Qəhrəmanov N.F., Məmmədov N.S., Balayev V.A.

İdarəetmədə ədədi hesablama üsullarının tətbiqi

(dərs vəsaiti)

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 23.05.2007-ci il tarixli 503 saylı əmri ilə dərs vəsaiti kimi təsdiq olunmuşdur

SUMQAYIT – 2007

UDK 62-50: 54+66 (075)

Elmi redaktor:

Rəy verənlər: Sumqayıt Dövlət Universitetinin professoru, Milli Elmlər Akademiyasının müxbir üzvü F.İ.Məmmədov, Texniki Universitetin professoru Q.Ə.Rüstəmov

N.F.Qəhrəmanov, N.S.Məmmədov, V.A.Balayev
İdarəetmə sistemlərində ədədi hesablama üsullarının tətbiqi
S: «Sumqayıt», 2007, səh. 160

Dərs vəsaitində təqribi ədədlərin xətaları, xətti və qeyri-xətti tənliklər sisteminin həll olunma üsulları, approksimasiyaetmə məsələsi, adi diferensial tənliklərin həll edilməsi, müəyyən inteqralın təqribi hesablanma üsulları və s. haqqında məlumat verilir.

Vəsait idarəetmə, fiziki, kimyəvi və s. sahələr üzrə statistik məlumatların emal edilməsi məsələləri ilə məşğul olan bakalavr və magistrlər üçün nəzərdə tutulmuşdur.

Nəşriyyat «Sumqayıt», 2007

Giriş

Fiziki-kimyəvi eksperimentlərin əsas məqsədi hər hansı bir maddənin xüsusiyyətlərini öyrənməkdən ibarətdir. Maddəni xüsusiyyətlərini öyrənmək üçün eksperimentatoru maraqlandıran fiziki kəmiyyətlər üzərində müxtəlif əməliyyatlar aparılaraq, onlar arasındakı asılılıqlar təyin edilir. Müxtəlif əyrilər qurulur və bir parametrin digər parametrdən asılılığı tədqiq olunur. Bunun üçün eksperimentin qiymətləri cihazların dəqiqliyindən çox asılı olur. Əgər cihazların xətaları çox olarsa, həmin eksperiment qiymətlər riyazi metodlarda tətbiq etdikdə, alınan nəticələr müəyyən xətalarla xarakterizə olunacaqdır. Digər tərəfdən cihazların konstruksiyası mürəkkəb olarsa, xətaların yaranma mənbəyi də artacaqdır. Bütün yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq xətaların yaranma səbəblərini öyrənmək lazımdır. Ona görə də xətalar üzərində aparılan bütün əməliyyatlara fikir vermək lazımdır, bu xətaları qiymətləndirmədən maddə üzərində qoyulmuş hər hansı bir eksperiment vasitəsilə fiziki-kimyəvi qanunauyğunluqları dəqiq təyin etmək çətinlik törədir.

Təcrübə əsasında ölçünün xətasının təyini məsələsi o qədər də asan deyildir. Əsas çətinliklər ondan ibarətdir ki, ölçüləri apararkən müxtəlif faktorların qarşılıqlı əlaqəsi və bir-birinə təsiri nəticəsində həddindən çox bu və ya digər formada xətalar mənbənin əmələ gəlməsi müşahidə olunur. Digər tərəfdən, fiziki kəmiyyət üzərində eksperiment qoyularkən həmin fiziki kəmiyyətin bütün parametrlərini nəzərə almaq çətindir. Ona görə də ölçülən kəmiyyətin xətasının əsas əsl qiymətinin eksperimentin düzgün qoyulmasından asılı olmayaraq təyin etmək müəyyən çətinliklərlə əlaqədar olur. Bütün bunları nəzərə alaraq xətalar nəzəriyyəsini öyrənmək məqsədə uyğun sayılır.

Fiziki-kimyəvi kəmiyyətlərin xətalarının qiymətləndirilməsi məsələsinin çətinliyi bir də ondan ibarətdir ki, onları bilavasitə ölçmək praktiki olaraq mümkün deyildir. Belə ki, məsələn, hər hansı məhlulun elektrik keçiriciliyini bilavasitə ölçmək mümkün deyildir. Ona görə də elektrik kesiriciliyini ölçmək üçün məhlulun elektrik müqavimətini ölçmək lazımdır.

Sonra isə eksperimentatoru maraqlandıran elektrik keçiriciliyinin qiyməti yeni hesablamalarla əlaqədar olaraq yenidən hesablanır.

Maddənin buxarının təzyiqinin temperaturdan asılılığına baxaq. Bu zaman maddənin buxarlanma istiliyi buxarın təzyiqinin temperaturdan funksional asılılıqla ifadə olunur. Burada qeyd etmək lazımdır ki, bu asılılığın forması nəzəri yolla təyin olunaraq müəyyən kiçik intervallarda təxmini adlanır.

Beləliklə praktikada elmi tədqiqat işlərində xətaların təsiri olduqca böyükdür.

Xalq təsərrüfatının müasir inkişafının səviyyəsi ilk növbədə texniki tərəqqinin və idarəetmə üsullarının tətbiq edilməsi nəticəsində baş verir.

Neftayırma, neftkimya, kimya, metallurgiya sənayesində müxtəlif nəqliyyat sahələrində, elektron cihazların tərkib elementi olan kristalların alınması sahələrində, kənd təsərrüfatının və digər sahələrdə mövcud olan idarəetmə məsələlərinin öyrənilməsi, uyğun həll üsulunun seçilməsi və onun kompüterdə həll olunma proqramının qurulması nəzəri və praktiki əhəmiyyətə malikdir. Hər bir idarəetmə məsələsinin həlli ilk növbədə idarə olunan obyektinin giriş parametrləri ilə çıxış parametrləri arasındakı əlaqəni xarakterizə edən riyazi asılılıqlarının olmasını tələb edir. Ayrı-ayrı bölmələrdə verilmiş ədədi üsulların tətbiq sahələri konkret idarəetmə məsələsi kimi verilmiş və onun xarakterik xüsusiyyətləri göstərilmişdir. Məhz bu səbəbdən də avtomatlaşdırma və avtomatik idarəetmə sahəsində təhsil alan tələbələr hər bir üsulun konkret tətbiq olunma sahəsini və səbəbini asanlıqla müəyyən edə biləcək.

Təqdim olunan dərs vəsaiti 7 fəsildən ibarətdir. Onun altı fəslində idarəetmə məsələsinin növündən asılı olaraq müxtəlif ədədi üsullar, onların tətbiq olunma sahələri və həll olunma qaydası verilmişdir.

1. Təqribi ədədlər və onların xətaları

Əksər hallarda istifadə olunan kəmiyyətlər üzərində aparılan hesabatlar təqribi kəmiyyətlər adlanır: atom çəkisi və termodinamik funksiyalar, bütün ölçülən fiziki xüsusiyyətlər və onların xarakteristikalarının hesabatlarının rəqəm və uyğun cədvəl şəklində verilməsi təqribi kəmiyyətlər sayılır. Belə ki, bütün riyazi sabitlər (məsələn π, e), və həmçinin aparılan riyazi əməliyyatların nəticələrini (ədədlərin loqarifması, triqonometrik funksiyalar, onluq say sistemində tərtib və kəsrlər) qiymətlərini dəqiq təyin etmək mümkün deyildir. Ona görə də müəyyən miqdarda onluq işarələrlə məhdudlaşdırılır və təbii olaraq müəyyən xətaların əmələ gəlməsinə səbəb olur. Hətta elə kəmiyyətlər vardır ki, onların qiytətləri onluq ədədlərlə ifadə edilərək yuvarlaqlaşdırılır, nəticədə yenə də xətaya yol verilir, yəni, təqribi ədədlər alınır. Qeyd etmək lazımdır ki, ədədlər üzərində əməliyyat aparılarkən ədədlərin təqribi alınması qismən istifadə etdiyimiz onluq say sistemi ilə də əlaqədardır. Həqiqətən də $\frac{2}{7}$ kəsri dəqiq rəqəm adlanır və bu kəsri onluq say sistemində ifadə edərkən müəyyən yaxınlaşma ilə rəqəmlər alınacaqdır. Bu rəqəmləri yuvarlaqlaşdırmaqla müəyyən xətanın alınmasına səbəb olacaqdır. Beləliklə, bütün hesabatlarda təqribi rəqəmlərdən istifadə olunacaqdır. Ona görə də təqribi rəqəmlərin xətalarının hesablanmasına və onlar üzərində müəyyən əməliyyatların aparılmasına fikir verilməlidir.

1.1 Mütləq və nisbi xətalar

Hər hansı kəmiyyətin öz həqiqi qiymətindən təxmini meyl etməsini xarakterzə etmək üçün mütləq və nisbi xəta anlayışından istifadə olunur. Əsas çətinlik ondan ibarətdir ki, əksər hallarda baxılan kəmiyyətin həqiqi qiymətindən meyl etməsinin qiyməti məlum deyildir.

Tutaq ki, A – bizə məlum olmayan hər hansı bir kəmiyyətin dəqiq qiyməti və a – onun təqribi qiymətidir. Dəqiq qiymət ilə təqribi qiymət arasındakı fərqi mütləq xəta adlandırmaq olar. Onda aşağıdakı ifadəni yazmaq olar:

$$A - a = \Delta a \ldots \qquad (1.1)$$

Adətən, xətanın işarəsi məlum olmadığı üçün (A-a)-nın mütləq qiymətinldən istifadə etmək məqsədə uyğun sayılır.

$$\varepsilon = |A - a| = |\Delta a| \quad \text{və ya} \quad A = a \pm \varepsilon \ldots . \qquad (1.2)$$

Bir qayda olaraq, *a* təqribi ədədinə əsasən mütləq xətası dedikdə, Δa deyil, ε kəmiyyəti nəzərdə tutulur.

Mütləq xətanın həddi qiyməti ε_h aşağıdakı bərabərsizliklə təyin edilir.

$$\varepsilon_h \geq |A - a| = \varepsilon \quad \text{və ya} \quad \varepsilon_h \geq \pm A \mp a = \pm\varepsilon \qquad (1.3)$$

buradan
$$a + \varepsilon_h \geq A,$$
$$A \geq a - \varepsilon_h$$

Beləliklə A-nın əsl qiyməti aşağıdakı göstərilən həddə yerləşdirilə bilər.

$$a - \varepsilon_h \leq A \leq a + \varepsilon_h \qquad (1.4)$$

burada *a* - təqribi kəmiyyət qiymətidir.

ε_h kəmiyyətini müəyyən dərəcədə sərbəst seçmək olar. Lakin praktiki olaraq A kəmiyyətinin ətrafında intervalı kiçiltmək daha sərfəlidir, yəni, ε_h kəmiyyətinin ən kiçik qiymətini götürmək olar. Yuxarıdakı müqaisədən görünür ki, ε və ε_h xətaları təyin olunan kəmiyyətlərin ölçüsündən ibarətdir.

a - təqribi ədədinin xarakteristikasnın dəqiqliyi kifayət qədər təyin oluna bilir. Həqiqətən də, olçünü eyni dərəcədə xarakterizə edən hədd mütləq xəta ε_h müəyyən hallarda müxtəlif qiymətlər ala bilər. Tutaq ki, olçülən kəmiyyət bir halda a_1-ə və başqa halda isə $10a_1 = a_2$ olarsa, onda ikinci halda nisbi dəqiqlik birinci hala nisbətən daha yüksək olacaqdır. Məsələn, əgər temperaturun ölçülməsi termometrlə ± 0.1 dəqiqliklə yerinə yetirilərsə, və temperatur birinci halda 20 ± 0.1 və ikinci halda 200 ± 0.1 ölçülərsə, baxmayaraq ki, mütləq xəta hər iki halda eynidir, onda ikinci halda eksperimentin dəqiqlik səviyyəsi birinci hala nisbətən daha yüksək olacaqdır. Ölçülən kəmiyyətdən asılı olaraq, ölçünün nisbi dəqiqliyini xarakterizə etmək üçün nisbi xətadan istifadə edilir və δ ilə işarə olunur. Bu aşağıdakı kimi təyin edilir.

$$\delta_h \geq \frac{\varepsilon}{|A|} \quad \text{və ya} \quad \delta_h|A| \geq \varepsilon \qquad (1.5)$$

Əvvəldə olduğu kimi hədd mütləq xətadan istifadə olunduğu halda hədd nisbi xəta anlayışından da istifadə edilir və δ_h ilə işarə olunur. Bunu aşağıdakı kimi təyin etmək olar.

$$\delta_h \geq \frac{\varepsilon}{|A|} \quad \text{və ya} \quad \delta_h|A| = \varepsilon \qquad (1.6)$$

burada ε - mütləq xətadır.

Mütləq xətanın hədd qiymətini elə seçmək olar ki, (1.6) ifadəsini aşağıdakı bərabərlik şəklində köstərmək mümkün olsun, yəni,

$$\delta_h|A| = \varepsilon_h \quad \text{və ya} \quad \delta_h \geq \frac{\varepsilon_h}{|A|} \qquad (1.7)$$

(1.5) və (1.7) ifadələri mütləq və nisbi xətaları əlaqələndirmək üçün əsas müqaisələrdir.

Yuxarıdakı düsturlarda naməlum A kəmiyyəti iştirak edir. Bu kəmiyyət faktiki olaraq xətanın ədədi qiymətlərini təyin etməyə müəyyən mənada mane olur. Praktiki olaraq ölçünü apardıqda çalışmaq lazımdır ki, dəqiqlik mümkün qədər ödənilsin. Ona görə də bir çox hallarda mütləq xəta kəmiyyətin öz təqribi qiymətindən ən kiçik qəbul edirlər, yəni, $\varepsilon << |A|$ və $\varepsilon << |a|$ və ya $A \approx a$. Kifayət qədər dəqiq ölçü üçün yuxarıdakı ifadələri təxmini olaraq aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\delta|a| \approx \varepsilon \quad \text{və} \quad \delta_h|a| \approx \varepsilon_h \qquad (1.8)$$

Bu ifadə ona ekvivalentdir ki, biz burada $(\varepsilon / a)^2$ (və yüxarı tərtibləri) nəzərə almırıq.

Həqiqətən $\frac{\varepsilon}{A}=\frac{\varepsilon}{a\pm\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{a\left(1\pm\frac{\varepsilon}{a}\right)}\approx\frac{\varepsilon}{a}\left(1\mp\frac{\varepsilon}{a}\right)$

Bu düsturları hesabatlarda istifadə etmək olar. Mütləq və nisbi xətalara əsaslanaraq aşağıdakı ifadəni yazmaq olar.

$$A=a\pm\varepsilon=a\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right) \tag{1.9}$$

belə ki, $\frac{\varepsilon}{|a|}\approx\frac{\varepsilon}{|A|}=\delta$

onda $$A=a(1+\delta) \tag{1.10}$$

Əgər, yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi A kəmiyyətinin dəqiq qiymətinin yerləşdiyi sərhəddi genişləndirsək, onda yazmaq olar ki,

$$A=a(1\pm\delta_h) \tag{1.11}$$

mütləq xətadan fərqli olaraq nisbi xəta ***ölçüsüz kəmiyyət*** adlanır. Adətən, nisbi xətanı faizlə göstərirlər, və alınan nisbi xətanın qiymətini 100-ə vurmaq lazımdır.

Məsələ: Tutaq ki, voltmetrlə gərginliyi ölçürük. Voltmetrin şkalasının hər bölgüsünün qiyməti 3B olaraq sıfırdan 300 volta qədərdir. Hər bölgü arasındakı məsafə ardıcıl olaraq bütün şkala boyu eynidir. Belə şkala bərabər ölçülü və ya xətti adlanır. Şkalaya göz ilə nəzər yetirdikdə əqrəbin vəziyyətini müəyyən dəqiqliklə bölgülər arasındakı məsafənin yarısını qiymətləndirə bilərik, yəni 1,5B. Beləliklə, bütün şkala üzrə nisbi xətanı hesablamaq olar :

$$\delta=\frac{1.50}{300}=0.005=0.5\%$$

Lakin şkalanın müxtəlif hissələrində aparılan faktiki ölçü bərabər vəziyyətli olmayacaqdır, baxmayaraq ki, eyni mütləq xətaya malik olacaqdır. Tutaq ki, nisbi xətası 2 faizdən çox olmayaraq gərginliyin ölçülməsini təyin etmək lazımdır. Həqiqətən,

$$\frac{2}{100}=\frac{1,5}{x};\quad x=\frac{1,5}{0,02}=75B$$

Beləliklə, 75B-dan başlayaraq bu dəqiqliklə gərginliyi ölçmək olar, 2 faiz dəqiqliklə kiçik gərginlikləri ölçdükdə başqa voltmetr götürmək lazımdır.

1.2 Ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması

İstənilən ölçülən və hesablanan kəmiyyətlər ədədlərlə xarakterizə olunurlar. Bunlar kəmiyyətlərin təxmini qiymətləri adlanırlar. Təcrübəsiz tədqiqatçılar daha dəqiq nəticələr almaq üçün təxmini kəmiyyətlər üzərində əməliyyatlar apararkən vergüldən sonra olan artıq rəqəmləridə saxlayırlar. Lakin belə hesablamanı dəqiq aparmaqdan ötrü çox hesablamalar, böyük əmək və vaxt sərf etmək tələb olunur. İstənilən ölçünün və hesablamanın dəqiqlik dərəcəsi müəyyən məqsədə uyğun olmalıdır. Ona görə də böyük hesabatlar apararkən və hesabatı yüngülləşdirmək məqsədilə ədədlərin yuvarlaqlaşdırılması məsələsi meydana çıxır. Praktiki hesablamalarda təqribi ədədlər üzərində əməliyyatlar aparıldıqda müxtəlif mütləq və nisbi xətalar əmələ gəlir. Hesabatdan alınan son nəticələr hesabata daxil olan ayrı-ayrı aralıq ədədlərin hesablanmasından asılıdır. Bu hesabatların müəyyən hissəsinin dəqiqliyi az olarsa, digər hissəsinin dəqiqliyi çox olarsa, onda ümumi nəticədə dəqiqliyi az olan ədədlərin hesabına son xətalar artacaqdır. Təqribi ədədlərin vurulması və bölünməsi zamanı onluq işarələrin miqdarı çoxalır. Lakin etibarlı işarələrin sayı müəyyən məhdudiyyət daxilində olacaqdır. Bu zaman alınan ədəddə artıq işarələri atmaq lazımdır, yə'ni yuvarlaşdırmaq tələb olunur. İstənilən ədədin onluq şəklində yazılışı aşağıdakı kimi göstərilə bilər.

$$A = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1} \ldots \qquad (1.12)$$

burada a_m, a_{m-1}, və sairə – A ədədinin uyğun yerlərində duran rəqəmlərdir. m isə – A ədədinin onluq dərəcəsini xarakterizə edən tərtib göstəricisidir. Ümumiyyətlə, A ədədinin rəqəmləri sonsuz ola bilər.

Əgər A ədədini hər hansı bir dərəcədən kəsib atsaq (məsələn m–n+1), onda *a* ədədinin təqribi qiymətini alırıq *n* əhəmiyyətli rəqəmlərdən ibarət olan ədəd alınacaqdır. İstənilən ədədin əhəmiyyətli rəqəm bu ədədə daxil olan bütün rəqəmlər 1,2,...,9 adlanır. Ədədin ortasında və sağında sıfır da əhəmiyyətli rəqəm sayılır. Əgər ədədi yuvarlaqlaşdırdıqda sağda olan bir neçə rəqəmi atmaq mümkündür. Atılan rəqəmlər 5-dən yuxarı olarsa (5-də daxil olmaqla), onda atılan rəqəmdən qabağdakı rəqəmi bir vahid artırmaq lazımdır. Adətən ədədlərin yazılışını sadələşdirmək üçün həmin ədədin sağ və solunda duran sıfırlar əhəmiyyətsiz olduğu üçün onluq dərəcə şəklində ifadə olunaraq $10^{\pm n}$ ilə ifadə olunurlar, məsələn, $0{,}0036\cdot 10^{-3}$ burada əhəmiyyətli rəqəm 3 və 6 götürülür.

$$248 = 2{,}48\cdot 10^{2};\ 24800 = 2{,}48\cdot 10^{4};\ 0{,}000248 = 2{,}48\cdot 10^{-4}.$$

1.3 Təqribi ədədlər üzərində hesab əməlləri

1.3.1 Təqribi ədədlərin toplanması

Təqribi ədədlər üzərində müxtəlif hesab əməllərini aparmaq mümkündür. Tutaq ki, bir neçə təqribi ədədlər verilmişdir və bu ədədlərin hər bir toplananın işarəsi eyni işarələrdir, yəni,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Təqribi ədədlərin təyin olunmasına uyğun olaraq yazmaq olar ki,

$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$

$A_1 = a_1 + \Delta a_1$

$A_2 = a_2 + \Delta a_2$

$A_3 = a_3 + \Delta a_3$

- - - - - - - -

$A_n = a_n + \Delta a_n$

Onda $A = A_1+A_2+\ldots+A_n = a_1+\Delta a_1 + a_2 + \Delta a_2 + \ldots + a_n + \Delta a_n =$
$=(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n)$

Burada A – dəqiq və bizə məlum olmayan, cəmin qiymətidir. Bərabərliyin sağ tərəfindəki birinci mötərizə cəmin təqribi qiymətləri, ikinci mötərizədə isə təqribi ədədlərinin xətalarının qiymətlərinin cəmidir. Belə ki, Δa_i xətalarının işarələri bizə məlum deyil, lakin biz ən pis variantı götürürük, yəni, xətaların işarələrinin eyni olan halı nəzərdə tutulur. Beləliklə, mahiyyət etibarilə xətaların cəminin hədd qiymətini alırıq.

$$\varepsilon_h = |\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \ldots + |\Delta a_n| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n \qquad (1.13)$$

Əgər Δ_i kəmiyyətləri ayrı-ayrı toplananların mütləq xətaların hədd qiymətləri adlanırsa, onda

$$\varepsilon_h = (\varepsilon_{1h} + \varepsilon_{2h} + \ldots + \varepsilon_{nh}) \geq |\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \ldots |\Delta a_n| = \varepsilon_h'$$

Beləliklə, təqribi ədədlərin mütləq xətalarını hədd qiymətlərinin cəmi, ayrı-ayrı toplananların mütləq xətalarını hədd qiymətlərindən cəminə bərabərdir:

$$\left|\sum_i A_i - \sum_i a_i\right| = |A - a| \leq \sum_i \varepsilon_{ih} = \varepsilon_n'$$

burada

$$\sum_i A_i = A \text{ və } \sum_i a_i = a$$

Bu ifadədən görünür ki, ε_h-in qiyməti ε_{ih} xətalarının arasında olan ən böyük qiymətindən kiçik olmalıdır. Beləliklə, xətaların cəmini mümkün olan ən kiçik dəqiqliyi ilə təyin olunur.

Təqribi ədədlərin nisbi xətanın hədd qiymətinin cəmi ümumi düstur ilə təyin olunur:

$$\delta_h = \frac{\varepsilon_h}{A} \approx \frac{\varepsilon_h}{a} \qquad (1.14)$$

burada

$$A = \left|\sum_i A_i\right|, \quad a = \left|\sum_i a_i\right| \text{ və } \varepsilon_h = \sum_i \varepsilon_{ih}$$

Əgər xətaların işarələri məlum olduqda δ-nın daha dəqiq qiymətini hesablaya bilərik.

$$\delta = \frac{\left|\sum_i \Delta a_i\right|}{A} \approx \frac{\left|\sum_i \Delta a_i\right|}{a} \leq \frac{\varepsilon_h}{a} \qquad (1.15)$$

Ümumi halda ayrı-ayrı toplananların nisbi xətaları müxtəlif olduğu üçün cəmin nisbi xətaların dəyişmə həddini tapa bilərik, yəni $\varepsilon_i = \delta_i A_i$ olduqda

1.3.4 Təqribi ədədlərin bölünməsi

İki təqribi ədədlərin bölünməsindən alınan qismətin nisbi xətası təqribi ədədlərin vurulmasında olduğu kimi təyin edilir, tutaq ki,

$$a = \frac{a_1}{a_2}$$

onda $\qquad \ln a = \ln a_1 - \ln a_2, \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta a_1}{a_1} - \frac{\Delta a_2}{a_2}$

Bütün xətalar cəmlənir və xətaların mütləq qiymətləri götürülür;

$$\frac{\Delta a}{a} \le \frac{|\Delta a|_h}{a} = \frac{\varepsilon_h}{a} = \frac{|\Delta a_1|}{a_1} + \frac{|\Delta a_2|}{a_2} = \frac{\varepsilon_1}{a_1} + \frac{\varepsilon_2}{a_2} \approx \tag{1.22}$$

$$\approx \frac{\varepsilon_1}{A_1} + \frac{\varepsilon_2}{A_2} = \delta_1 + \delta_2$$

Qismətin nisbi xətasının hədd qiyməti aşağıdakı kimi təyin edilir.

$$\delta_h = \frac{\varepsilon_h}{a} = \delta_1 + \delta_2 \tag{1.23}$$

yəni, bölən və bölünənin nisbi xətasının hədd qiymətinin cəminə bərabərdir.

1.4 Asılı olmayan bir dəyişənli funksiya xətası

Tutaq ki, hər hansı xətası $x_1, x_2, \dots x_u$ dəyişənlərdən asılı olan məlum funksiya $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verilmişdir. Məlum arqumentin xətasına görə funksiyanın mütləq və nisbi xətasını təyin etmək tələb olunur. Əvvəlcə bir dəyişənli funksiyaya baxaq:

$$y = f(x) \tag{1.24}$$

Aydındır ki, Δx arqumentinin xətası Δu funksiyasının xətasının yaranmasına səbəb olur. Ona görə də yazırıq ki,

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \tag{1.25}$$

Bu ifadənin sağ tərəfində duran funksiyanı Δx tərtibə görə Teylor sırasına ayırırıq, Kök altında olan təqribi ədədin xətasına tapaq:

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Yuxarıdakı əməliyyatlardan istifadə edərək, yaza bilərik ki,

$$\delta_y = \frac{1}{n}\delta x \qquad (1.30)$$

yəni, kök altında olan təqribi ədədin nisbi xətası həmin ədədin nisbi xətasının kökün dərəcəsinə bölünməsinə bərabərdir:

Mütləq xəta isə

$$E_y = \frac{y\delta_x}{n}$$

Təqribi ədədin natural loqarifminin xətasını təyin edək:

$$y = \ln x$$

(1.28) düsturundan istifadə edərək, alırıq ki,

$$\delta_y = \left|\frac{d}{dx}\ln\ln x\right|\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_x}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\delta_x}{\ln x} = \frac{\delta_x}{y} \qquad (1.31)$$

Bu düstur fiziki kimyada çox işlədilir. Mütləq xətanı aşağıdakı kimi təyin etmək olar.

$$\varepsilon_y = \delta_y y = \delta_x$$

Triqomentrik funksiyaya baxaq:

$$y = tq\varphi$$

onda

$$\delta_y = \left|\frac{d}{d\varphi}\ln tg\varphi\right|\varepsilon_\varphi = \frac{1}{tg\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_\varphi}{\sin\varphi\cdot\cos\varphi} = \frac{2\varepsilon_\varphi}{\sin 2\varphi} \qquad (1.32)$$

1.5 Asılı olmayan bir neçə dəyişənli funksiyanın xətası

Asılı olmayan bir neçə dəyişənli funksiyanın mütləq və nisbi xətalarının təyini bir dəyişənli funksiyanın xətasını təyin olunmasının ümumiləşdirilmiş forması adlanır. Tutaq ki,

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.33)$$

burada x_1, x_2,..., x_n - təcrübədən təyin olunan təqribi kəmiyyətlərdir.

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2+\ldots+=y+\Delta y$$

Nəzərdə tutulur ki, ölçmə daha dəqiq aparılıb, belə ki Δx kəmiyyəti x-a görə həddindən artıq kiçik olduğu üçün yüksək dərəcəli (iki və üç) hədləri atmaq olar. Onda alırıq ki,

$$y+\Delta y=f(x)+f'(x)\Delta x$$

və ya (1.24) ifadəsini nəzərə alsaq,

$$f(x)+\Delta y=f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$\Delta y=f'(x)\Delta x \qquad (1.26)$$

$|\Delta y|=\varepsilon_y$ və $|\Delta x|=\varepsilon_x$ olduğunu nəzərə alaraq (1.26) ifadəsini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\varepsilon_y=|f'(x)|\varepsilon_x \qquad (1.27)$$

Nisbi xətanı y-u tapmaq üçün (26) bərabərliyinin hər iki tərəfini y=f(x)-a bölmək və $\Delta x, \Delta dx$ eyniliyi nəzərə almaq lazımdır. Onda alarıq ki,

$$\delta_y=\frac{\varepsilon y}{|y|}=\frac{|\Delta y|}{|y|}\approx\frac{|d(x)|}{|f(x)|}=\left|d\ln f(x)\right|=\left|\frac{d}{dx}\ln f(x)\right|\Delta x\Big|=\left|\frac{d}{dx}\ln f(x)\right|\varepsilon_x \qquad (1.28)$$

Beləliklə, bir dəyişənli funksiyanın mütləq xətası arqumentin mütləq xətasının həmin funksiyanın törəməsinin vurma hasilinə bərabərdir. Nisbi xəta isə natural loqaritmin törəməsinin arqumentin mütləq xətasına vurma hasilinə bərabərdir. Bir necə misala baxaq, tərtib formasında olan təqribi ədədin xətasını tapaq, tutaq ki, $y=x^n$ nisbi xətanı tapaq

$$\delta_y=\left|\frac{d}{dx}\ln x^n\right|\varepsilon_x=n\frac{\varepsilon_x}{x}=n\delta_x \qquad (1.29)$$

Tərtib formasında olan təqribi ədədin nisbi xətası nisbi xətanın onun tərtibinin vurma hasilinə bərabərdir. Mütləq xəta aşağıdakı kimi tapılır.

$$\varepsilon_y=y\delta_y=yn\delta_x$$

(1.27) tənliyindən istifadə edərək tapmaq olar ki,

$$\varepsilon_y=y^1\varepsilon_x=nx^{n-1}\varepsilon_x$$

1.6 Ölçmənin xətaları

Eksperimentin məqsədi hər hansı maddənin xüsusiyyətlərini tədqiq etməkdir. Belə tədqiqatların məqsədi alınan nəticələrin emal olunması, ölçü cihazları vasitəsilə eksperimenttatoru maraqlandıran fiziki kəmiyyətlərin ölçülməsi və öyrənilməsidir. Fiziki kəmiyyətlərin təbiətindən asılı olaraq ölçü quruluşları mürəkkəbliyi ilə müxtəlif olurlar. Lakin ölçü cihazlarının konstrukstiyaları nə qədər sadə və mürəkkəb olarsa, ölçmə müəyyən xətalarla yerinə yetirilir. Ona görə də ölçünün nəticələrindən asılı olaraq alınan xətaları əsaslandırmaq lazımdır. Xətaların az və ya çox olması eksperimnt aparan şəxsin elmi hazırlığından, təcrübəsindən və bacarığından asılıdır.

Bundan əlavə xətaların artması fiziki-kimyəvi kəmiyyətlərin ölçü cihazları ilə bilavasitə ölçü üsulunun olmamasıdır. Məsələn, hər hansı bir məhlulun elektrik keçiriciliyini bilavasitə ölçmək mümkün deyil. Bunu ölçmək üçün əvvəlcə məhlulun elektrik keçiriciliyi elektrik müqavimət termometri vasitəsilə ölçülür. Sonra isə müqavimət termometrin çıxışı körpü sxeminə verilir. Beləliklə bunu bilavasitə ölçmək mümkün olmaması əlavə xətaların meydana gəlməsinə səbəb olur.

Xətalar mütləq, nisbi, sistematik, təsadüfi xətalara ayrılırlar.

Cihazın göstərişi ilə həqiqi qiymət arasındakı fərq mütləq xəta adlanır.

Mütləq xətanın onun həqiqi qiymətinə olan nisbəti nisbi xəta adlanır.

Xətalar nəzəriyyəsində iki tip xətalar təsadüfi və sistematik xətalar mövcuddur.

Təsadüfi xətalar

Yaranma səbəbləri və xarakteri məlum olmayan xətalara təsadüfi xətalar deyilir. Təsadüfi xətalar eyni kəmiyyətin müxtəlif ölçmələrdə və ya təkrar ölçmələrdəki qiymtəi müxtəlif olaraq təsadüfi formada dəyişir. Təsadüfi xətanın qiymətini və işarəsini təyin etmək mümkün deyildir Belə ki, hər təcrübə qoyan zamanı

Yenə də nəzərdə tutulur ki,

$$|\Delta y| = \varepsilon_y \text{ və } |\Delta x_i| = \varepsilon_i$$

Teylor sırasına ayıraraq birdən yuxarı tərtibləri atırıq, yəni,

$$y + \Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2 \ldots x_n + \Delta x_n) \tag{1.34}$$

Teylor sırasına ayırdıqdan və yüksək dərəcəli tərtibləri atdıqdan sonra yazırıq ki,

$$y + \Delta y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$$

buradan

$$\Delta y \approx \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \Delta x_i$$

Bütün xətaların işarələri eyni olduğunu nəzərə alaraq, n dəyişənli funksiya üçün mütləq xətanın hədd qiymətinin aşağıdakı ifadəsini alırıq.

$$\varepsilon_h \approx \sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i| = \sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \varepsilon_i \tag{1.35}$$

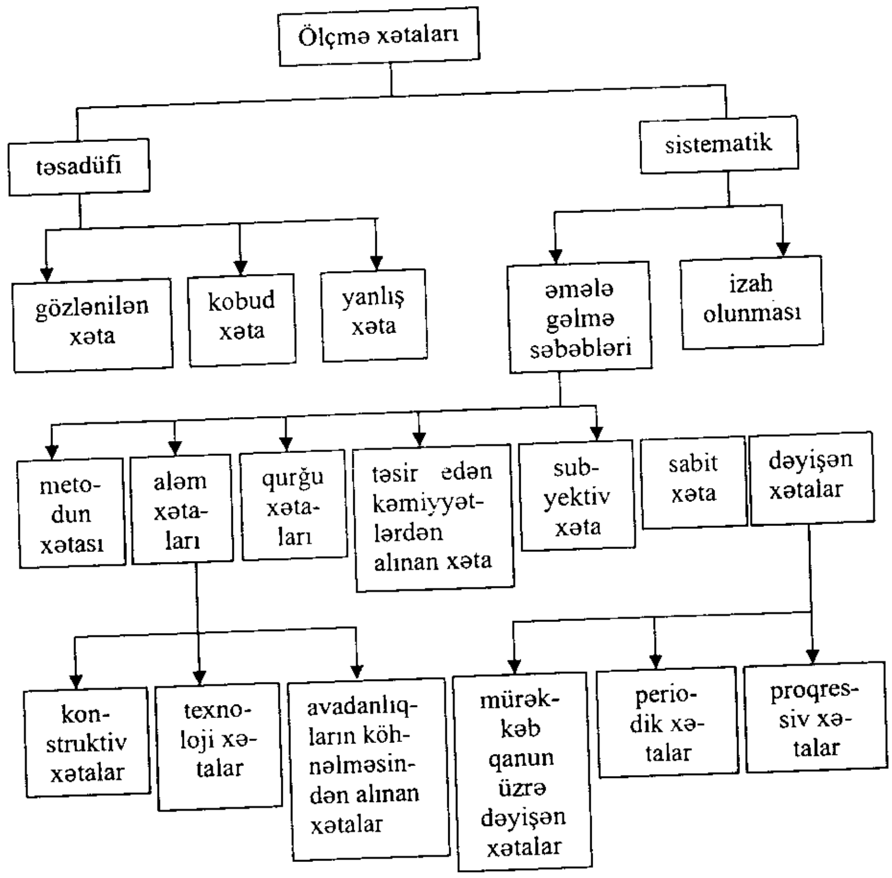
Funksiyanın nisbi xətasının hədd qiymətini almaq üçün (1.35) ifadəsinin hər iki tərəfinpi y=f(x_1,x_2,....,x_n)-ə bölmək lazımdır.

$$\delta_n = \frac{\varepsilon_n}{y} \approx \sum_i \left|\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i = \sum_i \left(\left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f\right| |\Delta x_i| = \sum_i \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f\right| E_i = \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f\right|\right) \tag{1.36}$$

$$|dx_i| = d \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(1.35) və (1.36) düsturları praktiki hesabatlarda əsas düsturlardan sayılır.

Beləliklə, asılı olmayan dəyişənlərdən ibarət olan funksiyanın mütləq xətasının hədd qiyməti funksiyanın xüsusi törəmələrinin cəmi diferensiallama aparılan uyğun arquentləri mütləq xətalarının vurma hasilinə bərabərdir. Bu funksiyanın nisbi xətasının hədd qiyməti natural loqarifmdən xüsusi törəmələri cəmi uyğun arqumentləri mütləq xəalarının vurma hasilinə bərabərdir.



Şəkil 1.1 Ölçmə siniflərə xətaların bölünməsi

xətanı əmələ gətirən səbəblər eyni dərəcədə təsir etmir. Ona görə də ölçmənin nəticələrinə olan təsiri yox etmək mümkün deyildir. Statistik ölçmələrin təşkili zamanı təsadüfi xətalar təyin edilir və elə bir şərait yaradılır ki, bütün faktorların təsir intensivliyi müəyyən səviyyəyə və dərəcəyə çatdırılır. Bununla az və ya çox dərəcədə xətanın yaranmasına təsir edir. Bu halda gözlənilən xəta haqqında mühakimə yürüdülür.

Bu xətalardan başqa kobud və yanlış xətalar da vardır (şək.1.1). Kobud xətaların yaranma səbəbi ölçü vasitələrinin nasazlığı və ölçü şəraitinin birdən-birə dəyişməsi nəticəsində olur. Yanlış xəta isə ölçünün nəticəsinə tez təsir edir. Bu subyektiv təsadüfi xəta adlanır. Eksperiment aparan şəxsin düzgün hərəkət etməməsindən əmələ gəlir və həmçinin cihazın göstərişini düzgün qeyd etmədikdə yaranır. Eyni kəmiyyəti ölçdükdə bütün bu təsadüfi xətaların birlikdə yığımı müəyyən qanunauyğunluqlar tabedir. Ona görə də metrologiyada ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın üsulları geniş təsvir olunur. Ölçmə zamanı ən çox geniş yayılmış normal paylanma qanunundan istifadə olunur. Ölçmə texnikasında normal paylanma qanunundan geniş istifadə edilir.

Riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətlərin orta qiymətidir. Orta kvadratik meyl etmə isə riyazi gözləməyə nəzərən ayrı-ayrı müşahidələrin nəticələrinin paylanmasını xarakterizə edir. Şəkil 1.2 əyrilərindən görünür ki, paylanma *a* əyrisində çox, *b* əyrisində ondan azdır və *a* əyrisində isə *b* və *v* əyrilərindən azdır. Əvvəlcədən $-\varphi_1$-dən $+\varphi_2$-dək verilmiş intervalında təsadüfi xətaların və ya ölçmənin nəticələrinin düşməsinin, P ehtimalını təyin etməkdən ötrü paylanma əyrisində müəyyən sərhəddə məhdudlaşdırılmış sahəni tapmaq lazımdır (şək. 1.2 b). Normal paylanma üçün

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\varphi_c}^{+\varphi_c} e^{-0.5(\varphi/\sigma)^2} d\varphi \qquad (1.39)$$

(1.39) inteqralını həll etmək mümkün deyildir. Adətən, bütün qiymətləri təxmini cədvəl şəklində verilir və etibarlılıq intervalını təyin etmək olar. Etibarlılıq intervalı $-\varphi_1$–dən $+\varphi_2$–dək olan intervalı əhatə edir.

Sistematik xətalar

Sistematik xətalar faktiki olaraq təcrübə qoyulan vaxt ərzində dəyişmir. Yəni, yaranma səbəbləri və xarakteri məlum olan xətalara sistematik xətalar deyilir. Sistematik xətaların yaranma mənbəyi aşağıdakılardır:

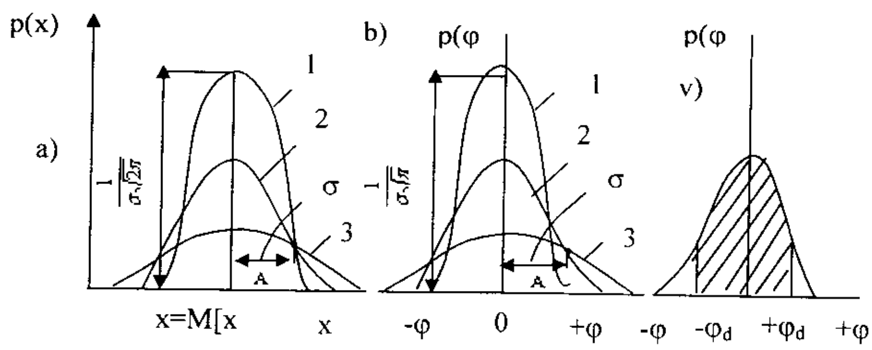
1) Ölçü aparatının nasazlığı və deffektindən əmələ gələn alət xətaları;

2) Ölçü aparılan zaman xarici mühitin vəziyyətilə əlaqədar olan xətalar;

3) Eksperiment aparan şəxsin fərdi xüsusiyyətlərindən əmələ gələn xətalar;

4) Cihazın dərəcələnmə sabitlərinin qeyri-dəqiq olmasından əmələ gələn xətalar.

Sistematik xətaları təyin etmək müəyyən çətinliklərlə əlaqədardır. Əgər sistematik xətanın nədən baş verdiyini bildikdə düzəliş verməklə həmin xətanın aradan götürmək olar. Sistematik xətaların əks qiymətinə düzəliş deyilir.



Şəkil 1.2 Təsadüfi kəmiyyətlərin normal paylanma əyriləri və onların təsadüfi xətaları

Təsadüfi kəmiyyətlərin normal paylanması əyriləri və onların xətaları şək. 1.2-də verilmişdir. Hər hansı x ölçülən kəmiyyətinin normal qanunu üçün $P(x)$ ehtimal sıxlığın paylanması (1 əyrisi) göstərilmişdir. Burada ehtimal sıxlıq (və ya paylanma sıxlığı) verilmiş nöqtədə təsadüfi xətaların qiymətinin paylanmasının sıxlığını xarakterizə edir.

Normal paylanma qanunu üçün ehtimal sıxlıq aşağıdakı tənliklə ifadə olunur

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[x-M(x)]^2}{2\sigma^2}} \qquad (1.37)$$

burada M(x) və σ - normal paylanmasının xarakteristikalarıdır.

Şək. 1.2-də 1 əyrisinə təsadüfi xətanın paylanması kimi baxmaq olar (şək. 1.2 b). Bu halda ehtimal sıxlıq aşağıdakı kimi təyin edilir

$$P(\varphi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5(4\varphi\sigma)^2} \qquad (1.38)$$

burada σ=x-M(x) – təsadüfi xətadır. M(x) və σ xarakteristikaları riyazi gözləmə və orta kvadratik meyl etmə adlanır.

nəzərdən keçirək. Ölçmənin nəticələrinin düzgün emal olunması və ölçülən kəmiyyətlərin alınan qiymətlərinin etibarlığını obyektiv qiymətləndirmək üçün ölçü cihazının müəyyən hədd daxilində dəqiqliyini və həmçinin sistematik və təsadüfü xətalarını qeyd etmək lazımdır.

Müxtəlif tipli xətaları konkret hesabatını aparmaq üçün sistematik və təsadüfi xətalar ilə ölçü cihazının şkalasının vəzifəsi arasındakı əlaqəni öyrənmək lazımdır. Konkret ölçmələrdə ölçü cihazının vəzifəsi və sistematik xətalar ölçmənin miqdarından asılı deyildir. Digər tərəfdən ölçmənin sayını artırmaqla təsadüfi xətaları kiçiltmək olar. İstifadə olunan cihazın dəqiqlik sinfindən və kəmiyyətlər arasındakı ölçmənin şəraitindən asılı olaraq bu xətalar bir – birinə müxtəlif asılılıqlarla ifadə oluna bilərlər. Köhnə və ya kobud ölçü cihazlarından istifadə etdikdə cihazın işləmə qabiliyyəti aşağı olur və təsadüfi xətaların artmasına səbəb olacaqdır. Əgər yüksək dəqiqlik sinfi olan cihazlardan istifadə etdikdə xətanın azalmasına səbəb olacaqdır. Hər iki halda sistematik xətalar cihazın şkalasının xətasından az və ya çox olacaqdır. Beləliklə, konkret real şərait üçün istənilən bu üç tip xətalar bir – biri ilə qarşılıqlı əlaqədə olacaqdır. Lakin əksər praktiki ölçmələrdə təsadüfi və sistematik xətalar cihazın şkalası səviyyəsində olan xətalardan üstün ola bilər. Kəmiyyətlər arasındakı xətaların ölçmənin sayından asılı olan əlaqə şək (1.3)-də göstərilmişdir. Nəzərdə tutulur ki, bu göstərilən üç tip xətalar bir – birinə qarşılıqlı əlaqədar deyildilər. Bu xətaların cəmi ayrı – ayrı göstərilən üç tip xətaların cəmi ilə eyni olacaqdır.

$$\varepsilon_{cəm} = \varepsilon_{c.mk} + \varepsilon_{sist} + \varepsilon_{təsad} \cdots \tag{1.40}$$

burada $\varepsilon_{cəm}$ – cəm xəta

$\varepsilon_{c.mk}$ – cihazın şkalasının xətası

ε_{sist} – sistematik xəta

$\varepsilon_{təsad}$ – təsadüfü xətadır.

Sistematik xətalar yaranma səbəblərindən asılı olaraq aşağıdakı xətalara ayrılırlar:

Ölsmə metodunun xətası və ya nəzəri xəta – Ölçü xətası ölçmə metodunun mükəmməl öyrənilməsindən əmələ gəlir. Baxdığımız xəta ölçmə aparılan mühitin və ya hadisənin tam öyrənilməsi üzündən baş verir.

Ölçmənin alət xətaları – Bu xətalar ölçmə zamanı istifadə olunan texniki vəsaitlərin xətalarından asılıdır. Bundan əlavə, cihazların konstruksiyalarından, sxemlərindən, texniki vəsaitlərin hazırlanma texnologiyasından və onların materiallarının köhnəlməsindən də asılı olacaqdır.

Qurğunun xətası – ölçmədə istifadə olunan qurğuların düzgün quraşdırılmasından irəli gələn xətalardır.

Təsir edən kəmiyyətlərdən alınan xətalar xarici faktorların ölçü qurğularına və obyektə təsir etməsi nəticəsində alınır, istilik və hava axınlarının, maqnit, elektrik sahələrinin, atmosfer təzyiqin, havanın nəmliyinin və şüalanmaların təsirindən də baş verir.

Subyektiv xəta ölçmə prosesini idarə edən fərdi xüsusiyyətindən asılıdır. Bu xətaların əmələ gəlmə səbəbləri ölçünü aparan şəxsin vərdişlərindən də çox asılıdır. Sistematik xətaların xarakterindən asılı olaraq sabit və dəyişən xətalara ayrılırlar (şək. 1.1).

Sabit xətalar təkrar ölçmələr apardıqda öz qiymətini dəyişmirlər. Cihazları düzgün dərəcələmədikdə və hesabat başlanğıcının düzgün yerinə yetirilməməsində sabit xətaların əmələ gəlməsinə səbəb olur.

Dəyişən xətalar təkrar ölçmələrdə müxtəlif qiymətlər ala bilər. Əgər dəyişən xəta təkrar ölçmələrdə artır və ya azalırsa, onda proqressiv xəta adlanacaq. Dəyişən xəta təkrar ölçmələrdə periodik və ya mürəkkəb qanun üzrə dəyişəcəkdir.

1.7 Bilavasitə və dolayı ölçmələrdən alınan nəticələrin emalı

Fiziki-kimyəvi kəmiyyətlərin bilavasitə və dolayı ölçmələrdən alınan nəticələrin emal olunması və onun tətbiq sahələrini

Məsələ 1.

Kompensasiya üsulu ilə naməlum müqaviməti təyin edən zaman ölçülən müqavimət aşağıdakı düstur ilə hesablanır.

$$W = R\frac{100-a}{a} \qquad (1.42)$$

burada R- etalon müqavimət adlanır,

a – reoxord boyunca şkalanın bölgülərini təşkil edir. Eksperiment aparan şəxsin hər hansı funksiyanın W cihazın göstərişindən asılılığı maraqlandırır.

Tutaq ki, R müqaviməti dəqiq məlumdur, reoxordun şkalasının mütləq xətası $\varepsilon_{c.şk.}(a)=1$ bölgü (şkalanın bir bölgüsü) dəqiqlik sinfi ilə verilib. Ölçü reoxordunun mütləq xətasını yəni, onun şkalasını xətasını tapmaq tələb olunur. Əgər $R = 100$ Om, $a = 365$ bölgü olarsa, onda

$$\frac{\partial W}{\partial a} = R\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1000-a}{a}\right) = R\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1000}{a}-1\right) = -R\frac{10^3}{a^2} \qquad (1.43)$$

$$\varepsilon_{c.şk.}(W) = \frac{R}{a^2}10^3, \quad \varepsilon_{c.şk.}(a) = \frac{10^2\cdot 10^3}{365^2}\cdot 1 = 0{,}751 \approx 0{,}8 \text{ Om}$$

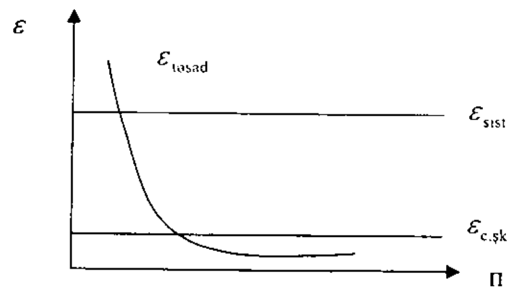
Beləliklə, ölçülən müqavimətin W mütləq xətası aşağıdakı kimi təyin edilir.

$$W = 100\frac{1000-365}{365} = 173.97 = 174{,}0 \text{ Om}$$

Aparılan hesabat onu göstərir ki, dəqiqlik sinfi 0,8-dən az xəta $W = 174{,}0$ Om ölçmək mümkün deyildir. Beləliklə, ölçülən müqavimətdə sistematik və təsadüfi xətalar olmadıqda belə praktiki olaraq 1 vahid Om düzgün rəqəm ola bilər.

1.9 Sistematik xətaların nəzərə alınması

Nasaz ölçü vasitələrində sistematik xətaların nəticədə alınan ölçmənin təsirinin qiymətləndirilməsini nəzərdən keçirək. Qeyd edək ki, xətaların mənbəi və qiyməti məlumdur. Əgər sistematik xəta ölçülən kəmiyyətin qiymətindən azdırsa, onda arqumentlərin sistematik xətalarını nəticəvi təsirini ümumi halda funksiyanın bir



Şəkil 1.3 Müxtəlif xətalar arasında əlaqə

(1.40) düsturunda xüsusi hala baxmaq olar.

$n \to \infty$, $\varepsilon_\gamma \to 0$. Onda cəm xəta $\varepsilon_{c.mk} + \varepsilon_{sist}$-ya bərabər olacaq. əgər $\varepsilon_{tәc} >> \varepsilon_{c.şk} + \varepsilon_{sist}$ olarsa, ölçmənin dəqiqliyi təsadüfi xəta ilə təyin olunacaqdır. Bu xətanı ayırmaq olar, yəni

$$\varepsilon = \varepsilon_{c.mk} + \varepsilon_{sist} \qquad (1.41)$$

Bu düstur eyni zamanda məhdudiyyət daxilində ölçü çihazının dəqiqliyini və sistematik xətanı xarakterizə edir.

1.8 Cihazın şkalasının xətasının nəzərə alınması

Sistematik xəianın və cihazın şkalasının xətası sabit kəmiyyətlər adlandıraq, bir qayda olaraq, ölçülən kəmiyyət özünə görə müqayisədə çox kiçikdir. Cihazın şkalasının xətasını nəzərə almaq üçün cihazın həssaslıq intervalı, ölçü cihazının şkalası üzrə hesabatın dəqiq aparılması ilə xarakterizə olunur, yəni, $\varepsilon_{c.şk}$ şkalanın xətası təxminən şkalada olan bir bölgünün qiymətinə bərabərdir. Məsələn, ölçü xətkeşin köməyilə uzunluğu ölçərək ən yaxşı halda $1 \cdot 10^{-1}$ mm dəqiqliklə hesabatı aparmaq olar. Həmin ölçünü mikrometr vasitəsilə etdikdə dəqiqlik $1 \cdot 10^{-2}$ olacaqdır. 10^{-1} mm, 10^{-2} mm kəmiyyətləri ölçü cihazının uyğun şkalasının mütləq xətası bu cihazın dəqiqliyini xarakterizə edəcəkdir.

W-müqavimətində cəm mütləq xəta $\Delta(W)$ aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\Delta(W) = \varepsilon_{c.şk}(W) + \varepsilon_{sist}(W) = 0,751 + 1,74 = 2,491 \text{ Om}$$

yəni, praktiki olaraq 3 Om, $W = 174 \pm 3$ Om.

Beləliklə Etalon müqavimətdə sistematik xəta $\varepsilon_{sist}(P) = 1$ Om, W-kəmiyyətinin müqavimətində xətanın müəyyən dərəcədə artmasını səbəb olur və burada üçüncü əhəmiyyətli rəqəm müəyyən xətanın əmələ gəlməsinə təsir göstərir. Yuxarıda həll olunan məsələlərin əsasında bir neçə praktiki qaydaları qeyd etmək olar.

1. Hesabatdan qabaq hesabata daxil olan bütün kəmiyyətlərin nisbi xətasının və onda olan düzgün işarələrin sayını təyin etmək məsləhət görülür;
2. Alınan nəticənin düzgün işarələrinin sayını və nisbi xətasını təyin etmək lazımdır;
3. Bütün ədədləri elə yuvarlaşdırmaq lazımdır ki, onda olan düzgün işarələrin sayını bir vahid artıraraq əvvəlki rəqəmə daxil edilir.

Düzgün işarələrin sayı aşağıdakı bərabərsizliklə təyin etmək olar, yəni

$$A = a \pm \varepsilon = a\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{a}\right)$$

1.10 Təsadüfi xətaların nəzərə alınması

Əvvəlki paraqrafda göstərildi ki, ölçü cihazının müəyyən məhdudiyyət daxilində dəqiqliyi və sistematik xətaların mövcudluğunu ölçülən kəmiyyətdə mütləq xətanın hesablanmasında aşağıdakı düsturla nəzərə almaq olar:

$$\Sigma_h = \Sigma_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i = \Sigma_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \varepsilon_i$$

Bu faktorların nəzərə alınması ona görə mümkündür ki, onlar həmişə sabit qalaraq təcrübə qoyulan zaman dəyişmir. Təsadüfi faktorları nəzərə almaq üçün ölçmə prosesinin ehtimal olunan neçə arqumentlərini dolayı ölçmənin təsirini aşağıdakı düstur ilə yazmaq olar:

$$\varepsilon_h = \sum_i \left|\frac{\partial R}{\partial \chi_i}\right| \varepsilon_i \qquad (1.44)$$

Bu dediklərimizi məsələ üzərində aydınlaşdıraq.

Məsələ 2. Tutaq ki, 1-ci məsələnin şərtlərinə görə etalon müqavimət R məlumdur, lakin dəqiq deyildir. Belə ki, mütləq xətanın qiyməti 0,1 Om-a bərabərdir. Bu xəta eyni dərəcədən istənilən ölçmənin nəticəsinə təsir göstərir və bunu sistematik xəta adlandırmaq olar. Bu sistematik xətanın W müqavimətini ölçərkən nəticəyə nə dərəcədən təsirini təyin etmək tələb olunur. 1-ci məsələnin nəticəsindən asılı olaraq cəm mütləq xətanı hesablayaq.

$W = R\dfrac{100-a}{a}$ düsturundan istifadə edərək törəmənin qiymətini tapaq.

$$\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{1000-a}{a}$$

(1.44) düsturundan istifadə edərək, alarıq ki,

$$\varepsilon_{sist}(W) = \frac{1000-a}{a}, \quad \varepsilon_{sist}(R) = \frac{635}{365}\cdot 0{,}1 = 0{,}174 \text{ Om}$$

cəm mütləq xəta

$$\Delta(W) = \varepsilon_{c.şk}(W) + \varepsilon_{sist}(W) = 0{,}751 + 0{,}174 = 0{,}925 \text{ Om};$$

$$\varepsilon_{sist}(R) = 0{,}1 \text{ Om}$$

Beləliklə, W kəmiyyətinisə ölçü reaxordunun şkalasının dəqiqsizliyinin qeyri müəyyənliyi və etalon müqavimətindəki sistematik xəta təxminən 0,9 Om təşkil edir, onda

$$W = 174 \pm 0{,}9 \text{ Om}$$

Bundan görünür ki, W müqavimətində əhəmiyyətli rəqəm onun tam hissəsi sayılır.

Məsələ3. Əvvəlki məsələnin şərtlərinə əsasən $E_{sist}(R) = 1$om götürülür. Uyğun olaraq yaza bilərik ki,

$$\varepsilon_{sist}(W) = \frac{1000\text{-}a}{a}; \quad \varepsilon_{sist}(R_0) = \frac{635}{365}\cdot 1 = 1{,}74 \text{ Om}$$

Riyazi statistikadan sübut olunur ki, meyl etmələrin kvadratlarının cəminin minimum olmasına nəzərən, orta hesabi qiyməti aparılan statistikanın səpələnmə mərkəzi kimi qəbul etmək olar.

Orta hesabi qiymətin eksperimentdən alınan orta qiymətə yaxınlıq dərəcəsi müəyyən intervalda olmasını nəzərdə tutaq və bu intervalın mərkəzi orta qiymətə uyğun olacaqdır. Bu zaman intervalın sərhəddini elə təyin etmək lazımdır ki, bu interval müəyyən ehtimalla eksperimentdən alınan qiymətlərin orta təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərini əhatə etmiş olsun. Bu intervalı etibarlılıq intervalı adlandırmaq olar. Eksperiment qiymətlərinin orta qiymətinin həmin intervala düşməsi ehtimalını etibarlılıq ehtimalı olacaqdır. Bu α ilə işarə olunur.

Etibarlılıq ehtimalının seçilməsi eksperiment aparan şəxsin təcrübəsindən asılı olacaqdır. Etibarlılıq ehtimalının qiyməti adətən 0,95 qəbul olunur (bəzi hallarda 0,975; 0,99; 0,999).

Ümumi ölçülən təsadüfi kəmiyyətlərin verilmiş ehtimal üzrə etibarlılıq intervalını t təsadüfi kəmiyyətinin və Styudent paylanmasının köməyilə qurmaq olar. Styudent kəmiyyəti t(f) f=n-1 sərbəstlik dərəcəsi, n-ölçmələrin sayıdır.

$$P\left[-t_{1-\alpha}(f) < t_{1-\alpha}(f)\right] < \alpha \tag{1.45}$$

Burada $$t(f) = \frac{\bar{x} - \gamma}{S(\bar{x})};$$

γ -riyazi gözləmə

$\bar{x}$ - orta riyazi qiymət

$S(\bar{x})$-orta kvadratik xətadır

$$P\left[-t_{1-\alpha}(f) < \frac{\bar{x}}{S(\bar{x})} < t_{1-\alpha}(f)\right] = \alpha \tag{1.46}$$

Mötərizə içrisindəki bərabərsizliyi γ -yə görə həll etsək onda

$$P\left[\bar{x} - t_{1-\alpha}(f)S(\bar{x}) < \gamma < \bar{x} + t_{1-\alpha}(f)S(\bar{x})\right] = \alpha \tag{1.47}$$

(1.47) düsturu γ -nın hansı intervalda dəyişdiyini göstərir:

$$\bar{x} - t_{1-\alpha}(f)S(\bar{x}), \quad \bar{x} + t_{1-\alpha}(f)S(\bar{x}).$$

Beləliklə, bu axtarılan etibarlılıq intervalı olacaqdır.

modelinə və riyazi statistikanın metodlarına müraciət etmək lazımdır.

Sistematik xətalar və ölçü cihazının dəqinqliyi nə qədər ki, məhduddur ölçülən kəmiyyətdə düzgün əhəmiyyətli rəqəmlərin sayına hədd qoyulur. Onda x kəmiyyətinin bilavasitə ölçülməsi nəticəsində və həmçinin istənilən $y = f(x)$ funksiyasının əhəmiyyətli rəqəmlərinin sayını artırmaq məqsədə uyğun deyildir Bununla əlaqədar olaraq x,y kəmiyyətlərinin və ya başqa hesablamalarda əhəmiyyətli rəqəmlərin sayı cəm mütləq xətada $\Delta(x), \Delta(y)$-da nə qədər tələb olunarsa, yazmaq lazımdır.

Bilavasitə ölçmə

Tutaq ki, hər hansı x kəmiyyətinin bilavasitə ölçməsi zamanı $x_1, x_2 \ldots, x_n$ qiymətləri alınmışdır.

Əgər bu ölçmə eyni eksperimentator tərəfindən eyni cihazda yerinə yetirilərsə, onda bütün ölçmələr eyni dəqiqliklə yerinə yetiriləcəkdir. Təsadüfi faktorların mövcudluğu ayrı-ayrı ölçmələrin nəticələrinin orta qiymət ətrafında rəqs edən təsadüfi kəmiyyətlər olacaqdır. Buradan belə nəticə çıxır ki, ölçülən kəmiyyətə təsir edən təsadüfi faktorları nəzərə almaq üçün iki məsələni araşdırmaq lazımdar.

1. Aparılan ölçmələr əsasında alınan statistikadan ölçü kəmiyyətinin optimal orta qiymətinin tapılması
2. Bu qiymətin ümumi statistikadan alınan orta ölçülən kəmiyyətə olan yaxınlıq dərəcəsinin təyini

İkinci hal təsadüfi xəta adlanır. hər iki məsələni həll etmək üçün ölçmənin nətiəcələrinin normal paylanma qanuna tabe olmasını nəzərdə tutmaq lazımdır. hər iki halı ayrılıqda nəzərdən keçirək.

1. Ümumi ölçülən kəmiyyətin orta qiymətini müşahidələrin orta hesabi qiyməti kimi qəbul edək və aşağıdakı düstür ilə təyin edilir.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Əgər (x) funksiyası mürəkkəb funksiya olduqda $\bar{y}$ və S(y)-i təxmini düsturlar vasitəsilə hesablamaq olar:

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$S(y) = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} S(x)$$

1.12 İki və daha çox arqumentli funksiyanın dolayı ölçülməsi

Bunun üçün aşağıdakı üç halı nəzərdən keçirək:

1. Təsadüfü kəmiyyətlər $x_1, x_2, \ldots, x_k$ asılı kəmiyyətlər deyildir.
2. Y funksiyanın arqumentinin dəyişməsi böyük olmadan intervallarda normal paylanır.
3. $\bar{Y}$ kəmiyyətinin seçmə dispersiyası uyğun olan σ^2(y)-ə bərabərdir, yəni,

$$S^2(y) = \sigma^2(\bar{y})$$

bu fərziyyələrdn istifadə edərək aşağıdakıları qeyd etmək olar. Təxmini düsturlar vasitəsilə $\bar{y}$ kəmiyyətini tapaq.

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ - uyğun arqumentlərin orta hesabi qiymətləridir. Bundan sonra seçmə dispersiyanı aşağıdakı düsturla hesablayaq.

$$S^2(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2_{x_i=\bar{x}_i} S^2(\bar{x}_i)$$

Deyilən fərziyyələrdən istifadə edib təsadüfi xəta üçün yaza bilərik ki,

$$\varepsilon_{tas}(y) = U_{1-\alpha} S(\bar{y}) \tag{1.52}$$

burada U_{1-2}-α etibarlılıq ehtimalı üçün funksiyanın normal paylanması kəmiyyətidir. Bu kəmiyyətin qiymətini əlavə cədvəl 2-də götürmək olar. Məsələn, $f = \infty$ olduqda $\alpha = 0{,}95$ etibarlılıq ehtimalı üçün cədvəl 2-dən $U_{1-2} = U_{0{,}05} = 1{,}96 \approx 2$

$$\varepsilon_{tas}(y) = 2S(\bar{y}) \tag{1.53}$$

$$t_{1-\alpha}(f)S(\bar{x}) = t_{1-\alpha}(f)\frac{S(x)}{\sqrt{n}} = \varepsilon_{təsad.}(x) \qquad (1.48)$$

yəni, etibarlılıq intervalının yarısı təsadüfü xəta adlanacaqdır. $t_{1-\alpha}(f)$ kəmiyyəti verilmiş sərbəstlik dərəcəsi üçün $f = n-1$ və α cədvəldən (cədvəl 1.2) tapmaq olar.

Təsadüfü xətaları nəzərə almaqla hər hansı bir x kəmiyyətinin ölçmələrinin nəticəsini aşağıakı kimi yazmaq olar:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon_{t.c.}(x) = \bar{x} \pm t_{1-\alpha}(f)S(\bar{x}) = \bar{x} \pm t_{1-\alpha}(f)\frac{S(x)}{\sqrt{n}} \qquad (1.49)$$

1.11 Bir arqumentli funksiyanın dolayı ölçülməsi

Tutaq ki, x təsadüfü kəmiyyəti dolayı yolla ölçülür. Eksperiment aparan şəxsi hər hansı məlum f(x) funsiyası maraqlandırır. Əgər $f(x)$ funksiyası xətdidirsə, onda onun hesablanması heç bir çətinlik törətmir. Əgər $f(x)$ funksiyası qeyri xətdidirsə, onda statik analiz aparmaq həddindən artıq çox çətin hesablamalarla əlaqədar olacaqdır. Bu onunla əlaqədardır ki, arqumentin normal paylanması zamanı funksiyanın normal paylanması qanunu müəyyən qədər normal paylanmadan fərqlənəcəkdir. Tutaq ki, x_1, x_2, ..., x_n – təsadüfi kəmiyyətin ölçmələrin nəticələri n qədərdir. Onda hər bir x_i üçün y_i-nin uyğun qiyməti tapılır və y kəmiyyətinin orta hesabi qiymətini $\bar{y}$ və seçmə dispersiyanı S^2(y)-i hesablamaq lazımdır. Sonra isə y kəmiyyəti üçün təsadüfü xətanı $\varepsilon_{təs.}$(y) tapaq.

$$\varepsilon_{T}(y) = t_{1-\alpha}(f)S(\bar{y}) = t_{1-\alpha}(f)\frac{S(y)}{\sqrt{n}} \qquad (1.50)$$

burada $f = n-1$; $S^2(y)$ dispersiyasının sərbəstlik dərəcəsinin sayıdır.

Təsadüfü xətanı nəzərə almaqla funksiyanın ölçülməsi aşağıdakı kimi yazılır.

$$y = \bar{y} \pm t_{1-\alpha}(f)\frac{S(y)}{\sqrt{n}} \qquad (1.51)$$

Cəm xəta ε(L) olacaqdır.

$$\varepsilon(L) = \varepsilon_{c.şk}(L) + \varepsilon_{təs}(L) = 0.001 + 0,018 = 0.019mm$$

Ölçünün cəm xətasını düzgün aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$\varepsilon(L) = 6.21 \pm 0.02mm$$

Cədvəl 1.2

f	α						
	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,00000	2,4142	6,3138	12,706	25,452	63,657	127,32
2	0,81650	1,6036	2,9200	4,3027	6,2053	9,9248	14,089
3	0,76489	1,4226	2,3534	3,1825	4,1765	5,8409	7,4533
4	0.74070	1.3444	2.1318	2,7764	3,4954	4.6041	5,5976
5	0,72669	1,3009	2,0150	2,5706	3,1634	4,0321	4,7733
6	0.71756	1,2733	1,9432	2,4469	2,9687	3,7074	4,3168
7	071114	1,2543	1,8946	2,3646	2,8412	3,4995	4,0293
8	0,70689	1,2403	1,8595	2,3060	2,7515	3,3554	3,8325
9	0,70272	1,2297	1,8331	2.2622	2,6850	3,2498	3,6897
10	0,69981	1,2213	1,8125	2,2281	2,6338	3,1693	3,5814
11	0,69745	1,2145	1,7959	2,2010	2,5931	3,1058	3,4966
12	0,69548	1,2089	1,7823	2,1788	2,5600	3,0545	3,4284
13	0,69384	1,2041	1,7709	2,1604	2,5326	3,0123	3,3725
14	0,69242	1,2001	1,7613	2,1448	2,5096	2,9768	3,3257
15	0,69120	1,1967	1,7530	2,1315	2,4899	2,9467	3,2860
16	0,69013	1,1937	1,7459	2,1199	2,4729	2,9208	3,2520
17	0,68919	1,1910	1,7396	2,1098	2,4581	2,8982	3,2225
18	0,68837	1.1887	1.7341	2,1009	2,4450	2,8784	3,1966
19	0,68763	1,1866	1,7291	2,0930	2,4334	2,8609	3,1732
20	0,68696	1.1848	1,7247	2,0860	2,4231	2,8453	3,1534
21	0.68635	1.1831	1.7207	2,0796	2.4138	2,8314	3,1352
22	0,69580	1.1816	1,7171	2,0739	2,4055	2,8188	3,1188
23	0.68531	1,1802	1.7139	2,0687	2,3979	2,8073	3,1040
24	0,68485	1,1784	1,7109	2,0639	2,3910	2,7969	3,0905
25	0,68443	1,1777	1,7081	2,0595	2,3846	2,7874	3,0782
26	0,68405	1,1766	1,7056	2,0555	2,3788	2,7787	3,0669
27	0,68370	1,1757	1.7033	2,0518	2,3734	2,7707	3,0565
28	0,68335	1,1748	1.7011	2,0484	2,3685	2,7633	3,0469
29	0,68304	1,1739	1,6991	2,0452	2,3638	2,7564	3,0380

Beləliklə, k arqumentli funksiyanın dolayı ölçülməsində təsadüfi xəta sadə formada belə yazılır.

$$Y = \bar{Y} \pm 2S(\bar{Y}) \qquad (1.54)$$

Mikroskopun köməyilə L uzunluğu ölçülür. Mikroskopun şkalasının bölgüləri arası 0,05 mm-dir. Şkaladan hesabat 0,1 dəqiqliklə göz ilə götürülür. $E_{c.şk.}$ (L)=-,001 mm. Ölçü 5 dəfə aparılır (n=5) və L-üçün aşağıdakı qiymətlər alınır 6,191 mm; 6,215 mm; 6,228 mm və 6,217 mm. Aparılan ölçü vasitəsilə uzunluğun qiymətini təyin etmək və ölçünün təsadüfü və cəm xətalarını qiymətləndirmək lazımdır. Qeyd edək ki, ölçmənin sistematik xətaları yoxdur.

$\bar{L}$ və S^2(L)-i verilmiş qiymətlərə görə cədvəl şəklində hesablayaq.

$$\bar{l} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} L_i = \frac{31.051}{5} = 6,2102$$

$$S^2(L) = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(L_i - \bar{L})^2 = \frac{0,0008586}{4} = 2,146 \cdot 10^{-4}$$

$$S(i) = \sqrt{2,146 \cdot 10^{-4}} = 1,465 \cdot 10^{-2}$$

Cədvəl 1.1

i	L_i	L_i- I	$(L_i\text{-}L)^2$
1	6,191	-0,0192	0,0003686
2	6,215	+0,0048	0,0000230
3	6,228	+0,0178	0,0003168
4	6,200	-0,0102	0,0001040
5	6,217	+0,0068	0,0000462
Σ	31,051	0,0	0,0008586
	$\bar{L} = 6,2102$		$S^2(L) = 2,146 \cdot 10^{-4}$

α = 0,95 qəbul edib əlavədə cədvəl 1.2-dən $t_{0,05}(4)$ = 2,7764. Onda təsadüfü xəta aşağıdakı düstur ilə hesablanır.

$$\varepsilon_{təs.}(L) = \frac{t_{1-\alpha}(f)S(L)}{\sqrt{n}} = \frac{2,7764 \cdot 1,465 \cdot 10^{-2}}{2,236} = 1,82 \cdot 10^{-2}\text{mm}$$

Eksperiment aparılan zaman $S^2(y_1), S^2(y_2)...,S^2(y_k)$ dispersiyaları üçün arqumentin bütün qiymətlərində əsas dispersiyaların bərabərliyi təmin olunarsa, yəni,

$$\sigma(y_1)=\sigma^2(y_2)=...=\sigma^2(y_k)=\sigma^2(1)... \qquad (1.57)$$

onda ölçülən funksiyaların əks etmə dispersiyası eyni cinsli kəmiyyətlər olacaqdır.

(1.57) bərabərlik sistemi bu fərziyənin riyazi ifadəsidir və $S^2(y_i)$-ni bütün ölçülən nöqtələrdə eksperiment qiymətlər əsasında yoxlamaq lazımdır. Bu yoxlama Bartlett kriterisi (Əgər müxtəlif x_i üçün eksperimentin miqdarı müxtəlif olarsa) və Kokren kriterisi (əgər müxtəlif x_i üçün eksperimentlərin miqdarı eyni olarsa, yəni $n_1=n_2=...=n_k=n$) vasitəsilə aparıla bilər.

Bartlet kriterisi. $S^2(y_1), S^2(y_2)...,S^2(y_k)$ dispersiyalarının sərbəstlik dərəcələrini $f_1, f_2,...f_k$ ilə işarə edək və uyğun olaraq orta dispersiyanı təyin edək.

$$S^2(1)=\frac{\sum_i f_i S^2(y_k)}{\sum_i f_i} \qquad (1.58)$$

$f(1)=\sum_i f_i=\sum_i(n_i-1)=\sum_i n_i-k$ sərbəstlik dərəcəsinə malikdir.

Bartlet göstərmişdir ki, əgər (1.57) bərabərlik sistemi ilə təsvir olunan statistik fərziyə mövcuddursa, onda B kəmiyyəti aşağıdakı kimi təyin edilir.

$$B=\frac{2{,}30259}{C}\left(f\lg S^2(1)-\sum_i f_i\cdot\lg S^2(y_i)\right) \qquad (1.59)$$

burada

$$C=1+\frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_i\frac{1}{f_i}-\frac{1}{f}\right)... \qquad (1.60)$$

Sərbəstlik dərəcəsi (k-1) olan x^2 paylanma qanununa tabe olur. B-kəmiyyəti eksperiment qiymətlərə görə hesablandıqdan sonra β