләләри дәгиг һәлл етмәк мүмкүн олмур. Буна әсас сәбәб мәсәлә һәллинин елементар функсиjалар васитәсилә тәсвир олуна билмәмәсидир. Одур ки, белә мәсәләләрин һәлли үчүн тәгриби һесаблама вә jахуд әдәди методлардан кениш истифадә едилмәсинин мүһүм әһәмиjjәти вар. Мәсәлән, верилмиш

$$\int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = 1{,}5$$

интегралыны әдәди методлар тәтбиг етмәдән, билаваситә һесабламаг мүмкүн олдуғу һалда,

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

интегралыны елементар функсиjалар васитәсилә һесабламаг мүмкүн деjил; бурада әдәди методлардан мүтләг истифадә едилмәлидир. Белә олан һалда верилмиш интегралы интеграл чәми илә тәгриби әвәз етмәк олар. Мәсәлән:

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\sin x_\kappa}{x_\kappa}\,\Delta x_\kappa,$$

бурада $x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2,$

$$\Delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n.$$

Һесаблама заманы даһа jүксәк дәгиглик әлдә етмәк үчүн $\max\Delta x_\kappa$-нын гиjмәтини кичилтмәк лазым кәлир. Даһа доғрусу, һесабламаларын саjыны (n-и) артырмаг лазымдыр.

Практикада тәгриби һесаблама заманы һесаблама хәтасынын мә'лум олмасы тәләб олунур. Бу тәләби јеринә јетирмәк үчүн ашағыда көстәрилән суалларын арашдырылмасы әһәмијјәт кәсб едир:

1) n вә $x_к$-нын ($к=0,1,...,n$) верилмиш гијмәтләриндә интегралын һесабланма хәтасыны нечә тә'јин етмәли?

2) нәтичә үчүн дәгиглик верилдикдә һесабламаларын һәчминин минимал олмасы үчүн n-и вә $x_к$ нөгтәләрини нечә көтүрмәли?

Китабда мүхтәлиф кәмијјәтләрин гијмәтләринин тәгриби һесабланмасы вә һесабламадан алынан хәтанын гијмәтинин тә'јин едилмәси үсулларына бахылыр.

ЕҺМ мејдана чыхана гәдәр ријазијјат елминдә әдәди методлара кифајәт гәдәр диггәт јетирилмирди. Инди исә јүксәк сүр'әтлә ишләјән ЕҺМ-дән истифадә олунмасы әдәди методлар васитәсилә ән чәтин мәсәләләрин гыса мүддәтдә һәлл едилмәсинә имкан верир. Мсәлән, күндәлик һава һаггында мә'лумат илә әлагәдар олан мәсәләләр бир нечә саат, сүр'әтли технложи просесләрин идарә олунмасы мәсәләләри исә санијәләр әрзиндә һәлл олунур.

Китабда һесаблама вә ја әдәди методлар ады алтында ЕҺМ-ин әдәдләр үзәриндә апардығы һесаб вә мүәјјән мәнтиг әмәлијјаты васитәси илә мәсәләләрин һәлл үсуллары нәзәрдә тутулур. Бу методларын өјрәнилмәсиндә әсас мәгсәд онлардан практикада реал мәсәләләрин һәлли үчүн бачарыгла истифадә едилмәсидир. Одур ки, китабда өјрәниләчәк методлардан чохларынын ЕҺМ-дә тәтбиг олунмасы үчүн һазыр ФОРТРАН вә БЕЈЗИҚ програмлары верилмишдир (ФОРТРАН вә БЕЈЗИҚ дилләриндә јазылмыш програмлар ујғун олараг ФОРТРАН-програм вә БЕЈЗИҚ-програм адланыр).

I ФӘСИЛ

ТӘГРИБИ ӘДӘДЛӘР. ХӘТА АНЛАЈЫШЫ

1.1. ХӘТАЛАРЫН ЈАРАНМА СӘБӘБЛӘРИ

Һесаблама просеси заманы мәсәләнин һәллиндә раст кәлән әдәдләр дәгиг вә тәгриби ола биләр. Дәгиг рәгәм әдәдин һәгиги гијмәтини, тәгриби рәгәм исә онун һәгигијә јахын гијмәтини верир, һәм дә бу јахынлыг һесабламанын хәтасы илә тә'јин олунур. Мәсәлән, десәк ки, бир әлдә 5 бармаг вар вә ја намә'лум синифдә 32 ушаг охујур, бурада 5 вә 32 әдәдләри дәгиг әдәдләрдир. Әкәр десәк ки, гутунун чәкиси 50 г-дыр, бурада 50 рәгәми тәгриби олачагдыр, чүнки автоматик тәрәзи өлчү апарылан заман чәкинин 0,5 г-а гәдәр дәјишмәсини һисс етмир вә с.

Әксәр реал мәсәләләрдә бир кәмијјәтин һәгиги гијмәтини тапмаг мүмкүн олмур, онда һәгиги гијмәти тәгриби гијмәтлә әвәз едирләр. Чох вахт исә һесаблама просесини садәләшдирмәк мәгсәди илә биләрәкдән дәгиг гијмәти тәгриби гијмәтлә әвәз едирләр. Беләликлә, дәгиг A әдәдиндән азча фәргләнән вә һесабламалар заманы ону әвәз едән a әдәди **тәгриби әдәд** адланыр.

Бу вә ја дикәр мәсәләләрин һәллиндә хәталар јарандығына көрә һөкмән һесаблама просесиндә бурахыла билән максимал хәтанын гијмәти, јә'ни мәсәләнин һәллинин дәгиглији көстәрилмәлидир.

Мәсәләнин тәгриби методларла һәлли заманы јаранан хәта, мүхтәлиф сәбәбләрдән әмәлә кәлә билән ајры-ајры хәталарын нәтичәсидир. Әсас хәталар вә онлары јарадан сәбәбләри ашағыдакы кими көстәрмәк олар:

1) реал просеслә онун ишини тәсвир едән ријази модел арасындакы ујғунсузлуг, јә'ни ихтијари просеси тәсвир едән ријази модел һәмин просеслә там адекват ола билмир;

2) мәсәләнин шәртләриндә верилән кәмијјәтләрин гијмәтләри мүхтәлиф сәбәбләрдән, о чүмләдән, онларын бир һиссәси тәчрүбә јолу илә тә'јин олундуғундан, тәгриби олур (мәсәлән, π, e әдәдләрини, физики әмсаллары вә с. көстәрмәк олар);

3) мәсәләнин һәлл едилмәси үчүн истифадә олунан методларын өзләри тәгриби олур. Мәсәлән, ујғун интеграл чәминин лимитинә бәрабәр олан интеграл, сонлу һәдләри олан чәмлә әвәз олунур вә с.;

4) әдәдләр үзәриндә әмәлијатлар јеринә јетирилән заман јуварлаглашдырма апарылыр.

Биринчи ики сәбәбдән әмәлә кәлән һәлл хәталары **ләғв олунмаз хәталар** адланыр. Бурада арашдырылан ријази мәсәләнин һәлли нә гәдәр дәгиг алынса да, бу хәта мөвчуд олачагдыр. Алынмыш бу чүр хәталарын гијмәтләрини тапмаг олар. Бунун үчүн ријази моделин тәдгиг олунан просеси нә дәрәчәдә дəгиг тəсвир етдиjини тапмаг үчүн експеримент нəтичəсиндə алынан гиjмəтлəр илə кириш параметрлəринин бир нечə мүхтəлиф гиjмəтлəриндə хүсуси типик һəллдəн тапылан нəтичəлəри мүгаjисə етмəк лазымдыр. Мəсəлəн, мəсəлəнин шəртиндəки башланғыч гиjмəтлəрин хəтасы чох вахт башланғыч шəртлəри хəталар интервалында дəjишдирмəклə, һəмчинин, һəллəри гejд етмəклə тапылыр.

Əдəди вə jа һесаблама методлары өзлəри чох вахт тəгриби олур. Одур ки, мəсəлəнин шəртиндəки кəмиjjəтлəр дəгиг верилсəлəр дə, мəсəлəнин һəлли методун хəтасы адланан хəта илə тапылыр. Хəтанын азалдылмасы тəтбиг олунан методун вачиб характеристикаларындан биридир.

Хəтанын jаранмасынын дикəр сəбəбинə мисал олараг ЕҺМ-дə əдəдин кичик мəртəбəлəринин атылмасыны көстəрмəк олар. Мəсəлəн, тутаг ки, 0,7835478931 рəгəмини ЕҺМ-ин jувасына jазмаг тəлəб олунур. Əкəр машынын дəрəчə тору jедди мəртəбəли онлуг əдəди jазмаға имкан верəрсə, аjдын мəсəлəдир ки, əдəд машынын jувасында jуварланараг 0,7835479 кими jазылачагдыр.

ЕҺМ-дə мəсəлəни һəлл едəн заман ики вəзиjjəт jарана билəр. Биринчиси, əкəр апарылан һесаб əмəллəринин саjы чох деjилдирсə, онда jуварлаглашдырмадан алынан хəта һисс олунмаjачагдыр; чүнки мүасир ЕҺМ-дə əдəдлəр 10 вə jа даһа чох гиjмəтли рəгəмлəрлə тəсвир едилсə дə, надир һалларда алынан нəтичəнин 5 гиjмəтли рəгəмдəн артыг олмасы тəлəб едилир. Əкəр мəсəлə мүрəккəбдирсə (мəсəлəн, хүсуси төрəмəли диференсиал тəнлиjин һəлли) вə онун һəлли үчүн тутаг ки, 10^7 гəдəр һесаб əмəлиjjаты апарылачагса, онда тəбиидир ки, һəр бир əмəлиjjат үчүн jуварлаглашдырма хəтасыны нəзəрə алмаг реал деjилдир. Белə һалларда əмəллəрин хəталарыны садəчə топламаг олмаз. Бу, хəтанын гиjмəтини һəддиндəн артыг артырар, бу да өз нөвбəсиндə һесаблама əмəлиjjатынын уғурсуз гуртармасына сəбəб ола билəр. Дикəр тəрəфдəн нəзəрə алмаг лазымдыр ки, jуварлаглашдырманын хəтасы һəм гиjмəтчə, һəм дə ишарəчə өзүнү тəсадүфү апарыр. Она көрə дə jуварлаглашдырма хəтасынын гиjмəти вə ишарəси гаршылыглы олараг бири-бирини компенсасиjа етмəк имканы əлдə едир. Бунунла белə, гejд етмəк лазымдыр ки, мүрəккəб мəсəлəлəри һəлл едəн заман jуварлаглашдырмадан алынан хəта мүтлəг нəзəрə алынмалыдыр.

Хəталары гиjмəтлəндирмəк үчүн ашағыдакы гиjмəтлəндирмə үсулларындан истифадə етмəк олар: мүтлəг хəта васитəсилə; нисби хəта васитəсилə; галыг һəдд васитəсилə; статистик гиjмəтлəндирмə васитəсилə вə с.

1.2. МҮТЛƏГ ВƏ НИСБИ ХƏТАЛАР

Дəгиг A əдəди илə онун тəгриби a гиjмəти арасындакы фəргин мүтлəг гиjмəти a тəгриби əдəдинин **мүтлəг хəтасы** адланыр:

$$\Delta a = |A - a|. \qquad (\text{I. } 2-1)$$

Бурада ики һал ола биләр:

1) дәгиг A әдәди мә'лумдур. Онда мүтләг хәта (I. 2—1) дүстуру илә тапылыр;

2) дәгиг A әдәди мә'лум дејилдир. Онда $\Delta a^* \geqslant |A - a|$ шәртини өдәјән мүтләг хәта сәрһәдди анлајышындан истифадә олунур. Бурада Δa^* һүдуд мүтләг хәтасы адланыр.

$$\Delta a = |A - a| \leqslant \Delta a^*. \qquad (\text{I. } 2-2)$$

Дәгиг A әдәдинин гијмәти һәмишә

$$a - \Delta_a^* \leqslant A \leqslant a + \Delta_a^* \qquad (\text{I. } 2-3)$$

сәрһәдләриндә јерләшир. Мәсәлән, узунлуғу $l = 184$ см олан бир парча 0,05 см дәгигликлә өлчүлүбсә, онда l-ин дәгиг гијмәти $183{,}95 \leqslant l \leqslant 184{,}05$ сәрһәдләриндә јерләшәчәкдир.

Чох вахт апарылан өлчүләрин кејфијјәтини тә'јин етмәк үчүн мүтләг хәтанын өлчүлән кәмијјәтин һансы һиссәни тәшкил етдијини өјрәнмәк лазым кәлир, јә'ни нисби хәта анлајышындан истифадә олунур:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}. \qquad (\text{I. } 2-4)$$

Бурадан алырыг:

$$\Delta_a = \delta_a |A|. \qquad (\text{I. } 2-5)$$

Јухарыда көстәриләнләрә ујғун олараг тәгриби әдәдин һүдуд нисби хәтасы

$$\delta_a \leqslant \delta_a^* \qquad (\text{.I } 2-6)$$

олар. (I. 2—4) вә (I. 2—6) дүстурларындан алырыг:

$$\frac{\Delta_a}{|A|} \leqslant \delta_a^*,$$

$$\Delta a \leqslant \delta_a^* |A|.$$

Дикәр тәрәфдән, (I. 2—2)-ни нәзәрә алсаг:

$$\Delta_a^* = \delta_a^* |A|. \qquad (\text{I. } 2-7)$$

Бурадан:

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|A|}. \qquad (\text{I. } 2-8)$$

Нәзәрә алсаг ки, A әдәди, адәтән мә'лум олмур вә $A \approx a$ көтүрүлүр, онда (I. 2—7) вә (I. 2—8) дүстурларына әсасән һүдуд мүтләг хәтасы үчүн:

$$\Delta_a^* = \delta_a^* |a|$$

вә һүдуд нисби хәтасы үчүн алырыг:

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}.$$

Мисал. Верилмиш

$$a_1 = \frac{13}{19} \approx 0{,}684,$$

$$a_2 = \sqrt{52} \approx 7{,}21$$

бәрабәрликләринин һансынын даһа дәгиг олдуғуну тә'јин етмәли.

Һәлли: Бунун үчүн онлуг рәгәмләрин сајыны 2 ваһид артыраг. Онда

$$\frac{13}{19} \approx 0{,}68421,$$

$$\sqrt{52} \approx 7{,}2111.$$

Әввәлчә, һүдуд мүтләг хәталарыны тапаг:

$$\Delta_{a_1} = |0{,}68421 - 0{,}684| \leqslant 0{,}00022,$$

$$\Delta_{a_2} = |7{,}2111 - 7{,}21| \leqslant 0{,}0012.$$

Сонра исә һүдуд нисби хәталары тапырыг:

$$\delta^*_{a_1} = \frac{\Delta^*_{a_1}}{a_1} = \frac{0{,}00022}{0{,}684} \approx 0{,}00033 = 0{,}033\%,$$

$$\delta^*_{a_2} = \frac{\Delta^*_{a_2}}{a_2} = \frac{0{,}0012}{7{,}21} \approx 0{,}00017 = 0{,}017\%,$$

$\delta^*_{a_2} < \delta^*_{a_1}$ олдуғундан a_2 гијмәти даһа дәгиг олачагдыр.

1. 3. ҺЕСАБЛАМА ӘМӘЛИЈЈАТЛАРЫНДА НӘТИЧӘНИН ХӘТАСЫ

1. 3. 1. Чәмин вә фәргин хәтасы

Теорем. *Бир нечә тәгриби әдәдләрин чәбри чәминин мүтләг хәтасы һәмин әдәдләрин мүтләг хәталарынын чәминдән бөјүк олмур.*

Исбаты: Тутаг ки, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ихтијари ишарәли дәгиг әдәдләрдир, $A = X_1 + X_2 + \cdots X_n$, $a = x_1 + x_2 + \cdots x_n$ исә x_i $(i = \overline{1, n})$ тәгриби әдәдләрин чәбри чәмидир. Онларын мүтләг хәталары уйғун олараг $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$-дир. Онда:

$$A - a = (X_1 - x_1) + (X_2 - x_2) + \cdots + (X_n - x_n).$$

Мүтләг гијмәтә кечсәк:

$$|A - a| \leqslant |X_1 - x_1| + |X_2 - x_2| + \cdots + |X_n - x_n|.$$

Демәли,

$$\Delta a \leqslant \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n, \qquad (I.\ 3.\ 1-1)$$

јә'ни теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Чәбри чәмин һүдуд мүтләг хәтасы топлананларын һүдуд мүтләг хәталарынын чәминә бәрабәрдир.*

Мә'лумдур ки,

$$\Delta x_1 \leqslant \Delta x^*_1;\quad \Delta x \leqslant \Delta x^*; \ldots; \Delta x_n \leqslant \Delta x^*_n$$

(I. 3. 1—1)-дә јеринә јазсаг, $\Delta a \leqslant \Delta x^*_1 + \Delta x^*_2 + \cdots + \Delta x^*_n$ вә ја $\Delta_a \leqslant \Delta^*_a$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$\Delta^*_a = \Delta^*_{x_1} + \Delta^*_{x_2} + \cdots + \Delta^*_{x_n}. \qquad (1.\ 3.\ 1-2)$$

Алынмыш (1. 3. 1—2) дустуру ону көстәрир ки, чәбри чәмин һудуд мүтләг хәтасы һәр һансы даһа дәгиг топлананын һудуд мүтләг хәтасындан аз ола билмәз вә дәгиглији, топлананларын сајыны чохалтмаг һесабына артырмаг мүмкүн дејил.

Бир нечә тәгриби әдәдләрин чәминин һуд д нисби хәтасыны тә'јин едәк. Бу заман ики һал ола биләр:

1) бүтүн топлананлар ејни ишарәлидир;

2) топлананлар мүхтәлиф ишарәјә маликдир.

Биринчи һала бахаг. Тутаг ки,

$$a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

вә x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ әдәдләринин $\Delta^*_{x_1}, \Delta^*_{x_2}, \ldots, \Delta^*_{x_n}$ һудуд мүтләг хәталары мә'лумдур. Садәлик үчүн $x_i > 0$ көтүрәк. Онда

$$\delta^*_a = \frac{\Delta^*_a}{a}.$$

1. 3. 1—2) дустуруну нәзәрә алсаг:

$$\delta^*_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^*_{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

Дикәр тәрәфдән

$$\Delta^*_{x_i} = x_i \cdot \delta^*_{x_i}.$$

Онда

$$\delta^*_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \delta^*_{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

$\delta^*_{x_i}$ әдәдләринин ән бөјүјүнү δ^*_{max}, ән кичијини исә δ^*_{min} илә ишарә етсәк, аларыг

$$\delta^*_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \delta^*_{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i} < \frac{\delta^*_{max} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=n}^{n} x_i} = \delta^*_{max}.$$

Аналожи олараг

$$\delta^*_a > \delta^*_{min}.$$

Беләликлә,

$$\delta^*_{min} < \delta^*_a < \delta^*_{max}.$$

Демәли, ејни ишарәли топлананлар ҹәминин һүдуд нисби хәтасы онларын ән бөјүк вә ән кичик һүдуд нисби хәталары арасында јерләшир.

Икинчи һала бахаг. Тутаг ки, $x>0$, $y>0$ вә $a=x-y$. Онда

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|} = \frac{\Delta_x^* + \Delta_y^*}{|x-y|}.$$

Бу ифадәдән көрүнүр ки, әкәр x вә y әдәдләри бир-бириндән аз фәргләнәрсә, бу һалда һәтта Δ_x^* вә Δ_y^* кичик олса да, һүдуд нисби хәтасы чох бөјүк алыныр.

Мисал. Тутаг ки, $x=5{,}125$; $y=5{,}135$; $\Delta_x^*=0{,}0005$; $\Delta_y^* = 0{,}0005$. Онда $\delta_x^* \approx \delta_y^* \approx 0{,}01\%$. Лакин $a=x-y$ фәргинин δ_a^* һүдуд нисби хәтасыны һесабласаг;

$$\delta_a^* = \frac{0{,}0005+0{,}0005}{0{,}01}\cdot 100\% = 10\%.$$

Көрүндүјү кими, белә һалда дәгиглијин чох бөјүк иткиси алыныр. Бунун гаршысыны алмаг үчүн һесаблама схемләрини елә дәјишдирирләр ки, кәмијјәтләр арасында кичик фәргләр билаваситә һесаблансын.

1. 3. 2. Һасилин хәтасы

Теорем. *Сыфырдан фәргли олан тәгриби вуругларын һасилинин нисби хәтасы бу вуругларын нисби хәталарынын ҹәминдән артыг олмур.*

Исбаты. Тутаг ки,

$$U = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n. \qquad (1.\ 3.\ 2-1)$$

Мүәјјәнлик үчүн $x_i>0$ $(i=\overline{1,n})$ вә онларын мүтләг хәталары $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ олдуғуну һесаб едәк. (1. 3. 2—1) дүстуруну логарифмләсәк

$$\ln U = \ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n$$

алырыг. Билирик ки,

$$\Delta \ln U \leqslant \Delta \ln x_1 + \Delta \ln x_2 + \cdots + \Delta \ln x_n.$$

Тәгриби

$$\Delta \ln x \approx |d \ln X| = \frac{\Delta x}{|X|}$$

дүстурундан истифадә етсәк,

$$\frac{\Delta U}{U} \leqslant \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \cdots + \frac{\Delta x_n}{x_n} \qquad (1.\ 3.\ 2-2)$$

алырыг. Бурадан

$$\delta_u \leqslant \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \cdots + \delta_{x_n} \qquad (1.\ 3.\ 2-3)$$

(1. 3. 2—2) дүстурунда x-ләр үчүн она көрә мүтләг гијмәт көтүрмәдик ки, әввәлчәдән $x_i>0$ гәбул едилмишди. Үмумијјәтлә, исә x_i-ләр мүхтәлиф ишарәли гијмәтә малик оланда да (1. 3. 2—3) дүстуру доғру олур.

Нәтиҹә. *Һасилин һүдуд нисби хәтасы вуруланларын һүдуд нисби хәталары ҹәминә бәрабәрдир.*

Доғурдан да

$$\delta^{*}_{x_1} \geqslant \delta_{x_1},\ \delta^{*}_{x_2} \geqslant \delta_{x_2},\ \ldots,\ \delta^{*}_{x_n} \geqslant \delta_{x_n}$$

Һүдуд нисби хәталарын бу гиjмәтләрини (1. 3. 2—3) бәрабәрсизлиjиндә jеринә jазсаг

$$\delta_u < \delta^{*}_{x_1} + \delta^{*}_{x_2} + \cdots + \delta^{*}_{x_n}$$

вә jа $\delta_u \leqslant \delta^{*}_u$ бәрабәрсизлиjини нәзәрә алсаг аларыг:

$$\delta^{*}_u = \delta^{*}_{x_1} + \delta^{*}_{x_2} + \cdots + \delta^{*}_{x_n}. \qquad (1.\ 3.\ 2—4)$$

Әкәр бир вуруландан башга, дикәр вуруланлар дәгиг әдәдләрдирсә, онда (1. 3. 2—4) дүстурундан көрүнүр ки, һасилин һүдуд нисби хәтасы һәмин тәгриби вуруланларын һүдуд нисби хәтасы илә үст-үстә дүшүр:

$$\delta^{*}_u = \delta^{*}_{x_i}. \qquad (1.\ 3.\ 2—5)$$

Гејд. x тәгриби әдәдини K дәгиг әдәдинә вураркән һасилин һүдуд нисби хәтасы x тәгриби әдәдин һүдуд нисби хәтасына бәрабәр олур. Һүдуд мүтләг хәтасы исә тәгриби вуругун һүдуд мүтләг хәтасындан $|K|$ дәфә чох олур.

Доғурдан да $u = K\cdot x$-дырса $\Delta^{*}_u = |u|\cdot\delta^{*}_u$ олар. (1. 3. 2—5) дүстуруну нәзәрә алсаг:

$$\Delta^{*}_u = |u|\,\delta^{*}_x = |KX|\,\delta^{*}_x = |KX|\cdot\frac{\Delta^{*}_x}{|x|} = |K|\,\Delta^{*}_x$$

U һасилинин һүдуд нисби хәтасыны биләрәк мүтләг хәтаны да тә'јин етмәк олар:

$$\Delta^{*}_u = |u|\,\delta^{*}_u$$

1. 3. 3. Нисбәтин хәтасы

Теорем. *Нисбәтин нисби хәтасы бөлүнән вә бөләнин нисби хәталары ҹәминдән бөјүк олмур.*

Исбаты. Тутаг ки, x вә y тәгриби әдәдләрдир. Онларын мүтләг хәталары Δx вә Δy-дир. Садәлик үчүн $x > 0$ вә $y > 0$ көтүрәк вә

$$u = \frac{x}{y} \qquad (1.\ 3.\ 3—1)$$

ифадәсинин хәтасыны тапаг. (1. 3. 3—1) дүстуруну логарифмләјәк. Онда:

$$\ln u = \ln x - \ln y.$$

Тәгриби әдәдләрин ҹәбри ҹәминин мүтләг хәтасынын топлананларын мүтләг хәталары ҹәминдән бөјүк олмадығыны нәзәрә алсаг:

$$\Delta \ln u \leqslant \Delta \ln x + \Delta \ln y.$$

Онда тәгриби

$$\Delta \ln u \approx |d \ln u| = \frac{\Delta u}{|u|}$$

дүстурундан истифадә етсәк:

$$\frac{\Delta u}{u} \leqslant \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

вә ја

$$\delta_u \leqslant \delta_x + \delta_y. \qquad (1.3.3\text{—}2)$$

(1. 3. 3—2) дүстуру x вә y кәмијјәтләринин мүхтәлиф ишарәли һалы үчүн дә доғрудур.

Нәтичә. ***Нисбәтин һүдуд нисби хәтасы бөлүнән вә бөләнин һүдуд нисби хәталары чәминә бәрабәрдир.***

Доғурдан да $\delta_x \leqslant \delta_x^*$, $\delta_y \leqslant \delta_y^*$, јә'ни

$$\delta_u \leqslant \delta_x^* + \delta_y^*.$$

Онда

$$\delta_u^* = \delta_x^* + \delta_y^*.$$

Г е ј д. Һасилин һүдуд мүтләг хәтасы үчүн олдуғу кими тәгриби әдәдләри нисбәти үчүн дә

$$\Delta_u^* = |u| \cdot \delta_u^*$$

јаза биләрик. Дикәр тәрәфдән, һасилин хәтасы үчүн гејд етдијимиз галан мүлаһизәләр нисбәт үчүн дә доғрудур.

1. 3. 4. Гүввәтин вә көкүн хәтасы

Теорем. ***Тәгриби әдәдин m дәрәчәли гүввәтинин (m—натурал әдәддир) һүдуд нисби хәтасы һәмин әдәдин һүдуд нисби хәтасындан m дәфә артыг олур.***

И с б а т ы. Тутаг ки, $u = x^m$. Онда:

$$u = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m\text{—дәфә}}.$$

Буна һасил кими бахсаг, нисби хәта үчүн:

$$\delta_u^* = \underbrace{\delta_x^* + \delta_x^* + \cdots + \delta_x^*,}_{m\text{—топланан}}$$

$$\text{јә'ни } \delta_u^* = m \cdot \delta_x^*.$$

М и с а л. Квадратын тәрәфи $a = 36{,}5$ см (0,1 мм-ә гәдәр дәгигликлә) олдуғуну нәзәрә алыб квадратын саһәсини, һәмчинин үјғун нисби вә мүтләг хәталары тапмалы.

Һәлли. Квадратын саһәси: $S = a^2 = 36{,}5^2 = 1332{,}25$ см^2.

нисби хәта:

$$\delta_s = 2\delta_a^* = \frac{2 \times 0{,}1}{36{,}5} \approx 0{,}054.$$

мүтләг хәта:

$$\Delta_S^* = S \cdot \delta_S^* = 1332{,}25 \cdot 0{,}0054 = 7{,}1941 \text{ см}^2$$

олачагдыр.

Теорем. ***m дәрәчәли көкүн һүдуд нисби хәтасы көкалты әдәдин һүдуд нисби хәтасындан m дәфә аз олур.***

Исбаты. Тутаг ки, $u=\sqrt[m]{x}$.

Онда

$$x=u^{m}.$$

Бурадан

$$\delta_x^*=m\cdot\delta_u^*,\qquad \delta_u^*=\frac{1}{m}\cdot\delta_x^*.$$

Беләликлә, теорем исбат олунду.

II ФӘСИЛ

ГЕЈРИ-ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ

2. 1. ГЕЈРИ-ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ СИСТЕМЛӘР. ТӘНЛИКЛӘРИН КӨКЛӘРӘ АЈРЫЛМАСЫ.

2. 1. 1. Чәбри вә трансендент тәнликләр

Практики мәсәләләрин һәлл едилмәсиндә чох вахт тәнлик вә ја тәнликләр системинин һәлли тәләб олунур. Бир намә'лум кәмијјәтли олан ихтијари тәнлији

$$\varphi(x)=g(x) \qquad (2.\ 1.\ 1\text{—}1)$$

шәклиндә көстәрмәк олар. Бурада $\varphi(x)$ вә $g(x)$ верилмиш X әдәдләр чохлуғунда тә'јин едилән функсијалардыр. Адәтән, (2. 1. 1—1) тәнлијиндә

$$\varphi(x)-g(x)=f(x)$$

әвәзләмәси апарыб

$$f(x)=0$$

ифадәсини јазырлар.

x-ын (2. 1. 1—1) тәнлијини ејнилијә чевирән гијмәтләри *тәнлијин һәлли*, бу гијмәтләрин һәр бири исә *тәнлијин көкү* адланыр.

Мәсәлән: $\sin x=0$ тәнлијинин һәлли $x=\pi n$-дир. Бурада n-ә ($n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$) мүхтәлиф гијмәтләр вермәклә тәнлијин сонсуз сајда көкләри чохлуғуну аларыг.

Бир нечә намә'лум кәмијјәти олан бир нечә тәнликләр јығымы *тәнликләр системи* адланыр. Системин һәр бир тәнлијини ејнилијә чевирән гијмәтләр исә *тәнликләр системинин һәлли* адланыр. Мәсәлән:

$$\begin{cases} x^2+y=5,\\ x+y^2=3.\end{cases}$$

Системин һәлли $x=2$, $y=1$ гијмәтләри олачагдыр. Доғрудан да, $4+1=5$; $2+1=3$ алынар.

Әкәр x-ин гијмәтинә көрә функсијанын гијмәтини тапмаг үчүн јалныз һесаб әмәлләри, һәмчинин, расионал әдәди гүввәтә јүксәлтмә әмәли тәләб олунарса, онда функсија **чәбри функсија** адланыр. Бу һалда көк алма да $1/n$ дәрәчәдән гүввәтә јүксәлтмә һесаб олуна биләр.

Әкәр x үзәриндә топлама, чыхма, вурма, бөлмә вә там дәрәчәли гүввәтә јүксәлтмә әмәлләриндән башга әмәлијјат апарылмазса, онда чәбри функсија **расионал функсија** адланыр. Мәсәлән:

$$f(x) = \frac{3}{x+7} + \frac{4x+3}{3x^2+5}.$$

Әкәр мәхрәчдә x олмаса (јә'ни x бөлән ифадәјә дахил олмаса), онда функсија **там-расионал**, екс һалда исә, јә'ни x мәхрәчә дахил оларса, функсија **кәср-расионал** адланыр.

Әкәр функсијанын гијмәтини тапмаг үчүн x үзәриндә көстәрилән әмәлијјатдан башга көкалма әмәлијјаты да апарыларса, онда $f(x)$ **иррасионал функсија** адланыр. Мәсәлән:

$$f(x) = \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x-1}}{7x-4}$$

функсијасы иррасионал,

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}x}$$

функсијасы исә x көк алтында олмадығы үчүн иррасионал дејил. Бүтүн расионал вә иррасионал функсијалар **чәбри функсијалар** синфинә дахилдирләр. Чәбри олмајан функсијалар **трансендент функсијалар** синфинә дахилдир. Онлара үстлү a^x, логарифмик $\log x$, тригонометрик $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$ вә саир функсијалар аиддир.

Јалныз чәбри функсијалардан ибарәт тәнликләр исә **чәбри тәнликләр** адланыр. Үмуми шәкилдә чәбри тәнликләр ашағыдакы шәклә кәтирилир:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (2.1.1\text{—}2)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ әдәдләри (2.1. 1—2) тәнлијинин **әмса'ллары** адланыр. Онлар һәм **һәгиги**, һәм дә **комплекс** ола биләрлөр.

Тәнлијин көкләринин гијмәтләрини хүсуси һалларда мүәјјән дүстурлар васитәсилә дәгиг тапмаг олар. Мәсәлән: $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тәнлијин көкләрини тапмаг үчүн

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2.1.1\text{—}3)$$

дүстурундан истифадә олунур.

ЕҺМ-дә квадрат тәнлијин һәгиги көкләрини (2. 1. 1—3) дүстуруна әсасән гурулмуш програмла һесабламаг олар. Бу програмда дәјишәнләрин идентификаторларыны ашағыдакы кими гәбул едәк:

әјишән	Програмдакы ады
a	A
$в$	B
c	C
x_1	X_1
x_2	X_2

Онда Фортран програмын мәтни бу шәкилдә олур:

```
      SUBROUTINE KBT (A,B,C,X1,X2)
      B24AC=B*B-4.*A*C
      IF (B24AC.LT.O.) CALL COMP
      DISK=SQRT(B24AC)
      X1=(DISK-B)/(2.*A)
      X2=((-B)-DISK)/(2.*A)
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE COMP
      WRITE (5,1)
1     FORMAT (5X,'ОТВЕТ КОМПЛЕКСНЫЙ')
      STOP
      END
```

Буна ујғун Бејзик програм ашағыдакы кими олур:

```
100 REM ПОДПРОГРАММА КВТ
110 B2=B*B-4*A*C
120 B2<0 THEN PRINT "КОРНИ КОМПЛЕКСНЫЕ" \ GO TO 160
130 D=SQR(B2)
140 X1=(D-B)/(2*A)
150 X2=((-B)-D)/(2*A)
160 RETURN
```

Икинчи алтпрограм көкләр хәјали алынан заман һесабламалары дајандырыр.

Норвеч ријазијјатчысы Абел сүбут етмишдир ки, $n \geqslant 5$ олан һалларда (2. 1. 1—2) тәнлијинин көкләрини һесаби үсуллар васитәсилә тапан дүстурлар мөвчуд дејил. Буна көрә дә, истәнилән $f(x)=0$ тәнлијинин көкләрини тапмаг үчүн һесаблама үсулларындан истифадә олунур. Бу заман һесабламаны сүр'әтләндирмәк үчүн мүасир ЕҺМ-ләрдән истифадә едилир.

2. 1. 2. Тәнлијин көкләринин ајрылмасы

Тәнлијин көкләринин ајрылмасы дедикдә тәнлик үчүн елә интервал тапылмасы баша дүшүлүр ки, һәмин интервал дахилиндә тәнлијин көкү јерләшсин вә бу көк интервалда јеканә олсун.

Көкләрин ајрылмасы үчүн ваҹиб олан вә ријази анализдән мә'лум олан бир нечә теореми исбат етмәдән көстәрәк.

Теорем 1. *Әкәр [a, b] парчасында $f(x)$ функсијасы кәсилмәздирсә вә бу парчанын кәнарларында функсијанын гијмәти мүхтәлиф ишарәлидирсә, онда [a, в] парчасынын дахилиндә $f(x)=0$ тәнлијинин һеч олмазса бир көкү мөвҹуддур.*

Теорем 2. *Әкәр [a, b] парчасында $f(x)$ функсијасы кәсилмәз олуб монотондурса вә парчанын кәнарларында гијмәти мүхтәлиф ишарәлидирсә, онда [a, в] парчасынын дахилиндә $f(x)=0$ тәнлијинин көкү јерләшир вә бу көк јеканәдир.*

Теорем 3. *Әкәр [a, b] парчасында $f(x)$ функсијасы кәсилмәздирсә вә бу парчанын кәнарларында функсија мүхтәлиф ишарәли гијмәт алырса, һәмчинин верилмиш парча дахилиндә $f(x)$ төрәмәси ишарәсини сабит сахлајырса, онда парчанын дахилиндә $f(x)=0$ тәнлијинин көкү јерләшир вә о јеканәдир.*

Даһа бир нечә мисалы арашдыраг.

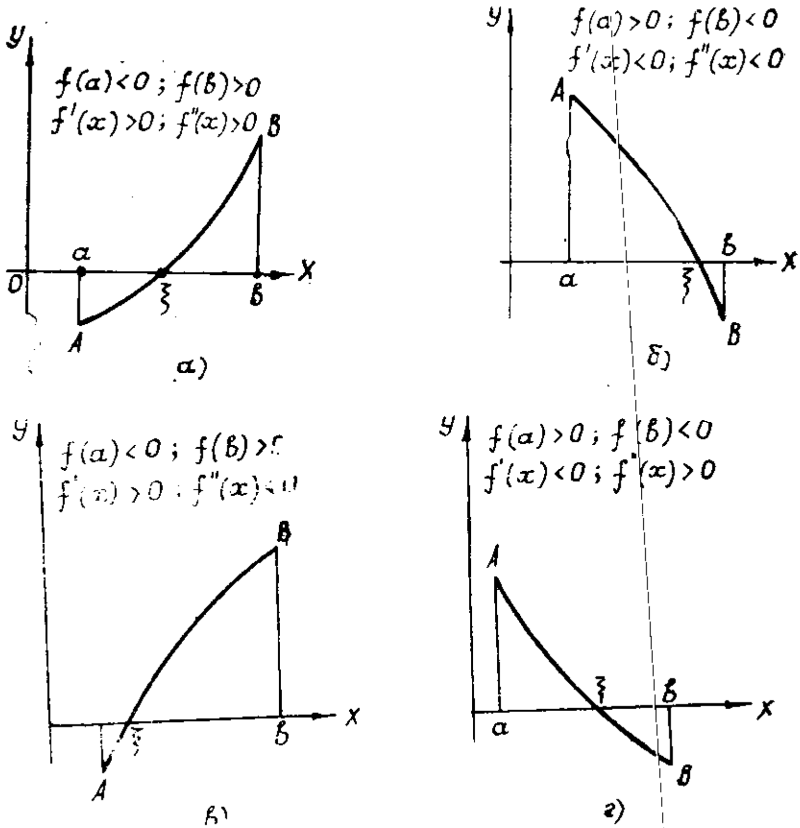
Аргументин гијмәти артаркән функсијанын да гијмәти артарса (шәкил 1, *а* вә *в*), $y=f(x)$ функсијасы артан функсија, аргументин гијмәти артаркән функсијанын гијмәти азаларса, $y=f(x)$ азалан функсија адланыр. Верилмиш һиссәдә функсија ја артан, ја да азалан оларса, о монотон функсија адланыр.

Тутаг ки, [a, b] парчасында $f(x)$ кәсилмәз олуб парчанын кәнар нөгтәләриндә мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алыр вә $f'(x)$ төрәмәси (a, b) интервалында ишарәсини дәјишмир. Онда, әкәр (a, b) интервалында $f'(x)>0$ оларса, бу интервалда функсија артан, әксинә (a, b) интервалында $f'(x)<0$ оларса (интервалын бүтүн нөгтәләриндә $f'(x)$ төрәмәси мәнфи гијмәт алыр), функсија бу интервалда азалан олур (шәкил 1, *б* вә *г*).

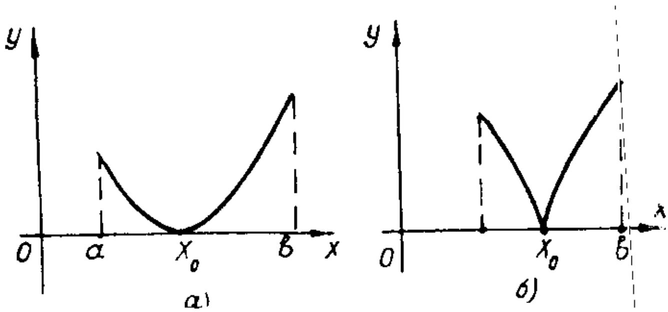
Фәрз едәк ки, $f'(x)$ функсијасынын [a, b] парчасында 2-чи төрәмәси мөвҹуддур вә бүтүн парчада өз ишарәсини дәјишмир. Онда, кәрәк $f''(x) >$ оларса, функсијанын графики ашағы габарыг (шәкил 1, *а* вә *г*), $f''(x)>0$ оларса (шәкил 1, *б* вә *в*), функсијанын графики јухары габарыг олур.

Әкәр диференсиалланан $f(x)$ функсијасы [a, b] парчасында ишарәсини дәјишмәјиб мүәјјән бир x_0 нөгтәсиндә сыфра чеврилирсә, онда ајдындыр ки, ја $f'(x)=0$ (шәкил 2, *а*), ја да $f'(x)$ мөвҹуд дејил (шәкил 2, *б*). Һәр ики һалда x_0 нөгтәси екстремум нөгтәси олур вә бу нөгтәдә $f(x)$ функсијасы кәсилмәзлијини сахлајыр.

Бә'зән x_0 нөгтәси критик нөгтә дә адланыр. Беләликлә, әкәр $f(x)$ функсијасы [a, b] парчасында кәсилмәз оларса, онда һәмин парчада елә нөгтәләр олмалыдыр ки, орада функсија минимум вә максимум гијмәтләр алсын. Бу гијмәтләри ис функсија ја критик нөгтәләрдә, ја да парчанын кәнар нөгтәләриндә алаҹагдыр.



Шәкил 1



Шәкил 2

l
ли
ол

-2

Јухарыдакы мүлаһизәләрә әсасән көкләри ајырмаг үчүн ашағыдакы ардычыллыға әмәл етмәк лазымдыр:

1) Биринчи тәртиб төрәмә, $f'(x)$ тапылмалыдыр;

2) аргументин төрәмәнин критик нөгтәләринә (көкләринә) вә сәрһәд нөгтәләринә ујғун гијмәтләриндә $f(x)$ функсијасы үчүн ишарәләр чәдвәли гурулмалыдыр;

3) кәнар нөгтәләриндә функсијанын ишарәси дәјишән интерваллар тә'јин олунмалыдыр (бу интервалларын дахилиндә исә анчаг јеканә көк мөвчуд ола биләр).

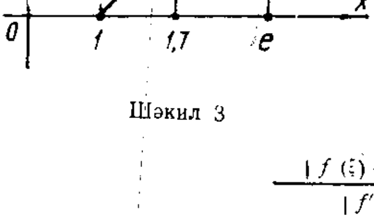
2. 1. 3. Тәгриби көкүн хәтасы

Тәгриби тапылан көкүн хәтасыны гијмәтләндирмәздән әввәл Лагранж теоремини јада салаг. Бу теоремә көрә, әкәр $y = f(x)$ функсијасы $[x_1, x]$ интервалында дифференсиалланандырса, онда бу интервалда һеч олмазса бир c нөгтәси мөвчуддур ки, онун үчүн ашағыдакы бәрабәрлик доғру олсун:

$$f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1), \quad x_1 < c < x.$$

Теорем: Әкәр $f(x) = 0$ тәнлијинин көкүнүн дәгиг ξ вә тәгриби x_0 гијмәтләри варса вә һәр икиси $[\alpha, \beta]$ парчасында јерләширсә, онда $x \in [\alpha, \beta]$ үчүн $|f'(x)| \geqslant m_1 > 0$ олачагдыр. Бурада $m_1 = \min |f'(x)|$. Демәли,

$$|\Delta x_0| = |\xi - x_0| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{m_1} \tag{2. 1. 3—1}$$



Шәкил 3

Исбаты. Лагранж дүстуруна көрә

$$f(\xi) - f(x_0) = f'(c)(\xi - x_0),$$

Бурада $\xi < c < x_0$ вә она көрә дә $c \in [\alpha, \beta]$. Лакин бу заман $|f'(c)| \geqslant m_1 > 0$. Дикәр тәрәфдән нәзәрә алсаг ки, $f(\xi) = 0$, онда (2. 1. 3—2) и[illegible]адәсиндән тапырыг ки

$$|\Delta x_0| = |\xi - x_0| = \frac{|f(\xi) - f(x_0)|}{|f'(c)|} \leqslant \frac{|f(x_0)|}{m_1}.$$

Мисал. $f(x) = x \ln x - 1 = 0$ тәнлијини $\ln x = \frac{1}{x}$ тәнлији илә әвәз едиб онун графики үсулла һәллини тапсаг, онда көкүн тәгриби гијмәтини алмыш оларыг (шәкил 3).

$\xi = x_0 \approx 1{,}7$. Шәкил 3-дән көрүнүр ки, ξ вә x_0-ын гијмәтләр $[1, 2]$ парчасынын дахилиндә јерләшир. Бундан башга $|f'(x)| =$

$= |\ln x + 1| > |\ln 1 + 1| = 1, \quad |f(x_0)| = |1{,}7 \ln 1{,}7 - 1| \approx 0{,}1.$
Онда (2. 1. 3—1) дүстуруна әсасән тапырыг ки.

$$|\Delta x_0| \leqslant \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1.$$

Демәли, $\xi = 1{,}7 \pm 0{,}1.$

2. 2. ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ УСУЛЛАРЫ

2. 2. 1. Парчанын јарыбөлүнмәси методу (Бисексија методу)

Ҝејри-хәтти тәнликләрин көкләрини ајырандан сонра икинчи мәсәлә онларын дәгигләшдирилмәсиндән, јә'ни верилмиш дәгиглијә кими тапылмасындан ибарәтдир.

Тутаг ки, $f(x) = 0$ тәнлији верилиб вә $f(x)$ кәсилмәз функсијадыр. Бу тәнлијин көкүнү ε дәгигликлә тапмаг тәләб едилир. Бурада ε кифајәт гәдәр кичик мүсбәт әдәддир ($\varepsilon > 0$).

Һесаб едирик ки, ξ көкү ајрылыб $[a, b]$ парчасында јерләшир, јә'ни $\xi \in [a, b]$.

Әкәр $b - a \leqslant \varepsilon$ исә, онда, демәли, лазым олан дәгиглик әлдә едилиб, она көрә дә ξ көкү үчүн $\xi = a$, ја да $\xi = b$ гәбул етмәк олар. Әксинә $b - a > \varepsilon$ оларса, демәли, лазыми дәгиглик әлдә олунмајыб вә ξ јерләшән интервалы кичилтмәк лазымдыр, јә'ни еlә $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ әдәдләри тапмаг лазымдыр ки, $\bar{a} < \xi < \bar{b}$ вә $\bar{b} - \bar{a} < b - a$ шәртләри өдәнилсин. $\bar{b} - \bar{a} \leqslant \varepsilon$ оларкән һесабламалары дајандырмаг вә $\xi = \bar{a}$ вә ја $\xi = \bar{b}$ гәбул етмәк олар.

Гејд етмәк лазымдыр ки, ξ көкүнүн гијмәтинин даһа дәгиг олмасы үчүн a вә b кәнар гијмәтини дејил, һәмин парчанын орта гијмәтини, јә'ни $\xi = c = \frac{a+b}{2}$ көтүрмәк мәсләһәтдир. Бу заман һесаблама хәтасы $\varepsilon \leqslant (a - b)\ 2$ олачагдыр.

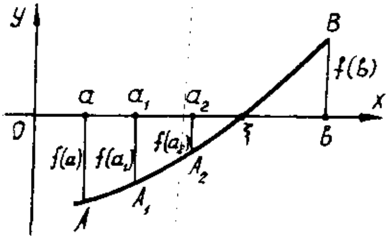
Парчанын јарыбөлүнмә методуну өјрәнмәздән әввәл јохлама адыны дашыјан методу өјрәнәк.

Тутаг ки, $f(x) = 0$ тәнлији верилиб вә $f(x)$ кәсилмәз функсијадыр ($[a, b]$ парчасында ξ көкү ајрылыб, јә'ни $f(a) \cdot f(b) < 0$, дикәр тәрәфдән $b - a > \varepsilon$). Бу тәнлијин көкүнү ε дәгигликә тапмаг тәләб олунур.

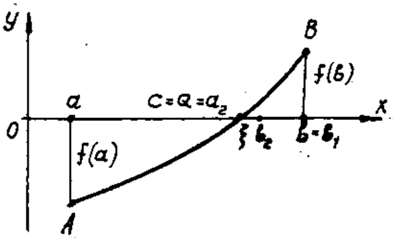
$[a, b]$ парчасында ону $[a, a_1]$ вә $[a_1, b]$ парчаларына бөлән ихтијары a_1 нөгтәси көтүрәк (шәкил 4). Бу ики парча үчүн $f(a) \cdot f(a_1) > 0$, $f(a_1) \cdot f(b) < 0$ бәрабәрсизликләри доғрудур. Демәли, ξ көкү $[a_1, b]$ парчасындадыр. Онда $[a_1, b]$ парчасында јенә ихтијары a_2 нөгтәсини көтүрәк. Јени алынан ики парча үчүн $f(a_1) \cdot f(a_2) > 0$, $f(a_2) \cdot f(\ ) < 0$ олур. Бу просеси јенә давам етдирсәк, јенидән $[a_2, b]$ парчасыны сечирик вә бөлкүнү давам етдиририк вә саир. Бу просеси ξ көкү јерләшән парчанын узунлуғу ε-дан кичик олана гәдәр давам етдиририк. ξ-ни исә тапылан парчанын орта нөгтәси кими алачағыг. Бурада, хәта $\frac{\varepsilon}{2}$-дән бөјүк олмајачагдыр.

Бу шәкилдә ишләјән јохлама методундан, үмумијјәтлә, ЕҺМ-дә истифадә олунмур. ЕҺМ-дә, әсасән, һесаблама заманы бу үсул јарыбөлүнмә методу шәклиндә истифадә олунур.

Тутаг ки, кәсилмәз $f(x)=0$ тәнлији верилиб вә онун $[a, b]$ парчасында ξ көкү ајрылмышдыр, јә'ни $f(a)f(b)<0$. Һесаб едирик ки, тәләб олунан дәгиглији тә'јин едән $\varepsilon>0$ верилмишдир. Јухарыда көстәрилдији кими $\varepsilon<(b-a)$ (шәкил 5).



Шәкил 4



Шәкил 5

$[a, b]$ парчасында ону јарыја бөлән $c=\frac{a+b}{2}$ нөгтәсини көтүрәк. Онда $[a, b]$ парчасы c нөгтәси илә узунлуғу $(b-a)/2$ олан ики бәрабәр $[a, c]$ вә $[c, b]$ парчасына бөлүнүр. Әкәр $f(c)=0$ исә онда $\xi=c$ гәбул едилир вә һесаблама дајандырылыр. Әксинә, $f(c)\neq 0$ исә онда јухарыдакы шәртләрә әсасән бу ики парчадан кәнар нөгтәләриндә $f(x)$ функсијасынын мүхтәлиф ишарәли оланыны көтүрәк вә $[a_1, b_1]$ илә ишарә едәк. Сонра $[a_1, b_1]$ парчасыны јенә дә јарыја бөлүб һәмин мүлаһизәләри јүрүдәк. Онда $[a_2, b_2]$ парчасыны алачајыг вә онун узунлуғу $\frac{b-a}{2^2}$-јә бәрабәр олачагдыр.

Беләликлә, парчаларын јары бөлүнмәсини елә n-чи етапа кими давам етдиририк ки, $[a_n, b_n]$ парчасыны алан заман $b_n-a_n=(b-a)/2^n\leqslant\varepsilon$ вә $\xi\in[a_n, b_n]$ шәрти өдәнсин. Бу заман a_n вә b_n әдәдләри ε дәгигликлә $f(x)=0$ тәнлијинин көкү олур. Көк үчүн тәгриби олараг $\xi=\frac{b_n-a_n}{2}$ көтүрүлүр вә бу заман хәта $|\Delta x_0|\leqslant\frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Мисал. $f(x)=x\ln x-1=0$ тәнлијини ЕҺМ-дә һәлл етмәк үчүн Фортран програмы тәртиб етмәли. Тәләб олунур ки, $[1, 2]$ $(a=1,\ b=2)$ парчасында јерләшән тәгриби көкүн хәтасы 10^{-5} $(m=5)$-дән артыг олмасын.

Бу програмда дәјишәнләрин идентификаторларыны ашағыдакы кими адландыраг:

Методдакы дәјишәнләр	Програмдакы адлары
n	N
a_n	AN
b_n	БN
x_n	XN
m	M
f (x)	F (x)
Δ	DEL

Фортран програмын мәтни ашағыдакы кими олур:

```
      REAL M
      DATA N,AN,BN,M/0,1.,2.,1.E-5/
6     XN=(AN+BN) /2.
      FAN=F(AN)
      FXN=F(XN)
      IF (FAN*FXN) 2,3,4
4     AN=XN
      GO TO 7
2     BN=XN
7     IF ((BN-AN)/2.-M) 3,3,5
5     N=N+1
      GO TO 6
3     WRITE (6,1) N,XN
      STOP
1     FORMAT (5X,'N=',12,2X,'XN=',F14.7)
      END
C
      FUNCTION F(X)
      F=X*ALOG(X)-1
      RETURN
      END

      N=19  XN= 1.763224
```

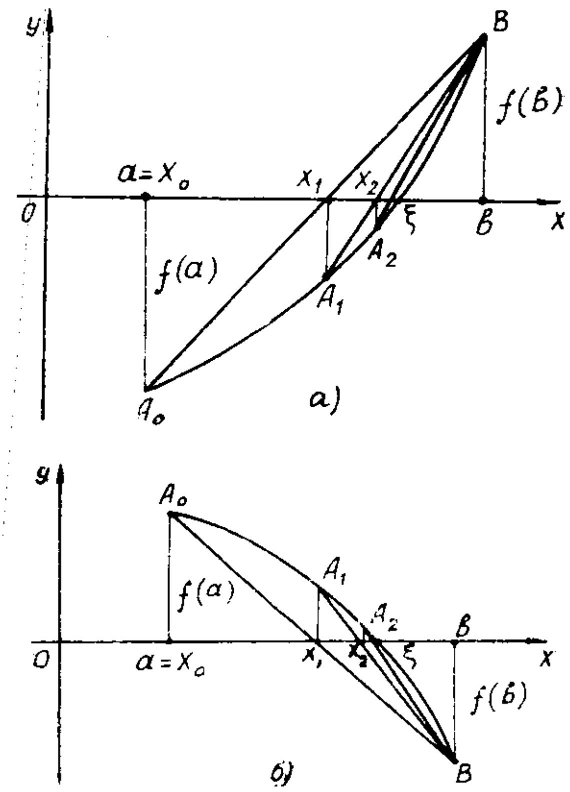
F(x) алтпрограмында функсијанын гијмәти һесабланыр.

Јухарыдакы мисалын һәлли үчүн Бејзик програмын мәтни ашағыдакы кими олур:

```
10 A=1 \ B=2 \ GOSUB 1000 \ PRINT "КОРЕНЬ=";X \ END
999 REM ПОДПРОГРАММА МЕТОДА БИСЕКЦИЙ
1000 X=A \ GOSUB 1200 \ F1=F
1010 X=(A+B)/2 \ GOSUB 1200
1020 IF F*F1<=0 THEN B=X \ GO TO 1040
1030 A=X \ F1=F
1040 IF ABS(A-B)>1.00000E-05 THEN 1010
1050 RETURN
1199 REM ПОДПРОГРАММА F(X)
1200 F=X*LOG(X)-1 \ RETURN

КОРЕНЬ= 1.76322
```

2.2.2. Вәтәрләр методу

Әдәбиjјатда вәтәрләр методуну бә'зән башга адлар алтында, «jаланчы вәзиjјәт методу», «хәтти интерполjасиjа методу» вә «мүтәнасиб һиссәләр методу» кими дә верирләр.



Шәкил 6

Тутаг ки, $f(x)=0$ тәнлији верилмишдир вә $f(x)$ кәсилмәз функсијадыр. (a, b) интервалында функсијанын биринчи вә икинчи тәртиб төрәмәләри мөвчуддур, бу интервалда икинчи тәртиб төрәмә ишарәсини сабит сахлајыр вә $[a, b]$ парчасында ξ көкү ајрылыб, јә'ни $f(a)\cdot f(b)<0$. Вәтәрләр методунун идејасы ондан ибарәтдир ки, $[a, b]$ парчасында $y=f(x)$ әјрисинин гөвсү ону кәрән вәтәр илә әвәз олунур.

Әввәлчә, функсијанын төрәмәләри ејни ишарәли олан һала бахаг, јә'ни $f'(x)\cdot f''(x)>0$, мәсәлән, шәкил 6, а-да олдуғу кими $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)>0$.

Тутаг ки, бу һалда A_0B вәтәринин ox охуну кәсдији x_1 нөгтәсини көкүн тәгриби гијмәти кими гәбул едирик.

A_0 вә B нөгтәләриндән кечән вәтәрин тәнлији (дүз хәттин тәнлијиндән билирик): $\dfrac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\dfrac{x-a}{b-a}$.

$y=0$ гәбул едиб $x=x_1$ гијмәтини тапаг:

$$x_1=a-\frac{f(a)\,(b-a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (2.\ 2.\ 2-1)$$

(2. 2. 2—1) тәнлијини **вәтәрләр методунун дүстуру** адландырырлар. Инди исә ξ көкүнү $[x_1, b]$ парчасында ахтараг. Она көрә вәтәрләр методуну $[x_1, b]$ парчасына тәтбиг едәк. $A_1[x_1; f(x_1)]$ нөгтәсини $B[b; f(b)]$ нөгтәсилә бирләшдириб A_1B вәтәринин ox охуну кәсдији x_2 нөгтәсини тапаг:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)\,(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}.$$

Бу просеси давам етдирсәк,

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)\,(b-x_2)}{f(b)-f_2(x_2)}$$

$$\vdots$$

вә нәһајәт

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)\,(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}. \qquad (2.\ 2.\ 2-2)$$

алырыг.

Просес көкүн гијмәтини верилмиш дәгигликлә тапана гәдәр давам етдирилир (2. 2. 4 бөлмәсинә бах).

Шәкил 6, б-дә көстәрилән ($f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)<0$ оланда) һал үчүн дә көкләр јухарыда верилән дүстурлар васитәсилә тапылыр.

Инди исә функсијанын биринчи вә икинчи төрәмәләринин мухтәлиф ишарәли олан һалына бахаг. Бунун үчүн шәкил 7-дә көстәрилән, мәсәлән,

$$f(a)>0,\quad f(b)<0,\quad f'(x)<0,\quad f''(x)>0$$

һалыны арашдыраг.

Гејд етмәк лазымдыр ки,

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0$$

олан һалда да ејни мүлаһизәләр јүрүтмәк олар.

$A[a; f(a)]$ вә $B_0[b; f(b)]$ нөгтәләрини бирләшдириб бу нөгтәләрдән кечән вәтәрин тәнлијини јазаг:

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a}.$$

$y = 0$ гәбул едиб вәтәрин oX охуну кәсдији x_1 нөгтәсини тапаг:

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}. \qquad (2.2.2-3)$$

Инди ξ көкү $[a, x_1]$ парчасында јерләшәчәкдир. Бу парчаја вәтәрләр методуну тәтбиг етсәк:

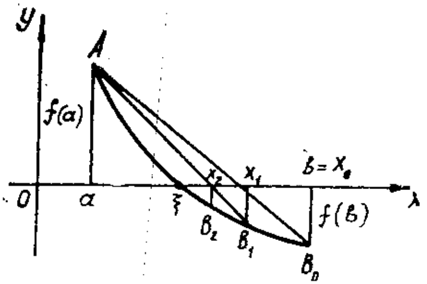
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)}$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

вә нәһајәт,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \qquad (2.2.2=4)$$

олар. Демәли, әкәр $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ оларса, онда тәгриби көк (2.2.2—1) вә (2.2.2—2) дүстурлары илә, әксинә, $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ оларса (2.2.2—3) вә (2.2.2—4) дүстурлары илә һесабланыр.



Шәкил 7

Бу вә ја дикәр дүстурларын сечилмәси исә белә гајдаја әсасән апарылыр. Парчанын, функсијанын вә онун икинчи төрәмәсинин ејни ишарәли олан кәнар нөгтәси бәркидилмиш сәрһәд адланыр. Она көрә, әкәр $f(b) \cdot f''(x) > 0$ исә b нөгтәси бәркидилмиш олур вә ξ көкүнә јахынлашма a нөгтәси тәрәфдән башлајыр ((2.2.2—1) вә (2.2.2—2) дүстурлары). Әкәр $f(a) \cdot f''(x) > 0$ исә әксинә, a нөгтәси бәркидилмиш олур вә ξ көкүнә јахынлашма b тәрәфдән башлајыр ((2.2.2—3) вә (2.2.2—4) дүстурлары).

Мисал. Вәтәрләр методу илә $x^3 - 2x - 7 = 0$ тәнлијинин көкүнү тапмалы. Бу тәнлијин көкләрини көстәрдијимиз үсулларла ајырсаг көрәрик ки, онун јеканә һәгиги көкү $[-3, -2]$ парчасында јерләшир (доғрудан да $f(-3) = -27 + 6 + 7 < 0$, $f(-2) =$

$=-8+4+7>0$). Бу парчанын орта нөгтәси $x=-2{,}5$ олдуғундан $f(-2{,}5)=(-2{,}5)^3-2(-2{,}5)+7=-3{,}625<0$ олачагдыр.

Көрүрүк ки, алынмыш көк $[-2{,}5;\ -2]$ парчасына дахил олур. Аналожи олараг просеси давам етдирсәк $[-2{,}3;\ -2{,}2]$ парчасыны аларыг, чүнки, $f(-2{,}3)\cdot f(+2{,}2)<0$. Бу парчада биринчи вә икинчи тәртиб төрәмәләр $f'(x)=3x^2-2x$ вә $f''(x)=6x$ өз ишарәләрини сахлајырлар.

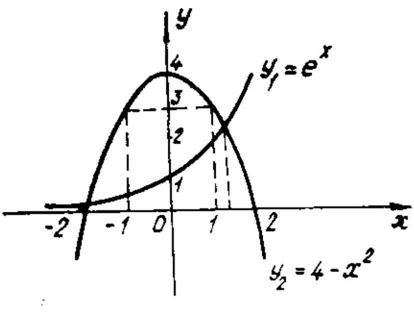
$f(-2{,}3)\cdot f''(-2{,}3)>0$ олдуғу үчүн (2. 2. 2—4) дүстурундан истифадә едилир вә бу заман $b=-2{,}2$ гәбул едилир. Бу дүстурдан истифадә едәрәк, һәмчинин, $f(b)=f(-2{,}2)=0{,}752$; $a=-2{,}3$; $f(a)=f(-2{,}3)=-0{,}567$ олдуғуну нәзәрә алсаг, чәдвәлдә көстәрилән нәтичәләри аларыг:

n	x_n	$f(x_n)$	$af(x_n)$	$x_nf(a)$	$af(x_n)-x_nf(a)$	$f(x_n)-f(a)$	x_{n+1}
0	—2.2	0.752	—1.7266	1.2474	—2.9770	1.319	—2.25701
1	—2.25701	0.016558	—0.03808	1.2797	—1.3178	0.58356	—2.258231
2	—2.258231	0.000371	—0.00085	1.2804	—1.28127	0.5674	—2.258259

Беләликлә, тәнлијин көкү $\xi=-2{,}258$ олачагдыр.

Инди исә тәнлијин көкүнүн ЕҺМ-дә вәтәрләр методу илә тапылмасына аид мисала бахаг.

Мисал. Верилмиш $e^x+x^2-4=0$ тәнлијинин һәгиги көкләриндән бирини тапмаг үчүн Фортран програмы тәртиб етмәли.



Шәкил 8

Әввәлчә тәнлијин көкләрини ајыраг. Бунун үчүн графики үсулдан истифадә едәк. Она көрә верилән функсијаны $y_1=e^x$ вә $y_2=4-x^2$ кими ики һиссәјә ајыраг(шәкил 8). Онда бу функсијаларын графикләринин кәсишмә нөгтәләри верилән тәнлијин көкләри олачагдыр.

Графикдән көрүндүјү кими, көкләрдән бири тәгрибән, [1; 1,25] парчасында јерләшир. Бу көкү тапмаг үчүн Фортран програмы тәртиб едәк. Бунун үчүн програмдакы дәјишәнләрин идентификаторларыны ашағыдакы кими адландыраг:

Методдакы дәјишәнләр	n	a	b	$f(b)$	$f(a)$	ε
Програмда адлары	N	A	B	R3	R1	EPS

Фортран програмын мәтни вә алынан ҹаваб ашағыдакы кими олур:

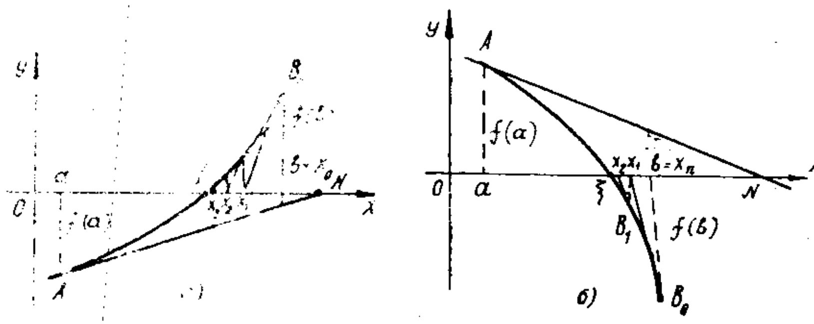
```
      DATA N,A,AO,B,BO,EPS/0,2*1.,2*1.125,0.1/
      R3=EXP(BO)+BO**2-4.
      R1=EXP(AO)+AO**2-4.
      A1=AO-R1*(BO-AO)/(R3-R1)
      DEL=ABS(R1)
      AO=A1
      N=N+1
      IF (DEL-EPS) 11,11,3
11    WRITE(6,1) N,AO,DEL
      STOP
1     FORMAT (5X,,'N=',12,5X, 'X=',E12.4,5X, 'DEL=',E12.5)
      END

      N= 2X=  0.1058E+01DEL= 0.94476E-02
```

Јухарыдакы мисалын һәлли үчүн Бејзик програм ашағыдакы кими олур:

```
1 REM --- МЕТОД ХОРД
10 DEF FNA(X)=EXP(X)+X*X-4
20 PRINT "A,B,E" \ INPUT A,B,E
30 N=0 \ X=A \ W=FNA(B)
40 Y=X-FNA(X)*(B-X)/(W-FNA(X)) \ N=N+1
50 IF ABS(Y-X)>E THEN X=Y \ GO TO 40
60 PRINT \ PRINT "КОРЕНЬ=";Y,"E=";E,"КОЛ.ИТЕРАЦИЙ=";N
70 END
```

2. 2. 3. Нјутон (тохунанлар) методу

Тутаг ки, $y = f(x)$ тәнлијинин көкү $[a, b]$ парчасында ајрылыб вә функсијанын $f'(x)$ биринҹи вә $f''(x)$ икинҹи тәртиб төрәмәләри верилмиш парчада ишарәләрини сабит сахламагла кәсилмәздир.



Шәкил 9

Нјутон методунун һәндәси мә'насы $y = f(x)$ әјрисинин бу әјријә тохунанла әвәз олунмасындан ибарәтдир. Бә'зән бу методу тохуканлар методу да адландырырлар. Бу методун көмәклији илә ғејри-хәтти тәнликләрин көкләрини тә'јин едән заман ики һалла растлашырыг. Һәр ики һалы ајры-ајрылыгда арашдыраг. Тутаг ки,

$$f(a)<0, \quad f(b)>0, \quad f'(x)>0, \quad f''(x)>0 \qquad \text{(шәкил 9, } a)$$

вә ја

$$f(a)>0, \quad f(b)<0, \quad f'(x)<0, \quad f''(x)<0 \qquad \text{(шәкил 9, } б)$$

$B_0[b; f(b)]$ нөгтәсиндә $y=f(x)$ әјрисинә тохунан чәкәк вә тохунанын ox охуну кәсдији нөгтәни тапаг.

Мә'лумдур ки, B_0 нөгтәсиндән кечән тохунанын тәнлији ашағыдакы кими олур:

$$y-f(b)=f'(b)(x-b).$$

$y=0$ гәбул едиб $x=x_1$ үчүн тапырыг:

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}\cdot \qquad (2.\ 2.\ -31)$$

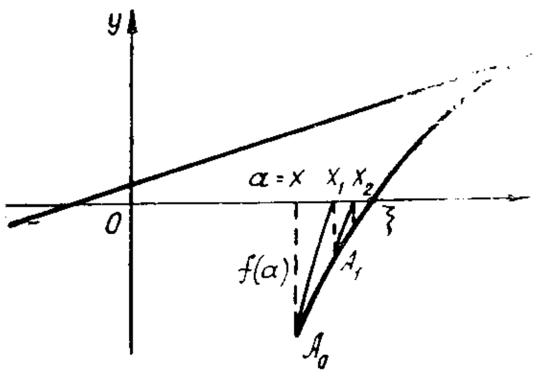
Бу һалда тәнлијин көкү $[a, x_1]$ парчасында ахтарылмалыдыр. Јенидән Нјүтон методуну бу парчаја тәтбиг етмәк үчүн $B_1[x_1; f(x_1)]$ нөгтәсиндән әјријә тохунан чәкирик. Онда

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

аларыг вә бу просеси давам етдирсәк, нәһајәт,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.\ 2.\ 3-2)$$

олар. Просес ахтарылан көкүн гијмәтини верилмиш дәгигликлә тапана гәдәр давам етдирилир (2. 2. 4 бәндинә бах).



Шәкил 10

Икинчи һалда исә шәкил 10-да көстәрилән кими

$$f(a)<0, \quad f(b)>0, \quad f'(x)>0, \quad f''(x)<0$$

олан һала бахаг (Гејд едәк ки, $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f'(x)<0$; $f''(x)>0$ һалында ејни мүлаһизәләр јүрүтмәк олар).

Бурада да, $y = f(x)$ әјрисинә тохунаны B нөгтәсиндән кечирсәк, онда о абсис охуну $[a, b]$ парчасындан кәнарда кәсә биләр. Одур ки, тохунаны бу һал үчүн $A_0\,[a;\ f(a)]$ нөгтәсиндән чәкмәк лазымдыр. Һәмин тохунанын тәнлији

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a) \qquad \text{олар.}$$

$y = 0$ гәбул едиб $x = x_1$-и тапырыг

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \qquad (2.\ 2.\ 3\text{—}3)$$

Бу дәфә $A_1\,[x_1;\ f(x_1)]$ нөгтәсиндән тохунан кечирәк. Онда

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

вә бу просеси давам етдирсәк, нәһајәт,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.\ 2.\ 3\text{—}4)$$

аларыг.

(2. 2. 3—3) вә (2. 2. 3—4) дүстурларыны (2. 2. 3—1) вә (2. 2 3—2) дүстурлары илә мүгајисә етсәк көрәрик ки, онлар бир-бириндән јалныз башланғыч гијмәтин көтүрүлмәси илә фәргләнирләр. Биринчи һалда x_0 башланғыч гијмәт үчүн парчанын b сәрһәдди, икинчи һалда исә a сәрһәдди көтүрүлүр.

Она көрә, көк үчүн башланғыч гијмәт ашағыдакы гајдаја әсасән сечилир: функсијанын ишарәси илә онун икинчи төрәмәсинин ишарәсинин ејни олдуғу нөгтәни башлангыч нөгтә кими гәбул етмәк лазымдыр. Биринчи һалда $f(b)\cdot f''(x) > 0$ олдуғундан башланғыч нөгтә $x_0 = b$, икинчи һалда $f(a)\cdot f''(x) > 0$ олдуғундан башланғыч нөгтә $x_0 = a$ олур.

Әкәр $f'(x)$ төрәмәси $[a,\ b]$ парчасында чүз'и дәјиширсә, онда һесабламаны садәләшдирмәк мәгсәдилә ашағыдакы дүстурдан истифадә етмәк олар:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)},$$

јә'ни, төрәмәнин гијмәтини бир дәфә башланғыч нөгтәдә тапмаг олар. Һәндәси олараг буну беләә ајдынлашдырмаг олар ки, B_n нөгтәләриндәки тохунанлар $B_0[x_0;\ f(x_0)]$ нөгтәсиндә $y = f(x)$ әјрисинә чәкилмиш тохунана паралел олан дүз хәтләрлә әвәз олуна биләрләр.

2. 2. 4. Вәтәрләр вә тохунанлар методунда хәтанын гијмәтләндирилмәси

Вәтәрләр вә ја тохунанлар методунун көмәјилә алынан x_0, x_1 $x_2, \ldots, x_n$ әдәдләр ардычыллығы $f(x) = 0$ тәнлијинин көкүнә јығылдығы үчүн $\xi \approx x_n$ олачагдыр. (n-и кифајәт гәдәр артырмагла тәгриби көкүн $|\Delta x_n| = |\xi - x_n|$ мүтләг хәтасыны истәнилән гәдәр азалтмаг олар). Тәгриби көкүн хәтасыны гијмәтләндирмәк үчүн әввәл исбат етдијимиз теоремә ујғун ифадәдән истифадә етмәк олар. Онда

$$|\Delta x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad |f'(x)| \geqslant m_1, \quad x \in [a, b];$$

Практики мәсәләләрдә $m_1 = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$ көтүрүлүр. Адәтән, i_n үчүн n-чи јахынлашмадакы хәтаны ашағыдакы кими тапырлар:

$$|\xi - x_n| < |x_n - x_{n-1}| \qquad (2.\,2.\,4\text{—}1)$$

(2. 2. 4—1) дүстуру кифајәт гәдәр кичик көтүрүлмүш парчалар үчүн доғру олур. Ондан истифадә етмәк үчүн ашағыдакы шәрт өдәнилмәлидир:

$$M_1 \leqslant 2m_1, \qquad (2.\,2.\,4\text{—}2)$$

Бурада $M_1 = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

Инди исбат олунмуш ики һөкмү көстәрәк.

1. *Тутаг ки, $f'(x)$ төрәмәси $[a, b]$ парчасында кәсилмәз олуб ишарәсини сабит сахлајыр вә*

$$\forall\, x \in [a, b] \quad 0 < m_1 \leqslant |f'(x)| \leqslant M_1 < +\infty.$$

Әкәр $f(x) = 0$ тәнлијинин ξ көкүнүн вәтәрләр үсулу илә ардычыл тапылан тәгриби гијмәтләри $x_0, x_1, \ldots, x_n$ оларса, онда хәтанын гијмәти

$$|\Delta x_n| = |\xi - x_n| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}| \qquad (2.\,2.\,4\text{—}3)$$

кими алыначагдыр. Беләликлә, (2. 2. 4—3) ифадәсиндән көрүнүр ки,

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{m_1}{M_1 - m_1} \cdot \varepsilon$$

өдәнилән һалда

$$|\xi - x_n| < \varepsilon$$

тә'мин олунур.

2. *Тутаг ки,*

$$M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Әкәр $f(x) = 0$ тәнлијинин ξ көкүнүн тохунанлар үсулу илә ардычыл тапылан тәгриби гијмәтләри $x_0, x_1, \ldots, x_n$ оларса, онда алынан хәтанын гијмәти

$$|\Delta x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2 \qquad (2.\,2.\,4\text{—}4)$$

олачагдыр. (2. 2. 4—3) вә (2. 2. 4—4) ифадәләриндән көрүнүр ки, тохунанлар методу илә тапылан ардычыл јахынлашмалар ξ көкүнә вәтәрләр методуна нисбәтән даһа тез јығылыр. Хүсуси һалда $q = M_2/2m_1 \leqslant 1$ вә $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-m}$ оларса, $|\Delta x_n| < 10^{2\cdot m}$ олур, јә'ни, әкәр x_{n-1} јахынлашмасы m сајда доғру рәгәмләрә көрә дәгиглијә малик оларса, нөвбәти x_n јахынлашмасы $2m$ сајда