P.F.QƏHRƏMANOV, N.T.QURBANOV

HƏNDƏSƏ

I HİSSƏ

ANALİTİK HƏNDƏSƏ

(DƏRS VƏSAİTİ)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi Elmi-Metodiki Şurası "Riyaziyyat" bölməsinin (19.10. 2007-ci il, 01/2007 saylı protokolu) tövsiyyəsi və nazirin 06.11.2007-ci il tarixli 1139 saylı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq edilmişdir.

SUMQAYIT – 2007

Kitaba rəy verənlər: professor Feyziyev F.G.
professor Əliyev N.Y.

Elmi redaktor: dosent Hüseynov Z.Q.
dosent Alıyev X.H.

Redaktor: dosent Mustafayev V.A.

Dərs vəsaiti həndəsənin elə bir sahəsinə həsr olunmuşdur ki, burada cəbrin köməyi ilə koordinatlar metodu və vektor hesabı tətbiq edilərək öyrənilir. Dərs vəsaitində koordinatlar sistemi və bu sistemlərdə həndəsi fiqurların tədqiqinə geniş yer verilmişdir.

Dərs vəsaiti bu sahədə çalışan bakalavr və magistr tələbələri üçün nəzərdə tutulmuşdur.

SUMQAYIT – 2007

GİRİŞ

Kitab müəlliflərin Sumqayıt Dövlət Universitetinin riyaziyyat, fizika və digər fakültələrinin tələbələrinə uzun illər ərzində "Həndəsə" kursundan oxuduqları mühazirələr əsasında hal-hazırda tədris olunan proqrama uyğun olaraq yazılmışdır.

Dərsliyə daxil edilmiş materiallar riyaziyyat fakültəsinin tələbələri üçün nəzərdə tutulan "Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi ", "Riyazi analiz" kurslarının proqramları nəzərə alınaraq seçilmişdir.

Analitik həndəsə sadəcə olaraq, həndəsənin elə bir sahəsidir ki, burada həndəsi fiqurlar cəbrin köməyi ilə koordinatlar metodu və vektor hesabı tətbiq edilərək öyrənilir. Koordinatlar metodunun mahiyyəti isə aşağıdakılardan ibarətdir:

Nöqtənin koordinatlarının köməyi ilə həndəsi fiqurlar ədədlər, tənliklər, bərabərsizliklər və yaxud onların sistemi ilə ifadə edilir.

Teoremlərin isbatında və məsələlərin həllində isə analitik metodlardan geniş istifadə olunur.

Analitik həndəsənin aksiomatik əsaslarına gəldikdə isə hazırki dövrdə Evklid-Hilbertin çox mürəkkəb olan aksiomatikası əvəzinə Veylin vektor anlayışına əsaslanan aksiomatikasından istifadə olunur.

Bu aksiomatikaya əsasən bir sıra həndəsi anlayışlar vektor fəzasının alt fəzaları ilə təyin oluna bilirlər. Bu isə düz xətt və müstəvi kimi bir çox anlayışları asanlıqla "Cəbri" anlayışlarla əvəz etmək imkanı verir.

Veyl aksiomlarına əsaslanmaqla nəinki Evklid həndəsəsini, həmçinin proyektiv həndəsəni, Labaçevski həndəsəsini, Rimanın elliptik həndəsəsini və digər həndəsə elmlərini asan metodlarla öyrənmək imkanı əldə olunur.

XIX əsrin sonlarından alman alimi F.Kleynin "Erlangen proqram"-ından başlayaraq hamıya aydın oldu ki, yuxarıda sadaladığımız həndəsə elmlərinin hamısı "Xətti cəbr" adlanan riyazi nəzəriyyənin ayrı-ayrı modellərindən ibarətdir. Ona görə də bir çox riyaziyyatçılar (məsələn: fransız riyaziyyatçısı G.Dyedonne) təklif etdilər ki, "Analitik həndəsə" adı "Cəbri həndəsə" ilə əvəz olunmalıdır.

Beləliklə, "Analitik həndəsə" elmində öyrənilən həndəsi obyektə qarşı müəyyən bir cəbri obyekt və yaxud cəbri obyektlər sistemi qoyulur. Həmin cəbri obyektlərin asanlıqla öyrənilə bilən xassələrinə görə həndəsi obyektin xassələri haqqında fikir söyləmək imkanı əldə olunur.

Yuxarıda qeyd olunanları nəzərə almaqla kitab universitetlərin tədris proqramlarına uyğun olaraq yazılmışdır və tam kursu əhatə edir. Kitabın sonunda hər fəslə aid məsələlər həlli nümunələri və müstəqil işləmək üçün kifayət qədər məsələlər verilmişdir. Bu da tələbələrin kursu tam mənimsəməsinə və biliklərinin möhkəmlənməsinə kömək edir.

Kitab haqqında rəy və təkliflərini bildirən hər bir oxucuya müəlliflər öz dərin minnətdarlığını bildirir.

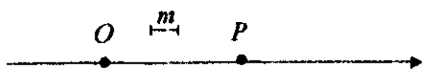
I FƏSİL

KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ.

§1. Koordinat sistemləri

1. Birölçülü koordinat sistemi.

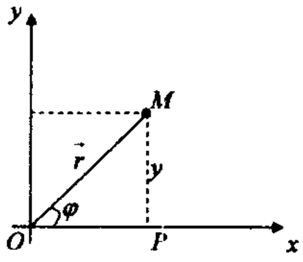
Hər hansı bir l düz xətti götürüb bu düz xətt üzərində O nöqtəsini qeyd edək. Bu nöqtə vasitəsilə düz xəttin istənilən nöqtəsinin vəziyyətini təyin etmək olar. Məsələn: Düz xətt üzərində götürülmüş P nöqtəsinin vəziyyəti başlanğıcı O nöqtəsi olan istiqamətlənmiş OP parçası ilə tamamilə təyin olunur. Burada O -nöqtəsi birinci, P - nöqtəsi isə ikincidirsə, OP istiqamətlənmiş parça adlanır.



Deməli, l- düz xətti üzərində hər bir nöqtəyə bir istiqamətlənmiş parça uyğun gəlir. Əksinə düz xətt üzərində başlanğıcı O nöqtəsi olan hər bir istiqamətlənmiş parçaya bir nöqtə uyğun gəlir. Əgər xətt üzərində istiqamət və m miqyası seçsək, onda P nöqtəsinin vəziyyəti ədədlə və yaxud OP parçasının qiyməti ilə təyin olunar. Bu ədədə P nöqtəsinin koordinatı deyilir. Əgər koordinatı x ilə işarə etsək, onda P nöqtəsini $P(x)$ şəklində təyin edə bilərik. Deməli, l düz xətti üzərində başlanğıc O nöqtəsi, istiqamət və miqyas təyin edilmişdirsə, onda deyirlər ki, l düz xətti üzrə birölçülü koordinat sistemi müəyyən edilmişdir. O nöqtəsinə koordinat başlanğıcı deyirlər və onun koordinatı sıfra bərabərdir. O nöqtəsi l düz xəttini iki yarımdüzxəttə bölür. Buradan görünür ki, hər bir x koordinatı l düz xətti üzərində bir nöqtəyə uyğundur və hər bir nöqtəyə bir x koordinatı uyğundur. Əgər birölçülü koordinat sistemində $A(x_1)$ və $B(x_2)$ nöqtələri verilmişdirsə, onda bu nöqtələr arasındakı məsafə $|AB| = |x_2 - x_1|$ bərabərliyi ilə hesablanar.

2. İkiölçülü dekart koordinat sistemi.

Əgər qarşılıqlı perpendikulyar iki düz xətt üzərində istiqamət və miqyas verilmişdirsə, deyirlər ki, ikiölçülü düzbucaqlı koordinat sistemi təyin edilmişdir. Ox oxu absis oxu, Oy oxu ordinat oxu adlanır. O nöqtəsi koordinat başlanğıcıdır və onun koordinatları sıfra bərabərdir. Yəni $O(0;0)$; Ox və Oy oxları müstəvini dörd hissəyə bölür. Bu hissələr rüblər və yaxud kvadrantlar adlanır.

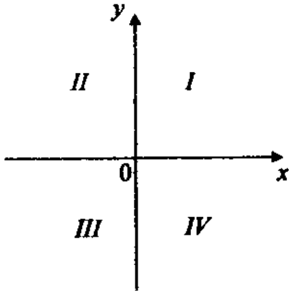


I rübdə $x>0,\ y>0$

II rübdə $x<0,\ y>0$

III rübdə $x<0,\ y<0$

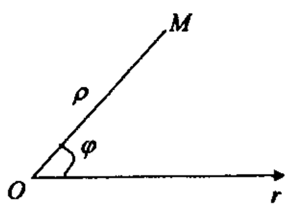
IV rübdə $x>0,\ y<0$



şərtləri ödənir. Müstəvi üzərində nöqtənin vəziyyəti iki koordinat x və y dəyişənlərinin köməyi ilə təyin olunur və $M(x,y)$ şəklində işarə olunur.

3. Polyar koordinat sistemi.

Müstəvi üzərində nöqtənin vəziyyəti düzbucaqlı koordinat sistemindən başqa iki parametrin r və φ parametrlərinin köməyi ilə təyin edilir. Hər hansı bir r oxu götürüb onun üzərində O nöqtəsi qeyd edək və müstəvi üzərində ixtiyari M nöqtəsinin koordinatını təyin edək. Or oxuna polyar ox, φ bucağına polyar bucaq deyilir. O nöqtəsinə polyus deyilir.



$|OM| = \rho$ parçasına M nöqtəsinin radius vektoru deyilir. Deməli, M nöqtəsinin vəziyyəti müstəvi üzərində r və φ kəmiyyətləri ilə təyin edilir və bu zaman $M(r,\varphi)$ kimi işarə olunur. Qeyd edək ki, müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi ilə polyar koordinat sistemi arasında əlaqə var. Tutaq ki, polyar ox Ox oxu ilə, polyus isə koordinat başlanğıcı ilə üst –üstə düşür. Şəkildən görünür ki,

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

və yaxud

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

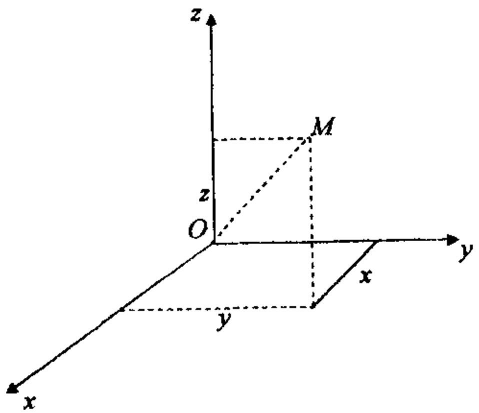
$$\varphi = arctg\frac{y}{x} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

yazmaq olar. Bu düsturlardan görünür ki, polyar koordinat sistemində koordinat başlanğıcının koordinatları təyin olunmamışdır.

Qeyd edək ki, polyar koordinat sistemində adətən φ bucağı üçün $-\pi \le \varphi \le \pi$ qəbul edilir. Ümumiyyətlə, $r \in (-\infty;+\infty)$ $\varphi = \alpha + 2\pi k$ götürülür.

4. Üçölçülü düzbucaqlı koordinat sistemi.

Qarşılıqlı perpendikulyar ortaq başlanğıca malik üç ox üzərində istiqamət və miqyas təyin olunmuşdursa, deyilir ki, üçölçülü düzbucaqlı koordinat sistemi təyin olunmuşdur. Ox oxu absis, Oy oxu ordinat, Oz oxu aplikat adlanır. Fəzada ixtiyari nöqtənin vəziyyəti x, y, z koordinatları ilə tamamilə təyin olunur və $M(x, y, z)$ kimi yazılır. Əgər koordinat sisteminin saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə fırlatdıqda (ən qısa yolla) koordinat oxları üst-üstə düşərsə bu sistem sağ, əks halda isə sol koordinat sistemi adlanır. XOZ, XOY, YOZ müstəviləri fəzanı 8 hissəyə bölür. Bu hissələr oktantlar adlanır.

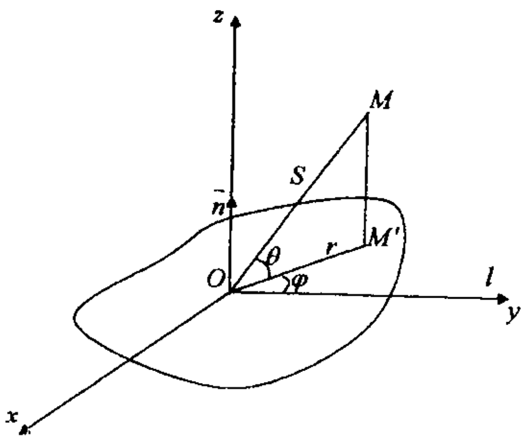


Qeyd edək ki, koordinatların dəyişənlərinin sayı üçdən böyük olduqda həmin koordinat sistemini həndəsi olaraq təsəvvür etmək mümkün olmur. Buna baxmayaraq riyaziyyatda n- ölçülü koordinat sistemindən də istifadə edilir.

§2. SİLİNDİRİK VƏ SFERİK KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ.

Üçölçülü fəzada silindirik və sferik koordinat sistemində ixtiyari nöqtənin vəziyyətini birqiymətli təyin etmək mümkündür. Bu kooordinat sistemlərinə, yəni silindirik və sferik koordinat sistemlərinə ümumiləşmiş polyar koordinat sistemləri də deyilir və riyazi fizikanın, mexanikanın və digər elmlərin məsələlərinin həllində istifadə edilir.

Fəzada ixtiyari M nöqtəsi götürüb, bu nöqtədən π müstəvisinə MM' perpendikulyarını endirək və O nöqtəsi polyus, Ol oxu polyar ox olsun. M' nöqtəsinin radius vektorunu $\vec{r}$, polyar bucağını isə φ ilə işarə etsək, bu nöqtə π müstəvisində $M'(r,\varphi)$ şəklində təyin olunar. Əgər $\overline{MM'}$ vektorunun π müstəvisinin $\vec{n}$ normal vektoruna görə toplananını H ilə işarə etsək, M nöqtəsinin vəziyyəti (r,φ,H) ilə təyin olunar. Oz oxu $\vec{n}$ normal vektorundan keçdikdə isə M nöqtəsinin vəziyyətini (r,φ,z) ilə təyin edərik. Bu üçlüyə M nöqtəsinin silindirik koordinatları deyilir.



Əgər düzbucaqlı $Oxyz$ koordinat sisteminə baxsaq, (x,y,z) koordinatları ilə (r,φ,z) koordinatları arasında əlaqə

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad (1)$$

düsturları ilə təyin olunar. Aydındır ki, (1) düsturlarından (r,φ,z) dəyişənlərini

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= arctg\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

bərabərlikləri ilə təyin etmək olar.

Əgər M nöqtəsinin radius vektorunu $\rho=|\overline{OM}|$ və bu radius vektorun $\vec{r}=\overline{OM'}$ vektoru ilə əmələ gətirdiyi bucağı θ ilə işarə etsək, nöqtənin sferik koordinatları (ρ,φ,θ) olar. Əgər (1) bərabərliyindən istifadə etsək, düzbucaqlı koordinatlarla sferik koordinatlar arasında əlaqəni

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}$$

şəklində təyin etmək olar. Burada $0\le\rho<+\infty;\ 0\le\varphi<2\pi;\ 0\le\theta\le 2\pi$ şərtləri ödənməlidir.

§3. ANALİTİK HƏNDƏSƏNİN SADƏ MƏSƏLƏLƏRİ.

1. Müstəvi üzərində iki nöqtə arasındakı məsafənin hesablanması.

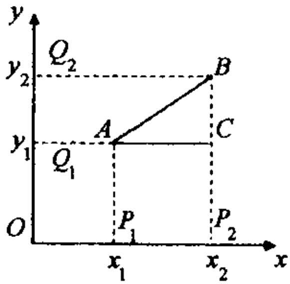
Fərz edək ki, müstəvi üzərində iki $A(x_1, y_1)$ və $B(x_2, y_2)$ nöqtələri verilib və bu nöqtələr arasındakı məsafəni hesablayaq.

$$|AB| = d$$

olsun.

Aydındır ki,

$$|AC| = |P_1P_2| = x_2 - x_1$$
$$|BC| = |Q_1Q_2| = y_2 - y_1$$



Burada P_1 və P_2 uyğun olaraq A və B nöqtələrinin absis, Q_1 və Q_2 isə ordinat oxları üzərində proyeksiyalarıdır. Onda şəkildən görünür ki,

$$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

olar.

Yəni iki nöqtə arasındakı məsafə bu nöqtələrin eyniadlı koordinatlarının fərqinin kvadratları cəminin kvadrat kökünə bərabərdir.

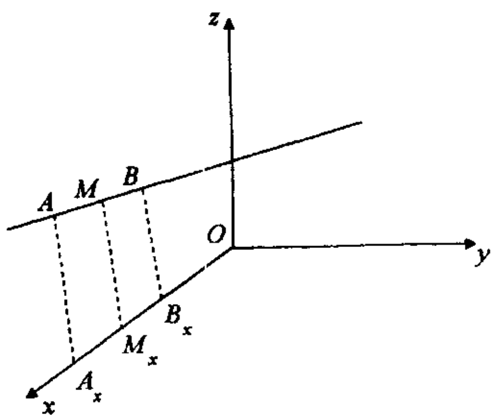
Əgər xüsusi halda $M(x,y)$ nöqtəsi ilə koordinat başlanğıcı arsındakı məsafə hesablanarsa, sonuncu düstur

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şəklində yazılır.

2. Parçanın verilmiş nisbətdə bölünməsi.

Fərz edək ki, düzbucaqlı koordinat sistemində iki $A(x_1,y_1,z_1)$ və $B(x_2,y_2,z_2)$ nöqtələri verilib. Əgər M nöqtəsi A və B nöqtələrindən keçən düz xətt üzərindədirsə və $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$ şərti ödənərsə, onda M nöqtəsi $\overline{AB}$ parçasını λ nisbətində bölür deyirlər.



M nöqtəsinin koordinatlarını tapaq. A, M və B nöqtələrinin Ox oxu üzərində proyeksiyalarını uyğun olaraq A_x, B_x, M_x ilə işarə edək. Onda aydındır ki,

$$\frac{A_xM_x}{M_xB_x} = \lambda$$

şərti ödənir.

Digər tərəfdən

$$\overline{A_xM_x} = x - x_1; \quad \overline{M_xB_x} = x_2 - x.$$

Onda

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

tənliyini alarıq. Əgər bu tənliyi x-ə görə həll etsək $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ alarıq. Eyni qayda ilə $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ düsturlarını yazmaq olar. Deməli, bu düsturlar vasitəsilə $\overline{AB}$ parçasını λ nisbətdə bölən nöqtənin koordinatlarını hesablamaq olar.

Əgər $\lambda = 1$ olarsa, onda $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ alarıq. Bu o deməkdir ki, M nöqtəsi $\overline{AB}$ parçasını yarıya bölür. Buradan aşağıdakı xassələr alınır:

1) $\lambda > 0$ olarsa, M nöqtəsi A və B nöqtələrinin arasında yerləşir.

2) $\lambda < 0$ olarsa, M nöqtəsi A və B nöqtələrinin xaricində yerləşir.

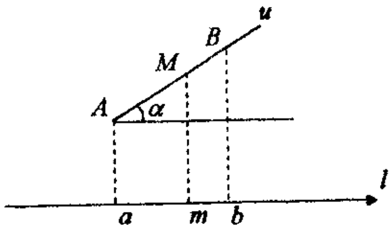
3) M nöqtəsi A nöqtəsinə yaxınlaşarsa, onda λ ədədi sıfra yaxınlaşır.

4) M nöqtəsi B nöqtəsinə yaxınlaşarsa, onda $\lambda \to \infty$ olar.

5) $\lambda = -1$ olarsa, $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ bərabərliyi mənasını itirir.

3. Proyeksiya nəzəriyyəsinin elementləri.

Fərz edək ki, u düz xətti üzərində $\overline{AB}$ parçası və bu parçanın M nöqtəsi verilmişdir. u düz xəttinin l oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağı α ilə işarə edək. M nöqtəsindən l oxuna perpendikulyar endirək və perpendikulyarın oturacağını m ilə iaşarə edək. Əgər M nöqtəsi $\overline{AB}$ parçası üzrə hərəkət edərsə, onda m nöqtəsi l oxu üzərində istiqamətlənmiş $\overline{ab}$ parçası cızır. Bu $\overline{ab}$ parçası $\overline{AB}$ parçasının l oxu üzərində ortoqonal proyeksiyası adlanır.



Deməli, başlanğıcı proyeksiyalanan parçanın başlanğıcının proyeksiyası, sonu isə həmin parçanın sonunun proyeksiyası olan istiqamətlənmiş parçaya həmin parçanın proyeksiyası deyilir və $pr_l \overline{AB} = \overline{ab}$ bərabərliyi ilə işarə olunur.

Şəkildən görünür ki,

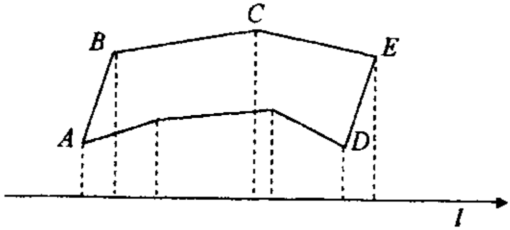
$$pr_l \overline{AB} = |AB| \cos\alpha \qquad (1)$$

Deməli, parçanın hər hansı bir l oxu üzərində proyeksiyası bu parçanın uzunluğu ilə ox arasında qalan bucağın kosinusunun hasilinə bərabərdir. Burada fərz etmişdik ki, $\overline{AB}$ parçasının istiqaməti ilə l düz xəttinin istiqaməti eynidir. Əgər $\overline{AB}$ parçasının istiqaməti l oxunun istiqamətinin əksinə olarsa, onda onlar arasında qalan bucaq $(\pi+\alpha)$ olar. Ona görə də $pr_l \overline{AB} = |AB|\cos(\pi+\alpha) = -\overline{AB}\cos\alpha$ olar. Deməli, $\overline{AB}$-nin qiyməti $\left(-\overline{AB}\right)$–yə bərabər olduğundan

$$pr\overline{AB} = |AB| \cos\alpha$$

alarıq.

Əgər hər hansı bir l oxu üzərində istiqamətlənmiş sınıq xəttin proyeksiyasını tapmaq lazımdırsa, sınıq xətti təşkil edən parçaların proyeksiyalarını cəmləmək kifayətdir.



Şəkildən görünür ki, sınıq xətttin proyeksiyaları onun başlanğıc və son nöqtələrinin vəziyyətindən asılıdır.

Başlanğıcı və sonu eyni olan sınıq xətlərin proyeksiyaları bərabərdir. Əgər sınıq xətt qapalıdırsa, yəni baxdığımız halda A və D nöqtələri üst-üstə düşərsə, onda proyeksiya sıfra bərabərdir.

Bu qaydadan istifadə edərək istiqamətlənmiş parçanın koordinat oxları üzərində proyeksiyasını tapmaq olar.

Tutaq ki, müstəvi üzərində düzbucaqlı Oxy koordinat sistemində uzunluğu d və Ox oxu ilə meyl bucağı α olan $\overline{AB}$ parçası verilmişdir. Bu parçanın Ox və Oy oxları üzərində proyeksiyasını tapaq. Aydındır ki, proyeksiya $pr_x \overline{AB} = d\cos x$; əgər Oy oxunu əvvəlcə $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qədər, sonra isə α qədər fırlatsaq, bu oxun müsbət istiqaməti $\overline{AB}$ parçasının istiqaməti ilə üst-üstə düşür. Ona görə də

$$pr_y \overline{AB} = d\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = d\sin\alpha$$

olar.

Digər tərəfdən $A(x_1, y_1)$ və $B(x_2, y_2)$ koordinatlarla təyin olunsa, onda proyeksiya

$$pr_x \overline{AB} = |x_2 - x_1|$$
$$pr_y \overline{AB} = |y_2 - y_1|$$

şəklində olur. Buradan isə

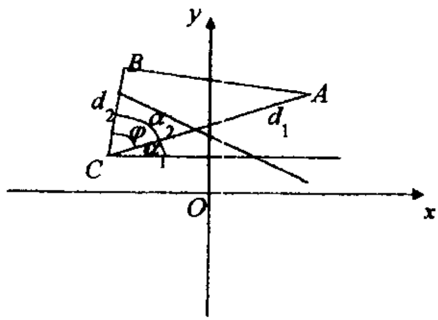
$$tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

alınır.

Parçanın oxlar üzərində proyeksiyasından istifadə edərək, təpə nöqtələri verilmiş üçbucağın sahəsini hesablaya bilərik. Tutaq ki, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ və $C(x_3, y_3)$ nöqtələri ABC üçbucağının təpə nöqtələridir və

$$|AC| = d_1, |BC| = d_2, \angle ACB = \varphi$$

d_1 və d_2 tərəflərinin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqları uyğun olaraq α_1 və α_2 ilə işarə edək.



Onda

$$S = \pm\frac{1}{2}|d_1 \cdot d_2 \sin\varphi| = \pm\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2)$$

olar. Burada

$$d_1 d_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = d_1 d_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 - d_1 d_2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 =$$
$$= d_1 \cos\alpha_1 d_2 \sin\alpha_2 - d_2 \cos\alpha_2 d_1 \sin\alpha_1$$

ifadəsi doğrudur.

Digər tərəfdən

$$d_1 \cos\alpha_1 = x_1 - x_3$$
$$d_2 \sin\alpha_2 = y_2 - y_3$$
$$d_1 \sin\alpha_1 = y_1 - y_3$$
$$d_2 \cos\alpha_2 = x_2 - x_3$$

ifadələrini (2) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$S = \pm\frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$$

alarıq.

Bu düstur vasitəsilə təpə nöqtələri koordinatlarla verilmiş üçbucağın sahəsini hesablamaq olar. Əgər C nöqtəsi koordinat başlanğıcında yerləşərsə, onda $x_3 = y_3 = 0$ olar. Bu üçbucağın sahəsini hesablamaq üçün

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

düsturunu alırıq. Əgər A, B və C nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşərsə, onda bu üçbucağın sahəsi $S = 0$ olar. Ona görə də

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)| = 0$$

Buradan

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \qquad (3)$$

alınır. (3) bərabərliyinə üç nöqtənin bir düz xətt üzərində yerləşməsi şərti deyilir.

II FƏSİL.
VEKTOR

§1. VEKTORLAR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ SADƏ ƏMƏLLƏR.

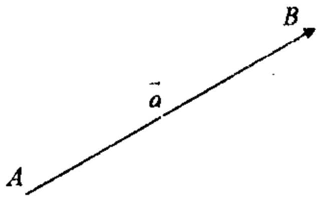
Təbiətdə kəmiyyətləri iki qrupa bölmək olar:

1. Skalyar kəmiyyət. Bu kəmiyyətlər yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə olunur. Məsələn: iş, enerji, kütlə və s.

2. Vektorial kəmiyyət. Bu kəmiyyətlər həm ədədi qiymətcə, həm də istiqaməti ilə xarakterizə olunur. Məsələn: qüvvə, çəki, sürət, təcil və s.

Vektorial kəmiyyətlər həndəsi olaraq istiqamətlənmiş parça ilə işarə olunur. Məsələn: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$

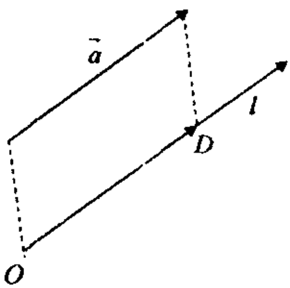
Əgər $\overline{AB}$ yazsaq, A nöqtəsi vektorun başlanğıc, B nöqtəsi isə son nöqtəsi adlanır.



$\overline{AB}$ parçasının uzunluğuna vektorun uzunluğu və yaxud modulu deyilir və $|\overline{AB}|$ və yaxud $|\vec{a}|$ şəklində yazılır. Əgər vektorun başlanğıcı və sonu üst-üstə düşərsə, belə vektora sıfır vektor deyilir və $\vec{0}$ kimi işarə olunur. Sıfır vektorun uzunluğu sıfra bərabərdir və istiqaməti qeyri-müəyyəndir. Sıfır vektoru $\bar{0} = 0 \cdot \bar{a}$

şəklində təyin etmək olar. Əgər $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{CD}$ vektorları eyni istiqamətlidirsə, $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$ şəkildə, bir-birinin əksinə yönəlmişsə, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$ şəkildə yazılır.

Hər hansı bir $\vec{a}$ vektoru verilmişdir və ixtiyari O nöqtəsi götürüb $\vec{a}$ vektoruna paralel l oxu çəkək. O nöqtəsində uzunluğu $\vec{a}$ vektorunun uzunluğuna bərabər olan $\overrightarrow{OD}$ vektorunu təyin edək. Bu halda deyirlər ki, $\vec{a}$ vektoru özünə paralel olaraq O nöqtəsinə köçürülmüşdür.

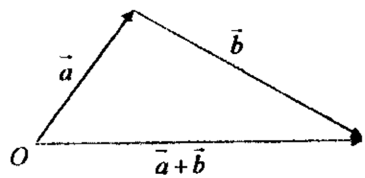


Eyni bir düz xətt və yaxud paralel düz xətlər üzərində yerləşən vektorlara kolleniar vektorlar deyilir. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardırsa, uzunluqları bərabərdirsə və eyni istiqamətlidirsə, onda bu vektorlara bərabər vektorlar deyilir $\vec{a}=\vec{b}$; Əgər vektorlar kolleniardırsa, uzunluqları bərabərdirsə və istiqamətləri əksdirsə, belə vektorlara əks vektorlar adlanır. $\vec{a}$ vektorunun əksi $(-\vec{a})$ vektorudur.

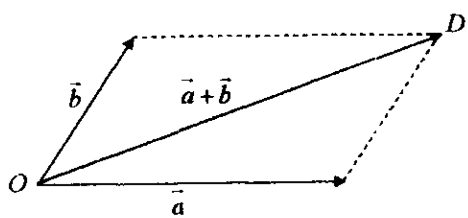
Vektorların toplanması və sabit ədədə vurulması vektorlar üzərində sadə əməllər adlanır.

1. Vektorların toplanması.

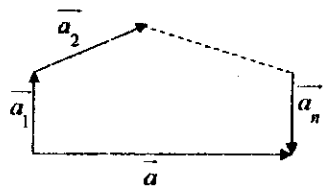
Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir. İxtiyari bir O nöqtəsi götürüb $\vec{a}$ vektorunu bu nöqtəyə, $\vec{b}$ vektorunu isə $\vec{a}$ vektorunun sonuna köçürək. Onda başlanğıcı $\vec{a}$ vektorunun başlanğıcı, sonu isə $\vec{b}$ vektorunun sonu olan vektora həmin vektorların cəmi deyilir. Bu qayda vektorların toplanmasının üçbucaq qaydası adlanır.



İndi isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını toplamaq üçün onları hər hansı bir O nöqtəsinə köçürək. Bu vektorların uc nöqtələrindən digərinə paralel düz xətt keçirək. Bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsi D olsun, onda qurulmuş paraleloqramın diaqonalı həmin vektorların cəmidir. Bu qayda vektorların toplanmasının paraleloqram qaydası adlanır.



Əgər $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$ vektorları verilmişsə və bu vektorlar cəminin tapılması tələb olunursa, onda onları ardıcıl olaraq birini digərinin son nöqtəsinə köçürməklə sınıq xətt alarıq.



Bu sınıq xəttin qapayıcısı həmin vektorların cəmi olar. Yəni

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}.$$

Vektorların toplanması aşağıdakı xassələri ödəyir.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

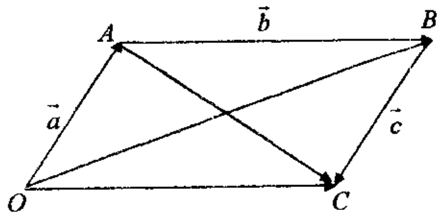
2) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

3) $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$

4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

4-cü xassəni isbat edək:

Bunun üçün $\vec{a}$ vektorunu hər hansı bir O nöqtəsinə köçürək. $\vec{b}$ vektorunu $\vec{a}$ vektorunun uc nöqtəsinə, $\vec{c}$ vektorunu isə $\vec{b}$ vektorunun son nöqtəsinə tətbiq edək və bu vektorların uc nöqtələrini A, B və C ilə işarə edək.

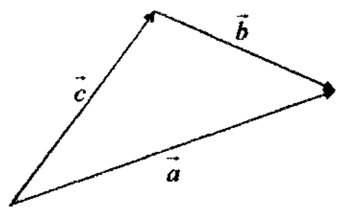


Şəkildən görünür ki,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$
$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

Son bərabərliklərin sağ tərəfi eyni olduğuna görə sol tərəfi də bərabər olar. Yəni 4-cü xassə doğrudur. Eyni qayda ilə digər xassələri də isbat etmək olar.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının fərqi elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, $\vec{b}$ vektoru ilə topladıqda $\vec{a}$ vektoruna bərabər olur, yəni $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$



2. Vektorun ədədə vurulması.

Tutaq ki, bizə hər hansı bir λ sabiti və $\vec{a}$ vektoru verilmişdir. $\vec{a}$ vektorunun λ sabitinə hasili elə bir $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, bu vektor aşağıdakı xassələri ödəyir.

1) onun uzunluğu $|\lambda||\vec{a}|$–ya bərabərdir.

2) $\vec{a}$ ilə $\vec{c}$ kolleniardır.

3) $\lambda > o$ olduqda bu vektor $\vec{a}$ vektoru ilə eyni istiqamətli, $\lambda < o$ olduqda əks istiqamətli olur. Əgər $\lambda = o$ olarsa, $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ olur və istiqaməti qeyri-müəyyəndir.Həndəsi olaraq $(\lambda \cdot \vec{a})$ hasili o deməkdir ki, $\lambda > 1$ olduqda $\vec{a}$ vektoru λ dəfə uzanır. $0 < \lambda < 1$ olduqda isə λ dəfə qısalır və istiqaməti hər iki halda $\vec{a}$ vektorunun istiqaməti ilə eynidir. Əgər $\lambda < o$ olarsa, bu vektorun istiqaməti $\vec{a}$ vektorunun istiqamətinə əksdir. Belə ki, $\lambda < -1$ olduqda vektor λ dəfə uzanır. $-1 < \lambda < 0$ olduqda isə λ dəfə qısalır. Məsələn: $\vec{c} = 3\vec{a}$ olarsa, onda $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ vektorundan 3 dəfə uzundur. $\vec{c} = -3\vec{a}$ olarsa, onda $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ vektorundan 3 dəfə uzundur, lakin istiqaməti əksinədir.

Vektorun ədədə vurma hasilinin aşağıdakı xassələri vardır:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

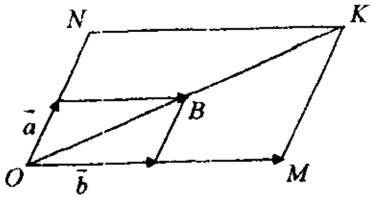
2) $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

3) α, β ədədi üçün $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \beta = \vec{a}(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ doğrudur.

4) İxtiyari α, β ədədi $\alpha \neq 0$ vektoru üçün $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ doğrudur.

5) İxtiyari α ədədi və $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorları üçün $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ doğrudur.

5-ci xassəni isbat edək: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını müstəvi üzərində ortaq bir O nöqtəsinə köçürək. Onda $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ olar. Əgər $\alpha\vec{a}$ və $\alpha\vec{b}$ vektorlarını da həmin nöqtəyə köçürsək, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ olar.



Başqa sözlə paraleloqramın tərəfləri α qədər uzandıqda onun diaqonalı da α qədər uzanır. İsbat olundu ki, 5-ci xassə doğrudur. Bu xassədən istifadə edərək aşağıdakı teoremləri isbat etmək olar.

Teorem 1. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kolleniar olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \tag{1}$$

bərabərliyi ödəyən yeganə λ ədədinin olmasıdır.

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardır, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları eyni istiqamətli olduqda $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$ alarıq. Əks istiqamətli olduqda isə $\frac{\vec{b}}{\vec{a}} = \lambda < 0$ olar.

Deməli, hər iki halda λ ədədi var.

İndi isə isbat edək ki, bu ədəd yeganədir. Bunun əksini fərz edək. Fərz edək ki

$$\vec{b_1} = \lambda_1 \vec{a} \tag{2}$$

bərabərliyi ödənir. (1) bərabərliyindən (2) bərabərliyini çıxsaq

$$(\lambda - \lambda_1)\vec{a} = 0, \quad \vec{a} \neq 0$$

olduğundan

$$\lambda - \lambda_1 = 0$$

olur. Buradan isə

$$\lambda = \lambda_1$$

olmalıdır.

Yəni (1) bərabərliyini ödəyən λ ədədi yeganədir.

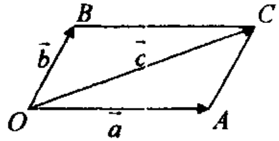
Tərif: Bir müstəvi və ya paralel müstəvilər üzərində olan vektorlara komplanar vektorlar deyilir.

Teorem 2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ bərabərliyini ödəyən yeganə α və β ədədlərinin olmasıdır.

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{b} \neq \lambda \cdot \vec{a}$, yəni $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniar deyil. Onda $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarını müstəvi üzərində hər hansı bir O nöqtəsinə köçürmək və

$$\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$$
$$\overrightarrow{OB} = \beta\vec{b}$$

yazmaq olar.



Digər tərəfdən

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

olduğundan

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

doğru olar.

İndi α və β ədədlərinin yeganəliyini isbat edək. Bunun üçün $\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ qəbul edək. Əgər bu bərabərliyi (3) bərabərliyindən çıxsaq, onda

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} = 0$$

alarıq. Buradan isə

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ \beta = \beta_1 \end{cases}$$

alınır. Yəni (3) bərabərliyini ödəyən α və β ədədləri yeganədir.

§2. VEKTORLAR SİSTEMİ.

Tutaq ki, $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorları və $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədləri verilmişdir. Bu vektorlara vektorlar sistemi $\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \dots + \alpha_n\overline{a_n}$ cəminə isə vektorlar sisteminin xətti kombinasiyası deyilir. Əgər $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ədədlərinin heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olduqda

$$\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \dots + \alpha_n\overline{a_n} = 0 \qquad (1)$$

olarsa, $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ vektorlar sisteminə xətti asılı olan vektorlar sistemi deyilir. Əgər (1) bərabərliyi yalnız $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ olduqda ödənərsə, onda deyirlər ki,

$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemi xətti asılı deyil və yaxud həmin sistemə xətti asılı olmayan vektorlar sistemi deyilir.

Vektorlar sisteminin aşağıdakı xassələri var.

1) Əgər $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sisteminin heç olmasa vektorlarının biri sıfra bərabər olarsa, onda bu sistem xətti asılıdır.

İsbatı: Tutaq ki, $\overrightarrow{a_1} = 0$. Onda $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$. Əgər bu bərabərlik ödənərsə, onda $\alpha_1 = 1 \neq 0$ ödənir. Bu o deməkdir ki, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır.

2) $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sisteminin ixtiyari bir hissəsi xətti asılıdırsa, onda bu sistemin özü də xətti asılıdır.

3) Vektorlar sisteminin özü xətti asılı deyilsə, onda bu sistemin ixtiyari bir hissəsi xətti asılı deyil.

4) Xətti asılı olmayan vektorlar sistemində sıfır vektor yoxdur.

Bu xassələrdən istifadə edərək aşağıdakı teoremləri isbat etmək olar.

Teorem: İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt onların kolleniar olmasıdır.

İsbatı: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardır. Onda

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \qquad (2)$$

yaza bilərik. Buradan $1\cdot\vec{b}-\lambda\cdot\vec{a}=0$ alarıq və $1\neq 0, \lambda\neq 0$ olarsa, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları xətti asılıdır. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları xətti asılıdır. Onda elə α və β ədədləri tapmaq olar ki, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0$ olar. Bu ədədlərdən biri $\alpha\neq 0$ olarsa, $\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\vec{b}$ və yaxud $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$ $\lambda=-\frac{\beta}{\alpha}$ olar. Sonuncu bərabərlik göstərir ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardır.

Teorem: Üç $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorunun xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt onların komplanar olmasıdır.

İsbatı: *(Zərurilik şərti)* Tutaq ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları xətti asılıdır. Onların komplanar olduğunu göstərək. Əgər bu vektorlar xətti asılıdırsa, onda elə üç α, β və γ ədədləri tapmaq olar ki, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ şərti ödənər. Bu vektorlar xətti asılı olduğuna görə bu ədədlərin heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Məsələn: Fərz edək ki, $\gamma\neq 0$.

Onda

$$\vec{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a}+\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{b}$$

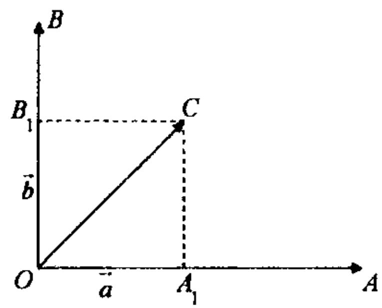
və yaxud

$$\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$$
$$\lambda_1=-\frac{\alpha}{\gamma}, \lambda_2=-\frac{\beta}{\gamma}$$

yaza bilərik.

Sonuncu bərabərlik göstərir ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardır.

(Kafilik şərti) Tutaq ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardır və onların xətti asılı olduğunu isbat edək. Əgər bu vektorlar komplanardırsa, onda onları müstəvi üzərində hər hansı bir O nöqtəsinə köçürmək olar. Bu vektorları O nöqtəsinə köçürüb onların uc nöqtələrini uyğun olaraq A, B və C ilə işarə edək.



$\vec{c}$ vektorunun C uc nöqtəsindən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına paralel düz xətlər çəkək. Bu düz xətlərin vektorlarla kəsişmə nöqtələrini A_1 və B_1 ilə işarə edək, onda paraleloqram qaydasına görə $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$ yazmaq olar. $\overrightarrow{OA_1}$ vektorunun $\vec{a}$ vektoru ilə, $\overrightarrow{OB_1}$ vektorunun $\vec{b}$ vektoru ilə kolleniar olduğuna görə $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{a}$; $\overrightarrow{OB_1} = \beta\vec{b}$ yazmaq olar. Əgər bunları son bərabərlikdə nəzərə alsaq, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ və yaxud $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - 1\cdot\vec{c} = 0$ olar. Bu isə $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının xətti asılı olduğunu göstərir.

Teorem: İxtiyari dörd vektor xətti asılıdır.

§3. VEKTORLAR FƏZASI. VEKTORLARIN BAZİSƏ GÖRƏ AYRILIŞI.

Bilirik ki, vektorların toplanması və ədədə vurulması uyğun olaraq

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

2) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

3) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a},(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

6) $\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)\cdot\beta=(\alpha\beta)\vec{a}$

7) $\vec{a}(\alpha+\beta)=\vec{a}\alpha+\vec{a}\beta$

8) $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

xassələri ödəyir. Burada α və β həqiqi ədədlər meydanının elementləridir. Boş olmayan və bu xassələri ödəyən vektorlar çoxluğuna vektorlar fəzası deyilir. Müəyyən ardıcıllıqla götürülmüş xətti asılı olmayan $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ vektorlar sisteminə vektorlar fəzasının bazisi deyilir. Bazis vektorların sayı fəzanın ölçüsünü təyin edir. Deməli, $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ vektorlar sistemi aşağıdakı şərti ödəyir.

1. Bu sistem xətti asılı deyil.

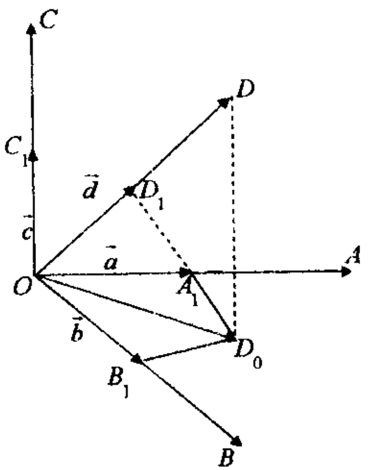
2. Fəzanın ixtiyari vektorunu bu vektorların kombinasiyası şəklində yaza bilərik. Bu vektorlar sisteminə Bazis vektorlar deyilir.

Məsələn: $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ bazis vektorları və bu fəzada $\vec{d}$ vektoru götürüb, onu bazis vektorların xətti kombinasiyası şəklində göstərək. Bu o deməkdir ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ bazis vektorları verilmişsə, elə α, β və γ ədədləri tapmaq olar ki, bu fəzadan götürülmüş ixtiyari $\vec{d}$ vektoru üçün

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \qquad (1)$$

bərabərliyini yaza bilərik.

İsbatı: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ və $\vec{d}$ vektorlarını hər hansı bir O nöqtəsinə köçürək. Bu vektorların uc nöqtələrini uyğun olaraq A, B, C və D ilə işarə edək. $\vec{d}$ vektorunun uc nöqtəsindən $\overrightarrow{OC}$ vektoruna paralel düz xətt çəkək və bu düz xəttin OAB müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsini D_0 ilə işarə edək. D_0 nöqtəsindən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına paralel düz xətlər çəkək.



Bu xətlərin $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ilə kəsişmə nöqtələrini B_1, A_1 ilə işarə edək.

Onda

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_0} + \overrightarrow{D_0D}$$
$$\overrightarrow{OD_0} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$$

olduğundan $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{D_0D}$ alarıq. $\overrightarrow{OA_1}$ vektoru $\vec{a}$ vektoru ilə, $\overrightarrow{OB_1}$ vektoru $\vec{b}$ vektoru ilə, $\overrightarrow{D_0D}$ vektoru $\vec{c}$ vektoru ilə kolleniar olduğuna görə

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{D_0D}$$
$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{a},\ \overrightarrow{OB_1} = \beta\vec{b},\ \overrightarrow{D_0D} = \gamma\vec{c}$$

yaza bilərik. Bu ifadələri və $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ olduğunu sonuncu bərabərlikdə nəzərə alsaq,

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

bərabərliyini alarıq.

(1) bərabərliyinə $\vec{d}$ vektorunun $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bazis vektorlarına nəzərən ayrılışı deyilir.

İndi isbat edək ki, vektorların bazis vektorlarına nəzərən ayrılışı yeganədir. Əksini fərz edək. Tutaq ki, həmin bazisə görə

$$\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} \qquad (2)$$

ayrılışı var. Onda

$$(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = 0$$

alarıq.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ bazis vektorlar olduğuna görə xətti asılı deyil. Ona görə də sonuncu bərabərliyin ödənməsi üçün

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \alpha_1 = 0 \\ \beta - \beta_1 = 0 \\ \gamma - \gamma_1 = 0 \end{array}\right\}$$

şərtləri ödənməlidir. Buradan isə

$$\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1$$

alınır.

Bu isə o deməkdir ki, vektorların bazis vektorlarına nəzərən ayrılışı yeganədir. α, β və γ ədədləri $\vec{d}$ vektorunun $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bazislərinə nəzərən koordinatları adlanır və

$$\vec{d} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

şəklində yazılır.

(1) bərabərliyində $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$ toplananları $\vec{d}$ vektorunun komponentləri adlanır. Əgər vektorlar öz koordinatları ilə verilmişdirsə, onda onları toplamaq və ya çıxmaq üçün eyniadlı koordinatları toplamaq və yaxud çıxmaq kifayətdir.

Məsələn: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ və $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ vektorları verilmişdirsə, onda

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

olar.

Koordinatları verilmiş vektorları sabitə vurduqda isə vektorların bütün koordinatları həmin ədədə vurulur.

Məsələn: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ və $\lambda = const$ verilmişdirsə, onda

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

bərabərliyi ödənir.

Tutaq ki, vektorlar fəzası üçölçülü vektorlar fəzasıdır. Əgər bazis vektorların uzunluqları vahidə bərabərdirsə və onlar qarşılıqlı perpendikulyardırsa, belə bazisə ortonormal bazis deyilir. Ortonormal bazis adətən $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ ilə işarə edilir. Deməli, $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_3}|$ və $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $\vec{e_1} \perp \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \perp \vec{e_3}$ şərtləri ödənərsə, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bazisinə ortonormal bazis deyilir. Bu bazisləri uyğun olaraq, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ilə işarə edirlər. $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ bazisə nəzərən hər hansı $\vec{d}$ vektorunun ayrılışını

$$\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}+\alpha_3\vec{e_3}=\vec{d}$$

şəklində yazmaq olar. İkiölçülü fəzada isə sonuncu bərabərliyi

$$\vec{d}=\alpha_1\vec{e_1}+\alpha_2\vec{e_2}$$

kimi yazmaq olar.

§4. VEKTORUN OX ÜZƏRİNDƏ PROYEKSİYASI.

Fərz edək ki, $\vec{a}$ vektoru və hər hansı l oxu verilmişdir. Bu vektorların l oxu üzərində proyeksiyasını təyin edək.

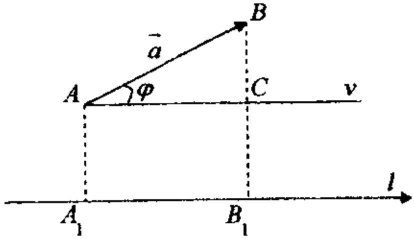
Teorem: Vektorun ox üzərində proyeksiyası onun uzunluğu ilə bu oxa meyl bucağının kosinusu hasilinə bərabərdir. Yəni: $\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərində proyeksiyasını $pr_l\vec{a}$ kimi işarə etsək

$$pr_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi \qquad (1)$$

bərabərliyi doğru olar.

İsbatı: $\vec{a}$ vektorunun uc nöqtəlrindən l oxuna perpendikulyar endirək və bu perpendikulyarların oturacaqlarını A_1 və B_1 ilə işarə edək. $\vec{a}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsindən l oxuna paralel v oxunu çəkək. Onda φ bucağı $\vec{a}$

vektoru ilə v oxu arasında qalan və eyni zamanda l oxu arasında qalan bucaq olar.



İstiqamətlənmiş $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektoru $\vec{a}$ vektorunun v oxu üzərində proyeksiyasına, yəni $\vec{AC}$ vektoruna paralel olduğundan

$$pr_v\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$$

olar. Onda l və v oxları paralel olduğuna görə $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1B_1}$. $\overrightarrow{A_1B_1}$ isə $\vec{a}$ vektorunun l oxu üzərində proyeksiyasıdır.

Ona görə də

$$\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \overrightarrow{AC} = pr_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi$$

(1) bərabərliyi alınır.

Vektorların proyeksiyalarının aşağıdakı xassələri var.

1. Bir neçə vektorun cəminin proyeksiyası həmin vektorların verilən ox üzərində proyeksiyalarının cəminə bərabərdir, yəni

$$pr_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}$$

bərabərliyi doğrudur.

2. Vektoru sabit ədədə vurduqda onun proyeksiyası həmin ədədə vurulur, yəni $\vec{a}$ vektoru və $\lambda = const$ ədədi üçün

$$pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_l\vec{a}$$

bərabərliyi ödənir.

§5. VEKTORLARIN UZUNLUĞUNUN KOORDİNATLARLA İFADƏSİ.

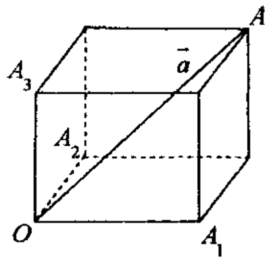
Fərz edək ki, $\vec{a}$ vektoru ortonormal koordinat sistemində $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ koordinatı ilə verilmişdir.

Teorem: Ortonormal koordinat sistemində $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu koordinatlarla

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

İsbatı: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis vektorları olsun. $\vec{a}$ vektorunun uc nöqtəsini A ilə işarə edək. A nöqtəsindən XOY, XOZ və YOZ müstəvilərinə paralel müstəvilər keçirək və bu müstəvilərin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini uyğun olaraq A_1, A_2 və A_3 ilə işarə edək.



Onda alınmış cisim düzbucaqlı paralelepiped olduğundan vektorların toplanması qaydalarına əsasən

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

yaza bilərik. Digər tərəfdən $\overrightarrow{OA_1} = a_x \vec{i}, \overrightarrow{OA_2} = a_y \vec{j}$ və $\overrightarrow{OA_3} = a_z \vec{k}$ olduğundan

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

olar. Alınmış cisim düzbucaqlı paralelepiped olduğu üçün

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{\overrightarrow{OA_1}^2 + \overrightarrow{OA_2}^2 + \overrightarrow{OA_3}^2}$$

yaxud

$$\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}$$

alarıq. Buradan isə (1) bərabərliyi alınır.

§6. VEKTORLARIN SKALYAR HASİLİ.

İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili bu vektorların uzunluqları ilə onlar arasında qalan bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir və $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ kimi işarə edilir.

Deməli, tərifə görə

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (1)$$

yaza bilərik.

Əgər vektorun ox üzərində proyeksiyasından istifadə etsək

$$pr_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$$
$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$$

olduğuna görə (1) bərabərliyini

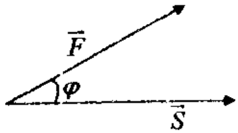
$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{b}$$
$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a}$$

şəklində yazmaq olar. Buradan görünür ki, iki vektorun skalyar hasili bu vektorların birinin uzunluğu ilə digərinin o biri vektordan keçən ox üzərində proyeksiyasının hasilinə bərabərdir.

Qeyd edək ki, iki vektorun skalyar hasili fiziki məsələlərin nəticəsidir.

Məsələn: Maddi nöqtəyə təsir edən F qüvvəsinin, gedilən S yerdəyişməsi zamanı gördüyü iş $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$ düsturu ilə hesablanır.

Əgər təsir edən qüvvə yerdəyişmə ilə φ bucağı əmələ gətirirsə, onda bu qüvvənin S istiqaməti ilə üst-üstə düşən toplananın gördüyü iş $A = \vec{F} \cdot \vec{S} \cos\varphi$ düsturu ilə hesablanar.



Skalyar hasilin aşağıdakı həndəsi xassələri vardır:

1) İki vektorun ortoqonal olması üçün zəruri və kafi şərt onların skalyar hasilinin sıfra bərabər olmasıdır.

Şərtin zəruriliyi: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ ortoqonal vektorlardır. Onda bu vektorlar arasında qalan bucaq $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\cos\varphi = 0$. Ona görə də (1) bərabərliyindən

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 0 \qquad (2)$$

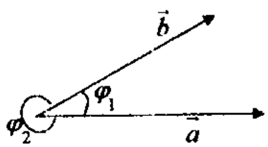
alarıq. Yəni vektorların skalyar hasili sıfra bərabərdir.

Şərtin kafiliyi: Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili sıfra bərabərdir və bu vektorların ortoqonal olduğunu isbat edək.

(1) bərabərliyindən görünür ki, (2) bərabərliyinin ödənməsi üçün ya bu vektorlardan biri, ya da hər ikisi sıfır olur. Onda (2) bərabərliyi ödənilir. Bu halda teorem isbat olunur.

İndi fərz edək ki, $|\vec{a}| \neq 0$; $|\vec{b}| \neq 0$. Bu halda (2) bərabərliyinin ödənməsi üçün (1) bərabərliyindən $\cos\varphi = 0$ alınır və $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olduğuna görə vektorlar ortoqonaldır.

2) Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili müsbət ədəddirsə, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları iti bucaq əmələ gətirir. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili mənfi ədəddirsə, onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kor bucaq əmələ gətirir.



İki vektorun skalyar hasilinin aşağıdakı cəbri xassələri var.

1) İki vektorun skalyar hasili üçün

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)$$

ödənilir. Doğrudan da, (1) bərabərliyindən istifadə etsək,

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)$$

alarıq.

2) İxtiyari $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) + \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı: Bu bərabərliyi isbat etmək üçün skalyar hasilin ikinci tərifindən istifadə edək.

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|pr_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|pr_{\vec{c}}\vec{b}=(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

3) İxtiyari $\lambda=const$ ədədi və $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün

$$(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

şərti ödənir.

Bu bərabərliyi də vektorların proyeksiyasından istifadə etməklə isbat etrmək olar .

4) İxtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2$$

bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərlik yalnız $|\vec{a}|=0$ olduqda sıfra bərabər olur. Həmişə müsbət ədəddir və skalyar kvadrat adlanır. Onun doğruluğu skalyar hasildən $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ olduqda alınır. Bu bərabərlik göstərir ki, vektorun özünə skalyar hasili onun modulunun kvadratına bərabərdir.

§7. İKİ VEKTORUN SKALYAR HASİLİNİN KOORDİNATLARLA İFADƏSİ.

Fərz edək ki, ortonormal bazisdə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları koordinatları ilə

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$$
$$\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

kimi verilmişdir.

Teorem: Ortonormal koordinat sistemində öz koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasili onların eyniadlı koordinatlarının hasilləri cəminə bərabərdir. Yəni:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı: Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları ortonormal bazisdə koordinatları ilə verilmişdirsə, onda

$$\vec{a}=a_x i+a_y j+a_z k$$
$$\vec{b}=b_x i+b_y j+b_z k$$

ayrılışını yaza bilərik. Ona görə də çoxhədlinin çoxhədliyə vurulması qaydasına görə

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_x b_x(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_x b_y(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_x b_z(\vec{i}\cdot\vec{k})+\ldots+a_y b_y(\vec{j}\cdot\vec{j})+\ldots+a_z b_z(\vec{k}\cdot\vec{k})$$

alarıq.

Burada

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cos 0=1$$

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{j}\right|\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right)=0$$

$$\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)=0$$

$$\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)=1$$

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)=1$$

bərabərlikləri ödənir.Bu qiymətləri sonuncu bərabərlikdə nəzərə alsaq, həmin bərabərlikdə eyniadlı koordinatlar iştirak edən hədlərdən başqa bütün hədlər sıfra bərabər olur. Başqa sözlə (1) bərabərliyi alınır. (1) bərabərliyindən və yaxud iki vektorun skalyar hasilindən istifadə edərək bu vektorlar arasındakı bucağı təyin etmək olar. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$$

şəklində təyin olunduğundan

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} \qquad (1)$$

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları koordinatları ilə verilmişdirsə, onda (1) bərabərliyindən istifadə etməklə sonuncu bərabərliyi

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \qquad (2)$$

şəklində yazmaq olar. Deməli, koordinatları ilə verilmiş iki vektor arasındakı bucağı (2) düsturunun köməyi ilə təyin etmək olar. (2) düsturundan istifadə etməklə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının ortoqonallıq şərtini aşağıdakı kimi söyləmək olar.

Teorem: İki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorların ortoqonal olması üçün zəruri və kafi şərt

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{3}$$

bərabərliyinin ödənməsidir.

Fərz edək ki, ortoqonal koordinatlar sistemində $\vec{a}$ vektoru $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ koordinatlara malikdir. Koordinat sisteminin bazis vektorlarını $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ilə, $\vec{a}$ vektorunun bu bazis vektorları ilə əmələ gətirdiyi bucaqları uyğun olaraq α, β və γ ilə işarə edək. Onda $\cos\alpha, \cos\beta$ və $\cos\gamma$ funksiyalarına $\vec{a}$ vektorunun yönəldici kosinusları deyilir. Yönəldici kosinusları təyin edək. Əgər $\vec{a}$ vektorunun koordinatları verilmişdirsə

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

alarıq.Bu bərabərliyin hər tərəfini skalyar olaraq $\vec{i}$ vektoruna vuraq.

$$(\vec{a} \cdot \vec{i}) = a_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_y (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_z (\vec{k} \cdot \vec{i})$$

Buradan

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{i}| \cos\alpha = a_x$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərlikdən

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

alınır. Eyni qayda ilə həmin bərabərliyi ardıcıl olaraq $\vec{j}, \vec{k}$ vahid vektorlarına vurmaqla

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

bərabərliklərini təyin etmək olar. Bu düsturlar vasitəsilə $\vec{a}$ vektorunun yönəldici kosinuslarını təyin edirik. Sonuncu bərabərlikləri kvadrata yüksəldib tərəf-tərəfə toplasaq

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

bərabərliyini alarıq. Deməli, ixtiyari vektorun yönəldici kosinuslarının kvadratları cəmi vahidə bərabərdir. Bu o deməkdir ki, vektorun uzunluğu və yönəldici kosinusları verilmişdirsə, onda bu vektoru birqiymətli təyin etmək olar.

§8. İKİ VEKTORUN VEKTORİAL HASİLİ.

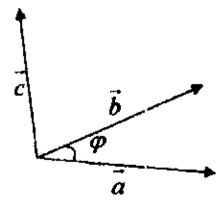
Fəzada sıfırdan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının vektorial hasili elə $\vec{c}$ vektoruna deyilir ki, bu vektor aşağıdakı şərtləri ödəsin:

1. $\vec{c}$ vektorunun uzunluğu $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının uzunluqları ilə onlar arasında qalan bucağın sinusu hasilinə bərabər olsun, yəni

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$$

2. $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının hər biri ilə ortoqonal olsun

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları sağ üçlük təşkil etsin, yəni $\vec{c}$ vektorunun üç nöqtəsindən baxdıqda $\vec{a}$ vektorunu ən qısa yolla saat əqrəbinin hərəkətinin əksinə fırlatdıqda $\vec{b}$ vektorunun üstünə düşsün. Əks halda . $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları sol üçlük adlanır.



Vektorial hasil $(\vec{a} \times \vec{b})$ yaxud $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ ilə işarə edilir. Deməli, tərifə görə

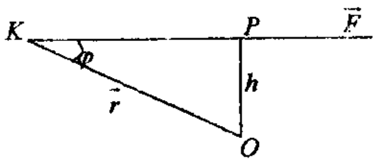
$$(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi \qquad (1)$$

yazmaq olar və yalnız verilmiş vektorlardan biri yaxud hər ikisi sıfra bərabər olduqda və yaxud verilmiş vektorlar kolleniar olduqda sıfra bərabər olur.

Vektorial hasil mexaniki kəmiyyətlə, qüvvənin verilmiş nöqtəyə nəzərən momenti ilə əlaqəlidir. Doğrudan da, əgər $\vec{F}$ qüvvəsi hər hansı bir K nöqtəsinə tətbiq edilmişdirsə, onun O nöqtəsinə nəzərən momenti

$$M = OP \cdot \vec{F} = h\vec{F}$$

düsturu ilə hesablanır.



Digər tərəfdən

$$h = \vec{r}\sin\varphi$$

olduğundan

$$M = r \cdot \vec{F}\sin\varphi$$

yaxud

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

yazmaq olar ki, bu ifadə $\vec{r}$ və $\vec{F}$ vektorlarının vektorial hasilidir.

Vektorial hasilin aşağıdakı həndəsi xassələri vardır.

1. İki vektorun kolleniar olması üçün zəruri və kafi şərt onların vektorial hasilinin sıfra bərabər olmasıdır.

Zəruriliyin isbatı: Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniardır və

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 0 \qquad (2)$$

olduğunu isbat edək. Əgər (2) şərti ödənirsə (1) bərabərliyindən

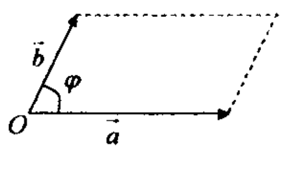
$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=0 \qquad (3)$$

olar. Vektorlar kolleniardırsa $\varphi=0$, yaxud $\varphi=\pi$ olmalıdır. Hər iki halda yəni $\sin 0=0$, $\sin\pi=0$ olduğundan (3) bərabərliyi ödənir və (2) şərtinin ödənməsi deməkdir.

Kafiliyin isbatı: İndi isə (3) bərabərliyi ödəndikdə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarınının kolleniar olduğunu isbat edək. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının hər hansı biri və yaxud hər ikisi sıfır vektor olsa, onlar kolleniar olar. Şərtə görə $\left|\vec{a}\right|\neq 0$ və $\left|\vec{b}\right|\neq 0$. Yəni vektorlar sıfırdan fərqlidirlər. Ona görə də (3) bərabərliyinin ödənməsi üçün $\sin\varphi=0$ olmalıdır. Buradan isə $\varphi=0$ yaxud $\varphi=\pi$ qiymətləri alınır. Bu isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kolleniar olduğunu göstərir.

2. İki vektorun vektorial hasili ədədi qiymətcə, bu vektorları bir nöqtəyə köçürdükdə onlar üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə bərabərdir, yəni

$$\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=S$$



İsbatı: Verilmiş vektorları O nöqtəsinə köçürüb, birinin ucundan digərinə paralel düz xətlər çəksək paraleloqram alarıq.

Əgər $\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\varphi$ olarsa, paraleloqramın sahəsi

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$$

olduğundan (1) düsturuna görə

$$\left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = S$$

olar.

Vektorial hasilin aşağıdakı cəbri xassələri vardır.

1.Vektorial hasildə vuruqların yerini dəyişdikdə işarə dəyişir, yəni

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

bərabərliyi ödənir.

2.Vektorların vektorial hasilini ədədə vurmaq üçün, vuruqlardan birini bu ədədə vurmaq kifayətdir, yəni ixtiyari $\lambda = const$ ədədi , $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün

$$\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \times \lambda\vec{b}\right)$$

doğrudur.

3. Vektorial hasil paylama xassəsini ödəyir, yəni ixtiyari $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün

$$\left(\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

ödənir.

4. İxtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün

$$\left(\vec{a} \times \vec{a}\right) = 0$$

ödənir.

Bu xassələrdən birincisini isbat edək.

Tutaq ki, $\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})$ və $\vec{d}=(\vec{b}\times\vec{a})$-dır. Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniar olsa $\vec{c}=\vec{d}=0$ olar və xassə isbat olunar. Bu vektorlar kolleniar olmasa $(\vec{a}\times\vec{b})$ və $(\vec{b}\times\vec{a})$ vektorlarının uzunluqları bərabərdir və bu vektorlar kolleniardırlar. Onda $\vec{c}=\vec{d}$ və yaxud $\vec{c}=-\vec{d}$ olmalıdır. Əgər $\vec{c}=\vec{d}$ olsa, həm $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları, həm də $\vec{b}$, $\vec{a}$ və $\vec{c}$ vektorları sağ üçlük təşkil edər. Bu isə mümkün deyil. Ona görə də $\vec{c}=\vec{d}$ olmalıdır, yəni birinci xassə ödənir.

Digər xassələri də eyni qayda ilə isbat etmək olar.

§9.VEKTORİAL HASİLİN KOORDINATLARLA İFADƏSİ.

Əgər vektorlar düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları ilə verilmişdirsə, yəni $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ və $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ olarsa

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k};\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

yazmaq olar. Onda bu vektorların vektorial hasili

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\{y_1z_2-z_1y_2;\, x_1z_2-z_1x_2;\; x_1y_2-y_1x_2\} \tag{1}$$

vektoruna bərabərdir. Vektorial hasilin paylanma xassəsindən istifadə etsək, çoxhədlinin çoxhədliyə vurulma qaydasına görə