ZƏFƏR HÜSEYNOV

HESABLAMA ÜSULLARI VƏ PRAKTİKUMU

Dərs vəsaiti

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 16.07.2002-ci il tarixli 783 saylı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir

"ADİLOĞLU" nəşriyyatı
BAKI-2003

Elmi redaktor:
H.İ.Aslanov, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Rə'y verənlər:
M.S.Cəbrayılov, fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Ə. M. Məmmədov, professor

Zəfər Qafar oğlu Hüseynov. Hesablama üsulları və praktikumu. Ali məktəblər üçün dərs vəsaiti
Bakı, « Adiloğlu » nəşriyyatı - 2003. 456s.

Dərs vəsaiti Təhsil Nazirliyinin təhsilin «Bakalavr» pilləsində «Riyaziyyat» və «riyaziyyat-informatika» ixtisasları üçün təsdiq etdiyi proqrama uyğun yazılmışdır.

Kitabda xətalar nəzəriyyəsinin əsas anlayışları, qeyri-xətti tənliklər və xətti tənliklər sisteminin həll üsulları, interpolyasiya çoxhədlilərinin və empirik düsturların qurulması, ədədi inteqrallama və diferensiallama məsələləri, diferensial və inteqral tənliklərin təqribi həll üsulları ətraflı nəzərdən keçirilir. Şərh olunan üsulların əksəriyyəti kompüterlərdə istifadə etmək üçün BASIC alqoritmik dilində yazılmış proqramlarla müşayiət olunur.

Ali məktəblərin riyaziyyat fakültəsinin tələbələri üçün nəzərdə tutulmuş bu dərs vəsaitindən ali texniki universitetlərin tələbələri, magistrlər, mühəndislər də istifadə edə bilərlər.

H $\frac{5002437957}{121\text{-}2003}$ sifarişlə

Şuşasızlığa dözməyərək həyatdan vaxtsız getmiş qardaşım Aydın Hüseynovun xatirəsinə ithaf edirəm

Müqəddimə

Kompüterlərin meydana çıxması ilə bağlı olaraq riyaziyyatda, xüsusilə hesablama riyaziyyatında böyük çevriliş baş vermişdir. Bununla əlaqədar olaraq müxtəlif riyazi məsələlərin həll üsullarının öyrənilməsi və bu üsullar əsasında həll alqoritmlərinin və proqramlarının qurulması, qoyulmuş məsələnin kompüterdə həlli mühüm nəzəri və praktiki əhəmiyyətə malikdir. Ümumiyyətlə, hər hansı prosesin hesablama riyaziyyatı vasitəsi ilə tədqiqində bir neçə mərhələni qeyd etmək lazımdır. İlk mərhələdə riyazi model seçilir, yə'ni prosesin təsviri cəbri, diferensial, yaxud inteqral tənliklər, ümumiyyətlə, müəyyən riyazi struktura şəklində verilir. İkinci mərhələ məsələ həllinin təqribi ədədi üsulla qurulmasından, başqa sözlə, hesablama alqoritminin seçilməsindən ibarətdir. Hesablama alqoritmi dedikdə, birinci mərhələdə qoyulan riyazi məsələnin həlli üçün lazım olan hesabi və məntiqi əməliyyatlar ardıcıllığı başa düşülür. Üçüncü mərhələ hesablama alqoritminin proqramlaşdırılmasından, dördüncü mərhələ isə kompüterdə hesablamalar aparılmasından ibarətdir. Nəhayət, məsələ həllinin beşinci mərhələsi olaraq alınan ədədi nəticələrin analizini və riyazi modelin növbəti dəqiqləşdirilməsini göstərmək olar. Mahiyyət etibarilə, kitabın yazılmasında bu məsələlər diqqət mərkəzində saxlanılmış, lakin əsas diqqət ədədi üsullar nəzəriyyəsinin mühüm anlayışlarına yönəldilmiş və onları misallar üzərində izah edərək ilk oxu üçün sadə olmasına çalışılmışdır.

XI fəsildən ibarət olan kitabın I fəsli xətalar nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarına həsr olunmuşdur. II fəsildə qeyri-xətti tənliklərin müxtəlif üsullarla təqribi həllinin tapılması məsələsinə geniş yer verilmişdir. Bu zaman əsas diqqət sıxılmış inikas prinsipini tətbiq etməklə iterasiya ardıcıllıqlarının yığılması məsələsinə yönəldilmişdir. III fəsildə xətti cəbri tənliklər sisteminin həll üsulları verilir. İnterpolyasiya məsələsi riyaziyyatın mühüm sahəsi olduğu üçün IV fəsildə buna geniş yer verilir və ədədi diferensiallama və inteqrallama düsturlarında tətbiqi ilə əlaqədar olaraq müxtəlif interpolyasiya düsturlarına baxılır. Eksperimentlə bağlı məsələlərdə empirik düsturlar mühüm rol oynayır. V fəsil müxtəlif empirik düsturların qurulmasına həsr olunmuşdur. Müxtəlif interpolyasiya düsturlarından istifadə etməklə ədədi diferensiallama və inteqrallama düsturlarının qurulması məsələləri VI və VII fəsillərdə verilir. Mə'lumdur ki, müxtəlif kvadratur düsturlar bir sıra riyazi məsələlərin həllinə geniş tətbiq olunur. XI fəsildə inteqral tənliklərin kvadratur və iterasiya üsulları ilə həllində trapeslər düsturunun tətbiqindən istifadə olunmuşdur. VIII, IX, X fəsillər diferensial tənliklərin, diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin, habelə xüsusi törəməli diferensial tənliklərin ədədi həll üsullarına həsr olunur.

Şərh olunan üsulların əksəriyyətinə aid misallar göstərilmiş, onların kömpüterdə realizasiyası üçün BASIC alqoritmik dilində proqramlar tərtib olunmuşdur. Hər fəslin sonunda laboratoriya işləri və onların yerinə yetirilməsinə aid həll nümunələri verilmişdir.

Sonda vəsaitin elmi redaktoru professor H.İ.Aslanova, rəyçilər professor M.S.Cəbrayılova, professor Ə.M.Məmmədova, habelə dosent Ş.G.Baimova, xüsusilə ADPU-nun hesablama riyaziyyatı və informatika kafedrasının əməkdaşlarına verdikləri dəyərli məsləhətlərə görə dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

Müəllif

I fəsil

§1. Təqribi hesablamalar. Xəta anlayışı

Müxtəlif məsələlərin həlli zamanı istifadə olunan ədədlər dəqiq və ya təqribi ola bilər. Bə'zən konkret məsələlərdə bir kəmiyyətin dəqiq qiymətini tapmaq mümkün olmur, onda dəqiq qiyməti ona yaxın qiymətlə - təqribi qiymətlə əvəz edirlər. Beləliklə, dəqiq x ədədindən az fərqlənən və hesablamalar zamanı onu əvəz edən $\bar{x}$ ədədi **təqribi ədəd** adlanır.

Mə'lumdur ki, hər hansı bir məsələnin nəticəsinin xətası ilk verilənlərdən və onların hansı dəqiqlik dərəcəsinə malik olmasından, aralıq hesablamalardan, həll alqoritminin seçilməsindən və s. asılıdır. Bütün bu məsələləri araşdırmaq üçün təqribi hesablama üsullarının öyrənilməsi zəruridir.

Konkret məsələ həll edilərkən yaranan xətanın mənbəyi ilk verilənlərin dəqiq olmamasında, hesablama zamanı yuvarlaqlaşdırmalardan istifadə olunmasında və həmçinin tətbiq olunan həll üsulunun özünün təqribi olmasındadır. Bununla əlaqədar olaraq xətaları da üç qrupa bölmək olar:

a) aradan qaldırıla bilməyən xəta. Bu xəta başlanğıc informasiyanın özündə olan xəta ilə əlaqədardır. Məsələn, ilk verilənlər eksperiment nəticəsində əldə olunduqda və s. hallarda belə xəta yarana bilər.

b) hesablama xətası;

c) tətbiq edilən üsulun xətası.

Tutaq ki, x kəmiyyəti və onun $\bar{x}$ təqribi qiyməti verilmişdir.

Tə'rif. $l = | x - \bar{x} |$ kəmiyyətinə x- in $\bar{x}$ təqribi qiymətinin mütləq xətası deyilir.

Təcrübədə kəmiyyətin dəqiq qiyməti adətən mə'lum olmadığından mütləq xətanın qiymətini tə'yin etmək mümkün olmur. Lakin $\bar{x}$ - in mümkün qiymətləri sərhəddini bilməklə $\{|x-\bar{x}|\}$ çoxluğunu yuxarıdan qiymətləndirmək olar.

Tər'if. $\{|x-\bar{x}|\}$ çoxluğunun dəqiq yuxarı sərhəddinə x - in $\bar{x}$ təqribi qiymətinin mütləq xəta sərhəddi deyilir.

Mütləq xəta sərhəddini Δ_x ilə işarə etsək, $|x-\bar{x}| \le \Delta_x$, yaxud $-\Delta_x \le x-\bar{x} \le \Delta_x$ olar. $|x-\bar{x}| \le \Delta_x$ olduqda $\bar{x}$ -ə, x -in Δ_x-ə qədər dəqiqliklə təqribi qiyməti deyilir və bunu bə'zən $x = \bar{x} \pm \Delta_x$ kimi də yazırlar. Biz bundan sonra mütləq xəta dedikdə mütləq xəta sərhəddi başa düşəcəyik.

Tə'rif. $\delta = \dfrac{l}{|\bar{x}|}$ kəmiyyətinə x -in $\bar{x}$ təqribi qiymətinin nisbi xətası deyilir.

Analoji qayda ilə x -in $\bar{x}$ təqribi qiymətinin nisbi xəta sərhəddi tə'yin olunur: $\delta_x = \dfrac{\Delta_x}{|\bar{x}|}$.

§2. Funksiyanın qiymətinin xətası

Arqumentin qiymətləri müəyyən xəta ilə verildikdə funksiyanın qiymətinin xətasının tapılması məsələsinə baxaq.

Tutaq ki, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ funksiyası, arqumentin $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$ təqribi qiymətləri və uyğun $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \cdots, \Delta_{x_n}$ mütləq xətaları verilmişdir. Funksiyanın $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ nöqtəsindəki qiymətinin mütləq xətasını tapmaq tələb olunur.

Fərz edək ki: 1) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ funksiyası baxılan oblastda kəsilməz diferensiallanandır; 2) $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \cdots, \Delta_{x_n}$ xətaları uyğun olaraq $|\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \cdots, |\bar{x}_n|$ qiymətlərindən kifayət qədər kiçikdir. f kəsilməz diferensiallanan olduğundan sonlu artım düsturuna əsasən

$$|\Delta f| = |f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\Delta x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{x_i}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \right| \Delta x_i,$$

burada, $\xi_i = \bar{x}_i + \theta(x_i - \bar{x}_i)$, $0 \le \theta \le 1$. f kəsilməz diferensiallanan və $|x_i - \bar{x}_i|$ fərqi kifayət qədər kiçik olduğundan yüksək tərtib sonsuz kiçik kəmiyyət dəqiqliyi ilə

$$f'_{x_i}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = f'_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$$

götürmək olar. Onda

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \right| \Delta x_i, \tag{2.1}$$

olar. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ funksiyasının $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ nöqtəsindəki qiymətinin nisbi xətası isə

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)} \right| \Delta x_i, \tag{2.2}$$

olar. (2.1) və (2.2) düsturlarından istifadə edərək hesab əməllərinin xətasını hesablamaq olar. Məsələn, $x + y$ cəminə ikidəyişənli $f(x, y) = x + y$ funksiyası kimi baxsaq

$$\Delta_{x+y} = |f'_x(\bar{x}, \bar{y})|\Delta x + |f'_y(\bar{x}, \bar{y})|\Delta y = \Delta x + \Delta y, \tag{2.3}$$

yə'ni cəmin mütləq xətası, mütləq xətalar cəminə bərabərdir.

Eyni qayda ilə fərqin, hasilin və nisbətin mütləq xətalarını da hesablamaq olar:

$$f(x,y)=x-y\ ,\quad \Delta_{x-y}=\Delta x+\Delta y\ ; \tag{2.4}$$

$$f(x,y)=xy\ ,\quad \Delta_{xy}=|\bar{y}|\cdot\Delta x+|\bar{x}|\cdot\Delta y\ ; \tag{2.5}$$

$$f(x,y)=\frac{x}{y}\ ,\quad \Delta_{x/y}=\frac{|\bar{y}|\cdot\Delta x+|\bar{x}|\cdot\Delta y}{\bar{y}^2}\ . \tag{2.6}$$

(2.3) - (2.6) düsturlarından istifadə edərək $f(x,y)$ funksiyasının $(\bar{x},\bar{y})$ nöqtəsindəki qiymətinin nisbi xətasını tapmaq olar.

$$\delta_{x+y}=\frac{\Delta x+\Delta y}{|\bar{x}+\bar{y}|}=\frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\cdot\frac{\Delta x}{|\bar{x}|}+\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\cdot\frac{\Delta y}{|\bar{y}|}=$$

$$=\frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\cdot\delta_x+\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\cdot\delta_y,$$

$$\delta_{x-y}=\frac{\Delta x+\Delta y}{|\bar{x}-\bar{y}|}=\frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\cdot\frac{\Delta x}{|\bar{x}|}+\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\cdot\frac{\Delta y}{|\bar{y}|}=$$

$$=\frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\cdot\delta_x+\frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\cdot\delta_y;$$

$$\delta_{xy}=\frac{|\bar{y}|\Delta x+|\bar{x}|\Delta y}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|}=\frac{\Delta x}{|\bar{x}|}+\frac{\Delta y}{|\bar{y}|}=\delta_x+\delta_y;$$

$$\delta_{x/y}=\frac{|\bar{y}|\Delta x+|\bar{x}|\Delta y}{\bar{y}^2\cdot\left|\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right|}=\frac{\Delta x}{|\bar{x}|}+\frac{\Delta y}{|\bar{y}|}=\delta_x+\delta_y\,.$$

Bəzi elementar funksiyaların qiymətlərinin xətalarını hesablayaq. Birdəyişənli $y=f(x)$ funksiyası üçün (2.1) və (2.2) düsturlarına əsasən

$$\Delta_y=|f'(x)|\Delta_x, \tag{2.7}$$

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|}\Delta_x. \qquad (2.8)$$

(2.7) və (2.8) düsturlarından istifadə edərək elementar funksiyaların qiymətlərinin xətalarını hesablamaq olar. Aşağıdakı cədvəldə bə'zi elementar funksiyaların qiymətlərinin xətaları verilir:

Funksiyalar	**Mütləq xəta**	**Nisbi xəta**
Qüvvət funksiyası $y = x^{\alpha}$	$\Delta_y = \left\lvert \alpha x^{\alpha-1} \right\rvert \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \lvert\alpha\rvert \cdot \delta_x$
Üstlü funksiya $y = a^x (a > 0)$	$\Delta_y = a^x \lvert \ln a \rvert \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \Delta_x \cdot \lvert \ln a \rvert$
$y = e^x$	$\Delta_y = e^x \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \Delta_x$
Loqarifmik funksiya $y = \ln x$	$\Delta_y = \frac{1}{\lvert x \rvert} \cdot \Delta_x = \delta_x$	$\delta_y = \frac{\delta_x}{\lvert \ln x \rvert}$
Triqonometrik funksiyalar $y = \sin x$	$\Delta_y = \lvert \cos x \rvert \cdot \Delta_x \leq \Delta_x$	$\delta_y = \lvert ctgx \rvert \Delta_x$
$y = \cos x$	$\Delta_y = \lvert \sin x \rvert \cdot \Delta_x \leq \Delta_x$	$\delta_y = \lvert tgx \rvert \Delta_x$
$y = tgx$	$\Delta_y = (1 + tg^2 x)\Delta_x \geq \Delta_x$	$\delta_y = \lvert tgx + ctgx \rvert \Delta_x$
$y = ctgx$	$\Delta_y = (1 + ctg^2 x)\Delta_x \geq \Delta_x$	$\delta_y = \lvert tgx + ctgx \rvert \Delta_x$

Laboratoriya işi № 1.1

Mövzu. Funksiyanın qiymətinin hesablanması

Tapşırıq. Dəyişənlərin verilmiş qiymətlərində funksiyanın qiymətini hesablayın və xətaları qiymətləndirin.

1) $f = \left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$,

$a = 4{,}3 \pm 0{,}05$, $b = 17{,}21 \pm 0{,}02$, $c = 8{,}2 \pm 0{,}05$,
$m = 12{,}417 \pm 0{,}003$, $n = 8{,}37 \pm 0{,}005$.

2) $f = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$,

$a = 13{,}5 \pm 0{,}02$, $b = 3{,}7 \pm 0{,}02$, $m = 4{,}22 \pm 0{,}004$,
$c = 34{,}5 \pm 0{,}02$, $d = 23{,}725 \pm 0{,}005$.

3) $f = \dfrac{m(a+b)}{(c-d)^2}$,

$a = 2{,}754 \pm 0{,}001$, $b = 11{,}7 \pm 0{,}04$, $m = 0{,}56 \pm 0{,}005$,
$c = 10{,}536 \pm 0{,}002$, $d = 6{,}32 \pm 0{,}008$.

4) $f = \dfrac{m(a+b)}{\sqrt{c-d}}$,

$a = 23{,}16 \pm 0{,}02$, $b = 8{,}23 \pm 0{,}005$, $m = 0{,}28 \pm 0{,}006$,
$c = 145{,}5 \pm 0{,}08$, $d = 28{,}6 \pm 0{,}1$.

5) $f = \dfrac{c(a-b)}{\sqrt{m+n}}$,

$a = 27{,}16 \pm 0{,}006$, $b = 5{,}03 \pm 0{,}01$, $c = 3{,}6 \pm 0{,}02$,
$m = 12{,}375 \pm 0{,}004$, $n = 86{,}2 \pm 0{,}05$.

6) $f = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,

$a = 16{,}342 \pm 0{,}001$, $b = 2{,}5 \pm 0{,}03$, $m = 3{,}6 \pm 0{,}04$,
$c = 38{,}17 \pm 0{,}002$, $d = 9{,}14 \pm 0{,}005$.

7) $f = \dfrac{m(a+b)}{\sqrt{c+d}}$,

$a = 17{,}41 \pm 0{,}01$, $b = 1{,}27 \pm 0{,}002$, $m = 0{,}71 \pm 0{,}003$,
$c = 342{,}3 \pm 0{,}04$, $d = 11{,}7 \pm 0{,}1$.

8) $f = \dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$,

$a = 9{,}542 \pm 0{,}001$, $b = 3{,}128 \pm 0{,}002$, $m = 2{,}8 \pm 0{,}03$,
$c = 0{,}172 \pm 0{,}001$, $d = 5{,}4 \pm 0{,}02$.

9) $f = \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$;

$a = 10{,}82 \pm 0{,}03$, $b = 2{,}786 \pm 0{,}0006$, $m = 0{,}28 \pm 0{,}006$,
$n = 14{,}7 \pm 0{,}06$.

10) $f = \dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$,

$n = 2{,}0435 \pm 0{,}0001$, $x = 4{,}2 \pm 0{,}05$, $y = 0{,}82 \pm 0{,}01$.

11) $f = \left[\dfrac{(a+b)c}{m-n} \right]^2$,

$a = 5{,}2 \pm 0{,}04$, $b = 15{,}32 \pm 0{,}01$, $c = 7{,}5 \pm 0{,}05$,
$m = 21{,}823 \pm 0{,}002$, $n = 7{,}56 \pm 0{,}003$.

12) $f = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$,

$a = 18{,}5 \pm 0{,}03$, $b = 5{,}6 \pm 0{,}02$, $m = 3{,}42 \pm 0{,}003$,
$c = 26{,}3 \pm 0{,}01$, $d = 14{,}782 \pm 0{,}006$.

13) $f = \dfrac{m(a+b)}{(c-d)^2}$,

$a = 3{,}236 \pm 0{,}002$, $b = 15{,}8 \pm 0{,}03$, $m = 0{,}64 \pm 0{,}004$,
$c = 12{,}415 \pm 0{,}003$, $d = 7{,}18 \pm 0{,}006$.

14) $f = \dfrac{m(a+b)}{\sqrt{c-d}}$,

$a = 17{,}41 \pm 0{,}01$, $b = 1{,}27 \pm 0{,}002$, $m = 0{,}71 \pm 0{,}003$,
$c = 342{,}3 \pm 0{,}04$, $d = 11{,}7 \pm 0{,}1$.

15) $f = \dfrac{c(a-b)}{\sqrt{m+n}}$,

$a = 15{,}71 \pm 0{,}005$, $b = 3{,}28 \pm 0{,}02$, $c = 7{,}2 \pm 0{,}01$,
$m = 13{,}752 \pm 0{,}001$, $n = 33{,}7 \pm 0{,}03$.

16) $f = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,

$a = 12,751 \pm 0,001$, $b = 3,7 \pm 0,02$, $m = 1,7 \pm 0,01$,
$c = 23,76 \pm 0,003$, $d = 8,12 \pm 0,004$.

17) $f = \dfrac{m(a+b)}{\sqrt{c+d}}$,
$a = 15,21 \pm 0,01$, $b = 2,27 \pm 0,002$, $m = 1,75 \pm 0,003$,
$c = 244,6 \pm 0,04$, $d = 11,2 \pm 0,1$.

18) $f = \dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$,
$a = 8,357 \pm 0,003$, $b = 2,48 \pm 0,004$, $m = 3,17 \pm 0,01$,
$c = 1,315 \pm 0,0004$, $d = 2,4 \pm 0,02$.

19) $f = \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$,
$a = 9,37 \pm 0,004$, $b = 3,108 \pm 0,0003$, $m = 0,46 \pm 0,002$,
$n = 15,2 \pm 0,04$.

20) $f = \dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$,
$n = 1,1753 \pm 0,0002$, $x = 5,8 \pm 0,01$, $y = 0,65 \pm 0,02$.

21) $f = \left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$,
$a = 2,13 \pm 0,01$, $b = 22,16 \pm 0,03$, $c = 6,3 \pm 0,04$,
$m = 16,825 \pm 0,004$, $n = 8,13 \pm 0,002$.

22) $f = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$,

$a = 11,8 \pm 0,02$, $b = 7,4 \pm 0,03$, $m = 5,82 \pm 0,005$,.
$c = 26,7 \pm 0,03$, $d = 11,234 \pm 0,004$.

23) $f = \dfrac{m(a+b)}{(c-d)^2}$,

$a = 4,523 \pm 0,003$, $b = 10,8 \pm 0,02$, $m = 0,85 \pm 0,003$,
$c = 9,318 \pm 0,002$, $d = 4,17 \pm 0,004$.

24) $f = \dfrac{m(a+b)}{\sqrt{c-d}}$,

$a = 32,37 \pm 0,03$, $b = 2,35 \pm 0,001$, $m = 0,93 \pm 0,001$,
$c = 128,7 \pm 0,02$, $d = 27,3 \pm 0,04$.

25) $f = \dfrac{c(a-b)}{\sqrt{m+n}}$,

$a = 12,31 \pm 0,004$, $b = 1,73 \pm 0,03$, $c = 3,7 \pm 0,02$,
$m = 17,428 \pm 0,003$, $n = 41,7 \pm 0,01$.

26) $f = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,

$a = 31,456 \pm 0,002$, $b = 7,3 \pm 0,01$, $m = 5,8 \pm 0,02$,
$c = 33,28 \pm 0,003$, $d = 6,71 \pm 0,001$.

27) $f = \dfrac{m(a+b)}{\sqrt{c+d}}$,

$a = 11,44 \pm 0,001$, $b = 2,28 \pm 0,004$, $m = 1,88 \pm 0,003$,
$c = 443,3 \pm 0,04$, $d = 11,5 \pm 0,1$.

28) $f = \dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$,

$a = 4{,}218 \pm 0{,}001$, $b = 1{,}57 \pm 0{,}006$, $m = 2{,}32 \pm 0{,}02$,
$c = 2{,}418 \pm 0{,}004$, $d = 1{,}8 \pm 0{,}01$.

29) $f = \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$,

$a = 11{,}45 \pm 0{,}01$, $b = 4{,}431 \pm 0{,}002$, $m = 0{,}75 \pm 0{,}003$,
$n = 16{,}7 \pm 0{,}05$.

30) $f = \dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$,

$n = 4{,}5681 \pm 0{,}0001$, $x = 6{,}3 \pm 0{,}02$, $y = 0{,}42 \pm 0{,}03$.

Laboratoriya işinin yerinə yetirilməsinə aid nümunə

Tapşırıq. Dəyişənlərin verilmiş qiymətlərində funksiyanın qiymətini hesablayın və xətaları qiymətləndirin.

1) $f = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,

$a = 15{,}345 \pm 0{,}001$, $b = 2{,}5 \pm 0{,}02$, $c = 38{,}28 \pm 0{,}005$,
$d = 9{,}14 \pm 0{,}003$, $m = 3{,}6 \pm 0{,}04$.

Həlli.

$\Delta_a = 0{,}001$, $\Delta_b = 0{,}02$, $\Delta_c = 0{,}005$, $\Delta_d = 0{,}003$,
$\Delta_m = 0{,}04$.

$a + b = 15{,}345 + 2{,}5 = 17{,}845$;

$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b = 0{,}001 + 0{,}02 = 0{,}021$;

$c - d = 38{,}28 - 9{,}14 = 29{,}14$;

$$\Delta_{c-d} = \Delta_c + \Delta_d = 0,005 + 0,003 = 0,008;$$

$$f = \frac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}} = \frac{17,845}{\sqrt{29,14 \cdot 3,6}} \approx 1,742.$$

Xətaları hesablayaq:

$$\delta_f = \delta_{a+b} + \frac{1}{2}\delta_{(c-d)m} = \delta_{a+b} + \frac{1}{2}\delta_{c-d} + \frac{1}{2}\delta_m =$$

$$= \frac{\Delta_{a+b}}{|a+b|} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta_{c-d}}{|c-d|} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta_m}{|m|} = \frac{0,021}{17,845} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0,008}{29,14} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{0,04}{3,6} \approx 0,0069 = 0,69\%.$$

$$\Delta_f = |f| \cdot \delta_f = 1,7423 \cdot 0.0069 = 0,0120.$$

Cavab: $f = 1,742 \pm 0,0120$, $\delta_f = 0,69\%$.

II fəsil

Qeyri - xətti tənliklərin həll üsulları

§1 Köklərin ayrılması

Məsələnin qoyuluşu: tutaq ki, qeyri-xətti

$$f(x)=0, \tag{1.1}$$

tənliyi verilmişdir. Burada x - həqiqi arqument, $f(x)$ həqiqi dəyişənli funksiyadır. (1.1) tənliyinin x^* kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq tələb olunur:

$$\left| x_n - x^* \right| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Burada, x_n, x^* kökünün ε dəqiqliklə təqribi qiymətidir.

(1.1) tənliyinin ε dəqiqliklə təqribi kökünün tapılması əsasən iki mərhələdən ibarətdir:

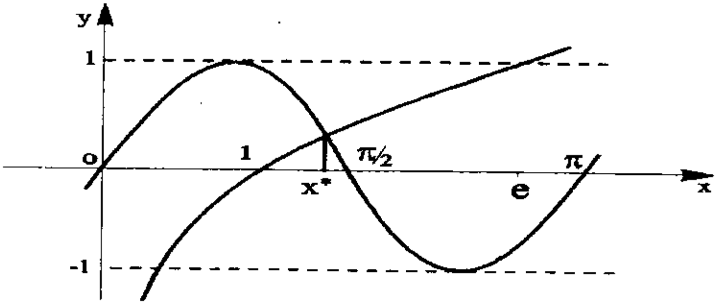
1) x^* kökünün daxil olduğu aralığın tapılması;

2) Ədədi üsullardan hər hansı birini tətbiq etməklə (1.2) şərtini ödəyən x_n təqribi həllinin tapılması.

x^* kökünün daxil olduğu aralığı tapmaq - uzunluğu nisbətən kiçik olan elə $[a,b]$ parçası tapmaqdan ibarətdir ki, həmin parçada (1.1) tənliyinin yeganə kökü olsun. Belə kökə ayrılmış və ya təcrid olunmuş kök deyilir. Kökün daxil olduğu aralığı tapmaq üçün qrafik üsuldan istifadə etmək olar. Bunun üçün $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki qurulur, həmin qrafikin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin absisinə görə kökün daxil olduğu parça müəyyən edilir. Bir çox hallarda $y=f(x)$ funksiyasının qrafikini qurmaq çətin olur. Bu halda (1.1) tənliyini onunla eynigüclü olan

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{1.3}$$

tənliyi ilə əvəz edirik. $y = f_1(x)$ və $y = f_2(x)$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisinə görə kökün daxil olduğu aralığı müəyyən etmək olar. Məsələn, $\sin 2x - \ln x = 0$ tənliyinin kökünün daxil olduğu aralığı müəyyən etmək üçün tənliyi $\sin 2x = \ln x$ şəklinə gətirərək eyni bir koordinat sistemində $y = \sin 2x$ və $y = \ln x$ funksiyalarının qrafiklərini qururuq (şəkil 1).



Şəkil 1.

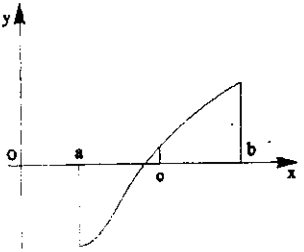
Qrafikdən (şəkil 1) görünür ki, verilmiş tənliyin yeganə kökü var və $[1; 1.5]$ parçasına daxildir.

Qrafik üsulla kökün daxil olduğu aralığın təyin edilməsi praktiki cəhətdən bir çox hallarda əlverişli olmur ($y = f(x)$ funksiyasının analitik ifadəsi mürəkkəb olduqda onun qrafikinin qurulmasının özü müəyyən çətinlik yaradır). Bu halda riyazi analiz kursundan mə'lum olan aşağıdakı teoremdən istifadə etmək olar.

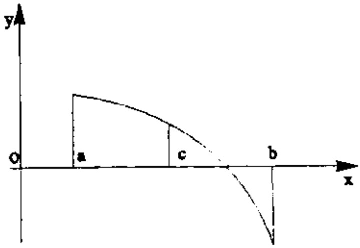
Teorem. $[a, b]$ parçasında kəsilməz olan $y = f(x)$ funksiyası bu parçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa ($f(a) \cdot f(b) < 0$), onda (1.1) tənliyinin $[a, b]$ parçasında ən azı bir kökü var. Əlavə olaraq, əgər $f'(x)$ törəməsi (a , b) intervalında işarəsini saxlayırsa, onda $[a, b]$ parçasında tənliyin yeganə kökü vardır.

§2 Parçanı yarıya bölmə üsulu

Tutaq ki, (1.1) tənliyinin $[a,b]$ parçasında yeganə kökü var və $y=f(x)$ funksiyası bu parçada kəsilməzdir. $c=(a+b)/2$ nöqtəsi vasitəsi ilə $[a,b]$ parçasını iki bərabər hissəyə bölək. Əgər $f(c)\neq 0$ isə (praktik olaraq bu həmişə belə olur, əks halda c tənliyin dəqiq kökü olur ki, bununla da baxılan üsulun tətbiqi qurtarmış olur), iki hal mümkündür: $y=f(x)$ funksiyası ya $[a,c]$ parçanın uc nöqtələrində (şəkil 2), ya da $[c,b]$ parçasının uc nöqtələrində (şəkil 3) müxtəlif işarəli qiymətlər alır.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

Başqa sözlə (1.1) tənliyinin x^* kökü $[a,c]$ və $[c,b]$ parçalarından yalnız birinə daxildir. Kök daxil olan həmin parçanı yenidən iki bərabər hissəyə bölərək alınan iki parçadan kök daxil olan parçanı seçirik və s. Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək müəyyən sonlu addımdan sonra elə $[\alpha,\beta]$ parçası alarıq ki, $x^*\in[\alpha,\beta]$ və $|\beta-\alpha|<\varepsilon$ olar. Bu zaman $[\alpha,\beta]$ parçasının istənilən nöqtəsi, xüsusi halda onun orta nöqtəsi (1.1) tənliyinin ε dəqiqliklə həlli olar.

Doğrudan da, $\forall x_n \in [\alpha, \beta]$ üçün $\left| x_n - x^* \right| < \left| \beta - \alpha \right| < \varepsilon$ olur.

Baxılan üsul sadə olmasına baxmayaraq çoxsaylı hesablamalar aparılmasını tələb edir. Lakin hesablama vasitələrinin tətbiqi ilə baxılan üsul asanlıqla reallaşa bilər.

Parçanı yarıya bölmə üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün BASIC alqoritmik dilində tərtib olunmuş proqram variantlarından biri aşağıdakı kimi olar:

```
10 REM  Parçanı yarıya bölmə üsulu
20 DEF FN F(X)= ...
30 INPUT " A-ni daxil edin A="; A
40 INPUT " B-ni daxil edin B="; B
50 INPUT " E-ni daxil edin E="; E
60 IF FN F(A)*FN F(B) > 0  THEN 140
70 IF (B-A)<E  THEN 130
80 C= (A+B)/2
90 IF FN F(C) = 0  THEN  160
100 IF FN F(A)*FN F(C) < 0  THEN  120
110 A =  C :  GOTO 70
120 B =  C :  GOTO 70
130 C = (A+B)/2 : GOTO 160
140 PRINT " Verilmiş parçada tənliyin kökü yoxdur"
150 GOTO 30
160 PRINT "Tənliyin kökü ="; C
170 END
```

Qeyd. 20-ci sətirdə nöqtələrin yerinə $f(x)$ funksiyasının analitik ifadəsi yazılır. Məsələn, 2.1 saylı laboratoriya işindəki tənlik üçün 20-ci sətir aşağıdakı kimi yazılır:

```
20 DEF FN F(X)= X^4 +3*X^3+4*X^2+X-3.
```

§3 İterasiya üsulu

Tutaq ki, (1.1) tənliyinin $[a, b]$ parçasında yeganə x^* kökü var. (1.1) tənliyinin x^* kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq tələb olunur.

(1.1) tənliyini

$$x = \varphi(x), \tag{3.1}$$

eynigüclü tənliyi ilə əvəz edək. x^* kökünün daxil olduğu aralıqdan istənilən x_0 nöqtəsi götürək (x_0-a başlanğıc yaxınlaşma deyəcəyik) və $\varphi(x_0)$ qiymətini hesablayaq. $x_1 = \varphi(x_0)$ işarə edək. Analoji qayda ilə $x_2 = \varphi(x_1)$ qiymətini hesablayaq və s. Prosesi bu qayda ilə davam etdirsək $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, düsturu ilə düzələn

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \ldots \tag{3.2}$$

ədədi ardıcıllığını alarıq. (3.2) ardıcıllığına **iterasiya**[1] ardıcıllığı deyilir. Əgər $\varphi(x)$ funksiyası baxılan aralıqda kəsilməzdirsə və (3.2) ardıcıllığının sonlu $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ limiti varsa, onda x^* (3.1) tənliyinin və deməli, (1.1) tənliyinin də həllidir. Doğrudan da, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ bərabərliyində $n \to \infty$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(x^*).$$

Aydındır ki, (3.2) iterasiya ardıcıllığının yığılması x_0 başlanğıc yaxınlaşmasının və $\varphi(x)$-in seçilməsindən asılıdır. Sıxılmış in'ikas prinsipindən istifadə edərək (3.2) ardıcıllığı-

---

[1] İterasiya latınca ***iteratio*** sözündən olub, dilimizdə mə'nası təkrar edilmə, təkrarlanma deməkdir.

nın yığılma şərtini müəyyən etmək olar.

Tə'rif. Tutaq ki, $\widetilde{R}$ metrik fəza, $y = \Phi x$ isə $\widetilde{R}$-i öz-özünə in'ikas etdirən operatordur. Əgər $0 < \alpha < 1$ şərtini ödəyən α ədədi və ixtiyari $x, x' \in \widetilde{R}$ üçün

$$\rho(\Phi x, \Phi x') \le \alpha \rho(x, x')$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda Φ-yə sıxılmış in'ikas deyilir.

Teorem (sıxılmış in'ikas prinsipi). $y = \Phi x$, $\widetilde{R}$ tam metrik fəzasında verilmiş sıxılmış in'ikasdırsa, onda həmin in'ikasın yeganə tərpənməz nöqtəsi var. Başqa sözlə $x = \Phi x$ tənliyinin yeganə x^* həlli var və bu həll ixtiyari $x^{(0)} \in \widetilde{R}$ üçün $x^{(k)} = \Phi x^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \cdots$ ardıcıllığının limitinə bərabərdir.

Teorem. Əgər $\varphi(x)$ funksiyası x^* kökünün hər hansı R ətrafında ($R = \{x : |x - x^*| \le r\}$) Lipşis şərtini ödəyirsə, yəni $\forall x, x' \in R$ üçün $|\varphi(x) - \varphi(x')| \le q|x - x'|$, $0 < q < 1$, onda istənilən $x_0 \in R$ başlanğıc yaxınlaşması üçün (3.2) ardıcıllığı tənliyin x^* kökünə yığılır və yığılma sürəti

$$|x_n - x^*| \le q^n \cdot |x_0 - x^*|$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur.

İsbatı. R çoxluğunda $\rho(x, y) = |x - y|$ kimi metrika tə'yin etsək R-in tam metrik fəza olması aşkardır. Göstərək ki, $y = \varphi(x)$ R-i öz - özünə in'ikas etdirir. İxtiyari $x \in R$ üçün

$$\rho(y, x^*) = |y - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \le q|x - x^*| < r.$$

Buradan çıxır ki, $y = \varphi(x) \in R$, yəni $y = \varphi(x)$ R-i öz-özünə in'ikas etdirir.

$\forall x, x' \in R$, $0 < q < 1$ üçün

$$\rho(\varphi(x),\varphi(x')) = |\varphi(x)-\varphi(x')| \le q|x-x'| = q\rho(x,x'),$$

yə'ni $y=\varphi(x)$ R- tam metrik fəzasında sıxılmış in'ikasdır. Onda sıxılmış in'ikas prinsipinə görə R-də $y=\varphi(x)$ funksiyası ilə tə'yin olunan yeganə x^* tərpənməz nöqtəsi var və ixtiyari $x_0 \in R$ başlanğıc yaxınlaşması üçün

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(x^*).$$

Yığılma sür'ətini tə'yin edək. Lipşis şərtindən istifadə etsək alarıq:

$$|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \le q|x_{n-1} - x^*| =$$

$$= q|\varphi(x_{n-2}) - \varphi(x^*)| \le q^2|x_{n-2} - x^*| \le \cdots \le q^n \cdot |x_0 - x^*|.$$

Beləliklə, $\{x_n\}$ ardıcıllığı x^*-a həndəsi silsilə sür'əti ilə yığılır.

Qeyd. $\varphi(x)$ funksiyasının R çoxluğunda Lipşis şərtini ödəməsi üçün kafi şərt onun $\varphi'(x)$ törəməsinin

$$|\varphi'(x)| \le q < 1$$

şərtini ödəməsidir. Doğrudan da, $\varphi(x)$ funksiyası R çoxluğunda kəsilməz olduğundan Laqranjın sonlu artım düsturuna əsasən

$$|\varphi(x)-\varphi(x')| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x-x'| \le q|x-x'|, \quad 0<q<1.$$

§3.1. İterasiya üsulunun xətasının qiymətləndirilməsi

x_{n+1} və x_n ardıcıl yaxınlaşmaları üçün $|x_{n+1}-x_n|$ fərqini qiymətləndirək:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{n-1}| =$$

$$= q\,|\,\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})\,| \le q^2 |\,x_{n-1} - x_{n-2}\,| \le \cdots \le$$

$$\le q^n |\,x_1 - x_0\,|.$$

İstənilən $p \ge 1$ üçün

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots +$$

$$+ |x_{n+1} - x_n| \le \left(q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \cdots + q^n\right) \cdot |\,x_1 - x_0\,| =$$

$$= \frac{q^n - q^{n+p}}{1-q} \cdot |\,x_1 - x_0\,| < \frac{q^n}{1-q} \cdot |\,x_1 - x_0\,|.$$

Buradan $p \to \infty$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$|\,x^* - x_n\,| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot |\,x_1 - x_0\,|.$$

$q^n < q$ olduğundan $|\,x^* - x_n\,| < \dfrac{q}{1-q} \cdot |\,x_1 - x_0\,|$. Alınan bərabərsizliyin sağ tərəfində x_1-i x_n, x_0-ı isə x_{n-1} ilə əvəz etsək doğru bərabərsizlik alarıq:

$$|x_n - x^*| < \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}|. \tag{3.3}$$

Tənliyin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün

$$|x_n - x^*| < \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \tag{3.4}$$

bərabərsizliyinin ödənməsi tələbini qoymaq lazımdır. (3.4) bərabərsizliyindən görünür ki, $q < \dfrac{1}{2}$ olduqda

$$|x_n - x^*| < |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \tag{3.5}$$

olur. Yə'ni $q < \dfrac{1}{2}$ olduqda iterasiya üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə tapmaq üçün hesablama prosesini

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

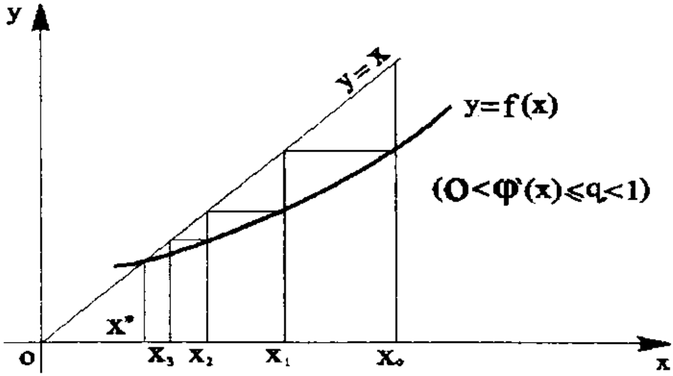
şərti ödənənə kimi davam etdirmək lazımdır.

Qeyd edək ki, q-nün qiyməti olaraq kökün daxil olduğu aralıqda $|\varphi'(x)|$-in dəqiq yuxarı sərhəddini götürmək olar.

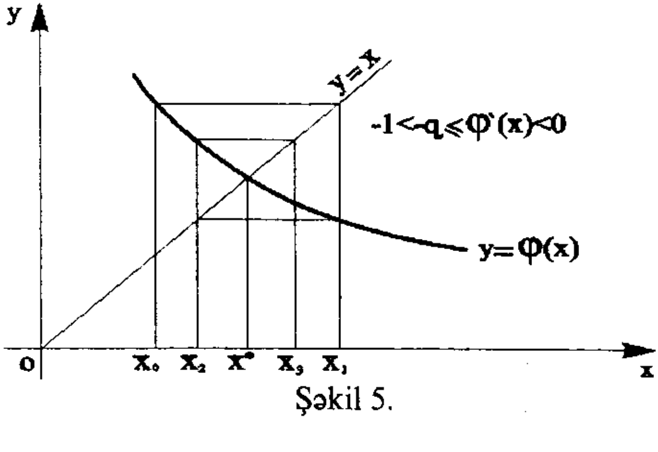
İterasiya üsulu sadə həndəsi interpretasiyaya malikdir. Şəkil 4 və 5-də

$$0 < \varphi'(x) \le q < 1 \quad \text{və} \quad -1 < -q \le \varphi'(x) < 0$$

halları üçün iterasiya ardıcıllıqlarının qurulması göstərilmişdir.



Şəkil 4.



Şəkil 5.

Beləliklə, iterasiya üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:

1) Kökün daxil olduğu aralığın tapılması;
2) Tənliyin $x = \varphi(x)$ şəklinə gətirilməsi. Bu zaman kökün yaxın ətrafında $|\varphi'(x)| \le q < 1$ şərti ödənməlidir;
3) Kökün daxil olduğu aralıqdan ixtiyari x_0 başlanğıc yaxınlaşmasının seçilməsi və $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, düsturu ilə təqribi həllərin tapılması;
4) Hesablama prosesinin $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$ şərti ödənənə kimi davam etdirilməsi.

İterasiya üsulu ilə həll zamanı çətin mərhələ tənliyin $|\varphi'(x)| \le q < 1$ şərti daxilində $x = \varphi(x)$ şəklinə gətirilməsidir. Bunun üçün müxtəlif qaydalardan istifadə olunur ki, onlardan biri 2.2 saylı laboratoriya işində verilir.

İterasiya üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün BASIC alqoritmik dilində tərtib olunmuş proqram variantlarından biri aşağıdakı kimi olar:

```
10 REM  İterasiya üsulu ilə x =Z(x) tənliyinin həlli
20 INPUT " X başlanğıc yaxınlaşmasını  daxil edin X="; X
30 INPUT " Xətanı  daxil edin E="; E
40 INPUT "  Q - nü  daxil edin Q="; Q
50 E1=((1-Q)/Q)*E
60 GOSUB 110
70 IF ABS(Z-X) < E1 THEN 90
80 X=Z : GOTO 60
90 PRINT "Tənliyin kökü ="; Z : END
100 REM  Z(X) - i hesablamaq üçün alt proqram
110 Z= ...
120 RETURN
```

Qeyd. 110-cu operatorda nöqtələrin yerinə $\varphi(x)$ funksiyasının analitik ifadəsi yazılır. Məsələn, 2.2 saylı laboratoriya işində həll edilmiş misal üçün 110-cu sətir

110 Z=(-X^3+2*X^2+3*X-3)/10

şəklində olar.

§4. Vətərlər üsulu

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında tə'yin olunmuş $f(x)$ funksiyası $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir ; $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri (a,b) intervalında öz işarələrini saxlayır; $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasının uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alır: $f(a)\cdot f(b)<0$. Onda aydındır ki, $[a,b]$ parçasında (1.1) tənliyin yeganə x^* kökü vardır. Fərz edək ki, $\psi(x)$ funksiyası x^* kökünün hər hansı ətrafında tə'yin edilmiş kəsilməz funksiyadır. Onda aşkardır ki, x^*

$$\varphi(x)=x-\psi(x)\cdot f(x), \tag{4.1}$$

tənliyinin də kökü olar. Ona görə də (1.1) tənliyini həll etmək əvəzinə iterasiya üsulunu tətbiq edərək (4.1) tənliyini həll edəcəyik.

Fərz edək ki, x_0, $[a,b]$ parçasından seçilmiş elə nöqtədir ki, $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ şərti ödənilir. $\psi(x)$ funksiyasını aşağıdakı şəkildə tə'yin edək:

$$\psi(x)=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}.$$

Onda (4.1) tənliyini

$$\varphi(x)=x-\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\cdot f(x), \tag{4.2}$$

yaxud

$$x = \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{f(x) - f(x_0)}, \tag{4.3}$$

şəklində yaza bilərik. $x_1 \in [a, b]$ yaxınlaşmasını elə seçək ki, $f(x_1)$ - in işarəsi, $f(x_0)$ -ın işarəsinin əksinə olsun və (4.3) - dən istifadə edərək aşağıdakı kimi ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}, \quad n = 1, 2, ... \tag{4.4}$$

İterasiya prosesinin yığılan olmasını göstərmək üçün $\varphi'(x)$ - i qiymətləndirək.

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x_0) + (x^* - x_0) f'(x^*)}{f(x_0)}.$$

Teylor düsturuna əsasən

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*) f'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2} f''(\xi),$$

burada ξ, x^* ilə x arasında yerləşir. Alınan bərabərlikdə $x = x_0$ yazaq:

$$f(x_0) + (x^* - x_0) f'(x^*) = \frac{(x_0 - x^*)^2}{2} f''(\xi).$$

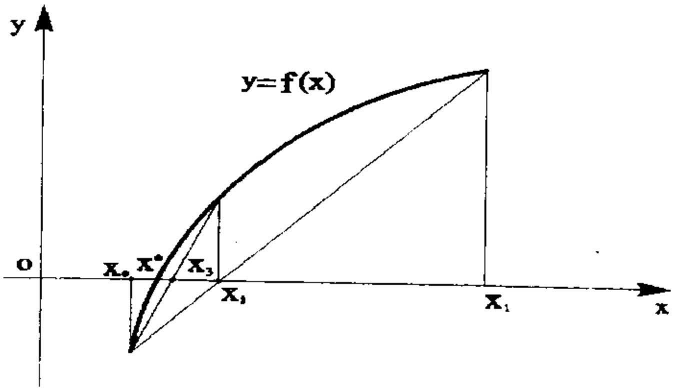
Alınan bərabərliyi $\varphi'(x^*)$ - un ifadəsində nəzərə alaq:

$$\varphi'(x^*) = \frac{(x_0 - x^*)^2}{2 f(x_0)} f''(\xi).$$

$$\lim_{x_0 \to x^*} \varphi'(x^*) = \lim_{x_0 \to x^*} \frac{(x_0 - x^*)^2}{2 f(x_0)} f''(\xi) = 0,$$

yə'ni x_0 nöqtəsi x^*-a kifayət qədər yaxın olduqda $\varphi'(x^*)$ kiçik ədəd olur. $\varphi'(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olduğundan x^* kökünün elə U_{x^*} ətrafı var ki, həmin ətrafdan götürülmüş bütün x - lər üçün, (4.2) ilə tə'yin olunan $\varphi(x)$ funksiyasının $\varphi'(x)$ törəməsi $|\varphi'(x)| \le q < 1$ şərtini ödəyir. Deməli, (4.4) düsturu ilə düzələn $\{x_n\}$ ardıcıllığı x^* kökünə yığılır.

(1.1) tənliyinin yuxarıdakı qayda ilə təqribi həllinin tapılması üsuluna vətərlər üsulu deyilir. Bu ad onunla izah olunur ki, x_{n+1}-ə həndəsi olaraq $(x_0 ; f(x_0))$ və $(x_n ; f(x_n))$ nöqtələrindən keçən düz xəttin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin absisi kimi baxmaq olar (yoxlayın!). Şəkil 6.



Şəkil 6.

Vətərlər üsulunun xətasını qiymətləndirək. Sonlu artım düsturuna əsasən

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x^*) = f'(\xi)(x_n - x^*),$$

burada ξ, x_n və x^* arasında yerləşir. Yuxarıdakı bərabərlikdən

$$\left| x_n - x^* \right| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|} \le \frac{|f(x_n)|}{M_2}, \tag{4.5}$$

alarıq. Burada $M_2 = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Praktik hesablamalar üçün aşağıdakı xəta düsturundan istifadə etmək əlverişlidir:

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{M_1 - M_2}{M_2} \cdot \left| x_n - x_{n-1} \right| . \tag{4.6}$$

Burada, $M_1 = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$, $M_2 = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Qeyd edək ki, $M_1 \le 2M_2$ olduqda (4.6) - dan alınır ki,

$$\left| x_n - x^* \right| \le \left| x_n - x_{n-1} \right| .$$

Tənliyin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{M_1 - M_2}{M_2} \cdot \left| x_n - x_{n-1} \right| < \varepsilon ,$$

bərabərsizliyinin ödənməsi tələbini qoymaq lazımdır.

Beləliklə, vətərlər üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:

1) Kökün daxil olduğu aralığın tapılması;

2) x_0 başlanğıc yaxınlaşmasının $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, $x_1 \in [a, b]$ yaxınlaşmasının isə $f(x_1)$-in işarəsinin $f(x_0)$-ın işarəsinə əks olması şərti ilə seçilməsi;

3) (4.4) düsturu vasitəsi ilə təqribi həllərin tapılması;

4) Hesablama prosesinin

$$\left| x_n - x_{n-1} \right| < \frac{M_2}{M_1 - M_2} \cdot \varepsilon = \varepsilon_1 ,$$

şərti ödənənə kimi davam etdirilməsi.

Vətərlər üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün BASIC alqoritmik dilində tərtib olunmuş proqram variantlarından biri aşağıdakı kimi olar:

```
10 REM  Vətərlər üsulu ilə f(x) = 0 tənliyinin həlli
20 DEF FN F(X) = ...
30 INPUT  "X0 başlanğıc yaxınlaşmasını  daxil edinX0="; X0
40 INPUT  "X1 yaxınlaşmasını  daxil edinX1="; X1
50 INPUT  " Xətanı  daxil edin E="; E
60 INPUT  " M1=";M1 : INPUT " M2=";M2
70 E1=E*M2/(M1-M2)
80 D=FN F(X0) : N= 0
90 D1=FN F(X1)
100 X= (X0*D1-X1*D)/(D1-D) : N=N+1
110 IF ABS(X-X1) < E1 THEN 130
120 X1=X : GOTO  90
130 PRINT "İterasiya addımlarının sayı ="; N
140 PRINT "Tənliyin kökü ="; X ,  : END
```

Qeyd. 20- ci sətirdə nöqtələrin yerinə $f(x)$ funksiyasının analitik ifadəsi yazılır. Məsələn, 2.3 saylı laboratoriya işindəki misalın həlli üçün 20-ci sətir aşağıdakı kimi olar:

```
20 DEF FN F(X) =X^3 - 3*X^2 + 6*X-5
```

§5 Toxunanlar üsulu

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında tə'yin olunmuş $f(x)$ funksiyası üzərinə vətərlər üsulunda qoyulan bütün şərtlər ödənilir. $\psi(x)$ funksiyasını

$$\psi(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

şəklində tə'yin edək. Onda (4.1) tənliyini

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{5.1}$$

yaxud

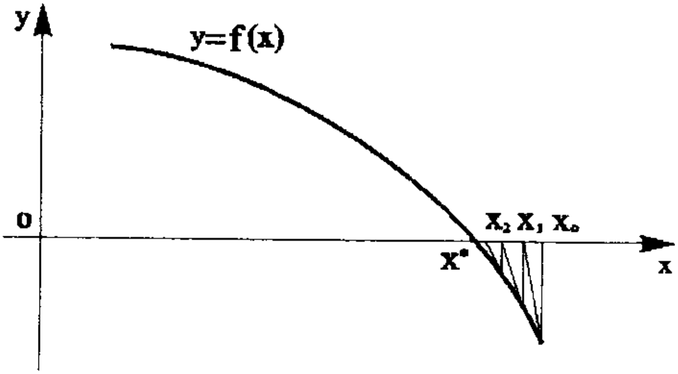
$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{5.2}$$

şəklində yaza bilərik. $x_0 \in [a, b]$ başlanğıc yaxınlaşmasını elə seçək ki, $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ şərti ödənsin və (5.2) - dən istifadə edərək aşağıdakı kimi ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

$\varphi'(x)$ - i qiymətləndirək. $\varphi'(x^*) = 0$ və $\varphi'(x)$ kəsilməz olduğundan x^* kökünün elə U_{x^*} ətrafı var ki, həmin ətrafdan götürülmüş bütün x-lər üçün, $|\varphi'(x)| \le q < 1$ olur.

Deməli, (5.3) düsturu ilə düzələn $\{x_n\}$ ardıcıllığı x^* kökünə yığılır. (1.1) tənliyinin yuxarıdakı qayda ilə təqribi həllinin tapılması üsuluna toxunanlar (Nyuton) üsulu deyilir. Bu ad onunla izah olunur ki, x_n-ə həndəsi olaraq $(x_{n-1}; f(x_{n-1}))$ nöqtəsində əyriyə çəkilən toxunan düz xəttin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin absisi kimi baxmaq olar (yoxlayın!). Şəkil 7.



Şəkil 7.

Toxunanlar üsulunun xətasını qiymətləndirək. Teylor düsturuna əsasən

$$f(x^*) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x^* - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_{n-1})^2$$

burada ξ, x^* və x_n arasında yerləşir. $f(x^*) = 0$ olduğundan

$$x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}(x^* - x_{n-1})^2.$$

(5.3) düsturunu nəzərə alsaq

$$x_n - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}(x^* - x_{n-1})^2,$$

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{M_1}{2M_2}\left| x_{n-1} - x^* \right|^2, \qquad (5.4)$$

olar. Burada, $M_1 = \max\limits_{a \le x \le b}\left| f''(x) \right|$, $M_2 = \min\limits_{a \le x \le b}\left| f'(x) \right|$.

Əgər x_0 başlanğıc yaxınlaşması üçün $\frac{M_1}{2M_2}\left| x_0 - x^* \right| \le c < 1$

şərti ödənilərsə, onda toxunanlar üsulu daha sür'ətlə yığılmanı tə'min edir. Doğrudan da, bu halda (5.4) bərabərsizliyindən alınır ki,

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{2M_2}{M_1} c^{2^n}.$$

Toxunanlar üsulunun xətası üçün başqa bir düstur çıxaraq. Teylor düsturuna əsasən

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_n - x_{n-1})^2$$

(5.3) düsturuna əsasən

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$$

olduğundan

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi)}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

(4.5) bərabərsizliyini nəzərə alsaq

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{|f(x_n)|}{M_2} = \frac{|f''(\xi)|\cdot|x_n - x_{n-1}|^2}{2M_2} <$$

$$< \frac{M_1}{2M_2}\cdot|x_n - x_{n-1}|^2. \qquad (5.5)$$

Qeyd edək ki, $M_1 \le 2M_2$ olduqda (5.5)-dən alınır ki,

$$\left|x_n - x^*\right| < |x_n - x_{n-1}|^2.$$

Tənliyin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{M_1}{2M_2}\cdot|x_n - x_{n-1}|^2 < \varepsilon$$

bərabərsizliyinin ödənməsi tələbini qoymaq lazımdır.

Beləliklə, toxunanlar üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:

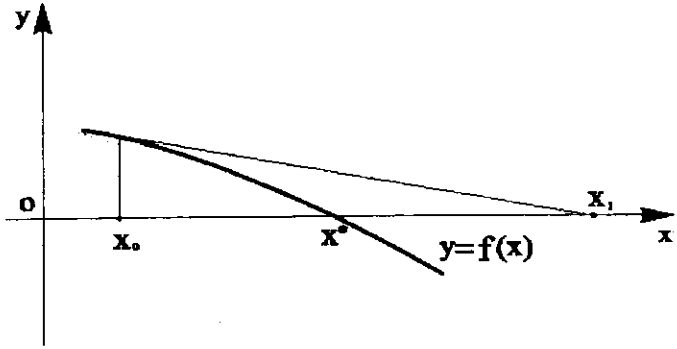
1) Kökün daxil olduğu aralığın tapılması;

2) $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ şərtindən x_0 başlanğıc yaxınlaşmasının seçilməsi;

3) (5.3) düsturu vasitəsi ilə təqribi həllərin tapılması;

4) Hesablama prosesinin $|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2M_2}{M_1}\cdot\varepsilon} = \varepsilon_1$ şərti ödənənə kimi davam etdirilməsi.

Qeyd. Vətərlər və toxunanlar üsullarında x_0 başlanğıc yaxınlaşmasının seçilməsi üzərinə $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ şərti qoyulurdu. Əks halda şəkil 8-dən göründüyü kimi $x = x^*$ kökünü almaya da bilərik.



Şəkil 8.

Toxunanlar üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün BASIC alqoritmik dilində tərtib olunmuş proqram variantlarından biri aşağıdakı kimi olar:

```
10 REM  Toxunanlar üsulu ilə  f(x) = 0  tənliyinin həlli
20 DEF FN F(X) = ...
30 DEF FN D(X)= ...
40 INPUT "X0 başlanğıc yaxınlaşmasını  daxil edinX0="; X0
50 INPUT " Xətanı  daxil edin E="; E
60 INPUT " M1=";M1 : INPUT " M2=";M2
70 E1=SQR(2*E*M2/M1)
80 N=0
90 X= X0-FN F(X0)/FN D(X0) : N=N+1
100 IF ABS(X-X0) < E1 THEN 120
110 X0=X : GOTO 90
120 PRINT "İterasiya addımlarının sayı ="; N
130 PRINT "Tənliyin kökü ="; X ,  : END
```

Qeyd. 20- ci və 30-cu sətirlərdə nöqtələrin yerinə $f(x)$ və $f'(x)$ funksiyalarının analitik ifadələri yazılır. Məsələn, 2.4 saylı laboratoriya işindəki misalın həlli üçün bu aşağıdakı kimi olar:

```
20 DEF FN F(X) =2*X^3 - 3*X^2 + 12*X-10
30 DEF FN B(X) =6*X^2 - 6*X + 12
```

§6. Vətərlər və toxunanlar üsularının birləşdirilməsi (kombinasiyası)

Vətərlər və toxunanlar üsullarında $x_1, x_2, ..., x_n ,...$ ardıcıl yaxınlaşmaları x^* kökünə yığılan monoton ardıcıllıq təşkil edir. Bu ardıcıllıq $f'(x)f''(x) > 0$ olduqda vətərlər üsulu ilə soldan, toxunanlar üsulu ilə sağdan; $f'(x)f''(x) < 0$ olduqda isə vətərlər üsulu ilə sağdan, toxunanlar üsulu ilə soldan x^* kökünə yaxınlaşır. Hər iki üsulu birləşdirməklə x^* kökünə daha sür'ətlə yığılan iterasiya ardıcıllıqları qurmaq mümkündür. Bu halda x_n və x_{n+1} kimi iki ardıcıl yaxınlaşmalar x^* kökünün müxtəlif tərəflərində yerləşir ki, bu da sür'ətlə yığılmanı tə'min edir.

Əvvəldə olduğu kimi tutaq ki, $[a, b]$ parçasında tə'yin olunmuş $f(x)$ funksiyası $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri ilə birlikdə kəsilməz funksiyadır; $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri (a, b) intervalında öz işarələrini saxlayır; $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasının uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alır: $f(a)\cdot f(b) < 0$. Onda aydındır ki, $[a, b]$ parçasında (1.1) tənliyin yeganə x^* kökü var. x_0 və x_1 başlanğıc yaxınlaşmaları aşağıdakı kimi seçilir:

$$x_0 = \begin{cases} a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, & f(a)f''(a) > 0 \text{ olduqda,} \\ b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}, & f(b)f''(b) > 0 \text{ olduqda,} \end{cases} \qquad (6.1)$$

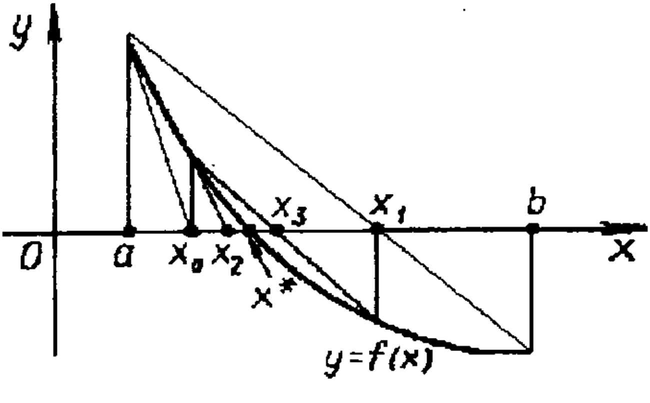
$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{6.2}$$

Digər ardıcıl yaxınlaşmalar aşağıdakı kimi tə'yin olunur:

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, n = 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}, \ n = 1, 2, \ldots \tag{6.4}$$

Asanlıqla görmək olar ki, x_{2n} və x_{2n+1} həmişə x^* kökünün müxtəlif tərəflərində yerləşir, x_{2n} və x_{2n+1} qiymətlərində ilk üst-üstə düşən işarə x^* kökü üçün doğru işarə olur.



Şəkil 9.

Beləliklə, vətərlər və toxunanlar üsullarının kombinasiyası (birləşdirilməsi) üsulu ilə (1.1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:

1) Kökün daxil olduğu aralığın tapılması;
2) (6.1)- (6.4) düsturları vasitəsi ilə təqribi həllərin tapılması;
3) Hesablama prosesinin $|x_{2n+1} - x_{2n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ şərti ödənənə

kimi davam etdirilməsi.

BASIC alqoritmik dilində tərtib olunmuş proqram variantlarından biri aşağıdakı kimi olar:

```
10 REM Vətərlər və toxunanlar üsullarının kombinasiyası
20 DEF FN F(X) = ...
30 DEF FN D1(X)= ...
40 DEF FN D2(X)= ...
50 INPUT"A-nı daxil edin A="; A
60 INPUT"B-nı daxil edin B="; B
70 INPUT " Xətanı daxil edin E="; E
75 IF FN F(A)*FN F(B) > 0 THEN 175
80 IF FN F(A)*FN D2(A) > 0 THEN 100
90 X0=B-FN F(B)/FN D1(B) : GOTO 110
100 X0=A-FN F(A)/FN D1(A)
110 X1=(A*FN F(B)-B*FN F(A))/(FN F(B)-FN F(A))
120 N=0
130 X= X0-FN F(X0)/FN D1(X0)
140 Z=(X0*FN F(X1)-X1*FN F(X0))/(FN F(X1)-FN F(X0))
150 N=N+1
160 IF ABS(X-Z) < E/2 THEN 190
170 X0=X : X1=Z : GOTO 130
175 PRINT "[A,B] parçasında tənliyin kökü yoxdur"
180 GOTO 50
190 PRINT "İterasiya addımlarının sayı ="; N
190 PRINT "Tənliyin kökü ="; X , : END
```

Qeyd. 20, 30 və 40-cı sətirlərdə nöqtələrin yerinə $f(x)$, $f'(x)$ və $f''(x)$ funksiyalarının analitik ifadələri yazılır. Məsələn, vətərlər üsulu ilə həll olunmuş $x^3-3x^2+6x+5=0$ tənliyi üçün:

```
20 DEF FN F(X) =X^3 - 3*X^2 + 6*X+5
30 DEF FN D1(X) =3*X^2 - 6*X + 6
40 DEF FN D2(X) =6*X – 6
```

Laboratoriya işi № 2.1

Mövzu: qeyri-xətti tənliklərin parçanı yarıya bölmə üsulu ilə həlli

Tapşırıq: tənliyin köklərindən birini (əgər bir neçə kökü varsa) ε dəqiqliklə hesablayın.

1) $x^4+3x^3-9x-9=0$;
2) $5^x-6x-3=0$;
3) $2e^x-2x-3=0$;
4) $x^4+3x^3-4x-1=0$;
5) $3^x-2x-5=0$;
6) $3^x+2x-3=0$;
7) $3^x-3x-6=0$;
8) $x^4-6x^2+12x-8=0$;
9) $x^4-3x^2+4x-3=0$;
10) $x^4-3x^3+3x^2-2=0$;
11) $2^x-3x-2=0$;
12) $3^x-2x+5=0$;
13) $x^4-3x^2-5x+3=0$;
14) $2^x+3x-6=0$;
15) $4^x+2x-7=0$;
16) $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$;
17) $x^4-4x^3+4x^2-4=0$;
18) $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$;
19) $x^4+2x^3+3x^2+2x-2=0$;
20) $x^4-8x^3-2x^2+16x-3=0$;
21) $x^4-6x^3+13x^2-10x+1=0$;
22) $x^4-10x^2-16x+5=0$;
23) $x^4-x^3-9x^2+10x-10=0$;
24) $x^4-x^3-7x^2-8x-6=0$;
25) $x^4+3x^3-x^2-3x+1=0$;
26) $x^4-5x^3+9x^2-5x-1=0$;
27) $x^4-2x^3-6x^2+4x+4=0$;
28) $x^4+3x^3+2x^2-x-7=0$;
29) $2x^4+7x^3-3x^2-7=0$;
30) $x^4+4x^3-4x^2-16x-8=0$.

Qeyd. Tənliklərin sıra sayı uyğun variantı göstərir.

Laboratoriya işinin yerinə yetirilməsinə aid nümunə.

$x^4+3x^3+4x^2+x-3=0$ tənliyinin köklərindən birini ε dəqiqliklə hesablayın.

Əvvəlcə kökün daxil olduğu aralığı tapaq.