M Ü N D Ə R İ C A T

G İ R İ Ş

Müəyyən cisimdə gedən fiziki proseslərin öyrənilməsi, həmin prosesin riyazi modeli olan diferensial tənliyin öyrənilməsinə gətirilir. Bu zaman diferensial tənliyin həlli olan funksiya müəyyən fiziki kəmiyyəti ifadə etdiyindən, tənliyin həllinin öyrənimməsi fiziki prosesi izləməyə imkan verir. Bu cür tənliklər riyazi-fizikanın tənlikləri adlanır. Öyrənilən fiziki prosesdən asılı olaraq həmin tənliklər əksər hallarda xüsusi törəməli diferensial tənliklər olurlar.

Sərbəst dəyişənlər, sərbəst dəyişənlərdən asılı məchul funksiya və bu məchul funksiyanın xüsusi törəmələri daxil olan tənliklərə xüsusi törəməli diferensial tənliklər deyilir.

Xüsusi törəməli diferensial tənliyin ümumi şəkli

$$F(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\cdots)=0$$

yazıla bilər.

Tənliyə daxil olan törəmələrin tərtibinin ən böyüyünə diferensial tənliyin tərtibi deyilir.

Tənliyin həlli dedikdə elə $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyası başa düşülür ki, bu funksiyanın tənliyə daxil olan kəsilməz xüsusi törəmələri var və bu funksiyanı və onun törəmələrini tənlikdə yerinə yazdıqda, onu eyniliyə çevirir.

Əgər məchul funksiya və onun törəmələri tənliyə xətti daxil olmuşlarsa, onda tənliyə xətti tənlik deyilir. Məsələn,

$$2u_{xx}+xy^2u_{xy}+3u_{yy}+u_x-yu_y+5u=x^2+y^3$$

tənliyi xətti diferensial tənlikdir.

Tənliyə ən yüksək tərtib törəmələr xətti, kiçik tərtib törəmələr və məchul funksiya isə ixtiyari qaydada daxil olmuşlarsa, onda tənliyə kvazixətti diferensial tənlik deyilir. Məsələn,

$$u_{xx}+u_xu_{xy}+u_y^2u_{yy}+xu_x^2+\sin u_y+u^2=0$$

tənliyi, kvazixətti diferensial tənlikdir.

Əgər tənlik xətti və kvazixətti deyilsə, ona qeyri-xətti diferensial tənlik deyilir.

Biz ancaq iki tərtibli xətti tənliklərlə məşğul olacağıq. Bu bir tərəfdən belə tənliklərin çoxsahəli tətbiqi imkanları ilə, digər tərəfdən isə məhz belə tənliklərin az-çox dolğun, bütöv nəzəriyyəsinin mövcudluğu ilə izah olunur.

Riyazi fizika tənliklərinin əsasını hidrodinamika, elastiklik nəzəriyyəsi, elektrodinamika, istilikkeçirmə nəzəriyyəsi və s. sahələrdə meydana çıxan məsələlərin riyazi öyrənilməsi təşkil edir. Belə məsələlər xüsusi törəməli diferensial tənliklərin bu və ya digər şərtləri ödəyən həllinin tapılmasına gətirilir.

I FƏSİL.

XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ TƏNLİKLƏR. SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ.

§ 1. Riyazi fizikanın bəzi tənliklərinin çıxarılışı.

1°. İstilikkeçirmə tənliyi:

Fərz edək ki, sərhəddi S olan izotrop Ω cismi xarici mühitlə istilik mübadiləsindədir. Bu prosesi izləyək. İxtiyari t anında cismin (x,y,z) nöqtəsinin temperaturunu $u(x,y,z,t)$ ilə, cismin sıxlığını ρ, xüsusi istilik tutumunu γ ilə işarə edək. Cisimdəki istilik mənbələrinin intensivliyi, yəni vahid zaman ərzində vahid həcmin ayırdığı istiliyin miqdarı f olsun.

Cismin səthində ΔS səth elementi götürək. Bu səthdən vahid anda cismə daxil olan (və ya cisimdən çıxan) istiliyin miqdarı

$$\Delta Q_1 = k\frac{\partial u}{\partial \nu}\Delta S$$

bərabərliyi ilə təyin olunur, burada mütənasiblik əmsalı olan k, cismin istilikkeçirmə əmsalı adlanan müsbət kəmiyyət, ν isə ΔS səthinə çəkilən xarici normaldır.

Cismin S səthindən vahid zamanda daxil olan istiliyin miqdarı

$$Q = \int_S k\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$$

olacaq. Sağ tərəfə Qrin düsturunu tətbiq etsək, onu

$$Q_1 = \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz$$

şəklində yaza bilərik.

Cisimdə olan daxili mənbələrin hesabına, vahid zamanda ona verilən istiliyin miqdarı

$$Q_2 = \int_\Omega f\,dxdydz$$

olacaq.

Cismin $d\tau = dxdydz$ həcm elementini götürək. Bu elementar həcmin kütləsi $dm = \rho d\tau$ olacaq və Δt zamanı ərzində onun temperaturunu du qədər dəyişmək üçün lazım olan istiliyin miqdarı

$$\Delta Q_3 = \gamma du\cdot dm = \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t d\tau$$

olar. Onda bütün cismin temperaturunu dəyişmək üçün vahid zamanda lazım olan istiliyin miqdarı

$$Q_3 = \int_\Omega \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz$$

olacaq.

Əgər cisimdə istilik itkisi yoxsa, yəni cismə xaricdən daxil olan və daxili mənbələr hesabına cismə verilən istiliyin hamısı, onun temperaturunu dəyişməyə sərf olunursa, onda

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

bərabərliyi ödənməlidir.

Beləliklə,

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + f\right]dxdydz =$$

$$= \int_\Omega \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}dxdydz$$

alırıq ki, buradan da Ω oblastının ixtiyariliyindən, qeyri-bircins cisimdə istilikkeçirmə tənliyini

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-f \quad (1.1)$$

alırıq. Bircins Ω cismi üçün $k = const,\ \ \rho = const,\ \ g = const$ olduğundan, (1.1) tənliyi

$$\Delta u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=F,\quad a^2=\frac{k}{\partial\rho},\quad F=\frac{-f}{k} \qquad (1.2)$$

şəklinə gəlir, burada

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

işarə edilmişdir.

Əgər Ω cismində gedən istilik prosesi stasionardırsa, yəni zamandan asılı deyilsə, onda $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, və bu halda (1.2) tənliyi

$$\Delta u = F \qquad (1.3)$$

şəklinə gəlir. Alınan (1.3) tənliyinə Puasson tənliyi deyilir. Bu zaman həm də, istilik mənbələri yoxdursa,

$$\Delta u = 0$$

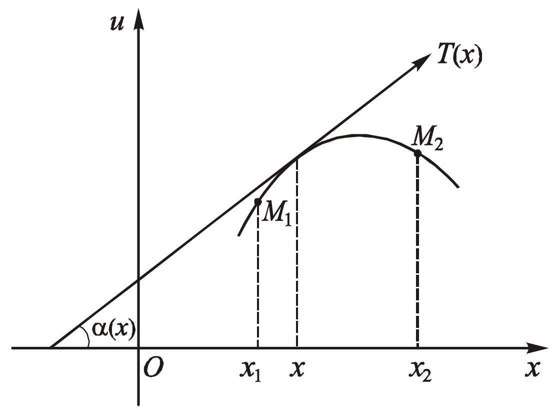
tənliyini alarıq. Bu tənliyə Laplas tənliyi deyilir.

2^o. Simin rəqs tənliyi:

Sim dedikdə en kəsiyi uzunluğuna nisbətən olduqca kiçik olan cism başa düşülür. Sim əyilməyə qarşı heç bir müqavimət göstərmədiyi halda, dartılmaya qarşı müqavimət göstərir.

Fərz edək ki, sim x oxu boyunca yönəlmiş tarazlıq vəziyyəti ətrafında eninə rəqs edir və bu rəqs x oxuna perpendikulyar müstəvi üzərindədir.

İxtiyari t anında simin x nöqtəsinin tarazlıq vəziyyətindən olan yayınmasını $u(x,t)$ ilə, x nöqtəsində bu əyriyə çəkilən toxunanın x oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağı $\alpha(x)$ ilə işarə edək (şəkil 1).



Şəkil 1.

Simin ixtiyari (x_1, x_2) hissəsini qeyd edək. Bu hissə rəqs zamanı M_1M_2 formasını alır. Simin kiçik rəqsləri zamanı onun qeyd olunmuş hissəsinin uzunluğu sabit qaldığından, Huk qanununa əsasən, simin hər bir nöqtəsinə təsir edən gərginlik qüvvəsi zamana görə dəyişmir, $T = T(x)$.

Digər tərəfdən, x nöqtəsinə təsir edən gərginlik qüvvəsi, $u(x,t)$ əyrisinə çəkilən toxunan istiqamətində yönəldiyindən, onun u oxu üzərindəki proyeksiyası

$$T_u \equiv T\sin\alpha = T\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = T\cdot\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx T\cdot u_x$$

bərabərliyi ilə tapılır. Simin kiçik rəqslərinə baxdığımızdan

$$T_u = T\cdot u_x$$

götürmək olar. Beləliklə, simin M_1M_2 hissəsinə u istiqamətində təsir edən gərginlik qüvvəsi

$$T_u(x_2)-T_u(x_1)=\int_{x_1}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

olacaq.

Simin vahid uzunluğuna təsir edən xarici qüvvənin u oxuna paralel istiqamətdə yönəlmiş proyeksiyası $f(x,t)$ ilə işarə etsək, onda M_1M_2 hissəsinə u oxu istiqamətində təsir edən xarici qüvvə

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx$$

olacaq.

Simin xətti sıxlığı $\rho(x)$ olarsa, onda onun M_1M_2 hissəsinin inersiya qüvvəsi

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$$

olar. Dalamber prinsipinə görə, simin hər hansı hissəsinə təsir edən bütün qüvvələr, inersiya qüvvəsi də daxil olmaqla tarazlaşırlar.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(Tu_x) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = 0$$

bərabərliyi ödənməlidir. Buradan da, x_1x_2 sahəsinin ixtiyariliyindən

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(Tu_x) = f(x,t)$$

yaza bilərik. Bu tənliyə simin rəqs tənliyi deyilir.

Xüsusi halda, $T = const,\ \rho = const,$ olarsa, tənlik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$$

şəklinə gəlir. Bu bircins simin rəqs tənliyidir.

Simə xarici qüvvə təsir etmirsə, $F(x,t) = 0$ və alınan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

tənliyə, simin sərbəst rəqs tənliyi deyilir.

§ 2. İkitərtibli ikidəyişənli tənliklərin təsnifatı və kanonik şəklə gətirilməsi.

İkitərtibli törəmələrin xətti daxil olduğu xüsusi törəməli

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, u_x, u_y) \qquad (2.1)$$

diferensial tənliyə baxaq, burada a, b, c əmsalları x, y dəyişənlərindən asılı funksiyalardır.

Bu tənliyi sadə şəklə gətirək. Bu məqsədlə,

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \qquad (2.2)$$

əvəzləməsi vasitəsilə, yeni ξ, η dəyişənlərinə keçək. Fərz edəcəyik ki, bu əvəzləmənin yakobyanı sıfra çevrilmir,

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0\,. \qquad (2.3)$$

Bu şərt daxilində, (2.2) əvəzləməsinin tərs əvəzləməsi var və buradan x, y dəyişənlərini ξ, η vasitəsilə tapmaq olar.

Bilavasitə diferensiallamaqla alırıq ki,

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.$$

Törəmələrin bu qiymətlərini (2.1) tənliyində yerinə yazsaq,

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} = F\,, \qquad (2.4)$$

tənliyini alarıq, burada əmsallar

$$A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$
$$B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_y) + c\xi_y\eta_y, \qquad (2.5)$$
$$C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2$$

bərabərlikləri ilə təyin olunurlar, $F = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ isə ikinci tərtib törəmələrin daxil olmadığı hədlərin cəmidir.

İndi (2.2) əvəzləməsindəki φ və ψ funksiyalarını elə seçməyə çalışaq ki, (2.4) tənliyi sadə şəklə gəlsin.

Fərz edək ki, A əmsalını sıfır etmək istəyirik. Onda, (2.5) bərabərliyindən göründüyü kimi, $\varphi(x, y)$ funksiyası

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0 \qquad (2.6)$$

tənliyinin həlli götürmək lazımdır. Lakin bu tənlik xüsusi törəməli diferensial tənlikdir və onun həllini bilavasitə tapmaq, həmişə o qədər də asan olmur.

Bununla belə, göstərək ki əgər $\varphi(x, y) = const$ əyrisi

$$ady^2 - 2bdydx + cdx^2 = 0 \qquad (2.7)$$

adi törəməli diferensial tənliyin ümumi inteqralıdırsa, onda $\xi = \varphi(x, y)$ funksiyası (2.6) xüsusi törəməli tənliyinin həllidir.

Doğrudan da, $\varphi(x, y) = c$ əyrisi boyunca, $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \qquad (2.8)$$

alarıq. İndi (2.7) tənliyini dx^2-a bölüb, (2.8) bərabərliyini nəzərə alsaq,

$$a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0$$

alınar ki, bu da elə (2.6) tənliyi deməkdir.

Beləliklə, (2.6) tənliyini həll etmək əvəzinə, (2.7) adi

törəməli diferensial tənliyinin ümumi inteqralını tapmaq kifayətdir.

Yuxarıdakı (2.7) tənliyinə (bəzən elə (2.6) tənliyinə də), (2.1) xüsusi törəməli tənliyinin xarakteristik tənliyi, xarakteristik tənliyin həllərinə isə, (2.1) tənliyinin xarakteristikaları deyilir.

(2.7) xarakteristik tənliyindən

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad (2.9)$$

alarıq. Sağ tərəfdəki kökün altındakı $\Delta(x, y) \equiv b^2 - ac$ ifadənin işarəsindən asılı olaraq, (2.1) xüsusi törəməli diferensial tənliyi tiplərə ayrılır.

Tənliyin verildiyi oblastdan götürülmüş hər hansı $M(x, y)$ nöqtəsində:

1. $\Delta(x, y) > 0$ olarsa, tənliyə M nöqtəsində hiperbolik tip;
2. $\Delta(x, y) < 0$ olarsa, tənliyə M nöqtəsində elliptik tip;
3. $\Delta(x, y) = 0$ olarsa, tənliyə M nöqtəsində parabolik tip tənlik deyilir.

Oblastın bütün nöqtələrində eyni tipə aid olan tənliklərə baxaq. Belə tənliklərə oblastda, uyğun olaraq, hiperbolik, elliptik, parabolik tənliklər deyilir.

Xarakteristikaların tənliyindən göründüyü kimi, tənlik oblastda hiperbolikdirsə, onda oblastın hər bir nöqtəsindən tənliyin iki həqiqi və müxtəlif xarakteristikaları keçir.

Əgər tənlik parabolikdirsə, xarakteristikalar üst-üstə düşür və hər nöqtədən tənliyin bir həqiqi xarakteristikası keçir. Nəhayət, elliptik tip tənliyin həqiqi xarakteristikaları yoxdur.

Hər bir hala ayrılıqda baxaq və bu halda tənliyi kanonik şəklə gətirək.

1^o. Tutaq ki, tənlik oblastda hiperbolikdir tənlikdir. Bu halda (2.9) tənliyinin (və buna görə də (2.7) tənliyinin) iki müxtəlif $\varphi(x, y) = const$, $\psi(x, y) = const$ ümumi inteqralları var. Onda, yuxarıda göstərdiyimiz kimi, $\xi = \varphi(x,y)$ və $\eta = \psi(x,y)$ funksiyaları (2.6) tənliyini ödəməlidirlər. Bu qayda ilə götürülmüş əvəzləmə zamanı (2.5) bərabərliklərindən göründüyü kimi $A = 0$, $C = 0$ alarıq. Bununla, (2.4) tənliyi

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \qquad (2.10)$$

şəklinə gəlir. Alınan (2.10) tənliyinə hiperbolik tənliyin birinci kanonik şəkli deyilir.

Bu tənlikdə ξ, η dəyişənlərindən

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

əvəzləməsi vasitəsilə yeni α, β dəyişənlərinə keçsək, onu

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = F_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

şəklinə gətirərik. Buna hiperbolik tənliyin ikinci kanonik şəkli deyilir.

2^o. Parabolik hala baxaq. Bu halda $b^2 = ac$ olduğundan, a və c əmsalları eyni işarəlidirlər. Ümumiliyi pozmadan hər ikisinin müsbət olduğunu fərz etmək olar (əks halda, (2.1) tənliyinin hər tərəfini -1 -ə vurardıq), yəni $b = \sqrt{a} \cdot \sqrt{c}$ olar.

Xarakteristik (2.7) tənliyinin bir $\varphi(x,y) = const$ ümumi inteqralı var. Yeni

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

əvəzləməsi götürək, burada $\eta(x,y)$ funksiyası, (2.3) şərtini ödəyən ixtiyari hamar funksiyadır.

Bu zaman, $\xi = \varphi(x,y)$ funksiyası (2.6) tənliyinin həlli olduğundan,

$$A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 =$$

$$= a\varphi_x^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{c}\,\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = (\sqrt{a}\,\varphi_x + \sqrt{c}\,\varphi_y)^2 = 0$$

və

$$B = a\varphi_x\eta_x + b(\varphi_x\eta_y + \varphi_y\eta_x) + c\varphi_y\eta_y =$$

$$= (\sqrt{a}\,\varphi_x + \sqrt{c}\,\varphi_y)(\sqrt{a}\,\eta_x + \sqrt{c}\,\eta_y) = 0$$

alarıq. Onda, (2.4) tənliyi

$$u_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

Şəklinə gəlir. Buna parabolik tənliyin kanonik şəkli deyilir.

3^o. Elliptik halda, (2.7) tənliyinin ancaq kompleks həlləri var; $\varphi(x,y) = const$ bu tənliyin kopleks ümumi inteqralı olsun. Fərz edək ki,

$$\alpha(x,y) = \operatorname{Re}\varphi(x,y), \quad \beta(x,y) = \operatorname{Im}\varphi(x,y).$$

Onda

$$\varphi = \alpha + i\beta, \quad \varphi_x = \alpha_x + i\beta_x, \quad \varphi_y = \alpha_i + i\beta_y. \qquad (2.11)$$

Yenə $\xi = \varphi(x,y)$ funksiyası (2.6) tənliyinin həlli olduğundan

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0.$$

Buradan, (2.11)-i nəzərə alsaq,

$$a(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2b(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + c(\alpha_y + i\beta_y)^2 =$$

$$= [(a\alpha_x^2 + 2b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2) - (a\beta_x^2 + 2b\beta_x\beta_y + c\beta_y^2)] +$$

$$+ 2i[a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + c\alpha_y\beta_y] = 0$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərlik göstərir ki, əgər

$$\xi = \alpha(x,y),$$

$$\eta = \beta(x,y)$$

əvəzləməsi götürsək, (2.5) düsturlarından göründüyü kimi, $A = B$, $C = 0$ alarıq. Onda, (2.4) tənliyi

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = F_4(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

şəklinə gəlir. Buna elliptik tənliyin kanonik şəkli deyilir.

Qeyd edək ki, bilavasitə yoxlamaqla göstərilən

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)J^2$$

bərabərliyindən görünür ki, qeyri-məxsusi çevirmə $(J \neq 0)$ zamanı, xüsusi törəməli tənliyin tipi dəyişmir. Bu o deməkdir ki, tənliyin hansı tipə daxil olması, onun invariant xassəsidir və tənliyi kanonik şəklə gətirən qeyri-məxsusi çevirmədən asılı deyil.

Biz göstərdik ki, oblastda tipini saxlayan ikidəyişənli xüsusi törəməli tənlik üçün, elə qeyri-məxsusi əvəzləmə var ki, bu əvəzləmə tənliyi eyni zamanda oblastın bütün nöqtələrində kanonik şəklə gətirir.

Lakin, aşağıda görəcəyimiz kimi, sərbəst dəyişənlərin sayı üç və daha çox olan halda, dəyişən əmsallı xətti tənliyi oblastın bütün nöqtələrində eyni zamanda kanonik şəklə gətirən əvəzləmə yoxdur.

§3. Çoxdəyişənli tənliklərin təsnifatı.

Tutaq ki, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fəzada nöqtə, $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bu nöqtədən asılı funksiya, $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ isə qradient vektordur. İkinci tərtib törəmələrin xətti daxil olduğu

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f(x, u, u_x) \tag{3.1}$$

xüsusi törəməli diferensial tənliyə baxaq. Ümumiliyi pozmadan, fərz etmək olar ki, bu tənliyin əmsalları

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i, j = \overline{1, n} \tag{3.2}$$

şərtlərini ödəyir. Əks halda

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

işarə etməklə, (3.1) tənliyində a_{ij} əvəzinə A_{ij} yazılmış tənliyə baxardıq ki, bu da (3.2) şərtini ödəyərdi.

Tənliyi sadə şəklə gətirməyə çalışaq. İkinci tərtib törəmələrin əmsallarından düzəldilmiş (a_{ij}) matrisinin baş diaqonaldan kənarda $n^2 - n$ sayda elementi var. Matris simmetrik olduğundan onların müxtəlif olanlarının sayı $\frac{n^2 - n}{2}$-dir. Tənliyi sadə şəklə gətirmək üçün, $y_k = \varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ əvəzləməsi aparsaq, burada n sayda ixtiyari funksiya var. Bu ixtiyari funksiyaları seçməklə, tənliyi sadələşdirməliyik. Fəzanın ölçüsü $n > 3$ olduqda, sıfıra çevrilməli əmsalların sayı $\frac{n^2 - n}{2}$, ixtiyari $\varphi_k(x)$ funksiyalarının n sayından böyük olduğundan, bu funksiyaların seçim sərbəstliyi əmsalları seçməyə kifayət etmir. Fəzanın ölçüsü $n = 3$ olduqda, diaqonaldan kənar əmsalları sıfır etmək olar, lakin diaqonal boyunca duran əmsallar sərbəst qalırlar. Ona görə də, $n \geq 3$ halında, tənliyi oblastın eyni zamanda bütün nöqtələrində kanonik şəklə gətirən əvəzləmə yoxdur.

Elə bu səbəbdən, $n \geq 3$ olan halda tənliyin qeyd olunmuş nöqtədə kanonik şəklindən söhbət gedə bilər.

Tənliyin ikinci tərtib törəmələrinin əmsallarının köməyilə düzəldilmiş

$$\omega(x, t) \equiv r + t - t_0 \tag{3.3}$$

ifadəsinə, (3.1) tənliyinin xarakteristik forması deyilir.

Tənliyi kanonik şəklə gətirmək üçün, onun uyğun xarakteristik formasını kanonik şəklə gətirmək lazımdır.

Tutaq ki, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ oblastın hər hansı nöqtəsidir. Bu nöqtədə $Q(x, \xi)$ xarakteristik forması, sabit əmsallı

$$Q(x^0, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j$$

kvadratik formadır. Ali cəbr kursundan məlum olduğu üzrə, elə qeyri-məxsusi

$$\xi_i = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\eta_l, \quad i = 1,2,\dots,n$$

xətti çevirməsi var ki, bu çevirmə $Q(x^0,\xi)$ kvadratik formasını kanonik şəklə gətirir. Bu o deməkdir ki, yeni əvəzləmə nəticəsində alınan

$$Q(x^0,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\sum_{l=1}^{n}\alpha_{il}\eta_l\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\eta_k =$$

$$= \sum_{l,k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\alpha_{il}\alpha_{jk}\right)\eta_l\eta_k = \overline{Q}(x^0,\eta)$$

yeni kvadratik forma,

$$\overline{Q}(x^0,\eta) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\eta_k^2$$

şəklindədir və burada λ_k -lar ya 1, ya -1, ya da sıfırdırlar. Bu əmsallara görə (3.1) tənliyi təsnifata ayrılır.

Belə ki, əgər bütün λ_k -lar sıfırdan fərqli olmaqla, eyni işarəlidirlərsə, onda (3.1) tənliyinə x^0 nöqtəsində elliptik tənlik və ya elliptik tip tənlik deyirlər.

Əgər λ_k -lar içərisində sıfır olanları varsa, onda tənliyə x^0 nöqtəsində parabolik tənlik və ya parabolik tip tənlik deyilir.

Əgər λ_k -lar hamısı sıfırdan fərqli, lakin müxtəlif işarəlidirlərsə, onda tənliyə x^0 nöqtəsində hiperbolik tənlik və ya hiperbolik tip tənlik deyilir.

Tənlik oblastın bütün nöqtələrində elliptik, parabolik və ya hiperbolikdirsə, onda tənliyə verilmiş oblastda elliptik, parabolik və ya hiperbolik tənlik deyilir.

§4. Xüsusi törəməli tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin qoyuluşu.

Diferensial tənliklərin bu və ya digər əlavə şərtləri ödəyən həllərinin tapılması məsələsi xüsusi maraq kəsb edir. Bu əlavə şərtlərdə, bir qayda olaraq, həllin və onun törəmələrinin, həllin axtarıldığı oblastın sərhədindəki qiymətləri verilir. Belə şərtlər ümumi halda sərhəd şərtləri adlanır. Bəzən həllin və onun törəmələrinin qiymətləri, hər hansı arqumentin (məsələn, zamanın) qeyd olunmuş qiyməti üçün verilir. Bu şərtlərə başlanğıc şərtləri və ya Koşi şərtləri deyilir.

Xüsusi törəməli tənliklərin əlavə şərtləri ödəyən həllərinin tapılması məsələsinə riyazi fizikanın sərhəd məsələləri deyilir. Sərhəd məsələlərinin qoyuluşu öyrənilən məsələnin konkret fiziki matiyyəti ilə sıx bağlıdır və bu prosesi xarakterizə edən kəmiyyətlərin verilməsini təyin edir.

Deyilənləri bəzi misallarla nümayiş etdirək.

Simin rəqs tənliyi. Məlum olduğu üzrə simin rəqsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{4.1}$$

tənliyi ilə ifadə olunur. Fərz edək ki, ucları $x = 0$ və $x = l$ nöqtələrində olan sim, $t = 0$ anında tarazlıqdan çıxarılaraq, rəqsə başlamışdır. Simin ixtiyari $x \in [0,l]$ nöqtəsinin, verilmiş $t > 0$ anındakı $u(x,t)$ vəziyyətini təyin etmək lazımdır. Başqa sözlə, tənliyinin həlli, D yarımzolağında təyin olunmuş funksiyadır. Bu oblastın sərhəddi x oxunun $[0,l]$ parçası və $x = 0$, $x = l$ düz xəttlərinin $t > 0$ hissələridir. Tənliyin verdiyi informasiyaya görə, onun x nöqtəsinə t anında $f(x,t)$ xarici qüvvəsi təsir edir. Bu informasiya simin vəziyyətini təyin etmək üçün kifayət deyil. Onu təyin edə bilmək üçün həyəcanlanmaya başlayan anda simin vəziyyəti, həyəcanlanma ərzində simin uclarının vəziyyəti və s məlum olmalıdır.

Tutaq ki, simin başlanğıc vəziyyəti və başlanğıc sürəti məlumdur. Bu riyazi olaraq,

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \ \ 0 \le x \le l, \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \ \ 0 \le x \le l \tag{4.3}$$

şərtlərinin verilməsi deməkdir.

Bu şərtlərə Koşi şərtləri və ya başlanğıc şərtlər deyilir.

Simin ucları bərkidilə bilər və ya ucların yerdəyişmə qanunu verilə bilər

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \psi_0(x), \ \ t > 0, \tag{4.2}$$

$$u(x,t)\big|_{x=l} = \psi_1(x), \ \ t > 0\,. \tag{4.3}$$

Simin uclarının bərkidilməsi $\psi_0(t) \equiv 0, \psi_0(t) \equiv 0$ deməkdir.

Bu əlavə (4.2)-(4.5) şərtləri həllin axtarıldığı oblastın $x = 0,\ x = l,\ t = 0$ sərhəddi üzərində ödənilməlidir. Ona görə də bu şərtlərə birlikdə sərhəd şərtləri deyilir.

Göstərmək olur ki, sərhəd şərtlərindəki funksiyalar üzərinə qoyulmuş bəzi şərtlər daxilində, (4.1) tənliyinin (4.2)-(4.5) şərtlərini ödəyən yeganə həlli var. Bu o deməkdir ki, bu şərtlər simin rəqs prosesini tam xarakterizə edir, yəni bu şərtlər içərisində artıq olanı və çatışmayanı yoxdur.

Stasionar istilikkeçirmə tənliyi. Əgər Ω cismində gedən istilikkeçirmə prosesi zamandan asılı deyilsə, onda bu proses

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z) \tag{4.6}$$

Puasson tənliyi ilə ifadə olunur, burada $f(x,y,z)$ funksiyası (x,y,z) nöqtəsindək istilik mənbəyinin intensivliyini xarakterizə edir.

Təkcə diferensial tənliyin verilməsi, Ω cismində istiliyin yayılmasını təyin etmək üçün kifayət deyil. Tutaq ki, cismin S səthinin temperaturunu ölçmək mümkün olmuşdur və sərhəddin (ξ,η,ζ) nöqtəsinin temperaturu $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$-dir. Onda əlavə olaraq

$$u\big|_S = \varphi(\xi,\eta,\zeta) \tag{4.7}$$

sərhəd şərtini alarıq. Bu şərtə Dirixle şərti, (4.6) tənliyinin (4.7) şərtini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə isə Dirixle məsələsi deyilir.

Göstərmək olur ki, kifayət qədər geniş şərtlər daxilində (4.6), (4.7) Dirixle məsələsinin yeganə həlli var.

Əgər oblastın sərhəddində cismin temperaturu əvəzinə, istilik selinin intensivliyi məlum olarsa, səhəd şərti

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = \psi(\xi,\eta,\zeta) \tag{4.8}$$

şəklində verilir, burada ν S səthinə çəkilmiş normaldır. Bu sərhəd şərti Neyman şərti, (4.6), (4.8) məsələsi isə Neyman məsələsi adlanır.

Dirixle və Neyman məsələlərini, ixtiyari n ölçülü oblastlar üçün və həm də, daha ümumi elliptik tənliklər üçün qoymaq olar.

Qeyri-stasionar istilikkeçirmə tənliyi. Bu proses sadə halda

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,y,z,t) \tag{4.9}$$

tənliyi ilə ifadə olunur.

Tutaq ki, $t = 0$ başlağıc anında Ω cisminin temperaturu

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \ \ (x,y,z)\in\Omega \qquad (4.10)$$

məlumdur. Aydındır ki, cismin daxilində istiliyin yayılmasına onun S səthindəki istilik rejimi təsir edir. İstənilən $t>0$ anında cismin səthinin temperaturunun

$$u\big|_{p\in S} = \psi(p,t), \quad t>0 \qquad (4.11)$$

verilməsi, (4.10) şərti ilə birlikdə, istənilən $t>0$ anında cismin temperaturunu təyin etməyə imkan verir. (4.9), (4.10), (4.11) məsələsinə, istilikkeçirmə tənliyi üçün birinci sərhəd məsələsi deyilir.

Əgər cismin səthinin temperaturu əvəzinə, istənilən $t>0$ anında səthdən keçən temperatur seli

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{p\in S} = \psi(p,t), \quad t>0 \qquad (4.12)$$

verilərsə, (4.9), (4.10), (4.12) məsələsinə istilikkeçirmə tənliyi üçün ikinci sərhəd məsələsi deyilir.

§5. Xarakteristik səth. Koşi məsələsinin qoyuluşu.

Tutaq ki, n ölçülü fəzada iki tərtibli xüsusi törəməli

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x,u,u_x) \qquad (5.1)$$

diferensial tənliyi verilmişdir.

Bu tənliyin ikinci tərtib törəmələrinin əmsallarının daxil olduğu

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial x_j} = 0 \qquad (5.2)$$

tənliyinə, (5.1) xüsusi törəməli tənliyinin xarakteristik tənliyi deyilir. Əgər $\mathsf{F}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyası (5.2) tənliyini ödəyirsə, onda, ixtiyari c sabiti üçün

$$\mathsf{F}(x_1,x_2,\dots,x_n) = c \qquad (5.3)$$

tənliyinin təyin etdiyi səthə, (5.1) tənliyinin xarakteristikası və ya xarakteristik səthi deyilir.

Göstərək ki, tənliyin xarakteristik səthi, qeyri-məxsusi çevirməyə nəzərən invariantdır. Başqa sözlə, göstərək ki, əgər (5.3) səthi, (5.1) tənliyinin xarakteristik səthidirsə, onda bu səth ixtiyari qeyri-məxsusi

$$\xi_k = \xi_k(x_1,x_2,\dots,x_n) \quad k=1,2,\dots,n \qquad (5.4)$$

çevirməsi nəticəsində, (5.1) tənliyinin gətirildiyi

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} = F(x,u,u_\xi) \qquad (5.5)$$

tənliyinin də xarakteristik səthidir, burada əmsallar

$$A_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \qquad k,l=1,2,\dots$$

bərabərlikləri ilə təyin olunurlar.

Doğrudan da, alınmış (5.5) tənliyinin xarakteristik tənliyi

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \xi_k}\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \xi_l} = 0 \qquad (5.6)$$

şəklindədir. Digər tərəfdən, (5.1) tənliyinin (5.2) xarakteristik tənliyində (5.4) əvəzləməsi aparsaq

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial \mathsf{F}}{\partial \xi_l}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$$

olduğundan,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_l}$$

alırıq ki, bu da (5.2) tənliyini ödəyən səthin, (5.6) tənliyini də ödədiyini göstərir.

İndi tutaq ki, S səthi n ölçülü fəzada ixtiyarı hamar səthdir. Bu səthin hər nöqtəsində, o səthə çəkilən toxunan müstəvi üzərində yerləşməyən ixtiyari λ istiqaməti təyin edək.

Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

S səthinin müəyyən ətrafında (5.1) tənliyinin elə həllini tapmalı ki, bu həll

$$u\big|_S = \varphi_0(x), \tag{5.7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right|_S = \varphi_1(x) \tag{5.8}$$

sərhəd şərtlərini ödəsin.

Bu məsələyə Koşi məsələsi, (5.7), (5.8) şərtlərinə Koşi şərtləri, S səthinə isə Koşi daşıyıcısı və ya Koşi səthi deyilir.

Göstərək ki, əgər Koşi daşıyıcısı xarakteristik səthdirsə, yəni Koşi şərtləri xarakteristik səth üzərində verilmişsə, onda qoyulmuş məsələnin ümumiyyətlə həlli yoxdur.

Sadəlik üçün, bunu ikidəyişənli

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ \alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x,y)u = f(x,y) \tag{5.9}$$

tənliyi misalında göstərək.

Tutaq ki, $x = c$ düz xətti bu tənliyin xarakteristikasıdır və

$x = 0$ xarakteristikası üzərində

$$u(x,y)\big|_{x=0} = \varphi(y), \tag{5.10}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi(y) \tag{5.11}$$

Koşi şərtləri verilmişdir.

$x = c$ düz xətti, (5.9) tənliyinin xarakteristikasıdırsa, tənlikdə u_{xx} törəməsinin əmsalı $a(x,y) = 0$ olmalıdır. Tənliyə daxil olan, yerdə qalan törəmələrin hamısını $x = 0$ xarakteristikası üzərində, (5.10), (5.11) şərtlərindən tapmaq olar. Doğrudan da, (5.10) şərtini diferensiallamaqla

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0} = \varphi'(y), \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=0} = \varphi''(y),$$

(5.11) şərtini diferensiallamaqla

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x=0} = \psi'(y)$$

taparıq. Bunları və (5.10), (5.11) şərtlərini, (5.9) tənliyində nəzərə alsaq, $x = 0$ xarakteristikası üzərində

$$2b(0,y)\psi'(y) + c(0,y)\varphi''(y) + \alpha(0,y)\psi(y) +$$

$$+ \beta(0,y)\varphi'(y) + \gamma(0,y)\varphi(y) = f(0,y) \tag{5.12}$$

şərtinin ödənməli olduğunu alarıq.

Deməli, əgər (5.10), (5.11) Koşi şərtlərində verilən funksiyalar, (5.12) şərtini ödəmirlərsə, onda (5.9), (5.10), (5.11) Koşi məsələsinin həlli yoxdur. Bu o deməkdir ki, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları ixtiyari şəkildə verilə bilməzlər.

§6. Korrektlik anlayışı. Adamar misalı.

Sərhəd məsələlərinin qoyuluşu zamanı gördük ki, diferensial tənliyin ifadə etdiyi fiziki prosesin mahiyyətinə uyğun olaraq, onu xarakterizə edən ilkin məlumatlar sərhəd şərtləri şəklində verilir. Bu sərhəd şərtlərinə daxil olan funksiyalar müəyyən təcrübələr və ölçülərin nəticəsində təyin olunurlar. Ona görə də bu funksiyalar mütləq dəqiq şəkildə verilə bilməzlər və onların verilməsində müəyyən xətalar mümkündür.

Başlanğıc funksiyaların verilməsindəki bu xətalar məsələnin həllinə də təsir göstərir. Bəzən başlanğıc funksiyaların kiçik dəyişməsi, həllin əsaslı dəyişməsilə müşayət olunur.

Qoyulmuş sərhəd məsələlərinin praktiki tətbiqi baxımından, ancaq həlləri başlanğıc funksiyalardan kəsilməz asılı olan məsələlər xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Belə məsələlərə, yəni başlanğıc şərtlərin kiçik dəyişməsinə, həllin kiçik dəyişməsi uyuğun gələn məsələlərə korrekt məsələlər deyilir.

Korrekt olmayan məsələyə aid misal olaraq, keçən əsrin əvvəllərində Adamarın qurduğu aşağıdakı misalı göstərək.

Yuxarı $\{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ y > 0\}$ yarımzolağında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplas tənliyinin elə həllini tapmalı ki, bu həll yarımzolağın sərhəddində

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z),\ \ (x, y, z) \in E_3,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = e^{-\sqrt{n}} \cos nx \qquad (6.1)$$

sərhəd şərtlərini ödəsin.

Göstərmək olar ki, n tək ədəd olduqda,

$$u(x, y) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \cdot \operatorname{sh} ny \qquad (6.2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunmuş $u(x, y)$ funksiyası, qoyulmuş məsələnin həllidir. Həmdə göstərmək olar ki, bu həll yeganədir.

n parametrinin kafi qədər böyük qiymətlərində, (6.1) şərtinin sağ tərəfi sıfıra istənilən qədər yaxın olduğu halda, (6.2) həlli ixtiyari $y > 0$ üçün, amplitudası istənilən qədər böyük olan kosinusoidanı ifadə edir.

Bu onu göstərir ki, başlanğıc funksiyanın sıfırdan azacıq fərqlənməsi, həllin sıfırdan istənilən qədər böyük fərqlənməsinə gətirir. Deməli, qoyulmuş məsələ korrekt deyil.

II FƏSİL.

DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN KOŞİ MƏSƏLƏSİ.

§1. Xarakteristik konus. Koşi məsələsi.

İki tərtibli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u=f(x,t) \quad (1.1)$$

tənliyində, istənilən sıfırdan fərqli $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ vektoru üçün

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j>0$$

şərti ödənirsə, onda (1.1) tənliyinə dalğa tənliyi deyilir.

Daha sadə dalğa tənliyinə baxaq

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x,t). \quad (1.2)$$

Bu tənlik fiziki olaraq, intensivliyi $f(x,t)$ kəmiyyəti ilə mütənasib olan kəsilməz paylanmış mənbələrin təsiri ilə həyəcanlanmış mühitin kiçik rəqsini ifadə edir. Əgər mühit bircinsdirsə və onun fiziki xassələri zamandan asılı deyilsə, onda a_{ij} əmsalları sabitdirlər. Bu halda affin koordinat çevirməsinin köməyi, daha sadə

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,t) \quad (1.3)$$

dalğa tənliyini alarıq, burada $a=const$,

$$\Delta u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Laplas operatorudur.

Dalğa tənliyinin xarakteristik tənliyi

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}=0 \quad (1.4)$$

şəklindədir. Aydındır ki, $\omega(x,t)\equiv t$ funksiyası (1.4) xarakteristika tənliyini ödəmir, və buna görə də $t=const$ müstəvisi dalğa tənliyi üçün xarakteristik səth deyilir. Məhz buna görə də, $t=const$ səthi üzrə Koşi məsələsi qoymaq olar.

Biz ancaq sadə (1.3) dalğa tənliyinə baxacağıq.

<u>**Koşi məsələsi:**</u> Verilmiş $x\in E_n$, $t>0$ yarımfəzasında (1.3) dalğa tənliyinin elə həllini tapmalı ki, o həll

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x), \quad x\in E_n \quad (1.5)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \quad x\in E_n \quad (1.6)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyir.

Dalğa tənliyi üçün xarakteristik konus anlayışının böyük əhəmiyyəti var. Bu anlayışı verək.

Fəzada hər hansı $(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0,t_0)=(x^0,t_0)$ nöqtəsi götürək və $r=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_k^0)^2}$ işarə edək. Tənliyi

$$r=t_0-t \quad (1.7)$$

şəklində olan səthə baxaq. Bu səth təpəsi (x^0,t_0) nöqtəsində və oxu t oxuna paralel olan konus səthdir. Göstərmək olar ki, bu səth (1.3) tənliyi üçün xarakteristik səthdir, yəni $\omega(x,t) \equiv r + t - t_0$ funksiyası

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0$$

tənliyini ödəyir.

Yuxarıdakı (1.7) tənliyi ilə verilmiş konusa, dalğa tənliyi üçün xarakteristik konus deyilir.

§2. Koşi məsələsi üçün yeganəlik teoremi.

Teorem: Tutaq ki, iki dəfə kəsilməz törəmələrə malik olan u_1 və u_2 funksiyaları təpəsi (x^0, t_0) nöqtəsində yerləşən $r < t_0 - t$ konusu daxilində $Lu_1 = Lu_2$ şərtini və bu konusun $t = 0$ müstəvisindən ayrıldığı $r < t_0$ şarı daxilində $u_1 = u_2$ və $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}$ şərtlərini ödəyirlər. Onda bu konusun daxilində və onun səthi üzərində $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Teoremi isbat etmək üçün göstərək ki, əgər $w = u_1 - u_2$ funksiyası $r < t_0 - t$ konusu daxilində bircins

$$Lw \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0 \qquad (2.1)$$

dalğa tənliyini və

$$w|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad (2.2)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyirsə, onda $w \equiv 0$.

Xarakteristik $r = t_0 - t$ konus səthi və $t = 0$ müstəvisi ilə

əhatə olunmuş oblastı D ilə işarə edək. Bu oblastın daxilində və ya konus səthi üzərində ixtiyari $(\bar{x}, \bar{t})$ nöqtəsi götürək və yeni $\bar{r} = \bar{t} - t$ xarakteristik konusu quraq, burada $\bar{r} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_k)^2}$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Sonuncu konus səthilə $t = 0$ müstəvisi arasında qalan oblastı $\overline{D}$ ilə işarə edək. Bu D və $\overline{D}$ oblasları $t = 0$ müstəvisində uyğun olaraq Ω və $\overline{\Omega}$ şarlarına söykənirlər. Aydındır ki, $\overline{\Omega}$ şarı Ω şarı daxilindədir və buna görə də $\overline{\Omega}$ şarı üzərində də (2.2) başlanğıc şərtləri ödəniləcək.

Bilavasitə yoxlamaqla

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

eyniliklərini isbat etmək olar. Verilmiş (2.1) tənliyini $\frac{\partial w}{\partial t}$-yə vuraq və $\overline{D}$ oblastı üzrə inteqrallayaq. Bu zaman (2.3) eyniliklərini nəzərə alsaq, Qrin dysturunun köməyilə

$$\int_{\overline{D}} \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\right) dxdt = \int_{\overline{D}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2 \right] - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) \right\} dxdt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{\overline{S}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\right] \cos(\nu, t) - \right.$$

$$-2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(\nu,x_k)\Bigg\}d\overline{S} \qquad (2.4)$$

yaza bilərik, burada $\overline{S}$ ilə $\overline{D}$ oblastının sərhəddini, ν ilə bu sərhəddin istənilən nötəsində səthə çəkilən xarici normalı, $d\overline{S}$ ilə səth elementini işarə etmişik.

Oblastın $\overline{S}$ səthi, $\overline{K}$ konik səthdən və $\overline{\Omega}$ şarından ibarətdir. Yuxarıda dediyimiz kimi $\overline{\Omega}$ şarı üzərində (2.2) şərtləri ödənir. Bu şar $t=0$ müstəvisində yerləşdiyindən və t oxu x_k oxları ilə ortoqonal olduğundan həmin şar üzərində $\dfrac{\partial w}{\partial x_k}=0,\ \ k=1,2,\dots,n$ şərtləri də ödənir.

Yuxarıdakı (2.4) bərabərliyində, $\overline{\Omega}$ şarı üzrə inteqralaltı funksiyaların sıfır olduğunu və w funksiyasının D oblastında Lw tənliyini ödədiyini nəzərə alsaq, buradan

$$\int_{\overline{K}}\Bigg\{\Bigg[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\Bigg]\cos(\nu,t)-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(\nu,x_k)\Bigg\}d\overline{K}=0 \qquad (2.5)$$

bərabərliyini alarıq.

Diferensial həndəsədən məlum olduğu kimi, tənliyi

$$\omega(x,t)\equiv r+t-\bar{t}=0,\quad r=|x-\bar{x}|$$

şəklində verilən $\overline{K}$ səthinə çəkilən ν normalının yönəldici kosinusları üçün

$$\cos(\nu,t)=\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

və

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2(\nu,x_k)=1-\cos^2(\nu,t)=\frac{1}{2}$$

münasibətləri doğrudur. Burada

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2(\nu,x_k)=\cos^2(\nu,t)\,. \qquad (2.6)$$

İndi (2.5) bərabərliyinin hər tərəfini $\cos(\nu,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sabitinə vurub, (2.6) bərabərliyini nəzərə alsaq,

$$\int_{\overline{K}}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial w}{\partial t}\cos(\nu,x_k)-\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(\nu,t)\right]^2 d\overline{K}=0$$

alarıq. Bu bərabərlik göstərir ki, $\overline{K}$ konus səthi üzərində

$$\frac{\partial w}{\partial t}\cos(\nu,x_k)-\frac{\partial w}{\partial x_k}\cos(\nu,t)=0,\quad k=1,2,\dots,n$$

bərabərlikləri doğrudur. Buradan da

$$\frac{\dfrac{\partial w}{\partial x_1}}{\cos(\nu,x_1)}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial x_2}}{\cos(\nu,x_2)}=\cdots=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial x_n}}{\cos(\nu,x_n)}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial t}}{\cos(\nu,t)}$$

münasibətlərini alarıq. Bu onu göstərir ki, $\overline{K}$ konusu üzərində

$$\operatorname{grad}w=\left(\frac{\partial w}{\partial x_1},\frac{\partial w}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial w}{\partial x_n},\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

vektoru səthə çəkilmiş normala paraleldir.

Onda $\overline{K}$ konusu üzərində ixtiyari l doğuran götürsək, aydındır ki, $\operatorname{grad} w$ vektoru bu doğurana ortoqonal olacaq. Bu isə o deməkdir ki,

$$\frac{\partial w}{\partial l} = p_r \operatorname{grad} w = 0 .$$

Buradan alırıq ki, $\overline{K}$ konusunun ixtiyari l doğuranı üzrə w funksiyası sabitdir. Xüsusi halda $\overline{K}$ konusunun $(\overline{x},\overline{t})$ təpəsində w funksiyasının aldığı qiymət, l doğuranın $t=0$ müstəvisi üzərində yerləşən ücünda aldığı qiymətə bərabərdir. Biz də yuxarıda demişdik ki, $\overline{\Omega}$ şarı üzərində w funksiyası sıfırdır. Deməli, $w(\overline{x},\overline{t})=0$. Götürülmüş $(\overline{x},\overline{t})$ nöqtəsinin, D oblastı daxilində və ya konus səthi üzərində ixtiyari nöqtə olduğundan alırıq ki, $w(x,t)\equiv 0$.

Bununla yeganəlik teoremi isbat olur. Bu teorem göstərir ki, (2.1) tənliyinin həllinin ixtiyari (x^0,t_0) nöqtəsindəki qiyməti başlanğıc funksiyaların ancaq $|\,x-x^0\,|\le t_0$ şarı daxilindəki qiymətləri ilə təyin olunur. Həmin şarın xaricində başlanğıc funksiyaların istənilən qaydada dəyişməsi, həllin (x^0,t_0) nöqtəsindəki qiymətinə təsir etmir. Bu şar təpəsi (x^0,t_0) nöqtəsində yerləşən $|\,x-x^0\,|\le t_0-t$ xarakteristik konusun $t=0$ müstəvisində yerləşən oturacağıdır.

İxtiyari (x^0,t_0) nöqtəsi üçün asılılıq oblastı elə oblasta deyilir ki, həmin oblastda başlanğıc funksiyaların qiymətlərini bilmək, $u(x^0,t_0)$ qiymətiini təyin etmək üçün kifayətdir. Yuxarıda dediklərimizə əsasən, (x^0,t_0) nöqtəsinin asılılıq oblastı, təpəsi bu nöqtədə yerləşən xarakteristik $|\,x-x^0\,|\le t_0-t$ konusunun $t=0$ müstəvisindəki oturacağı olan $|\,x-x^0\,|\le t_0$ şarıdır.

§3. Bircins tənlik üçün Koşi məsələsinin həllinin qurulması.

Aşağıdakı Koşi məsələsinin həlli ilə məşğul olaq. Tutaq ki,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (3.1)$$

tənliyinin

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z),\;\; (x,y,z)\in E_3, \qquad (3.2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y,z),\;\; (x,y,z)\in E_3 \qquad (3.2)$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllini tapmaq tələb olunur.

Əvvəlcə

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{S_{at}} \frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\sigma_r \qquad (3.4)$$

inteqralına baxaq, burada S_{at} mərkəzi $M(x,y,z)$ nöqtəsində olan $r=at$ radiuslu sferanın səthidir. Göstərək ki, iki dəfə kəsilməz törəməyə malik ixtiyari $\mu(\xi,\eta,\zeta)$ funksiyası üçün (3.4) düsturu ilə təyin olunmuş funksiya (3.1) tənliyinin

$$w\big|_{t=0} = 0, \qquad (3.5)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \mu(x,y,z), \qquad (3.6)$$

şərtlərini ödəyən həllidir.

Sferanın radius vektorunun yönəldici kosinuslarını (α,β,γ) ilə işarə edək. Onda, S_{at} sferası üzərindəki (ξ,η,ζ) nöqtəsinin koordinatlarını

$$\xi = x + d\cdot at,\quad \eta = y+\beta\cdot at,\quad \zeta = z+\gamma\cdot at$$

şəklində göstərə bilərik. Aydındır ki, (ξ,η,ζ) nöqtəsi S_{at} sferası üzərində dəyişdikdə (α,β,γ) nöqtəsi mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu S_1 sfepası üzərində dəyişəcək. Bu sferaların $d\sigma_r$ və $d\sigma_1$ səth elementləri arasındakı

$$d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 = a^2t^2 d\sigma_1$$

münasibəti nəzərə alsaq, (3.4) inteqralı

$$w(x,y,z,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{S_1}\mu(x+\alpha\cdot at, y+\beta\cdot at, z+\gamma\cdot at)d\sigma_1 \quad (3.7)$$

şəklinə gəlir. Buradan, bilavasitə diferensiallamaqla

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi}\int_{S_1}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\mu(x+\alpha\cdot at, y+\beta\cdot at, z+\gamma\cdot at)d\sigma_1 +$$

$$+\frac{at}{4\pi}\int_{S_1}\left(\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\mu}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)d\sigma_1 \quad (3.9)$$

bərabərliklərini ala bilərik. Axırıncı bərabərliyi, (3.7)-nin köməyilə,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w}{t}+\frac{1}{4\pi at}\int_{S_{at}}\left(\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\mu}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)d\sigma_r$$

yazaraq, sağ tərəfdəki inteqrala Qrin düsturunu tətbiq etsək,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w}{t}+\frac{1}{4\pi at}\int_{\Omega_{at}}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

alarıq, burada Ω_{at} ilə S_{at} sferasının əhatə etdiyi kürə işarə

edilmişdir. İndi

$$J = \int_{\Omega_{at}}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

işarə etməklə, axırıncı bərabərliyi

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w}{t}+\frac{J}{4\pi at}$$

şəklində yaza bilərik. Buradan, asanlıqla

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{w}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{w}{t}+\frac{J}{4\pi at}\right)-\frac{J}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial J}{\partial t}$$

alarıq. Digər tərəfdən, Ω_{at} kürəsi üzrə olan inteqralı

$$J = \int_0^{at}\int_{S_\rho}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_\rho d\rho$$

şəklində yazaraq diferensiallasaq,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = a\int_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r$$

alarıq ki, buradan da

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r$$

alınar. Bu axırıncı bərabərlik, (3.8) bərabərliyi ilə bir yerdə göstərir ki, (3.4) düsturu ilə təyin olunan funksiya (3.1) tənliyini ödəyir. Bu funksiyanın (3.5) və (3.6) şərtlərini ödəməsi isə (3.7) və (3.9) bərabərliklərindən alınır.

İndi tutaq ki, $w(x,y,z,t)$ (3.4) bərabərliyi ilə təyin olunmuş funksiyadır. Yeni

$$v(x,y,z,t)=\frac{\partial w}{\partial t}$$

funksiyası təyin edək. Aydındır ki, $v(x,y,z,t)$ funksiyası (3.1) tənliyini və

$$v\big|_{t=0}=\frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\mu(x,y,z)$$

şərtini ödəyir. Digər tərəfdən,

$$\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}=a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)\bigg|_{t=0}$$

olduğundan, (3.5) şərtinə əsasən,

$$\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0$$

başlanğıc şərti də ödənilir.

Bu deyilənlərdən aydındır ki, əgər $\varphi(x,y,z)$ və $\psi(x,y,z)$ funksiyaları uyğun olaraq üç dəfə və iki dəfə kəsilməz törəmələrə malik funksiyalardırsa, onda onların köməyi ilə düzəldilmiş

$$u_1(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{S_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r,$$

$$u_2(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r$$

funksiyaları (3.1) tənliyinin

$$u_1\big|_{t=0}=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x,y,z)$$

və

$$u_2\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0$$

şərtlərini ödəyən həlləridir. Onda (3.1), (3.2), (3.3) məsələsinin həlli

$$u(x,y,z,t)=u_1(x,y,z,t)+u_2(x,y,z,t)$$

şəklində göstərilmiş olacaq.

Beləliklə, (3.1), (3.2), (3.3) məsələsinin həlli üçün

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{S_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r+\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\sigma_r \quad (3.10)$$

düsturunu alırıq. Bu düstura Koşi məsələsinin həlli üçün Kirxof düsturu deyilir.

Bu düstur dalğanın yayılmasındakı bəzi keyfiyyətləri müşahidə etməyə imkan verir.

Xüsusi halda, Kirxof düsturu göstərir ki, t anında $M(x,y,z)$ nöqtəsində Koşi məsələsinin həllinin qiyməti, başlanğıc funksiyaların ancaq mərkəzi bu nöqtədə olan at radiuslu S_{at} sferası üzərindəki qiymətlərindən asılıdır. Bu fakta səs nəzəriyyəsində Hyügens prinsipi deyilir.

Bunu daha aydın təsəffür etmək üçün fərz edək ki, başlanğıc həyəcanlanma ancaq hər hansı məhdud G oblastında mövcuddur, başqa sözlə φ və ψ funksiyyaları G oblastından kənarda eynilik kimi sıfırdırlar. Bu oblastın sərhəddini γ ilə işarə edək. Fərz edək ki, $M(x,y,z)$ nöqtəsi G oblastından kənarda yerləşən nöqtədir. Bu nöqtənin γ sərhəddindən olan ən böyük və ən kiçik məsafələrini L və l ilə işarə edək. Aydındır ki, $t<\dfrac{l}{a}$ şərtini ödəyən anlar üçün, S_{at} sferası G oblastı ilə kəsişmir və buna görə də $M(x,y,z)$

nöqtəsində hələ həyəcanlanma yoxdur. Yalnız $t = \dfrac{l}{a}$ anında həyəcanlanma M nöqtəsinə çatır. Buna dalğanın ön çəbhəsi deyilir. Bu andan başlayaraq $t = \dfrac{L}{a}$ anına qədər M nöqtəsində həyəcanlanma davam edəcək və yalnız $t = \dfrac{L}{a}$ anından sonra həyəcanlanma sönəcək, çünki G oblastı tamamilə S_{at} sferasının əhatə etdiyi şarın daxilində qalacaq və buna görə də $G \cap S_{at}$ boş çoxluq olacaq. Bu andan başlayaraq $u(x, y, z, t) = 0$ olacaq. Bu o deməkdir ki, M nöqtəsindən dalğa artıq keçmişdir (dalğanın arxa cəbhəsi).

Verilmiş t anında dalğanın ön cəbhəsi, həmin anda fəzada rəqs edən nöqtələrlə, hələlik rəqsə başlamamış nöqtələri ayıran səthdir. Bu səthin nöqtələri γ səthindən at məsafədədirlər. Başqa sözlə dalğanın ön cəbhəsi mərkəzi γ səthi üzərində olan at radiuslu sferaların qurşayanıdır.

Verilmiş t anında dalğanın arxa cəbhəsi, fəzada rəqs etməkdə davam edən nöqtələrlə, rəqsləri dayanmış nöqtələri ayıran səthdir.

Çıxardığımız (3.10) düsturunun köməyilə, fəza koordinatlarının sayı iki olan halda da, yəni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{3.11}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y), \tag{3.12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y) \tag{3.13}$$

məsələsinin də həllini ala bilərik.

Bu məqsədlə, fərz edək ki, (3.2), (3.3) şərtlərindəki başlanğıc funksiyaları z dəyişənindən asılı deyillər. Onda (3.10) düsturu ilə ifadə olunan funksiya da z dəyişənindən asılı olmayacaq

və alınan funksiya (3.11), (3.12), (3.13) məsələsinin həlli olacaq.

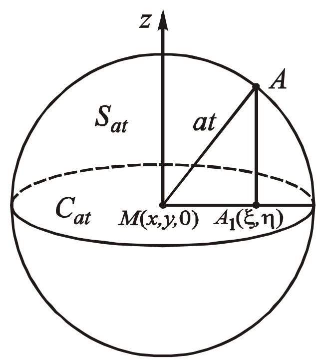
Həllin ifadəsini almaq üçün S_{at} sferası üzrə inteqralı bu sferanın xy müstəvisi üzərindəki C_{at} proyeksiyası üzrə inteqralla ifadə etmək lazımdır.

Aydındır ki, S_{at} sferasının yuxarı və aşağı yarımsferalarının xy müstəvisi üzərində proyeksiyaları mərkəzi $M(x, y, 0)$ nöqtəsində yerləşən at radiuslu dairədir. Sferanın radius vektorunun z oxu ilə əmələ gətirdiyi iti bucağı θ ilə işarə etsək, onda sferanın $d\sigma_{at}$ səth elementinin xy müstəvisi üzərindəki proyeksiyası

$$dC_{at} = \cos\theta \cdot d\sigma_{at} \tag{3.14}$$

olacaq.

Yuxarı (aşağı) yarımfəza üzərində götürülmüş A nöqtəsinin xy müstəvisi üzərindəki proyeksiyasını A_1 ilə işarə edək (şəkil 2). Onda



Şəkil 2.

$$\cos\theta = \frac{AA_1}{MA} = \frac{AA_1}{at}. \tag{3.15}$$

Əgər A_1 nöqtəsinin koordinatlarını (ξ, η) işarə etsək,

$$MA_1^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

olar və Pifaqor teoreminin köməyilə,

$$AA_1^2 = MA^2 - MA_1^2 = a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2$$

alarıq ki, burada da (3.14), (3.15) bərabərliklərindən istifadə etməklə

$$d\sigma_{at} = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\,C_{at}$$

taparıq. Bunu (3.10) düsturunda nəzərə alsaq, (3.11), (3.12), (3.13) məsələsinin həlli üçün

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \cdot \int_{C_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \qquad (3.16)$$

Puasson düsturunu alarıq.

Puasson düsturu göstərir ki, t anında (x, y) nöqtəsində həllin qiyməti, başlanğıc funksiyaların, mərkəzi bu nöqtədə olan at radiuslu çevrənin üzərindəki deyil, uyğun dairənin daxilindəki qiymətlərindən asılıdır. Başqa sözlə, fəza koordinatlarının sayı iki olan halda Hyugens prinsipi ödənmir.

İndi fəza koordinatlarının sayı bir olan halda, yəni simin rəqs tənliyi üçün

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x)$$

Koşi məsələsinə baxaq.

Başlanğıc ψ funksiyası ancaq x dəyişənindən asılı olan halda, (3.16) düsturunun sağ tərəfindəki birinci toplanan, $\xi - x = \xi_1$, $\eta - y = \eta_1$ əvəzləməsindən sonra

$$\frac{1}{2\pi a} \cdot \int_{-at}^{at} \psi(x+\xi_1)d\xi_1 \int_{-\sqrt{a^2t^2-\xi_1^2}}^{\sqrt{a^2t^2-\xi_1^2}} \frac{d\eta_1}{\sqrt{a^2t^2 - \xi_1^2 - \eta_1^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \cdot \int_{-at}^{at} \psi(x+\xi_1) \arcsin \frac{\eta_1}{\sqrt{a^2t^2 - \xi_1^2}} \Bigg|_{\eta_1 = -\sqrt{a^2t^2-\xi_1^2}}^{\eta_1 = \sqrt{a^2t^2-\xi_1^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \int_{-at}^{at} \psi(x+\xi_1)d\xi_1 = \frac{1}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau$$

şəklinə gələr. Eyni qayda ilə, φ funksiyası ancaq x dəyişənindən asılı olan halda, ikinci toplananı

$$\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\tau)d\tau = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(x-at)]$$

yaza bilərik. Onda simin rəqs tənliyi üçün Koşi məsələsinin həllini

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau$$

şəklində alarıq. Bu düstura simin rəqs tənliyi üçün Dalamber düsturu deyilir.

§4. Qeyri-bircins tənlik üçün Koşi məsələsi.

Aşağıdakı kimi qeyri-bircins

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,y,z,t), \qquad (4.1)$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \qquad (4.3)$$

Koşi məsələsinin həllini quraq. Bu məqsədlə köməkçi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \Delta v = 0\,, \qquad (4.4)$$

$$v\big|_{t=\tau} = 0\,, \qquad (4.5)$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(x,y,z,\tau) \qquad (4.6)$$

Koşi məsələsinə baxaq. Bu məsələ (3.1), (3.2), (3.3) məsələsindən onunla fərqlənir ki, burada başlantıc şərtlər $t=\tau$ anında verilmişdir, burada τ hər hansı parametrdir. Bu məsələnin həlli (3.10) düsturu ilə verilir, lakin t əvəzinə $t-\tau$ götürülməlidir

$$v(x,y,z,t,\tau) = \frac{1}{4a\pi} \int\limits_{S_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{r} d\sigma_r\,.$$

Buradan, $S_{a(t-\tau)}$ sferası üzərindəki nöqtələrin koordinatlarının

$$\xi = x + \alpha a(t-\tau), \quad \eta = y + \beta a(t-\tau), \quad \zeta = z + \gamma a(t-\tau)$$

olduğunu nəzərə alsaq, (4.4), (4.5), (4.6) məsələsinin həllini

$v(x,y,z,t,\tau) =$

$$= \frac{t-\tau}{4\pi} \cdot \int\limits_{S_1} f[x+\alpha a(t-\tau), y+\beta a(t-\tau), z+\gamma a(t-\tau), \tau] d\sigma_1\,, \qquad (4.7)$$

şəklində yaza bilərik, burada (α,β,γ) sferanın radius vektorlarının yönəldici kosinuslarıdır.

İndi göstərək ki, (4.7) düsturu ilə təyin olunmuş v funksiyasının köməyi ilə düzəldilmiş

$$u(x,y,z,t) = \int\limits_0^t v(x,y,z,t;\tau) d\tau \qquad (4.8)$$

funksiyası, (4.1), (4.2), (4.3) məsələsinin həllidir.

Doğrudan da, $u(x,y,z,0)=0$ və

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(x,y,z,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial v(x,y,z,t,\tau)}{\partial t} d\tau = \int\limits_0^t \frac{\partial v(x,y,z,t,\tau)}{\partial t} d\tau$$

bərabərliyindən göründüyü kimi ((4.5) şərti)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,,$$

yəni (4.8) düsturu ilə təyin olunan funksiya (4.2), (4.3) şərtlərini ödəyir.

Digər tərəfdən

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left.\frac{\partial v(x,y,z,t,\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau = f(x,y,z,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau$$

olduğundan və

$$\Delta u = \int\limits_0^t \Delta v(x,y,z,t,\tau) d\tau$$

bərabərliyindən

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,y,z,t) + \int\limits_0^t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \Delta v \right) d\tau = f(x,y,z,t)$$

alarıq, yəni (4.8) düsturunun təyin etdiyi

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t (t-\tau) \times$$

$$\times \int\limits_{S_1} f[x+\alpha a(t-\tau), y+\beta a(t-\tau), z+\gamma a(t-\tau), \tau] d\sigma_1 d\tau$$

funksiyası (4.1), (4.2), (4.3) məsələsinin həllidir. Burada $a(t-\tau) = r$ əvəzləməsi edək. Onda

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a} \int\limits_0^{at} \int\limits_{S_r} \frac{f(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r, t-r/a))}{r} d\sigma_r dr$$

yaza bilərik. Sferası S_{at} olan kürəni Ω_{at} ilə işarə etsək

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\Omega_{at}} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-r/a)}{r}d\xi d\eta d\zeta \qquad (4.9)$$

alarıq. Buna gecikmə potensialı deyilir. Bu ad ona əsaslanır ki, inteqrallama zamanı f funksiyasının qiyməti baxılan t anında deyil, dalğanın a sürəti ilə (ξ,η,ζ) nöqtəsindən (x,y,z) nöqtəsinə çatdığı zaman fərqi ilə götürülür.

İndi iki ölçülü fəza koordinatlı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(x,y,t)\,, \qquad (4.10)$$

$$u|_{t=0} = 0\,, \qquad (4.11)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad (4.12)$$

Koşi məsələsinin həllini quraq. Bunun üçün əvvəlcə, (3.16) düsturundan istifadə edərək, köməkçi

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} - a^2\Delta \upsilon = 0\,,$$

$$\upsilon|_{t=\tau} = 0\,,$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(x,y,\tau)$$

məsələsinin həllini

$$\upsilon(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{c_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}$$

şəklində quraq. Sonra isə, yuxarıda göstərdiyimiz kimi, köməkçi məsələnin həllindən istifadə etməklə, (4.10), (4.11), (4.12)

məsələsinin həllini

$$u(x,y,t) = \int\limits_0^t \upsilon(x,y,\tau)d\tau$$

bərabərliyi ilə tapa bilərik. Beləliklə, (4.10), (4.11), (4.12) məsələsinin həlli üçün

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t\int\limits_{S_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-r^2}}d\xi d\eta\,,$$

$$r^2 = (\xi-x)^2+(\eta-y)^2$$

düsturunu alarıq.

Analoji qayda ilə

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,,$$

$$u|_{t=0} = 0\,,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

məsələsinin həllini

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\,.$$

şəklində taparıq.

III FƏSİL.

DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏ.

§1. Dalğa tənliyi üçün qarışıq məsələlərin

həllinin yeganəliyi.

Tutaq ki, $\Omega \subset E_m$ ixtiyari məhdud oblast, Γ isə bu oblastın sərhəddidir. Sonlu $T > 0$ ədədi üçün $Q_T = \Omega \times [0,T]$ silindrində

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x,t) \tag{1.1}$$

dalğa tənliyi üçün aşağıdakı kimi məsələ qoyaq: Q_T silindri daxilində (1.1) tənliyinin elə həllini tapmalı ki, bu həll

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega \tag{1.3}$$

başlanğıc şərtlərini və silindrin $\sigma_T = \Gamma \times [0,T]$ yan səthi üzərində

$$u\big|_{\sigma_T} = \psi(x,t) \tag{1.4}$$

sərhəd şərtini ödəsin.

Bu məsələyə dalğa tənliyi üçün birinci qarışıq məsələ deyilir.

Əgər (1.4) şərti əvəzinə

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\sigma_T} = \psi(x,t) \tag{1.5}$$

sərhəd şərti verilərsə, məsələyə ikinci qarışıq məsələ deyilir, burada ν silindrin yan səthinə çəkilmiş normaldır.

Göstərək ki, qarışıq məsələlərin $u(x,t) \in C^2(Q_T) \cap C'(\overline{Q}_T)$ həlləri yeganədir. Bunu göstərmək üçün uyğun bircins $(f \equiv 0, \varphi_0 = \varphi_1 = \psi = 0)$ qarışıq məsələnin ancaq eynilik kimi sıfır həllinin olduğunu göstərmək kifayətdir.

Bilavasitə yoxlamaqla

$$2\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,$$

$$2\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

eyniliklərini isbat etmək olar. Bu eyniliklərin köməyilə

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2 \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] -$$

$$-2a^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{1.6}$$

bərabərliyini yaza bilərik. İxtiyari $0 < \tau < T$ ədədi götürək və (1.6) bərabərliyinin hər tərəfini $Q_\tau = \Omega \times [0,\tau]$ silindri oblastı üzrə inteqrallayaq. Bu zaman Qrin düsturunun köməyilə

$$\int_{Q_\tau} 2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right) dx dt =$$

$$= \int_{S_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2 \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] \cos(\nu,t) dS_\tau -$$

$$-2a^2 \int_{S_\tau} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu,x_k) dS_\tau \tag{1.7}$$

alarıq, burada $S_\tau = \sigma_\tau \cup \Omega \cup \Omega_\tau$ ilə Q_τ oblastının sərhəddi, Ω_τ ilə silindrin $t = \tau$ müstəvisi ilə kəsiyi, ν ilə isə silindrin S_τ səthinə çəkilən xarici normal işarə olunmuşdur.

Silindrin yan σ_τ səthi üzrə $\cos(\nu,t) = 0$, Ω və Ω_τ oturacaqları üzrə isə $\cos(\nu,t)$, uyğun olaraq, -1 və 1-ə bərabər olmaqla, $\cos(\nu,x_k) = 0$, $k = 1,2,\ldots,m$.

Bunları və həmçinin $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)=\frac{\partial u}{\partial x}$ olduğunu, (1.7) bərabərliyində nəzərə alsaq, onda bircins tənliyin həlləri üçün

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right]dx=\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right]dx+$$

$$+2a^2\int_{\sigma_\tau}\frac{\partial u}{\partial t}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,x_k)d\sigma_\tau \qquad (1.8)$$

bərabərliyini alarıq.

Əgər $u(x,t)$ funksiyası bircins başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyirsə, (1.8) bərabərliyindən

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right]dx=0$$

alınar. Bu isə o deməkdir ki, istənilən $0<\tau<T$ üçün $u(x,\tau)\equiv const$. Lakin $u(x,0)=0$ olduğundan, $u(x,t)\equiv 0$ olduğunu alarıq. Bununla qarışıq məsələlərin həllinin yeganəliyi isbat olunur.

§2. Simin sərbəst rəqsi üçün birinci qarışıq məsələnin Furye metodu ilə həlli.

Furye metodu və ya dəyişənlərinə ayırma metodu adlanan aşağıda təsvir olunan metod daha ümumi tənliklərə tətbiq oluna bilər. Lakin bu metodun mahiyyətini daha qabarıq nümayiş etdirmək məqsədilə, sadə tənlik olan simin rəqs tənliyi üçün aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (2.1)$$

tənliyinin

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\quad 0\le x\le l \qquad (2.3)$$

başlanğıc və

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad (2.4)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllini tapın.

Məsələnin həllini, biri ancaq x, o biri isə ancaq t dəyişənindən asılı olan iki funksiyanın hasili

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad (2.5)$$

şəklində axtaraq. Bu şəkildə axtarılan funksiyanın (2.1) tənliyinin həlli olması üçün

$$T''(t)X(x)=a^2X''(x)T(t)$$

və ya

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

bərabərliyi ödənməlidir. Bu bərabərliyin sol tərəfi ancaq t, sağ tərəfi isə ancaq x dəyişənindən asılıdır. Bu isə o vaxt mümkün olar ki, sağ və sol tərəflər sabit olsunlar. Bu sabiti λ ilə işarə edək. Onda $X(x)$ və $T(t)$ funksiyaları üçün

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \qquad (2.6)$$

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \qquad (2.7)$$

tənliklərini alarıq.

Sərhəd şərtlərini (2.5)-də nəzərə alsaq,

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0$$

$$u(l,t)=X(l)T(t)=0$$

bərabərliklərini alarıq. Əgər $T(t)\equiv 0$ olarsa, onda (2.5) münasıbətindən $u(x,t) \equiv 0$ alarıq, bu isə qeyri bircins (2.2), (2.3) şərtləri üçün qoyulmuş məsələnin həlli deyil. Ona görə də eynilik kimi sıfır olmayan $u(x,t)$ funksiyasını axtarmalıyıq. Bu məqsədlə (2.6) tənliyinin

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{2.8}$$

sərhəd şərtlərini ödəyən və eynilik kimi sıfır olmayan həllərini tapmaq lazım gəlir. Bu cür məsələyə, yəni (2.6) tənliyinin (2.8) sərhəd şərtlərini ödəyən və eynilik kimi sıfır olmayan həllərinin tapılması məsələsinə Şturm-Liuvill məsələsi deyilir.

Parametrin, (2.6), (2.8) məsələsinin eynilik kimi sıfır olmayan həllərinin varlığını təmin edən λ_k qiymətlərinə məxsusi qiymətlər, həmin həllərə isə λ_k məxsusi qiymətinə uyğun məxsusi həllər və ya məxsusi funksiyalar deyilir.

Məsələnin məxsusi qiymət və məxsusi funksiyalarını tapmaqla məşğul olaq. Bunun üçün müxtəlif hallara baxaq.

1. $\lambda < 0$. Bu halda, (2.6) tənliyinin ümumi həlli

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

şəklindədir, burada c_1 və c_2 ixtiyari sabitlərdir. Bu sabitləri elə seçək ki, (2.8) şərtləri ödənsin

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0.$$

Alınan bircins sistemin əsas determinantı sıfırdan fərqli olduğundan sistemin ancaq $c_1 = c_2 = 0$ həlli var, buradan $X(x) \equiv 0$. Deməli, $\lambda < 0$ qiymətləri məxsusi qiymətlər deyil.

2. $\lambda = 0$. Bu halda (2.6) tənliyinin ümumi həlli

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

şəklindədir. Sərhəd şərtlərini ödətsək,

$$c_1 + c_2 \cdot 0 = 0,$$

$$c_1 + c_2 l = 0$$

sistemini alarıq. Buradan $c_1 = c_2 = 0$, yəni bu halda da, $X(x) \equiv 0$.

3. $\lambda > 0$. Bu halda (2.6) tənliyinin ümumi həlli

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$$

şəklində olur. Sərhəd şərtlərini ödətməklə, c_1, c_2 sabitləri üçün

$$c_1 + c_2 \cdot 0 = 0,$$

$$c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,l + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$$

sistemini alarıq. Buradan $c_1 = 0$, $c_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$ alınar. $c_2 = 0$ olsa idi, yenə $X(x) \equiv 0$ alardıq. Ona görə də, $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, buradan da $\sqrt{\lambda} = \dfrac{k\pi}{l}$ olar. Beləliklə,

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

məxsusi qiymətlərini alarıq. Bu məxsusi qiymətlərə (sabit vuruq dəqiqliyi ilə)

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

məxsusi funksiyaları uyğundur.

Parametrin $\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2$ qiymətlərində (2.7) tənliyinin ümumi həlli

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

şəklində olur, burada A_k, B_k – ixtiyari sabitlərdir.

Beləliklə, alırıq ki,

$$u_k(x,t) = X_k(t)T_k(t) = (A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

şəklində götürülmüş funksiyalar, ixtiyari A_k, B_k sabitləri və $k = 1,2,3,\ldots$ üçün, (2.1) tənliyini və (2.4) sərhəd şərtlərini ödəyirlər.

Bu həllərin köməyi ilə formal

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at)\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (2.9)$$

funksiyası düzəldək. Əgər bu bərabərliyin sağ tərəfindəki sıra və bu sıranın x və t dəyişənlərinə nəzərən iki dəfə hədbəhəd diferensiallanmasından alınan sıralar müntəzəm yığılırlarsa, onda bu sıranın cəmi olan $u(x,t)$ funksiyası, (2.1) tənliyini və (2.4) sərhəd şərtlərini ödəməlidir. İxtiyari A_k, B_k sabitlərini elə seçməyə çalışaq ki, (2.2) və (2.3) şərtləri ödənsin. Bu şərtləri ödətməklə

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} B_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x), \quad (2.11)$$

alarıq. Fərz edək ki, $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları $(0,l)$ intervalında sinuslar üzrə Furye sırasına ayrılırlar:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

burada φ_k, ψ_k Furye əmsalları

$$\varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi, \quad k = 1,2,\ldots \quad (2.12)$$

$$\psi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi, \quad k = 1,2,\ldots \quad (2.13)$$

düsturları ilə təyin olunurlar.

Furye ayrılışlarını (2.10) və (2.11)-də nəzərə alsaq, ixtiyari sabitləri

$$A_k = \varphi_k,$$

$$B_k = \frac{l}{ak\pi}\psi_k, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

şəklində taparıq. Bunları (2.9) ifadəsində nəzərə alsaq, (2.1), (2.2), (2.3) qarışıq məsələsinin həlli üçün

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k \cos\frac{k\pi}{l}at + \frac{l}{ak\pi}\psi_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (2.14)$$

düsturunu alarıq.

Beləliklə, göstərdik ki, əgər (2.14) bərabərliyinin sağ tərəfindəki sıra və bu sıranın t və x dəyişənlərinə nəzərən iki dəfə hədbəhəd diferensiallamasından alınan sıralar

$$u_{tt} \sim -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2\left(\varphi_k \cos\frac{k\pi}{l}at + \frac{l}{ak\pi}\psi_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (2.15)$$

$$u_{xx} \sim -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left(\varphi_k \cos\frac{k\pi}{l}at + \frac{l}{ak\pi}\psi_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \quad (2.16)$$

müntəzəm yığılandırsa, onda (2.14) düsturu ilə ifadə olunan funksiya qoyulmuş qarışıq məsələnin həllidir.

Fərz edək ki, $\varphi(x)$ iki tərtib kəsilməz, üçüncü tərtibi isə hissə-hissə kəsilməz törəmələrə malik olmaqla,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0 \quad (2.17)$$

şərtlərini, $\psi(x)$ isə bir tərtib kəsişməz, ikinci tərtibi isə hissə-hissə kəsilməz törəmələrə malik olmaqla,

$$\psi(0)=\psi(l)=0 \tag{2.18}$$

şərtlərini ödəyən funksiyalardır.

Bu şərtlər daxilində φ_k, ψ_k Furye əmsallarının (2.12), (2.13) bərabərlikləri ilə təyin olunan ifadələrini, ardıcıl olaraq hissə-hissə inteqrallamaqla

$$\varphi_k=-\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 a_k\,, \tag{2.19}$$

$$\psi_k=-\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 b_k \tag{2.20}$$

şəklinə gətirmək olar, burada

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi'''(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\,,\quad k=1,2,\ldots$$

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi''(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\,,\quad k=1,2,\ldots\ .$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, (2.15), (2.16) sıralarının müntəzəm yığılanlığını göstərmək əvəzinə,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2\,|\,\varphi_k\,|\quad \text{və}\quad \sum_{k=1}^{\infty}k^2\,|\,\psi_k\,| \tag{2.21}$$

sıralarının yığılanlığını göstərmək kifayətdir.

Furye əmsalları üçün (2.19) və (2.20) düsturlarını nəzərə alsaq, görərik ki, (2.21) sıralarının yığılanlığı, öz növbəsində,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,|\,a_k\,|\quad \text{və}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,|\,b_k\,|$$

sıralarının yığılanlığı ilə təmin olunur. Axırıncı sıraların yığılanlığı isə

$$\frac{1}{k}\,|\,a_k\,|\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+|\,a_k\,|^2\right),$$

$$\frac{1}{k}\,|\,b_k\,|\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+|\,b_k\,|^2\right)$$

bərabərsizliklərindən alınır, çünki a_k və b_k hissə-hissə kəsilməz $\varphi'''(x)$ və $\psi''(x)$ funksiyalarının Furye əmsallarıdırlar və buna görə də

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|^2\quad \text{və}\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\,b_k\,|^2$$

sıraları yığılandırlar.

Bütün bu deyilənləri aşağıdakı kimi yekunlaşdıra bilərik.

Əgər (2.2) və (2.3) başlanğıc şərtlərindəki $\varphi(x)$ və $\psi(x)$ funksiyaları yuxarıda deyilən hamarlıqlara malik olmaqla, (2.17) və (2.18) şərtlərini ödəyirlərsə, onda (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) qarışıq məsələsinin həlli (2.14) sırası şəklində göstərilir. Bu sıra özü və onun x və t dəyişənlərinə nəzərən iki dəfə hədbəhəd diferensiallanmasından alınan (2.15), (2.16) sıraları müntəzəm yığılırlar.

§3. Ucları bərkidilmiş simin məcburi rəqsi.

Başlanğıc vəziyyəti və başlanğıc sürəti məlum olan, ucları bərkidilmiş l uzunluqlu simin xarici qüvvə təsiri altında rəqsinin öyrənilməsi, riyazi olaraq,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \tag{3.1}$$

tənliyinin

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{3.3}$$

başlanğıc və

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{3.4}$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə gətirilir.

Məsələnin həllini

$$u = \upsilon + w \tag{3.5}$$

şəklində axtaraq, burada $\upsilon(x,t)$, qeyri-bircins (3.1) tənliyinin bircins

$$\upsilon(x,0) = 0\,, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \upsilon(x,0)}{\partial t} = 0 \tag{3.7}$$

başlanğıc və

$$\upsilon(0,t) = \upsilon(l,t) = 0 \tag{3.8}$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həlli, $w(x,t)$ isə bircins

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

tənliyinin qeyri-bircins

$$w(x,0) = \varphi(x)\,, \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$$

başlanğıc və

$$w(0,t) = w(l,t) = 0$$

sərhəd şərtlərini ödəyən həllidir.

Biz keçən paraqrafda bu cür $w(x,t)$ funksiyasını qurmuşuq və onun üçün

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{k\pi}{l} at + \frac{l}{ak\pi} \psi_k \sin \frac{k\pi}{l} at \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

düsturunu almışdıq. Beləliklə, (3.1)-(3.4) məsələsinin həlli

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{3.9}$$

tənliyinin bircins (3.6), (3.7) və (3.8) şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə gətirilir. Bu sonuncu məsələnin həllini

$$\upsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{3.10}$$

şəklində axtaraq. Aydındır ki, əgər (3.10) sırası müntəzəm yığılırsa, onda (3.10) bərabərliyi ilə təyin olunan funksiya (3.8) sərhəd şətlərini ödəyir. Buradakı $T_k(t)$ funksiyalarını elə seçək ki, $\upsilon(x,t)$ funksiyası (3.9) tənliyi və (3.6), (3.7) başlanğıc şərtlərini ödəsin. Uyğun törəmələri hesablayıb (3.9) tənliyində yerinə yazsaq

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 T_k(t) \right] \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x,t) \tag{3.11}$$

alarıq. Tutaq ki, $f(x,t)$ funksiyası $[0,l]$ parçasında x dəyişəninə nəzərən sinuslar üzrə Furye sırasına ayrılır

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x\,, \tag{3.12}$$

burada Furye əmsalları

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi\,, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

düsturu ilə hesablanır.

Eyni bir $f(x,t)$ funksiyasının (3.11) və (3.12) Furye ayrılışlarını müqaisə etsək, $T_k(t)$ funksiyaları üçün

$$T_k'' + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k = f_k\,, \quad k = 1,2,\ldots \qquad (3.13)$$

tənliklərini alarıq.

Sərhəd şərtlərini ödətməklə, $T_k(t)$ funksiyaları üçün əlavə

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0, \quad k = 1,2,\ldots \qquad (3.14)$$

şərtlərini alarıq. Alınan (3.13) tənliyinin ümumi həllini yazıb, (3.14) şərtlərini ödətsək, (3.13), (3.14) məsələsinin həllini

$$T_k(t) = \frac{l}{k\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

şəklində taparıq. Bunu (3.10) ifadəsində yerinə yazsaq, (3.9), (3.6), (3.7), (3.8) məsələsinin həlli üçün

$$\upsilon(x,t) = \frac{l}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)d\tau\sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (3.15)$$

düsturunu alarıq.

Göstərmək olar ki, əgər $f(x,t)$ funksiyası x dəyişəninə nəzərən iki dəfə kəsilməz törəmələrə malikdirsə və

$$f(0,t) = f(l,t) = 0$$

şərtlərini ödəyirsə, onda (3.15) sırası və bu sıranın t və x dəyişənlərinə nəzərən iki dəfə diferensiallanmasından alınan sıralar müntəzəm yığılırlar.

Beləliklə, (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) məsələsinin həlli (3.5) şəklində göstərilir, burada $w(x,t)$ sərbəst simin rəqsini ifadə edir, $\upsilon(x,t)$ isə (3.15) düsturu ilə ifadə olunur.

IV FƏSİL.

İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ.

§1. İstilikkeçirmə tənliyinin xarakteristikaları.

Tutaq ki, $n+1$ dəyişənli

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x,t) \qquad (1.1)$$

tənliyi verilmişdir. Əgər istənilən $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \neq 0$ vektoru üçün

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \qquad (1.2)$$

şərti ödənilirsə, onda (1.1) tənliyinə istilikkeçirmə tənliyi deyilir.

Aydındır ki, istilikkeçirmə tənliyi parabolik tənlikdir. Bu tənliyin xarakteristik tənliyi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = 0$$

şəklindədir. (1.2) şərtindən görünür ki, $\omega(x,t) = const$ xarakteristik səthdirsə, onda $\frac{\partial\omega}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1,n}$ şərtləri ödənməlidir. Bu isə o deməkdir ki, xarakteristik səthin tənliyi ancaq t-dən asılıdır, yəni $\omega = \omega(t)$. Əgər $\omega'(t) \not\equiv 0$ isə, onda bu şərti ödəyən istənilən intervalda $\omega(t) = const$ tənliyini t-yə nəzərən həll edərək, $t = const$ alarıq.

Beləliklə, alırıq ki, istilikkeçirmə tənliyinin xarakteristikaları t oxuna ortoqonal olan n ölçülü müstəvilərdir.

§2. İstilikkeçirmə tənliyi üçün maksimum prinsipi.

Aşağıdakı kimi sadə istilikkeçirmə tənliyinə baxaq

$$\mathrm{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad (2.1)$$

burada a_{ij} əmsallrı $x_1,\ldots,x_n$ dəyişənlərindən asılı kəsilməz diferensiallanan funksiyalardır.

Tutaq ki, $t=0$ müstəvisində sərhəddi Γ olan məhdud $\Omega \subset E_n$ oblastı verilmişdir. Yönəldicisi Γ və doğuranları t oxuna paralel olan silindr quraq. Bu silindirn $t=0$ və $t=T$ müstəviləri arasında qalan hissəsini Q_T ilə, silindrik səthi B_T ilə, silindrin $t=T$ müstəvisində yerləşən oturacağını isə Ω_T ilə işarə edək.

Tutaq ki, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ dəyişənləri fəzasında hər hansı oblastı verilmişdir. Bu oblastda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dəyişənlərinə nəzərən p tərtib, t dəyişəninə nəzərən isə q tərtib kəsilməz törəmələri olan funksiyalar sinfini $C^{(p,q)}(D)$ ilə işarə edək.

İndi istilikkeçirmə tənliyi üçün maksimum prinsipini söyləyə bilərik:

Tutaq ki, $C(\overline{Q}_T) \cap C^{(2,1)}(Q_T \cup \Omega_T)$ kəsişməsinə daxil olan $u(x,t)$ funksiyası (2.1) tənliyinin həllidir. Onda qapalı $\overline{Q}_T$ oblastında $u(x,t)$ özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini $\Omega \cup B_T$ səthi üzərində alır.

Aydındır ki, $u(x,t)$ funksiyası hər hansı nöqtədə özünün ən böyük qiymətini alırsa, onda $-u(x,t)$ funksiyası həmin nöqtədə özünün ən kiçik qiymətini alacaq. Ona görə də prinsipi ancaq maksimum halı üçün isbat etmək kifayətdir.

Yeni işarələr qəbul edək:

$$M = \max_{\overline{Q}_T} u(x,t), \qquad m = \max_{\Omega \cup B_T} u(x,t).$$

Maksimum prinsipini isbat etmək, $M = m$ olduğunu göstərmək deməkdir.

Fərz edək ki, maksimum prinsipi doğru deyil. Onda $M > m$ olmalıdır. Qapalı $\overline{Q}_T$ oblastında kəsilməz olan $u(x,t)$ funksiyası hər hansı (x_0, t_0) nöqtəsində özünün ən böyük qiymətini alır, $u(x_0,t_0) = M$. Onda, fərziyyəyə görə, bu (x_0,t_0) nöqtəsi ya Q_T oblastının daxili nöqtəsidir, ya da Ω_T üzərindədir.

Köməkçi

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{2T}(t_0 - t)$$

funksiyası təyin edək. Aşkardır ki,

$$v(x,t)\big|_{\Omega \cup B_T} \le m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M.$$

Digər tərəfdən, $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M$. Bu o deməkdir ki, $v(x,t)$ funksiyası özünün ən böyük qiymətini $\Omega \cup B_T$ üzərində almır. Onda Q_T oblastı daxilində, ya da Ω_T üzərində elə $(\overline{x}, \overline{t})$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə $v(x,t)$ özünün ən böyük qiymətini alır.

Əvvəlcə fərz edək ki, $(\overline{x}, \overline{t}) \in Q_T$. Ortoqonal koordinat oxlarının istənilən vəziyyətində bu nöqtədə maksimum üçün zəruri şərtlər ödənməlidir:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \le 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Bunları nəzərə almaqla, $(\overline{x}, \overline{t})$ nöqtəsində

$$\mathrm{L}v\big|_{(\overline{x},\overline{t})} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{(\overline{x},\overline{t})}$$

taparıq.

Ortoqonal koordinat oxlarını elə seçmək olar ki, simmetrik və müsbət müəyyən a_{ij} matrisi diaqonal şəklə gəlsin və bu zaman $a_{ii}(\bar{x}) > 0,\ a_{ij}(\bar{x}) = 0,\ i \neq j$ olsun.

Onda bir tərəfdən

$$\mathrm{L}v\big|_{(\bar{x},\bar{t})} \geq 0,$$

digər tərəfdən isə

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u + \frac{M-m}{2T}\mathrm{L}(t_0 - t) = -\frac{M-m}{2T} < 0 \qquad (2.2)$$

alarıq. Bu ziddiyyət göstərir ki, $(\bar{x},\bar{t})$ nöqtəsi Q_T-nin daxili nöqtəsi ola bilməz.

İndi $(\bar{x},\bar{t}) \in \Omega_T$ halına baxaq. Bu o deməkdir ki, $\bar{t} = T$ nöqtəsi $(0,T)$ intervalının sərhəd nöqtəsi, $\bar{x}$ isə Ω-nin daxili nöqtəsidir. Buna görə də $(\bar{x},\bar{t})$ nöqtəsində maksimum şərti

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

olacaq. Onda, yenə də

$$\mathrm{L}v\big|_{(\bar{x},\bar{t})} = \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{(\bar{x},\bar{t})} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \geq 0$$

alarıq ki, bu da (2.2) ilə ziddiyyət təşkil edir. Bu ziddiyyət göstərir ki, $(\bar{x},\bar{t})$ nöqtəsi Ω_T-yə daxil ola bilməz. Yuxarıda göstərmişdik ki, bu nöqtə Q_T-nin daxili nöqtəsi də ola bilməz. Deməli, $m < M$ fərziyyəsi doğru deyil, yəni $M = m$ olmalıdır. Maksimum prinsipi isbat olur.

§3. İstilikkeçirmə tənliyi üçün qarışıq məsələlərin həllinin yeganəliyi.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x,t) \qquad (3.1)$$

Yuxarıdakı paraqrafda təsvir olunan Q_T silindrini quraq və oradakı işarələri qəbul edək. İndi (3.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi məsələyə baxaq: Q_T silindri daxilində (3.1) tənliyinin elə həllini tapmalı ki, o həll

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega \qquad (3.2)$$

başlanğıc şərtini və silindrin B_T yan səthi üzərində

$$u\big|_{B_T} = \psi(x,t) \qquad (3.3)$$

sərhəd şərtini ödəsin.

Bu məsələyə istilikkeçirmə tənliyi üçün birinci qarışıq məsələ deyilir.

İstilikkeçirmə tənliyi üçün yuxarıda isbat olunan maksimum prinsipindən bilavasitə çıxır ki, birinci qarışıq məsələnin $C(\overline{Q}_T) \cap C^{(2,1)}(Q_T \cup \Omega_T)$ sinfinə daxil olan həlli yeganədir.

Əgər (3.3) sərhəd şərti əvəzinə

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{B_T} = \psi(x,t) \qquad (3.3')$$

və ya

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u\right]_{B_T} = \psi(x,t), \quad \alpha \geq 0 \qquad (3.3'')$$

sərhəd şərtləri götürsək, alınan (3.1), (3.2), (3.3′) və (3.1), (3.2), (3.3″) məsələlərinə, uyğun olaraq, istilikkeçirmə tənliyi üçün ikinci və üçüncü qarışıq məsələlər deyilir, burada ν səthə çəkilmiş xarici normaldır.

Qarışıq məsələlərin həllərinin yeganəliyini göstərək. Bunun üçün bircins

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (3.1_0)$$

tənliyinin bircins başlanğıc $(\varphi \equiv 0)$ və bircins sərhəd $(\psi \equiv 0)$ şərtlərini ödəyən həllərinin eynilik kimi sıfır olduğunu göstərmək kifayətdir. Bu məqsədlə, aşağıdakı kimi funksiya təyin edək

$$J(t) = \int_{\Omega} u^2(x,t)dx .$$

Onda (3.1_0) tənliyinin həlləri üçün

$$J'(t) = 2\int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial t} dx = 2a^2 \int_{\Omega} u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx =$$

$$= 2a^2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx - 2a^2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Sağ tərəfdəki birinci inteqrala Qrin düsturunu tətbiq etsək,

$$J'(t) = 2a^2 \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d_{\xi}\Gamma - 2a^2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

alarıq, burada Γ Ω oblastının sərhəddidir. Birinci və ikinci qarışıq məsələlər üçün sağ tərəfdəki birinci toplanan sıfır, üçüncü qarışıq məsələ üçün isə

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d_{\xi}\Gamma = -\int_{\Gamma} \alpha u^2 d_{\xi}\Gamma \le 0$$

olduğundan, hər üç qarışıq məsələ üçün $J'(t) \le 0$ alırıq. Digər tərəfdən, bircins (3.2) şərtinə əsasən, $J(0) = 0$, buradan da $J(t) \equiv 0$ alarıq ki, bu da $u(x,t) \equiv 0$ deməkdir.

§4. İstilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsi. Həllin yeganəliyi.

Aşağıdakı kimi Koşi məsələsinə baxaq: Verilmiş

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \qquad (4.1)$$

tənliyinin $x \in E_n$, $t > 0$ oblastınada elə həllini tapmalı ki, o həll

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in E_n \qquad (4.2)$$

başlanğıc şərtini ödəsin.

Məsələnin həlli üçün aşağıdakı yeganəlik teoremi doğrudur: Qoyulmuş Koşi məsələsinin $C(E_n \times [0,\infty)) \cap C^{(2,1)}(E_n \times (0,\infty))$ sinfinə daxil olan məhdud həlli varsa, yeganədir.

Teoremi isbat etmək üçün göstərək ki,

$$Lw \equiv \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 , \qquad (4.3)$$

$$w|_{t=0} = 0 \qquad (4.4)$$

məsələsinin məhdud həlli $|w| \le M$, ancaq $w \equiv 0$ ola bilər.

Fərz edək ki, E_{n+1} evklid fəzasının $t = 0$ müstəvisində yerləşən və mərkəzi koordinat başlanğıcında olan R radiuslu Ω_R kürəsi verilmişdir. Bu kürənin səthini S_R-lə işarə edək. Yönəldicisi S_R səthi, doğuranları isə t oxuna paralel olan silindrik səthi quraq. Bu səthin $t > 0$ hissəsini B ilə, sərhəddi $\Omega_R \cup B$ olan silindri isə Q_R ilə işarə edək.

Köməkçi

$$v_R(x,t)=\frac{2Mn}{R^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}+t\right)$$

funksiyasını quraq. Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, bu funksiya bircins (4.3) tənliyini ödəyir, $Lv_R=0$. Aşkar

$$v_R\big|_{t=0}=\frac{M\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{R^2}\ge 0$$

bərabərsizliyindən və (4.4) şərtindən

$$v_R\big|_{t=0}\ge |\,w\,\|_{t=0}$$

alırıq. Silindrin yan şərhi üzərində $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=R^2$ olduğundan

$$v_R\big|_B=M+\frac{2Mn}{R^2}t\ge M\ge |\,w\,\|_B\,.$$

Axırıncı bərabərsizlikləri bir yerdə

$$v_R\big|_{\Omega_R\cup B}\ge |\,w\,|_{\Omega_R\cup B}$$

yaza bilərik. Digər tərəfdən

$$L(v_R\pm w)=Lv_R\pm Lw=0\,.$$

Beləliklə, alırıq ki, bircins istikkeçirmə tənliyinin həlləri olan $v_R\pm w$ funksiyaları $\Omega_R\bigcup B$ səthi üzərində mənfi deyillər. Onda maksimum prinsipinə görə, Q_R silindrinin daxilində də $v_R\pm w\ge 0$ olar. Başqa sözlə,

$$|\,w\,|\le v_R=\frac{2Mn}{R^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}+t\right).$$

Burada x və t -ni ixtiyari qeyd edək və $R\to\infty$ şərtilə limitə

keçək. Onda alırıq ki, $|\,w\,|\le 0$, yəni $w\equiv 0$. Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyi isbat olur.

§5. Koşi məsələsinin həlli üçün Puasson düsturunun çıxarılışı.

İndi

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(x,t) \qquad (5.1)$$

qeyri-bircins istilikkeçirmə tənliyinin

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in E_n \qquad (5.2)$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllini quraq.

Bu məqsədlə, istilikkeçirmə tənliyinin fundamental həlli adlanan

$$v(x-y,t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\,)^n}\,e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}\,, & t>\tau \ \text{ олдугда},\\[2ex] 0\ , & t\le\tau \ \text{ олдугда},\end{cases}$$

funksiyasını daxil edək, burada $r=|\,x-y\,|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.

Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, $t\ne\tau,\ x\ne y$ nöqtələri üçün v funksiyası

$$Lu=\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta_x v=0$$

və

$$Mv\equiv-\frac{\partial v}{\partial\tau}-\Delta_y v=0$$

tənliklərini ödəyir.

İxtirari $x \in E_n$ nöqtəsi götürək. Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan elə R radiuslu Ω_R kürəsi götürək ki, x nöqtəsi bu kürənin daxilində yerləşsin. Yönəldicisi bu kürənin S_R səthi, doğrulanları E_n fəzasına ortoqonal olan τ oxuna paralel olan silindri quraq. Bu silindrin $\tau = 0$ və $\tau = t - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < t$ müstəviləri arasında qalan hissəsini $Q_t^{(\varepsilon)}$, onun yan səthini $B_t^{(\varepsilon)}$, silindrin $\tau = t - \varepsilon$ müstəvisindən ayırdığı kürəni isə $\Omega_R^{(\varepsilon)}$-la işarə edək. Onda aydındır ki, $Q_t^{(\varepsilon)}$ oblastının sərhəddi $\Omega_R \cup B_t^{(\varepsilon)} \cup \Omega_R^{(\varepsilon)} \equiv \Gamma_R^{(\varepsilon)}$ birləşməsindən ibarət olacaq.

Tutaq ki, $u(y,\tau) \in C^{(2,1)}(E_n \times [0,\infty))$ olmaqla, özü və $\dfrac{\partial u}{\partial y_i}$, $i = \overline{1,n}$ törəmələri məhdud olan ixtiyari funksiyadır.

Aşkar

$$vLu - uMv = v\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta u\right) - u\left(-\frac{\partial v}{\partial \tau} - \Delta v\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}(uv) - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i} - u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)$$

eyniliyini $Q_t^{(\varepsilon)}$ oblastı üzrə inteqrallayaq və sağ tərəfə Qrin düsturunu tətbiq edək. Bu zaman u funksiyası olaraq yuxarıda deyilən sinfə daxil olan funksiya, v olaraq istilikkeçirmə tənliyinin fundamental həllini götürək. Onda

$$\int_{Q_t^{(\varepsilon)}} v(x-y,t-\tau)Lu(y,\tau)dyd\tau = \int_{\Gamma_R^{(\varepsilon)}} uv(x-y,\tau)\cos(\nu,\tau)d\Gamma_R^{(\varepsilon)} -$$

$$- \int_{\Gamma_R^{(\varepsilon)}} \sum_{i=1}^{n}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i} - u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\cos(\nu, y_i)d\Gamma_R^{(\varepsilon)}, \qquad (5.3)$$

burada ν ilə $\Gamma_R^{(\varepsilon)}$ səthinə çəkilmiş xarici normal işarə edilmişdir. Aşkardır ki,

Ω_R üzərində $\cos(\nu,\tau) = -1$, $\cos(\nu, y_i) = 0$;

$\Omega_R^{(\varepsilon)}$ üzərində $\cos(\nu,\tau) = 1$, $\cos(\nu, y_i) = 0$;

$B_R^{(\varepsilon)}$ üzərində $\cos(\nu,\tau) = 0$.

Bunları axırıncı bərabərlikdə nəzərə almaqla, $\varepsilon \to 0$ şərtilə limitə keçək. Bu zaman $Q_t^{(\varepsilon)}$ və $B_t^{(\varepsilon)}$ üzrə inteqralların limitləri uyğun olaraq, Q_t və B_t üzrə inteqrallar olacaq, buna görə də

$$\int_{Q_t} v(x-y,t-\tau)Lu(y,\tau)dyd\tau = -\int_{\Omega_R} v(x-y,t)u(y,0)dy -$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_R^{(\varepsilon)}} v(x-y,\varepsilon)u(y,t-\varepsilon)dy -$$

$$- \int_{B_t}\sum_{i=1}^{n}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i} - u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\cos(\nu, y_i)dS_R d\tau, \qquad (5.3)$$

bərabərliyini yaza bilərik.

İndi $\Omega_R^{(\varepsilon)}$ üzrə inteqralın limitini hesablayaq, qeyd edək ki, bu zaman $\Omega_R^{(\varepsilon)}$ əvəzinə Ω_R yazmaq olar.

$$\int_{\Omega_R} v(x-y,\varepsilon)u(y,t-\varepsilon)dy = \frac{1}{2^n(\pi\varepsilon)^{n/2}}\int_{\Omega_R} u(y,t-\varepsilon)e^{-\frac{r}{4\varepsilon}}dy =$$

$$= \frac{1}{2^n(\pi\varepsilon)^{n/2}}\left(\int_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} + \int_{\Omega_R\setminus(r<\sqrt[4]{t})}\right)u(y,t-\varepsilon)e^{-\frac{r^2}{4t}}dy \equiv J_{1\varepsilon} + J_{2\varepsilon}. \quad (5.4)$$

Şərtə görə $u(y,\tau)$ funksiyası məhdud olduğundan, $|u| \le M$,

$$J_{2\varepsilon} \le \frac{M}{2^n(\pi\varepsilon)^{n/2}} \int\limits_{r>\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dy .$$

Burada

$$y_i = x_i + 2\sqrt{\varepsilon}\, z_i , \quad i = 1,2,\dots,n$$

əvəzləməsi edək. Onda

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 2\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i^2} = 2\sqrt{\varepsilon} \cdot |\, z \,|,$$

$$dy = dy_1 dy_2 \dots dy_n = 2^n \varepsilon^{n/2} dz_1 dz_2 \cdots dz_n = 2^n \varepsilon^{n/2} dz$$

olduğundan

$$J_{2\varepsilon} \le \frac{M}{\pi^{n/2}} \cdot \int\limits_{|z|>\frac{1}{2\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-|z|^2} dz$$

alarıq. Bu bərabərsizliyin sağ tərəfi $\varepsilon \to 0$ -da sıfra yaxınlaşır, çünki məlum olduğu üzrə,

$$\int\limits_{E_n} e^{|z|^2} dz = \pi^{n/2} . \tag{5.5}$$

Beləliklə,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{2\varepsilon} = 0 . \tag{5.5}$$

Digər inteqralın limitini hesablamaq üçün onu

$$J_{1\varepsilon} = \frac{u(x,t)}{2^n(\pi\varepsilon)^{n/2}} \int\limits_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dy +$$

$$+ \frac{1}{2^n(\pi\varepsilon)^{n/2}} \int\limits_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} [u(y,t-\varepsilon) - u(x,t)] \cdot e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dy \equiv J'_{1\varepsilon} + J''_{1\varepsilon} \tag{5.7}$$

şəklində yazaq. Yenidən yuxarıdakı əvəzləmədən istifadə etsək, (5.5) bərabərliyinin köməyilə

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J'_{1\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(x,t)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|z|<\frac{1}{2\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-|z|^2} dz = \frac{u(x,t)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{E_n} e^{-|z|^2} dz = u(x,t) \tag{5.8}$$

alarıq. Nəhayət, $J''_{1\varepsilon}$ inteqralının limitini hesablayaq. İxtiyari $\eta > 0$ üçün elə $\varepsilon_0 > 0$ tapmaq olar ki, $\varepsilon < \varepsilon_0$ və $|\, x - y \,| < \sqrt[4]{\varepsilon}$ olduqda

$$|\, u(y,t-\varepsilon) - u(x,t) \,| < \eta$$

olsun.

Onda

$$|\, J''_{1\varepsilon} \,| \le \frac{\eta}{2^n(\pi\varepsilon)^{n/2}} \cdot \int\limits_{r<\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} dy =$$

$$= \frac{\eta}{\pi^{n/2}} \cdot \int\limits_{|r|<\frac{1}{2\sqrt[4]{\varepsilon}}} e^{-|z|^2} dz < \frac{\eta}{\pi^{n/2}} \cdot \int\limits_{E_n} e^{-|z|^2 dz} = \eta$$

olduğundan və η -nın ixtiyariliyindən

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J''_{1\varepsilon} = 0 \tag{5.9}$$

alarıq.

Alınmış (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) münasibətlərini (5.4)-də nəzərə alsaq,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_R} \upsilon(x-y,\varepsilon) u(y,t-\varepsilon) dy = u(x,t)$$

alarıq ki, bu da (5.3) bərabərliyini

$$u(x,t) = \int\limits_{Q_t} \upsilon(x-y,t-\tau) Lu(y,\tau) dy d\tau + \int\limits_{\Omega_R} u(y,0) \upsilon(x-y,t) dy +$$

$$+ \int\limits_{B_t} \sum_{i=1}^{n} \left(\upsilon \frac{\partial u}{\partial y_i} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial y_i} \right) \cos(n, y_i) dS_R d\tau \tag{5.10}$$

şəklinə gətirir. Yada salaq ki, bu axırıncı bərabərlikdə υ istilikkeçirmə tənliyinin fundamental həllidir.

Axırıncı bərabərlikdən $R \to \infty$ şərtilə limitə keçək. Aydındır ki, bu zaman Ω_R kürəsi üzrə inteqral E_n fəzası üzrə inteqrala, $Q_t = \Omega_R \times (0,t)$ silindri üzrə inteqral isə $E_n \times (0,t)$ zolağı üzrə inteqrala yaxınlaşacaq. Silindrik $B_t = S_R \times (0,t)$ səthi üzrə inteqralın limitini hesablayaq. Fundamental həllin ifadəsini nəzərə alsaq

$$\int_{B_t} \sum_{i=1}^{n} \left(v \frac{\partial u}{\partial y_i} - u \frac{\partial v}{\partial y_i} \right) \cos(\nu, y_i) dS_R d\tau = \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \times$$

$$\times \int_0^t \int_{S_R} \frac{1}{(t-\tau)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{R^2}{4(t-\tau)}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y_i} - u \frac{z_i - y_i}{2(t-\tau)} \right) \cos(\nu, y_i) dS_R d\tau$$

alarıq. Fərziyyəmizə görə u və $\dfrac{\partial u}{\partial y_i}$ funksiyaları məhdud olduğundan, sonuncu bərabərliyin sağ tərəfi $R \to \infty$-da sıfra yaxınlaşır. Bu deyilənlərin nəticəsi olaraq, (5.10) bərabərliyindən, (5.1), (5.2) məsələsinin həlli üçün

$$u(x,t) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \int_0^t \int_{E_n} \frac{1}{(t-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau) dy d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2^n \pi^{n/2} t^{n/2}} \int_{E_n} e^{-\frac{r^2}{4t}} \varphi(y) dy \qquad (5.11)$$

düsturunu alarıq.

§6. Puasson düsturunun əsaslandırılması.

Biz yuxarıda bəzi əlavə şərtlər daxilində Koşi məsələsinin həlli üçün (5.11) Puasson düsturunu çıxardıq. İndi göstərək ki,

$f(x,t)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları kəsilməz və məhdud funksiyalardırsa, (5.11) düsturu ilə ifadə olunan funksiya doğrudan da (5.1), (5.2) Koşi məsələsinin məhdud həllidir.

Göstərəcəyik ki,

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \cdot \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{n/2}} \cdot \int_{E_n} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \cdot f(y,\tau) dy d\tau$$

funksiyası qeyri-bircins

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \qquad (6.1)$$

istilikkeçirmə tənliyinin bircins

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad (6.2)$$

başlanğıc şərtini ödəyən həlli,

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2} t^{n/2}} \cdot \int_{E_n} e^{-\frac{r^2}{4t}} \varphi(y) dy$$

funksiyası isə bircins

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad (6.3)$$

istilikkeçirmə tənliyinin qeyri-bircins

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllidir.

Əvvəlcə $u_2(x,t)$ funksiyası ilə məşğul olaq.

Müsbət a və T ədədləri üçün $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le a,\ 0 \le t \le T$ bərabərsizlikləri ilə təyin olunmuş məhdud $D \subset E_{n+1}$ oblastı götürək. Göstərək ki, $u_2(x,t)$ funksiyasını təyin edən inteqral, x və

t dəyişənlərinə nəzərən D oblastında müntəzəm yığılır.

Kafi qədər böyük R ədədi götürək və

$$J \equiv \int_{|y|>R} e^{-\frac{r^2}{4t}} \varphi(y) dy$$

inteqralını qiymətləndirək.

Fərziyyəmizə görə $\varphi(x)$ funksiyası məhduddur, $|\varphi(y)| \le M$. Üçbucaq bərabərsizliyinə görə $r = |x - y| \ge |y| - |x| \ge |y| - a$. Yuxarıdakı R ədədini elə seçək ki, $R > 2a$ bərabərsizliyini ödəsin. Onda $a < \frac{R}{2} \le \frac{|y|}{2}$ və $r > \frac{|y|}{2}$ olur. Bu o deməkdir ki, $(x,t) \in D$ nöqtələri üçün

$$e^{-\frac{r^2}{4t}} < e^{-\frac{|y|^2}{16T}}$$

olacaq. Buradan da

$$|J| < M \int_{|y|>R} e^{-\frac{|y|^2}{16T}} dy$$

və ya, axırıncı inteqralda

$$y_i = 4\sqrt{T} z_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

əvəzləməsi aparsaq

$$|J| < M \cdot 4^n T^{n/2} \int_{|z|>\frac{R}{4\sqrt{T}}} e^{-|z|^2} dz$$

alarıq. Sağ tərəfdəki inteqral bütün fəza üzrə yığılan olduğundan, onda R-in kafi qədər böyük qiymətlərində sağ tərəf istənilən qədər kiçik olacaq. Bu da inteqralının müntəzəm yığılması deməkdir, başqa sözlə $u_2(x,t)$ funksiyası kəsilməz funksiyadır.

Tamamilə eyni qayda ilə göstərmək olar ki, $u_2(x,t)$

funksiyasını t dəyişəninə nəzərən bir dəfə və x dəyişənlərinə nəzərən iki dəfə diferensiallama zamanı alınan inteqrallar da müntəzəm yığılandırlar.

Bu funksiyanın (6.3) tənliyini ödədiyini bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar.

İndi göstərək ki, bu funksiya məhdudur və

$$\lim_{t\to 0} u_2(x,t) = \varphi(x) \tag{6.4}$$

şərtini ödəyir.

Yenə məlum

$$y_i = x_i + 2\sqrt{t}\xi_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

əvəzləməsi edək, onda

$$u_2(x,t) = \pi^{-n/2} \int_{E_n} \varphi(x + 2\sqrt{t}\xi) e^{-|\xi|^2} d\xi \tag{6.5}$$

şəklində yaza bilərik. Buradan $|\varphi(z)| \le M$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\pi^{-n/2} \int_{E_n} e^{-|\xi|^2} d\xi = 1 \tag{6.6}$$

bərabərliyinin köməyi ilə

$$|u_2(x,t)| \le \pi^{-n/2} M \int_{E_n} e^{-|\xi|^2} d\xi = M$$

alarıq, yəni $u_2(x,t)$ funksiyası məhduddur.

Nəhayət, (6.4) bərabərliyini göstərmək üçün (6.6) bərabərliyinin hər tərəfini $\varphi(x)$-ə vuraq və (6.5)-lə toplayaq. Bu zaman

$$u_2(x,t) - \varphi(x) = \pi^{-n/2} \int_{E_n} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)] \cdot e^{-|\xi|^2} d\xi =$$

$$= \pi^{-n/2} \int_{|\xi|<R} [\varphi(x+2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)] \cdot e^{-|\xi|^2} d\xi +$$

$$+ \pi^{-n/2} \int_{|\xi|>R} [\varphi(x+2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)] \cdot e^{-|\xi|^2} d\xi \equiv J_1 + J_2$$

alarıq.

Fərziyyəyə görə $\varphi(x)$ funksiyası kəsilməz olduğundan, əvvəldən verilmiş $\varepsilon > 0$-a görə elə $t_0(\varepsilon) > 0$ ədədi var ki, $0 < t < t_0(\varepsilon)$, $|\,\xi\,| < R$ qiymətləri üçün

$$|\,\varphi(x+2\sqrt{t}\xi) - \varphi(x)\,| < \varepsilon/2$$

olar. Onda

$$|\,J_1\,| < \frac{\varepsilon}{2}\pi^{-n/2} \int_{|\xi|<R} e^{-|\xi|^2} d\xi \le \frac{\varepsilon}{2}$$

alarıq.

Digər tərəfdən $\varphi(x)$ funksiyasının məhdudluğundan

$$|\,J_2\,| \le 2M\pi^{-n/2} \int_{|\xi|>R} e^{-|\xi|^2} d\xi$$

yaza bilərik. Sağ tərəfdəki inteqral bütün fəza üzrə yığılan inteqral oladuğundan, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $R_0(\varepsilon)$ seçmək olar ki, $R > R_0(\varepsilon)$ şərtini ödəyən R-lər üçün

$$|\,J_2\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olar. Bununla, $t < t_0(\varepsilon)$ qiymətləri üçün

$$|\,u(x,t) - \varphi(x)\,| < \varepsilon$$

olduğunu alırıq ki, bu da (6.4) deməkdir.

Beləliklə, $u_2(x,t)$ funksiyasının (6.3), (6.4) məsələsinin məhdud həlli olduğunu göstərmiş oluruq.

İndi $u_1(x,t)$ funksiyası ilə məşğul olaq. Yuxarıdakı qayda

ilə bu funksiyanı təyin edən inteqralın və onun t-yə nəzərən bir dəfə, x dəyişənlərinə nəzərən iki dəfə diferensiallanmasından alınan inteqralların müntəzəm yığılan olduqlarını göstərmək olar. Bircins (6.2) şərtinin ödəndiyi də aşkardır. Funksiyanın qeyri-bircins (6.1) tənliyini ödədiyini göstərək.

Bilavasitə diferensiallamaqla

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \lim_{\tau \to t-0} \frac{1}{2^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n/2}} \cdot \int_{E_n} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \cdot f(y,\tau) dy +$$

$$+ \int_0^t \int_{E_n} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \right] \cdot f(y,\tau) dy d\tau$$

alarıq. Onda

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta_x u_1 = \lim_{\tau \to t-0} \frac{1}{2^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n/2}} \cdot \int_{E_n} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \cdot f(y,\tau) dy +$$

$$+ \int_0^t \int_{E_n} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \right] - \right.$$

$$\left. - \Delta_x \left[\frac{1}{2^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \right] \right\} f(y,\tau) dy d\tau$$

olar. Bildiyimiz kimi fundamental həll $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$ tənliyini ödəyir, ona görə də axırıncı bərabərlikdə ikinci inteqral sıfırdır. Birinci inteqralda $\tau - t = \eta$ əvəzləməsi aparsaq

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta_x u_1 = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{2^n \pi^{n/2} \eta^{n/2}} \cdot \int_{E_n} e^{-\frac{r^2}{4\eta}} \cdot f(y, t+\eta) dy$$

alarıq. Buradan, (6.4) bərabərliyinin isbatına analoji olaraq, sağ tərəfin $f(x,t)$-yə bərabər olduğunu ala bilərik, bununla

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta_x u_1 = f(x,t)$$

alarıq.

Beləliklə, (5.11) düsturu ilə ifadə olunan funksiyanın (5.1), (5.2) məsələsinin həlli olduğunu göstərmiş oluruq.

V FƏSİL.

HARMONİK FUNKSİYALAR.

§1. Laplas tənliyi və harmonik funksiyalar.

Tutak ki, m ölçülü evklid fəzasından götürülmüş hər hansı Ω oblastında təyin olunmuş $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ funksiyası verilmişdir.

Tərif 1.1. Əgər bu funksiya oblastın hər nöqtəsində;

1º. İki tərtib kəsilməz törəmələrə malikdirsə;

2º. Laplas tənliyi adlanan

$$\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

tənliyini ödəyirsə, onda $u(x)$ funksiyasına məhdud Ω oblastında harmonik funksiya deyilir.

Tərif 1.2. Əgər Ω oblastı qeyri məhdud oblastdırsa, $u(x)$ funksiyasına o zaman harmonik funksiya deyilir ki, oblastın kordinat başlanğıcından sonlu məsafədə olan hər bir nöqtəsində **1º** və **2º** şərtlərindən əlavə

3º. Kafi qədər böyük $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_m^2}$ üçün

$$|u(x)| \le \frac{C}{|x|^{m-2}}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada C – hər hansı sabitdir.

İki ölçülü oblastlar üçün bu şərt sonsuzluqda məhdudluq şərti, $m \ge 3$ halında isə verilmiş tərtibdən az olmamaqla sıfra yaxınlaşma şərtidir.

Harmonik funksiyanın tərifindən göründüyü kimi harmoniklik anlayışı açıq oblasta aiddir. Qapalı Ω oblastında harmonik funksiya dedikdə, nəzərdə tutulur ki, $\overline{\Omega}$ oblastını daxilinə olan elə açıq Ω_1 oblastı var ki, funksiya bu Ω_1 oblastında harmonikdir.

Qeyd edək ki, harmonik funksiyanın tərifi oblastın sərhəddi üzərində ona heç bir məhdudiyyət qoymur, belə ki, oblastda harmonik olan funksiya oblastın sərhəddində təyin olunmaya bilər, qeyri məhdud ola bilər, törəməsi olmaya bilər və s.

Tərifdən bilavasitə görünür ki, əgər $u_1(x)$ və $u_2(x)$ verilmiş oblastda harmonik funksiyalardırsa, onda ixtiyari c_1 və c_2 sabitləri üçün $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ funksiyası da harmonikdir.

Tutaq ki, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ fəzada iki ixtiyari nöqtə, $r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - \xi_k)^2}$ isə bu nöqtələr arasındakı məsafədir. Bu fəzada vahid radiuslu sferanın səthini $|\sigma_1|$-lə işarə edək. Məlumdur ki, ikinci növ Γ Eyler inteqralının köməyi ilə

$$|\sigma_1| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$$

şəklində ifadə olunur.

Harmonik funksiyalar nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan

$$E(x,\xi) = \frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|} \cdot \frac{1}{r^{m-2}}, \quad m \ge 3 \qquad (1.1)$$

funksiyasına Laplas tənliyinin fundamental həlli deyilir.

Fəzanın ölçüsü $m = 2$ olduqda, Laplas tənliyinin fundamental həlli

$$E(x,\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \qquad (1.2)$$

şəklində götürülür.

Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, ixtiyari $x \ne \xi$ nöqtələrində $E(x,\xi)$ funksiyası x və ξ dəyişənlərinə nəzərən Laplas tənliyini ödəyir (yoxlayın!).

Harmonik funksiyalara aid misallar:

1. Kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsindən məlum olduğu üzrə, kompleks $z = x + iy$ dəyişənli $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik funksiyasının həqiqi $u(x,y)$ və xəyali $v(x,y)$ hissəlri iki dəyişənli harmonik funksiyalardır.
2. İxtiyari sonlu Ω oblastında

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

funksiyası harmonik funksiyadır.

3. İxtiyari sonlu C sabiti üçün $u(x_1, x_2, \dots, x_m) = C$ funksiyasına baxaq. Fəzanın ölçüsü $m = 2$ olduqda, bu funksiya ixtiyari məhdud və ya qeyri məhdud Ω oblastında harmonik funksiyadır. Fəzanın ölçüsü $m \ge 3$ olduqda, bu funksiya məhdud Ω oblastında harmonik funksiyadır, lakin Ω qeyri-məhdud olduqda harmonik deyil, çünki harmonik funksiyanın tərifindəki **3^o** şərt ödənmir.
4. İxtiyari məhdud Ω oblastında

$$u(x,y) = \sin x \cdot \text{ch}\, y$$

funksiyası harmonik funksiyadır. Qeyri məhdud oblastda isə bu funksiya harmonik deyil (niyə?).

§2. Hamar funksiyaların inteqral göstərişi.

Tutaq ki, Ω hər hansı məhdud oblast, S isə bu oblastın sərhəddidir. Bu oblastda təyin olunmuş iki $u(x), v(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ funksiyalarını götürək. Asanlıqla göstərilən

$$v\Delta u - u\Delta v = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\frac{\partial v}{\partial x_k} \right)$$

eyniliyin hər tərəfini Ω oblastı üzrə inteqrallayıb, sağ tərəfdəki inteqralda səth üzrə inteqrala keçsək,

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(v\frac{\partial}{\partial \xi_k} - u\frac{\partial v}{\partial \xi_k} \right) d\xi =$$

$$= \int_{S} \sum_{k=1}^{m} \left(v\frac{\partial u}{\partial \xi_k} - u\frac{\partial v}{\partial \xi_k} \right)\cos(\nu, \xi_k) d_{\xi}S = \int_{S} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d_{\xi}S$$

alarıq, burada $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ ilə S səthinin ξ nöqtəsində səthə çəkilən xarici normal üzrə törəmə işarə olunmuşdur. Qeyd edək ki, bu düsturu yaza bilmək üçün S səthinin hissə-hissə hamar olması kifayətdir.

Beləliklə, iki ixtiyari $u(x), v(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ funksiyaları və hissə-hissə hamar S səthi üçün

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) d\xi = \int_{S} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d_{\xi}S \qquad (2.1)$$

Qrin düsturu doğrudur.

İndi tutaq ki, sərhəddi hissə-hissə hamar S səthi olan məhdud Ω oblastında təyin olunmuş ixtiyari $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ funksiyası verilmişdir. Bu oblastın hər hansı daxili x nöqtəsini

götürək və mərkəzi bu nöqtədə olan elə $\varepsilon > 0$ radiuslu K_{ε} kürəsi götürək ki, bu kürə tamamilə Ω oblastı daxilində yerləşsin. Bu kürənin sferasını σ_{ε}-la işarə edək. $v(x,\xi)$ funksiyası olaraq Laplas tənliyinin (1.1) bərabərliyi ($m = 2$ olduqda (1.2) bərabərliyi) ilə verilmiş $E(x,\xi)$ fundamental həllini götürək. $x \in K_{\varepsilon}$ olduğundan $\Omega \setminus K_{\varepsilon}$ oblastında $E(x,\xi)$ funksiyası ξ dəyişəninin funksiyası olaraq, istənilən tərtib törəməyə malikdir. $u(\xi)$ funksiyası isə $\overline{\Omega}$ oblastında iki dəfə kəsilməz törəmələrə malik idi. Ona görə də bu götürülmüş $u(\xi)$ və $E(x,\xi)$ funksiyalarına $\Omega \setminus K_{\varepsilon}$ oblastında (2.1) Qrin düsturunu tətbiq etmək olar:

$$\int_{\Omega - K_{\varepsilon}} (E\Delta u - u\Delta E) d\xi = \int_{S} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial E}{\partial \nu} \right) d_{\xi}S +$$

$$+ \int_{\sigma_{\varepsilon}} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial E}{\partial \nu} \right) d_{\xi}\sigma_{\varepsilon}\ .$$

Biz $m \geq 3$ halına baxacağıq, $m = 2$ halında $E(x,\xi)$ olaraq, yuxarıda dediyimiz kimi, (1.2) ilə təyin olunan funksiya götürülməlidir.

Yuxarıdakı bərabərlikdə $\varepsilon \to 0$ şərtilə limitə keçsək və $\Omega - K_{\varepsilon}$ oblastında $\Delta E = 0$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\int_{\Omega} E\Delta u d\xi = \int_{S} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial E}{\partial \nu} \right) d_{\xi}S + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\sigma_{\varepsilon}} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial E}{\partial \nu} \right) d_{\xi}\sigma_{\varepsilon} \quad (2.2)$$

yaza bilərik.

Sağ tərəfdəki limitləri hesablayaq. $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ olduğundan, elə $M > 0$ sabiti var ki, $\left| \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq M$, ona görə də birinci toplanan üçün

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\sigma_\varepsilon} E\frac{\partial u}{\partial\nu}d_\xi\sigma_\xi\right| \le \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\cdot\int_{\sigma_\varepsilon}\frac{1}{r^{m-2}}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|d_\xi\sigma_\varepsilon \le$$

$$\le \frac{M}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{m-2}}\cdot\int_{\sigma_\varepsilon}d_\xi\sigma_\varepsilon =$$

$$= \frac{M}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\,\sigma_1\,|\cdot\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-2}} = 0 \qquad (2.3)$$

bərabərliyini alarıq.

Radiusu $r=\varepsilon$ olan σ_ε sferası üzərində, $\Omega - K_\varepsilon$ oblastına nəzərən xarici normal radiusun əksinə yönəldiyindən

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{\sigma_\varepsilon} = -\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}$$

alarıq. Onda

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon} u\frac{\partial E}{\partial\nu}d_\xi\sigma_\varepsilon = \frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi\sigma_\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{|\,\sigma_1\,|}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\cdot\int_{\sigma_\varepsilon}u(\xi)d_\xi\sigma_\varepsilon.$$

İnteqral üçün orta qiymət teoreminə görə, σ_ε səthi üzərində elə $\bar{\xi} = x + \bar{\theta}\varepsilon$, $|\,\bar{\theta}\,|=1$, nöqtəsi var ki,

$$\int_{\sigma_\varepsilon}u(\xi)d_\xi\sigma_\varepsilon = u(x+\bar{\theta}\varepsilon)\int_{\sigma_\varepsilon}d_\xi\sigma_\varepsilon = u(x+\bar{\theta}\varepsilon)\cdot|\,\sigma_1\,|\cdot\varepsilon^{m-1}.$$

Bunu yuxarıdakı bərabərlikdə nəzərə alsaq,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon} u\frac{\partial E}{\partial\nu}d_\xi\sigma_\varepsilon = u(x) \qquad (2.4)$$

alarıq. Alınan (2.3) və (2.4) münasibətlərinin köməyi ilə, (2.2)-dən

$$\int_\Omega E\Delta u d\xi = \int_S\left(E\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial E}{\partial\nu}\right)d_\xi S - u(x)$$

bərabərliyini alarıq. Bu axırıncı bərabərlikdə E-nin ifadəsini yerinə yazmaqla,

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\cdot\int_S\left(\frac{1}{r^{m-2}}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_\xi S -$$

$$-\frac{1}{(m-2)\,|\sigma_1|}\cdot\int_\Omega\frac{\Delta u}{r^{m-2}}\Delta u\, d\xi \qquad (2.5)$$

düsturunu alarıq. Bu ixtiyari $u(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ funksiyasının inteqral göstərişi düsturudur.

Fəzanın ölçüsü $m=2$ olduqda, (2.5) düsturu əvəzinə

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_S\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\right)d_\xi S -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot\int_\Omega\ln\frac{1}{r}\Delta u d\xi \qquad (2.6)$$

göstərişini ala bilərik.

Əgər $u(x)$ funksiyası oblastında harmonik funksiyadırsa, onda $\Delta u = 0$ və buna görə də $u(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ sinfinə daxil olan harmonik funksiyalar üçün

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\cdot\int_S\left(\frac{1}{r^{m-2}}\cdot\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu} -\right.$$

$$\left.-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_\xi S, \quad m\ge 3 \qquad (2.8)$$

və

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_S\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\right)d_\xi S,\quad m=2 \quad (2.9)$$

inteqral göstərişlərini yaza bilərik.

Yuxarıda çıxarılan inteqral göstərişi düsturları, bir çox hallarda, geniş tətbiq olunurlar. Biz bunlarla gələcək paraqraflarda məşğul olacağıq.

§3. Sadə və ikiqat lay potensialları.

Tutaq ki, S hər hansı qapalı və ya açıq məhdud hamar səth, $\mu_1(\xi)$ və $\mu_2(\xi)$ isə bu səth üzərində verilmiş funksiyalardır. Bu səth üzərində yerləşməyən hər hansı x nöqtəsindən $\xi\in S$ nöqtəsinə qədər olan məsafəni r ilə işarə edək, $r=|x-\xi|$. Aşağıdakı şəkildə təyin olunmuş

$$u_1(x)=\int_S\mu_1(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S$$

və

$$u_2(x)=\int_S\mu_2(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S$$

inteqrallarına, uyğun olaraq, sadə lay və ikiqat lay potensialları, $\mu_1(\xi)$ və $\mu_2(\xi)$ funksiyalarına isə bu potensialların sıxlığı deyilir.

Teorem 3.1. Sıxlıqları $\mu_1(x)$ və $\mu_2(x)$ mütləq cəmlənən funksiyalar olan sadə və ikiqat lay potensiallarının S səthi ilə ortaq nöqtəsi olmayan ixtiyari Ω oblastında istənilən tərtib törəmələri var və həm də bu potensiallar harmonik funksiyalardır.

Əvvəlcə göstərək ki, Ω oblastında $u_1(x)$ və $u_2(x)$

funksiyalarının istənilən tərtib törəmələri var. Doğrudan da, ixtiyari $x\in\Omega$ və $\xi\in S$ üçün $r=|x-\xi|\geq\delta>0$ olduğundan, bu potensiallar məxrəci sıfra çevrilməyən funksiyanın parametrdən asılı inteqrallarıdır. Bu inteqrallardan inteqral altında istənilən tərtib törəmə almaq olar və bu zaman alınan inteqrallar müntəzəm yığılan inteqrallardır. Yəni $u_1(x)$ və $u_2(x)$ funksiyaları istənilən tərtib törəmələrə malikdirlər.

Digər tərəfdən, bu funksiyalara Laplas operatorunu tətbiq etsək

$$\Delta_x u_1=\Delta_x\int_S\mu_1(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S=\int_S\mu_1(\xi)\Delta_x\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S=0,$$

$$\Delta_x u_2=\Delta_x\int_S\mu_2(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S=\int_S\mu_2(\xi)\Delta_x\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_\xi S=$$

$$=\int_S\mu_2(\xi)\Delta_x\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_k)\right]d_\xi S=$$

$$=\int_S\mu_2(\xi)\sum_{k=1}^{m}\cos(\nu,\xi_k)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\Delta_x\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_\xi S=0,$$

olduğunu alarıq, burada ν normalı ξ nöqtəsində səthə çəkilən normal olduğundan x-dən asılı deyil və onu Δ_x-dən xaricə çıxardıq.

Bununla, Ω oblastı məhdud olan halda, potensialların harmonikliyi isbat olur.

Əgər Ω oblastı qeyri-məhdud oblast isə əlavə olaraq **3°** şərtinin ödəndiyini göstərmək lazımdır.

S səthi məhdud səth olduğundan, onun nöqtələrinin koordinat başlanğıcından olan məsafələri hər hansı bir d ədədini aşmır. İxtiyari $x\in\Omega$ nöqtəsi üçün, üçbucaq bərabərsizliyinə əsasən,

$$r = |x - \xi| \geq |x| - |\xi| \geq |x| - d$$

yaza bilərik. $|x|$-in kafi qədər böyük, məsələ, $|x| > 2d$ qiymətləri üçün, $d < \frac{|x|}{2}$ və $r > \frac{1}{2}|x|$ alarıq. Buna görə də

$$|u_1(x)| \leq \left| \int_S \frac{1}{r^{m-2}} \mu_1(\xi) d_\xi S \right| \leq \frac{2^{m-2}}{|x|^{m-2}} \cdot \int_S |\mu_1(\xi)| d_\xi S .$$

Şərtə görə, sıxlıq funksiya cəmlənən olduğundan, axırıncı inteqral sonludur və **3°** şərti ödənilir, $C = 2^{m-2} \int_S |\mu_1(\xi)| d_\xi S$.

İndi ikiqat lay potensialına baxaq. Aşkar $|\xi_k - x_k| \leq r$, $|\cos(\nu, \xi_k)| \leq 1$ bərabərsizliklərinin köməyi ilə,

$$|u_2(x)| \leq \int_S |\mu_2(\xi)| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi S \leq$$

$$\leq (m-2) \int_S |\mu_2(\xi)| \cdot \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{|\xi_k - x_k|}{r^m} \right| \cdot |\cos(\nu, \xi_k)| d_\xi S \leq$$

$$\leq (m-2) m \int_S |\mu_2(\xi)| \cdot \frac{1}{r^{m-1}} d_\xi S$$

alarıq. Yenə də $|x| > 2d$ şərtini ödəyən nöqtələr üçün, $r > \frac{1}{2}|x|$ olduğundan

$$|u_2(x)| \leq \frac{C}{|x|^{m-1}}$$

bərabərsizliyini alarıq ki, burada

$$C = 2^m \cdot m(m-2) \int_S |\mu_2(\xi)| d_\xi S .$$

Aldığımız bu bərabərsizlik **3°** şərtindən daha güclüdür.

Bununla, qeyri məhdud oblastda da ikiqat lay potensialının harmonikliyi isbat olur.

Bu teoremin köməyi ilə ixtiyari $u(x) \in C^2(\Omega)$ harmonik funksiyanın istənilən tərtib törəmələrinin varlığı asanlıqla isbat olunur. Doğrudan tutaq ki, $u(x) \in C^2(\Omega)$ ixtiyari harmonik funksiyadır. Bu oblastın istənilən x_0 nöqtəsində $u(x)$ funksiyasının istənilən tərtib törəmələrinin varlığını göstərək. x_0 nöqtəsini daxilinə alan və S_1 sərhəddi ilə birlikdə Ω oblastında yerləşən istənilən ixtiyari sonlu Ω_1 oblastı quraq. Bu oblasta (2.8) düsturunu tətbiq etsək

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|\sigma_1|} \cdot \int_{S_1} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi S_1 , \ x \in \Omega_1$$

yara bilərik. Bu alınan lay potesiallarının sıxlıq funksiyaları S_1 üzərində nəinki mütləq cəmlənən, hətta diferensiallanan funksiyalardır. Lay potensialların isə istənilən tərtib törəməsi olduğunu göstərmişdik.

§4. Harmonik funksiyalar üçün orta qiymət xassəsi və maksimum prinsipi.

Bu xassələri isbat etmək üçün, əvvəlcə sonralar dəfələrlə rast gələcəyimiz iki düstur verək. Əslində bu düsturlar yuxarıda isbat olunmuş (2.1) düsturunun xüsusi halıdır. Həmin düsturda $\upsilon(x) \equiv 1$ götürməklə, ixtiyari $u(x) \in C^2(\Omega)$ funksiyası üçün

$$\int_\Omega \Delta u d\xi = \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} d_\xi S \quad (4.1)$$

düsturunu alarıq. Əlavə olaraq, əgər $u(x)$ funksiyası Ω oblastında harmonikdirsə, onda (4.1) düsturundan

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} d_\xi S = 0 \tag{4.2}$$

düsturunu alarıq.

İndi orta qiymət teoremini verək.

Teorem 4.1. Tutaq ki, $u(x)$ funksiyası mərkəzi x_0 nöqtəsində olan R radiuslu K_R kürəsi daxilində harmonik, bu kürənin S_R sferası da daxil olmaqla qapalı kürədə kəsilməz funksiyadır. Onda x_0 nöqtəsində funksiyanın aldığı qiymət $u(x_0)$, sfera səthi üzrə funksiyanın aldığı qiymətlərin ədədi ortasına bərabərdir.

Aşkardır ki, ixtiyari $R_1 < R$ radiusu götürsək, K_R kürəsi ilə konsentrik K_{R_1} kürəsi üçün $u(x) \in C^2(\overline{K}_{R_1})$. Onda ixtiyari harmonik funksiyanın interal göstərişinə əsasən

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|} \cdot \int_{S_{R_1}} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - \right.$$

$$\left. - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi S_{R_1}, \quad x \in K_{R_1} \tag{4.3}$$

yaza bilərik. Xüsusi halda, $x = x_0$ götürsək, $r = R_1$ olur. Digər tərəfdən, S_1 sfera səthi üzərində xarici normal radius istiqamətində yönəldiyindən

$$\left. \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right|_{S_1} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}} \right|_{r=R_1} = -\frac{m-2}{R_1^{m-1}}.$$

Bunları (4.3)-də nəzərə alsaq,

$$u(x_0) = \frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|\,R_1^{m-2}} \cdot \int_{S_{R_1}} \frac{\partial u}{\partial \nu} d_\xi S_1 +$$

$$+ \frac{1}{|\,\sigma_1\,|\,R_1^{m-1}} \cdot \int_{S_{R_1}} u(\xi) dS_1$$

və buradan da (4.2) bərabərliyinin köməyi ilə

$$u(x_0) = \frac{1}{|\,\sigma_1\,|\,R_1^{m-1}} \cdot \int_{S_{R_1}} u(\xi) dS_{R_1}$$

alarıq. Bu bərabərlikdən $R_1 \to R$ şərti ilə limitə keçsək,

$$u(x_0) = \frac{1}{|\,\sigma_1\,|\,R^{m-1}} \cdot \int_{S_R} u(\xi) dS_R \tag{4.4}$$

alarıq ki, bu da orta qiymət teoreminin riyazi yazılışıdır.

Sfera üçün olduğu kimi, kürə üçün də orta qiymət xassəsi doğrudur. Bunu göstərək. Tutaq ki, $u(x)$ funksiyası $K_R : |x - x_0| < R$ kürəsi daxilində harmonikdir. İxtiyari $0 < \rho < R$ götürüb $|x - x_0| = \rho$ sferası üçün (4.4) düsturunu yazaq

$$u(x_0) = \frac{1}{|\,\sigma_1\,|\,\rho^{m-1}} \cdot \int_{S_\rho} u d_\xi S_\rho .$$

Axırıncı bərabərliyi

$$\rho^{m-1} u(x_0) = \frac{1}{|\,\sigma_1\,|} \cdot \int_{S_\rho} u d_\xi S_\rho$$

şəklində yazıb hər tərəfini $(0, R)$ intervalında ρ-ya nəzərən inteqrallasaq

$$\frac{R^m}{m} u(x_0) = \frac{1}{|\,\sigma_1\,|} \cdot \int_0^R \int_{S_\rho} u d_\xi S_\rho d\rho$$

və yaxud da

$$u(x_0) = \frac{m}{|\sigma_1| R^m} \cdot \int_{K_R} u d\tau_R$$

alarıq, burada $d\tau_R$ həcm elementidir. Alınan bərabərlik kürə üçün orta qiymət xassəsidir.

İndi isə maksimum prinsipinə keçək. Əvvəlcə Laplas operatoru üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 4.2. Tutaq ki, Ω ixtiyari məhdud oblast, $u(x) \in C^2(\Omega)$ isə bu oblastda təyin olunmuş ixtiyari funksiyasıdır. Əgər bu funksiya üçün $\Delta u > 0$ $(\Delta u < 0)$ isə, onda bu funksiya oblastın daxilində özünün ən böyük (ən kiçik) qiymətini ala bilməz.

Aydındır ki, teoremi maksimum halı üçün isbat etmək kifayətdir, çünki $u(x)$ funksiyası daxildə ən böyük qiymətini alırsa və $\Delta u > 0$ isə, onda $-u(x)$ funksiyası həmin nöqtədə minimum qiymətini alır və $-\Delta u < 0$.

Teoremi isbat etmək üçün əksini fərz edək. Fərz edək ki, $u(x)$ funksiyası daxili x_0 nöqtəsində özünün ən böyük qiymətini alır. Onda bu nöqtədə $u_{x_k} = 0,\ u_{x_k x_k} \le 0,\ k = 1,2,\dots,m$ olmalıdır. Bu isə $\Delta u > 0$ şərtinə ziddir.

Teorem 4.3. Tutaq ki, $u(x)$ məhdud Ω oblastında harmonik, qapalı $\Omega + S$ oblastında isə kəsilməz funksiyadır. Onda bu funksiya oblastın daxilində, sərhəddəki ən böyük qiymətindən böyük və ən kiçik qiymətdən kiçik, qiymət ala bilməz.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, daxili x_0 nöqtəsində funksiyanın qiyməti

$$u(x_0) > u(s) + \delta$$

şərtini ödəyir, burada $s \in S$ ixtiyari nöqtə, δ isə hər hansı müsbət ədəddir.

Yeni

$$\upsilon(x) = u(x) + \varepsilon r^2$$

funksiyası düzəldək, burada ε ixtiyari müsbət ədəd, $r = |x - x_0|$ isə x və x_0 nöqtələri arasındakı məsafədir.

Bu funksiyanın qiymətləri üçün

$$\upsilon(x_0) = u(x_0) > u(s) + \delta,$$

$$\upsilon(s) = u(s) + \varepsilon r_1^2, \quad r_1 = |s - x_0|$$

münasibətindən

$$\upsilon(x_0) > \upsilon(s) - \varepsilon r_1^2 + \delta$$

yaza bilərik. İxtiyari ε ədədini elə seçək ki,

$$\delta - \varepsilon r_1^2 > \frac{\delta}{2}$$

bərabərsizliyi ödənsin. Onda

$$\upsilon(x_0) > \upsilon(s) + \frac{\delta}{2}$$

alarıq. Bu o deməkdir ki, $\upsilon(s)$ funksiyası oblastın daxilində ən böyük qiymətini alır. Bu isə ola bilməz, çünki

$$\Delta\upsilon = \Delta u + \Delta(\varepsilon r^2) = 2m\varepsilon > 0$$

olduğundan, teorem 4.2-lə ziddiyət alardıq. Bununla, teorem 4.3 isbat olur. Bu teoremə harmonik funksiyalar üçün maksimum prinsipi deyilir.

Bilavasitə maksimum prinsipindən aşağıdakı nəticələri söyləyə bilərik.

Nəticə 4.1. Oblastda harmonik olan funksiya, eynilik kimi sabit deyilsə, daxildə ən böyük və ən kiçik qiymətini ala bilməz.

Nəticə 4.2. Verilmiş Ω oblastında harmonik və qapalı $\overline{\Omega}$ oblastında kəsilməz olan u_1 və u_2 funksiyaları oblastın sərhəddində üst-üstə düşürlərsə, daxildə də üst-üstə düşürlər.

§5. Orta qiymət xassəsi üçün tərs teorem.

Harmonik funksiyalar üçün isbat edilmiş orta qiymət xassəsi bu sinif funksiyaları tam xarakterizə edir. Belə ki, orta qiymət xassəsi üçün aşağıdakı tərs teorem də doğrudur.

Teorem 5.1. Əgər məhdud Ω oblastında verilmiş kəsilməz $v(x)$ funksiyası orta qiymət xassəsini ödəyirsə, yəni oblastın hər bir nöqtəsində funksiyanın aldığı qiymət, mərkəzi bu nöqtədə olan və tamamilə oblast daxilində yerləşən ixtiyari sfera üzrə aldığı qiymətlərin ədədi ortasına bərabərdirsə, onda $v(x)$ harmonik funksiyadır.

Teoremi isbat etmək üçün əvvəlcə bir lemma isbat edək.

Lemma 5.1. Əgər məhdud Ω oblastında kəsilməz $v(x)$ funksiyası orta qiymət xassəsini ödəyirsə və oblastın daxilində özünün ən böyük və ya ən kiçik qiymətini alırsa, onda bu funksiya eynilik kimi sabitdir.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, oblast daxilində elə x_0 nöqtəsi var ki, bu nöqtədə funksiya özünün ən böyük qiymətini alır. Mərkəzi bu nöqtədə olan elə K kürəsi götürək ki, bu kürə tamamilə oblastın daxilində yerləşsin. Funksiya orta qiymət xassəsini ödədiyindən, $v(x_0)$ qiymətinin sfera səthi üzrə funksiyanın aldığı qiymətlərin ədədi ortası ola bilməsi üçün, funksiya sfera üzərində eynilik kimi $v(x_0)$ qiymətinə bərabər olmalıdır. Bu o deməkdir ki, K kürəsi daxilində $v(x)$ funksiyası eynilik kimi sabitdir. İndi göstərək ki, bu funksiya bütün oblastda sabitdir.

Oblastın daxilində ixtiyari x nöqtəsi götürək və bu nöqtəni tamamilə oblast daxilində yerləşən l əyrisi vasitəsilə x_0 nöqtəsilə birləşdirək. Bu əyri ilə Ω oblastının sərhəddi arasındakı məsafəni

$2d$ ilə işarə edək. Mərkəzi l əyrisi üzərində götürülmüş y nöqtəsində yerləşən d radiuslu kürəni $K_d(y)$ ilə işarə edək. Bu kürələr hamısı tamamilə Ω oblastı daxilində yerləşirlər. $K_d(x_0)$ kürəsi daxilində l əyrisi üzərində elə x_1 nöqtəsi götürək ki, $|x_1 - x_0| > \frac{d}{2}$ olsun. $K_d(x_1)$ kürəsi daxilində l əyrisi üzərində elə x_2 nöqtəsi götürək ki, $|x_2 - x_1| > \frac{d}{2}$ olmaqla, x_1 nöqtəsi x_0-la x_2 arasında yerləşsin. Bu prosesi davam etdirməklə, sonlu sayda kürələrlə bütün l əyrisini örtə bilərik. Qurmaya görə $x_j \in K_d(x_{j-1}),\quad j = 1,2,\ldots,n,\quad x \in K_d(x_{n-1})$. Bu kürələrin hər birində funksiya sabit olduğundan $v(x) = v(x_0)$. Bununla lemma isbat olur.

Nəticə 5.1. Məhdud Ω oblastında orta qiymət xassəsini ödəyən $v(x)$ funksiyası oblastın sərhəddində sıfırdırsa, onda oblastda da eynilik kimi sıfırdır.

Doğrudan da, əks halda funksiya daxildə özünün ən böyük və ya ən kiçik qiymətini alar, bu isə lemma 5.1.-ə ziddir.

İndi teorem 5.1-i isbat edək. Tutaq ki, $v(x)$ funksiyası Ω oblastında orta qiymət xassəsini ödəyən kəsilməz funksiya, $u(x)$ isə oblastın sərhəddində $v(x)$ ilə üst-üstə düşən harmonik funksiyadır.

Onda $u(x) - v(x)$ fərqi orta qiymət xassəsini ödəməklə, oblastın səthində sıfırdır. Nəticə 5.1-ə görə bu fərq oblastın daxilində də eynilik kimi sıfırdır, yəni $v(x) \equiv u(x)$.

§6. Həcm potensialı.

Yuxarıda çıxardığımız (2.5) düsturunda ixtiyari $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ funksiyasının üç inteqralın cəmi şəklində ifadə olunduğunu göstərmişdik. Bu inteqrallardan səth üzərində olan inteqrallara lay potensialları dedik. İndi isə oblast üzrə olan

$$w(x) = \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{r^{m-2}} d\xi, \quad r = |x - \xi|$$

inteqralına baxaq. Bu inteqrala həcm potensialı və ya Nyuton potensialı, $\rho(\xi)$-yə isə potensialın sıxlığı deyilir.

Aydındır ki, bu inteqral oblastdan götürülmüş ixtiyari x nöqtəsi üçün, $x = \xi$ nöqtəsində zəif məxsusiyyəti olan inteqral olmaqla, ixtiyari mütləq cəmlənən məhdud $\rho(\xi)$ funksiyası üçün kəsilməz funksiyadır.

Göstərək ki, $\rho(\xi)$ funksiyası məhdud və kəsilməz funksiyadırsa, onda həcm potensialının birinci tərtib kəsilməz törəmələri var və bu törəmələr bilavasitə, inteqralaltında törəmə olmaqla,

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \int_\Omega \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi, \quad i = \overline{1,m} \tag{6.1}$$

düsturları ilə hesablanır.

Doğrudan da, sağ tərəfdə alınan

$$(m-2)\int_\Omega \rho(\xi) \frac{x_i - \xi_i}{r^m} d\xi$$

ifadəsi, zəif məxsusiyyətli inteqral olaraq müntəzəm yığılır və bu inteqral, Ω oblastında kəsilməz funksiya təyin edir.

Həcm potensialının ikinci tərtib törəmələri haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 6.1. Potensialın sıxlığı $\rho(\xi)$, oblastda birinci tərtib məhdud və kəsilməz xüsusi törəmələrə malik funksiyadırsa, onda Ω oblastında həcm potensialının ikinci tərtib kəsilməz törəmələri var və bu potensial

$$\Delta w = -(m-2) \,|\, \sigma_1 \,|\, \cdot \rho(x)$$

Puasson tənliyini ödəyir.

Aşkar

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{m-2}}$$

bərabərliyinin köməyi ilə, həcm potensialının birinci tərtib törəmələri üçün olan (6.1) düsturlarını

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = -\int_\Omega \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi, \quad i = \overline{1,m}$$

şəklində yazmaq olar. Sağ tərəfi hissə-hissə inteqrallamaqla

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = -\int_S \rho \frac{1}{r^{m-2}} \cos(\nu, \xi_i) d_\xi S + \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi \tag{6.2}$$

bərabərliyini ala bilərik. Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki birinci toplananın $x \in \Omega$ nöqtələri üçün kəsilməz törəmələri var və bu törəmələri bilavasitə inteqral altında törəmə almaqla hesablamaq olar. Şərtə görə $\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi_i}$ törəmələri məhdud və kəsilməz olduğundan, ikinci inteqral da, yuxarıda dediyimiz kimi, kəsilməz törəmələrə malikdir və bununla da, həcm potensialının ikinci tərtib törəmələri üçün

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = -\int_S \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r^{m-2}} \cos(\nu, \xi_i) d_\xi S +$$

$$+\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi=\int_{S}\rho\frac{\partial}{\partial\xi_j}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_i)d_\xi S-$$

$$-\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi,\quad i,j=\overline{1,m} \tag{6.3}$$

düsturunu alarıq.

İndi həcm potensialının ixtiyari $x\in\Omega$ nöqtəsi üçün

$$\Delta w=-(m-2)\,|\,\sigma_1\,|\cdot\rho(x)$$

tənliyini ödədiyini göstərək.

Mərkəzi $x\in\Omega$ nöqtəsində olan elə $\varepsilon>0$ radiuslu K_ε kürəsi götürək ki, bu kürə tamamilə Ω oblastında yerləşsin. Bu kürənin səthini γ_ε-la, Ω oblastından bu kürəni çıxmaqla alınan oblastı isə Ω_ε-la işarə edək.

Həcm potensialının ikinci tərtib törəmələri üçün aldığımız (6.3) düsturlarına görə

$$\Delta w=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}=\int_{S}\rho\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_i)d_\xi S-$$

$$-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi$$

və ya da

$$\Delta w=\int_{S}\rho\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi \tag{6.4}$$

alarıq, burada ν səth üzərində götürülmüş ξ nöqtəsində səthə çəkilən xarici normaldır.

Hissə-hissə inteqrallamaqla

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi=\int_{S}\rho\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_i)d_\xi S+$$

$$+\int_{\gamma_\varepsilon}\rho\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_i)d_\xi\gamma_\varepsilon-\int_{\Omega_\varepsilon}\rho\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi, \tag{6.5}$$

bərabərliyini almaqla. Ω_ε oblastında

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2}\frac{1}{r^{m-2}}=0$$

olduğunu nəzərə alsaq, (6.5) bərabərliyindən ε sıfıra yaxınlaşmaqla limitə keçsək

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{1}{r^{m-2}}d\xi=\int_{S}\rho\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\rho\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi\gamma_\varepsilon$$

yaza bilərik. Bunu (6.4) bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$\Delta w=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi\gamma_\varepsilon \tag{6.6}$$

olduğunu alarıq. Sferanın γ_ε səthi üzərində ν xarici normalı radiusun əksinə yönəldiyindən

$$\left.\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|_{\gamma_\varepsilon}=-\left.\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{m-2}}\right|_{r=\varepsilon}=\frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}$$

olur və buna görə də, (6.6) bərabərliyindən

$$\Delta w=-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\left[\int_{\gamma_\varepsilon}[\rho(\xi)-\rho(x)]d_\xi\gamma_\varepsilon+\rho(x)\int_{\gamma_\varepsilon}d_\xi\gamma_\varepsilon\right]=$$

$$=-(m-2)\,|\,\sigma_1\,|\,\rho(x)$$

alırıq.

Bununla teorem isbat olur.

§7. Harnak teoremləri.

Teorem 7.1. Əgər Ω obdastında harmonik və $\Omega + S$ qapalı oblastında kəsilməz olan $\{u_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı oblastın S sərhəddində müntəzəm yığılırsa, onda Ω oblastının daxilində də müntəzəm yığılır.

Verilmiş $\{u_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının müntəzəm yığılması o deməkdir ki, əvvəldən verilmiş istəilən $\varepsilon > 0$-a görə elə $N(\varepsilon)$ nömrəsi var ki, $n \geq N(\varepsilon)$ şərtini ödəyən n və ixtiyari natural p ədədi üçün

$$| u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi) | < \varepsilon, \ \ \xi \in S \qquad (7.1)$$

bərabərsizliyi ödənir. İki harmonik funksiyanın fərqi olmaqla, $u_{n+p}(x) - u_n(x)$ funksiyasıda harmonikdir və qapalı $\Omega + S$ oblstında kəsilməzdir. Maksimum prinsirinə görə belə funksiya özünün ən böyük və ən kiçik qiymətini S sərhəddi üzərində alır, buna görə də

$$\max_{x \in \Omega} | u_{n+p}(x) - u_n(x) | \leq \max_{\xi \in \Gamma} | u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi) | .$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfi (7.1) bərabərsizliyinə görə ε-dan kiçik olduğundan

$$| u_{n+p}(x) - u_n(x) | < \varepsilon, \quad x \in \overline{\Omega}$$

yaza bilərik ki, bu da $\{u_n(x)\}$ ardıcıllığının $\overline{\Omega}$ oblastında müntəzəm yığılması deməkdir. Ardıcıllığın hər bir elementi qapalı $\overline{\Omega}$ oblastında kəsilməz olduğundan və ardıcıllıq müntəzəm yığıldığından, bu ardıcıllığın limiti

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$$

funksiyası da qapalı $\overline{\Omega}$ oblastında kəsilməz funksiyadır.

Teorem 7.2. Müntəzəm yığılan harmonik $\{u_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının limiti də harmonik funksiyadır.

İxtiyari $x \in \Omega$ nöqtəsi götürək və mərkəzi bu nöqtədə olan və S_R sferası ilə birlikdə tamamilə bu oblast daxilində qalan K_R kürəsini quraq. Hər bir $u_n(x)$ funksiyası harmonik olduğundan, orta qiymət teoreminə görə

$$u_n(x) = \frac{1}{| \sigma_1 | R^{m-1}} \int_{S_R} u_n(\xi) d_\xi S_R \, .$$

Bu bərabərlikdən $n \to \infty$ şərtilə limitə keçsək

$$u(x) = \frac{1}{| \sigma_1 | R^{m-1}} \int_{S_R} u(\xi) d_\xi S_R \, ,$$

yəni limit funksiya orta qiymət xassəsini ödəyir. Müntəzəm yığılan ardıcıllığın limiti kimi $u(x)$ həm də kəsilməz olduğundan, teorem 5.1-ə görə $u(x)$ funksiyası harmonikdir.

VI FƏSİL.

DİRİXLE VƏ NEYMAN MƏSƏLƏLƏRİ.

§1. Dirixle və Neyman məsələlərinin qoyuluşu

Tutaq ki, qapalı S səthi E_m fəzasını iki sonlu və sonsuz oblastlara ayırır. Bu oblastlara, uyğun olaraq, daxili və xarici oblastlar, bu oblastlar üzrə qoyulan sərhəd məsələlərinə isə daxili və xarici məsələlər deyəcəyik.

Prinsipal fərqi olmadığından biz bu məsələləri daha ümumi elliptik tənliklər üçün söyləyək. Fərz edək ki, xətti elliptik tənlik verilmişdir

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x). \quad (1.1)$$

Xatırladaq ki, əgər ixtiyari $x \in \Omega$ nöqtəsi üçün

$$Q(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

kvadratik forması müsbət müəyyəndirsə, yəni ixtiyari $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \neq 0$ vektoru üçün $Q(x,\xi) > 0$ bərabərsizliyi ödənirsə, onda (1.1) tənliyinə elliptik tənlik deyilir.

Daxili Dirixle məsələsi: Daxili Ω oblastında (1.1) tənliyinin iki dəfə kəsilməz törəmələrə malik elə həllərini tapmalı ki, bu həllər qapalı $\Omega + S$ oblastında kəsilməz olmaqla bu oblastın S sərhəddində verilmiş $\varphi(x)$ kəsilməz funksiyası ilə üst-üstə düşsün

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in S. \quad (1.2)$$

Daxili Neyman məsələsi: Daxili Ω oblastında (1.1) tənliyinin iki dəfə kəsilməz törəmələrə malik olan elə həllini tapmalı ki, bu həll qapalı $\Omega + S$ oblastında kəsilməz törəmələrə malik olsun və S səthinə çəkilən ν nomalının olduğu nöqtələrdə

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu, x_j) = \psi(x) \quad (1.3)$$

sərhəd şərtini ödəsin.

Biz (1.1) tənliyinin sadə halı olan

$$\Delta u = F(x) \quad (1.4)$$

Puasson tənliyi üzərində ətraflı dayanacağıq. Bu halda (1.3) Neyman şərti

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \psi(x) \quad (1.5)$$

şəklini alır.

Analoji qayda ilə xarici Dirixle və Neyman məsələləri də qoyulur. Bu zaman daxili sərhəd məsələlərindən fərqli olaraq, sonsuzluq ətrafında əlavə

$$|u(x)| \leq \frac{c}{\|x\|^{m-2}} \quad (1.6)$$

şərti tələb olunur.

§2. Dirixle məsələsinin həllinin yeganəliyi.

Teorem 2.1. Puasson tənliyi üçün həm daxili, həm də xarici Dirixle məsələlərinin həlli yeganədir.

Əvvəlcə daxili Dirixle məsələsinin həllinin yeganəliyini göstərək. İsbat üçün əksini fərz edək. Tutaq ki, daxili Dirixle məsələsinin iki $u_1(x)$ və $u_2(x)$ həlləri var. Onda bu həllərin fərqi $\upsilon(x) = u_2(x) - u_1(x)$ funksiyası

$$\Delta\upsilon = 0$$

Laplas tənliyini və

$$\upsilon\big|_S = 0$$

sərhəd şərtini ödəyəcək. Maksimum prinsipinə görə, buradan $\upsilon(x) \equiv 0$ və $u_1(x) = u_2(x)$ alarıq.

İndi xarici Dirixle məsələsinin həllinin yeganəliyini göstərək. Fəzanın ölçüsü $m = 2$ olduqda, konform inikas vasitəsilə sonsuz xarici oblast üçün Dirixle məsələsini daxili Dirixle məsələsinə keçirmək olar və onun həllinin yeganəliyini göstərmişik.

Fərz edək ki, $m \geq 3$. Məsələnin iki müxtəlif həlləri olsaydı, həllərin hər biri (1.6) şərtini ödədiyindən, onların fərqi υ funksiyası sonsuz Ω oblastında $\Delta\upsilon = 0$ Laplas tənliyini ödəməklə,

$$|v| \le \frac{c}{|x|^{m-2}}$$

şərtini də ödəyəcək. Oblastın S səthi sonlu olduğundan, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan elə R radiuslu S_R sferası var ki, S səthi bu sferanın əhatə etdiyi kürə daxilində qalır. Bu sfera və S səthi arasında qalan Ω_R oblastında $v(x)$ funksiyası harmonik olamaqla, S səthi üzərində sıfırdır və S_R sferası üzərində $|v| \le \frac{c}{R^{m-2}}$ şərtini ödəyir. İxtiyari ε ədədi qeyd edək və R radiusunu elə seçək ki, $\frac{c}{R^{m-2}} < \varepsilon$ olsun. Onda alarıq ki, sonlu Ω_R oblastında harmonik olan v funksiyası sərhəd üzərində istənilən ε-dan kiçikdir. Buradan, maksimum prisipinə görə Ω_R oblastında $v(x)$ funksiyası $|v(x)| < \varepsilon$ şərtini ödəyir. ε-nun ixtiyariliyindən $v(x) \equiv 0$ alarıq.

§3. Daxili Dirixle məsələsinin həlli. Qrin funksiyası.

Tutaq ki, Ω sərhəddi S olan məhdud oblastdır. Bu oblastda (1.4) Pusson tənliyinin (1.2) sərhəd şərtini ödəyən həllini quraq.

İxtiyari hamar funksiyanın inteqral göstərişi düsturunu

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)|\sigma_1|} \cdot \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi S -$$

$$- \frac{1}{(m-2)|\sigma_1|} \cdot \int_\Omega \frac{\Delta u}{r^{m-2}} d\xi \qquad (3.1)$$

yazaq.

Digər tərəfdən, oblastda hamar olan ixtiyari funksiyalar üçün

$$\int_\Omega (g\Delta u - u\Delta g) d\xi = \int_S \left(g \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) d_\xi S \qquad (3.2)$$

eyniliyi doğrudur.

Tutaq ki, Ω oblastında həm x və həm də ξ dəyişənlərinə nəzərən harmonik olan elə $g(x,\xi)$ funksiyası var ki, bu funksiya oblastın S sərhəddi üzərində

$$g(x,\xi)|_S = \frac{1}{r^{m-2}}, \quad r = |x - \xi| \qquad (3.3)$$

sərhəd şərtini ödəyir. (3.2) eyniliyində u olaraq (4.1) Pusson tənliyinin həllini, g olaraq bu deyilən funksiyanı götürsək,

$$\int_\Omega gF d\xi = \int_S \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) d_\xi S \qquad (3.4)$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərliyin hər tərəfini $\frac{1}{(m-2)|\sigma_1|}$ ifadəsinə vurub, (3.1) düsturundan çıxsaq

$$u(x) = -\int_\Omega G(x,\xi) F(\xi) d\xi - \int_S \frac{\partial G}{\partial \nu} u(\xi) d_\xi S \qquad (3.5)$$

alarıq, burada

$$G(x,\xi) = \frac{1}{(m-2)|\sigma_1|} \left[\frac{1}{r^{m-2}} - g(x,\xi) \right]$$

işarə edilmişdir. Bu $G(x,\xi)$ funksiyasını

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) - \frac{1}{(m-2)|\sigma_1|} g(x,\xi) \qquad (3.6)$$

şəklində yaza bilərik. Bu cür təyin olunmuş $G(x,\xi)$ funksiyasına

Laplas operatoru üçün Dirixle məsələsinin Qrin funksiyası deyilir.

Beləliklə, (4.1) Pusson tənliyinin (1.2) şərtini ödəyən həlli varsa, bu həll Qrin funksiyasının köməyilə

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x,\xi)F(\xi)d\xi - \int_{S} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \nu}\varphi(\xi)d_{\xi}S \qquad (3.7)$$

şəklində göstərilir.

Qrin funksiyasının bəzi xassələrini söyləyək:

1°. Qrin funksiyası $x \neq \xi$ olduqda x və ξ dəyişənlərinə nəzərən Laplas tənliyini ödəyir.

Bu təklifin isbatı Laplas tənliyinin fundamental həllinin xassəsindən və $g(x,\xi)$ funksiyasının harmonikliyindən çıxır.

2°. Qrin funksiyası $x \in S$ və ya $\xi \in S$ olduqda sıfırdır.

Bu (3.3) bərabərliyinin nəticəsidir.

3°. Oblastın daxilində Qrin funksiyası müsbətdir. Bunu isbat edək. Tutaq ki, x oblastın ixtiyari daxili nöqtəsidir. Mərkəzi bu nöqtədə olan və tamamilə oblast daxilində yerləşən δ radiuslu kürə götürək. Bu kürənin sferasını S_{δ}, bu kürəni çıxmaqla oblastın yerdə qalan hissəsini Ω_{δ} ilə işarə edək. Qrin funksiyası Ω_{δ} oblastı daxilində hamonik olmaqla, oblastın S səthi üzərində sıfırdır və S_{δ} sferası üzərində isə, kafi qədər kiçik δ üçün, müsbətdir. Onda maksimum prinsipinə görə Ω_{δ} oblastı daxilində də müsbət olmalıdır. Kürə daxilində isə $G > 0$ olması aşkardır.

Qrin funksiyasının (3.6) ifadəsindən göründüyü kimi, onu qurmaq üçün oblastda x və ξ dəyişənlərinə nəzərən hamonik olan və sərhəddə (3.3) şərtini ödəyən $g(x,\xi)$ funksiyasını qurmaq kifayətdir. Bəzi konkret Ω oblastları üçün, belə $g(x,\xi)$ funksiyasını aşkar şəkildə qurmaq mümkün olur. Biz bunu kürə və yarımfəza üçün göstərəcəyik.

§4. Kürə üçün Qrin funksiyasının qurulması.

Fərz edək ki, Ω mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu kürədir. Bu oblastda Dirixle məsələsinin Qrin funksiyasını quraq.

Bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar ki, $\upsilon(x)$ hər hansı oblastda harmonik funksiyadırsa, onda

$$\upsilon(x) = |x|^{2-m}\, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

funksiyası da öz təyin oblastında harmonik funksiyadır.

Onda Laplas tənliyinin fundamental həlli olan

$$E(x,\xi) = \frac{1}{(m-2)\,|\sigma_1|}\cdot\frac{1}{|x-\xi|^{m-2}} \qquad (4.1)$$

funksiyası ilə bərabər,

$$\upsilon(x,\xi) = \frac{1}{(m-2)\,|\sigma_1|}\cdot|x|^{2-m}\cdot\frac{1}{\left|\dfrac{x}{|x|^2}-\xi\right|^{m-2}}$$

funksiyası da x və ξ dəyişənlərinə nəzərən Laplas tənliyini ödəməlidir.

Aşkar

$$\left|\frac{x}{|x|^2}-\xi\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\left|\frac{x}{|x|}-\xi\,|x|\right|$$

bərabərliyinin köməyi ilə

$$v(x,\xi)=\frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\cdot\frac{1}{\left|\dfrac{x}{|\,x\,|}-\xi\,|\,x\,|\right|^{m-2}}=E\left(\frac{x}{|\,x\,|};\xi\,|\,x\,|\right)$$

şəklində yaza bilərik. Qurulan bu $v(x,\xi)$ funksiyası x və ξ dəyişənlərinə nəzərən vahid radiuslu kürə daxilində harmonik funksiyadır.

Göstərək ki, x və ya ξ nöqtələrindən hər hansı biri vahid radiuslu sfera səthi üzrində olduqda

$$E\left(\frac{x}{|\,x\,|},\xi\,|\,x\,|\right)=E(x,\xi) \qquad (4.2)$$

bərabərliyi ödənir. Dorudan da, $|\,x\,|=1$ olduqda bərabərlik aşkardır. $|\xi|=1$ olduqda isə

$$r_1=\left|\frac{x}{|\,x\,|}-|\,x\,|\,\xi\right|=\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{x_k}{|\,x\,|}-|\,x\,|\,\xi_k\right)^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{x_k^2}{|\,x\,|^2}-2x_k\xi_k+|\,x\,|^2\,\xi_k^2\right)\right]^{1/2}=\left[1-2\sum_{k=1}^{m}x_k\xi_k+|\,x\,|^2\right]^{1/2};$$

$$r=|\,x-\xi\,|=\left[\sum_{k=1}^{m}(x_k-\xi_k)^2\right]^{1/2}=\left[\sum_{k=1}^{m}(x_k^2-2x_k\xi_k+\xi_k^2)\right]^{1/2}=$$

$$=\left[|\,x\,|^2-2\sum_{k=1}^{m}x_k\xi_k+1\right]^{1/2}$$

olduğundan, (4.2) bərabərliyi $r_1=r$ bərabərliyinin nəticəsidir.

İndi

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)-E\left(\frac{x}{|\,x\,|},\xi\,|\,x\,|\right) \qquad (4.3)$$

şəklində funksiya düzəldək. Bu funksiya mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu kürə üçün Dirixle məsələsinin Qrin funksiyasıdır. Bu halda yuxarıda dediyimiz $g(x,\xi)$ funksiyası aşkar şəkildə qurulur və

$$g(x,\xi)=(m-2)\,|\,\sigma_1\,|\,E\left(\frac{x}{|\,x\,|},\xi\,|\,x\,|\right)$$

şəklindədir.

Qurulmuş (4.3) Qrin funksiyasının köməyi ilə vahid radiuslu kürə daxilində Laplas tənliyi üçün qoyulmuş Dirixle məsələsinin həlli üçün

$$u(x)=-\int_{S_1}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[E(x,\xi)-E\left(\frac{x}{|\,x\,|},|\,x\,|\,\xi\right)\right]\varphi(\xi)d_\xi S_1 \qquad (4.4)$$

düsturunu alarıq.

Bu düsturun sağ tərəfindəki inteqralaltı ifadəni hesablayaq

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[E(x,\xi)-E\left(\frac{x}{|\,x\,|},|\,x\,|\,\xi\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}-\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r_1^{m-2}}\right), \qquad (4.5)$$

burada $r=|\,x-\xi\,|$, $r_1=\left|\dfrac{x}{|\,x\,|}-|\,x\,|\,\xi\right|$ işarə edilmişdir.

Qürə səthi üzrə xarici normal radius istiqamətində yönəldiyindən və $|\,\xi\,|=1$ olduqda, $\cos(\nu,\xi_k)=\xi_k$ olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_k) =$$

$$= \frac{-(m-2)}{r^{m-1}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial r}{\partial \xi_k}\cos(\nu,\xi_k) =$$

$$= \frac{m-2}{r^m}\sum_{k=1}^{m}(x_k-\xi_k)\xi_k = \frac{m-2}{r^m}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\xi_k - 1\right).$$

Eyni qayda ilə hesablamaqla

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r_1^{m-2}} = \frac{m-2}{r_1^m}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\xi_k - |x|^2\right)$$

alarıq. Bunları (4.5) və (4.4) düsturlarında nəzərə alsaq, $|\xi| = 1$ olduqda $r_1 = r$ bərabərliyinin köməyilə

$$u(x) = \frac{1}{|\sigma_1|}\int_{S_1}\frac{1-\rho^2}{r^m}\varphi(\xi)d\xi, \quad \rho = |x| \qquad (4.6)$$

düsturunu alarıq. Bu düstura vahid radiuslu kürə üçün Pusson düsturu deyilir.

Beləliklə, biz göstərdik ki, $u(x) \in C^2(\overline{K}_1)$ funksiyası kürə daxilində harmonik və kürənin sferası üzərində verilmiş $\varphi(x)$ funksiyasına bərabərdirsə, onda bu funksiya (4.6) Pusson düsturu ilə göstərilir. Məsələnin həllini sona çatdırmaq üçün göstərmək lazımdır ki, Puasson düsturu ilə göstərilən funksiya doğrudan da vahid radiuslu kürə daxilində harmonik olmaqla, S səthi üzərində sərhəd şərtini ödəyir, yəni ixtiyari $x_0 \in S$ üçün

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \varphi(x_0) \qquad (4.7)$$

bərabərliyi ödənir.

Pusson düsturu ilə ifadə olunan funksiyanın harmonikliyini göstərmək üçün Pusson nüvəsi adlanan

$$\frac{1-\rho^2}{r^m}$$

ifadəsinin harmonikliyini göstərmək kifayətdir. Bunu isə bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar.

İndi isə göstərək ki, vahid radiuslu kürə daxilində götürülmüş istənilən x nöqtəsi üçün

$$\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_1}\frac{1-\rho^2}{r^m}d_\xi S_1 = 1 \qquad (4.8)$$

bərabərliyi ödənir. Doğrudan da $u(x) \equiv 1$ götürsək, bu funksiya $C^2(\overline{K}_1)$ olduğundan onu (4.6) şəklində göstərə bilərdik, bu isə (4.8) deməkdir.

Pusson düsturu ilə göstərilən funksiyanın (4.7) şərtini ödədiyini göstərək. Biz fərz edəcəyik ki, sərhəddə verilən $\varphi(x)$ funksiyası kəsilməz funksiyadır.

Alınmış (4.8) bərabərliyinin hər tərəfini $\varphi(x_0)$-a vuraq və (4.6) düsturundan çıxaq

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_1}\frac{1-\rho^2}{r^m}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]d_\xi S_1\,. \qquad (4.9)$$

Sfera səthi üzrə $\varphi(x)$ funksiyası kəsilməz olduğundan, ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, mərkəzi x_0 nöqtəsində olan δ radiuslu kürənin S_1 sferasından ayırdığı l_δ hissəsi üzrə

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \xi \in l_\delta\,.$$

Aydındır ki, $\xi \in S_1 - l_\delta$ nöqtələri üçün $|\xi - x_0| \geq \delta$ bərabərsizliyi ödənir.

Sfera səthi üzrə inteqralı iki inteqrala ayıraq

$$u(x)-\varphi(x_0)=\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{l_\delta}\frac{1-\rho^2}{r^m}\cdot[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]d_\xi S_1+$$

$$+\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_1-l_\delta}\frac{1-\rho^2}{r^m}\cdot[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]d_\xi S_1\equiv J_1+J_2.$$

Bu inteqralların hər birini ayrılıqda qiymətləndirək. Birinci inteqral ixtiyari $x\in K_1$ nöqtəsi üçün

$$|J_1|\le\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{l_\delta}\frac{1-\rho^2}{r^m}\cdot[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]d_\xi S_1\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2|\sigma_1|}\cdot\int_{l_0}\frac{1-\rho^2}{r^m}d_\xi S_1<\frac{\varepsilon}{2|\sigma_1|}\cdot\int_{S_1}\frac{1-\rho^2}{r^m}d_\xi S_1=\frac{\varepsilon}{2}$$

bərabərsizliyini ödəyir.

İkinci inteqralı x-in x_0-a kafi qədər yaxın qiymətləri üçün qiymətləndirək. Fərz edək ki, $|x-x_0|<\frac{\delta}{2}$. Onda aşkar

$$r=|\xi-x|=|\xi-x_0+x_0-x|\ge|\xi-x_0|-|x_0-x|>\frac{\delta}{2}$$

bərabərsizliyinin köməyilə

$$\frac{1-\rho^2}{r^m}=\frac{(1+\rho)(1-\rho)}{r^m}<\frac{2^{m+1}(1-\rho)}{\delta^m}$$

bərabərsizliyini yaza bilərik.

Sfera üzərində kəsilməz olan $\varphi(x)$ funksiyası mütləq qiymətcə hər hansı M ədədi ilə məhdud olduğundan

$$|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\le|\varphi(\xi)|+|\varphi(x_0)|\le 2M\,.$$

Onda $|x-x_0|<\delta/2$ qiymətləri üçün, $r>\frac{\delta}{2}$ olduğundan

$$|J_2|\le\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_1-l_\delta}\frac{1-\rho^2}{r^m}\cdot|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d_\xi S_1\le$$

$$\le\frac{2M}{|\sigma_1|}\cdot\frac{2^{m+1}(1-\rho)}{\delta^m}\cdot\int_{S_1-l_\delta}d_\xi S_1<\frac{2^{m+2}M(1-\rho)}{\delta^m}.$$

Elə kafi qədər kiçik $h>0$ ədədi götürək ki,

$$\frac{2^{m+2}\cdot Mh}{\delta^m}<\frac{\varepsilon}{2}$$

bərabərsizliyini ödəsin. Onda $|x-x_0|<h$ qiymətləri üçün $1-\rho=|x_0|-|x|<|x_0-x|<h$ və $|J_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ alarıq. Beləliklə, $|x-x_0|<h$ olduqda

$$|u(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

alarıq ki, bu da (4.7) deməkdir. Bununla, (4.6) Pusson düsturunun Dirixle məsələsinin həlli olduğu isbat olur.

Biz Puasson düsturunu vahid radiuslu kürə üçün çıxardıq. İndi $|x|<R$ kürəsi daxilində harmonik, qapalı $|x|\le R$ kürəsi daxilində kəsilməz olan və $S_R:|x|=R$ sferası üçün

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=\varphi(x_0),\quad x_0\in S_R$$

şəritin ödəyən funksiyanı quraq. Bu məqsədlə

$$y=\frac{x}{R}$$

əvəzləməsi edək. Onda

$$v(y)=u(Ry)$$

funksiyası $|y|<1$ kürəsi daxilində harmonik, $|y|\le 1$ qapalı kürəsində kəsilməz və

$$\lim_{y\to y_0} v(y) = \varphi(Ry_0), \quad |y_0| = 1.$$

şərtini ödəyən funksiya olacaq. Vahid radiuslu kürə üçün çıxarılmış (4.6) Pusson düsturuna əsasən

$$v(y) = \frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_1}\frac{1-|y|^2}{r^m}\cdot\varphi(R\xi)d_\xi S_1$$

yaza bilərik, burada $r = |y-\xi|$.

Onda

$$u(x) = v\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_1}\frac{1-\dfrac{|x|^2}{R^2}}{\left|\dfrac{x}{R}-\xi\right|^m}\cdot\varphi(R\xi)d_\xi S_1 =$$

$$= \frac{1}{|\sigma_1|\cdot R}\cdot\int_{S_1}\frac{R^2-\rho^2}{|x-R\xi|^m}\cdot R^{m-1}\varphi(R\xi)d_\xi S_1, \quad \rho = |x|.$$

Axırıncı inteqralda $z = R\xi$ əvəzləməsi aparsaq, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan R radiuslu kürə üçün Puasson düsturunu alırıq

$$u(x) = \frac{1}{|\sigma_1|R}\cdot\int_{S_R}\frac{R^2-\rho}{r^m}\cdot\varphi(z)d_z S_R, \quad r = |x-z|. \quad (4.10)$$

Bu düsturda $\varphi(x)\equiv 1$ götürsək, ixtiyari $x\in K_R$ üçün

$$\frac{1}{|\sigma_1|R}\int_{S_R}\frac{R^2-\rho^2}{r^m}d_\xi S_R = 1 \quad (4.11)$$

bərabərliyi alınır.

Çalışma. Göstərin ki, $|x-x_0|<R$ kürəsi üçün Puasson düsturu

$$u(x) = \frac{1}{|\sigma_1|R}\cdot\int_{|\xi-x_0|=R}\frac{R^2-|x-x_0|^2}{|\xi-x|^m}\cdot\varphi(\xi)d_\xi S_R \quad (4.12)$$

şəklindədir.

§5. Yarımfəza üçün Dirixle məsələsi.

Tutaq ki, Ω oblastı E_m fəzasının $x_m>0$ yuxarı yarımfəzasıdır. Aşağıdakı kimi məsələ qoyaq. Yuxarı $x_m>0$ yarımfəzasında

$$\Delta u = 0 \quad (5.1)$$

Laplas tənliyinin elə həllini tapmalı ki,

$$u\big|_{x_m=0} = \varphi(x_1,\dots,x_{m-1}) \quad (5.2)$$

sərhəd şərtini ödəsin.

Bu məsələyə yuxarı yarımfəza üçün Dirixle məsələsi deyilir.

Əvvəlcə fərz edək ki, qoyulan məsələnin həlli, bütün $x\in\Omega$ üçün $|x|\to\infty$-da

$$|u(x)|\le\frac{M}{|x|^\alpha}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|\le\frac{M}{|x|^{\alpha+1}} \quad (5.3)$$

şərtlərini ödəyir, burada M və α müsbət sabitlərdir.

Göstərmək olar ki, (5.3) şərtləri daxilində qoyulmuş məsələnin həlli (3.7) düsturunun köməyilə

$$u(x) = \frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{\xi_m=0}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi_m}\varphi(\xi_1,\dots,\xi_{m-1})d\xi_1\cdots d\xi_{m-1} \quad (5.4)$$

şəklində ifadə olunur, burada $G(x,\xi)$ (5.1), (5.2) məsələsinin Qrin funksiyasıdır. Bu funksiyanı quraq. Bunun üçün Qrin funksiyasının (3.6) ifadəsindən göründüyü kimi, elə $g(x,\xi)$ funksiyası qurmaq kifayətdir ki, bu funksiya x və ξ dəyişənlərinə nəzərən yuxarı yarımfəzada harmonik olmaqla, $x_m = 0$ və ya $\xi_m = 0$ olduqda (3.3) şərtini ödəsin.

Tutaq ki, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ və $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ yuxarı yarımfəzanın nöqtələridir. Yarımfəzanın sərhəddi $\xi_m = 0$ müstəvisinə nəzərən ξ nöqtəsilə simmetrik olan $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, -\xi_m)$ nöqtəsinə baxaq və $r = |x-\xi|$, $r_1 = |x-\xi'|$ işarələri qəbul edək. Aydındır ki,

$$g(x,\xi) = \frac{1}{r_1^{m-2}}$$

funksiyası göstərilən şərtləri ödəyən funksiyadır.

Beləliklə, yuxarı yarımfəza üçün Qrin funksiyası

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) - \frac{1}{(m-2)|\sigma_1|} \cdot \frac{1}{r_1^{m-2}} = E(x,\xi) - E(x,\xi') \quad (5.5)$$

şəklində olacaq.

İndi (5.4) düsturunun köməyilə Dirixle məsələsinin həllini yazaq. Bu zaman alınan

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_m} = \frac{1}{(m-2)|\sigma_1|} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \frac{1}{r_1^{m-2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{|\sigma_1|} \cdot \left[\frac{x_m - \xi_m}{r^m} + \frac{x_m + \xi_m}{r_1^m} \right]$$

münasibətindən, $\xi_m = 0$ olduqda $r = r_1$ olduğundan,

$$\left. \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_m} \right|_{\xi_m = 0} = \frac{2x_m}{|\sigma_1| \cdot r^m}$$

alarıq. Bunu (5.4) düsturunda nəzərə alsaq, yarımfəza üçün Dirixle

məsələsinin həllini

$$u(x) = \frac{2x_m}{|\sigma_1|} \int\limits_{\xi_m = 0} \frac{\varphi(\xi_1, \dots, \xi_{m-1})}{r^m} d\xi_1 \cdots d\xi_{m-1} \quad (5.6)$$

şəklində yaza bilərik, burada $r^2 = \sum\limits_{k=1}^{m-1} (x_k - \xi_k)^2 + x_m^2$.

Bu alınan düstura yarımfəza üçün Puasson düsturu deyilir.

Göstərmək olar ki, (5.2) şərtində verilən $\varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$ funksiyası kəsilməz olmaq bərabər, həm də

$$|\varphi(x_1, \dots, x_{m-1})| \le \frac{M}{\rho^\alpha}, \quad \rho = |x|, \quad M > 0,\ \alpha > 0$$

şərtini ödəyirsə, onda (5.6) inteqralı müntəzəm yığılır, onun nəticəsi $x_m > 0$ yarımfəzasında harmonik funksiyadır, (5.3) şərtini və

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}), \quad x_m > 0,\ y_m = 0$$

sərhəd şərtini ödəyir.

§6. Liuvill teoremi.

Teorem 6.1. Bütün fəzada harmonik olan $u(x)$ funksiyası aşağıdan və ya yuxarıdan məhduddursa, onda eynilik kimi sabitdir.

Tutaq ki, $u(x)$ bütün fəzada harmonik olmaqla, yuxarıdan məhduddur $u(x) \le M$. Onda $-u(x)$ funksiyası harmonik olmaqla, aşağıdan məhdud olacaq $-u(x) \ge -M$. Ona görə də yalnız aşağıdan məhdud olan hala baxmaq kifayətdir: $u(x) \ge M$. Yeni $u(x) - M$ funksiyası ixtiyari sonlu oblastda harmonik olmaqla, mənfi deyil. Beləliklə, teoremi $u(x) \ge 0$ olan funksiyalar üçün isbat etmək kifayətdir.

İxtiyari x nöqtəsi götürək və mərkəzi koordinat başlanğıcında olan elə R radiuslu K_R kürəsi quraq ki, x nöqtəsi bu kürənin daxilində qalsın. Kürənin sferasını S_R -lə işarə etsək,

$$u(x)=\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}u(\xi)d_\xi S_R\,,\quad \rho=|x|$$

Puasson düsturunu yaza bilərik.

Orta qiymət teoreminə görə

$$u(0)=\frac{1}{|\sigma_1|R^{m-1}}\cdot\int_{S_R}u(\xi)d_\xi S_R\,.$$

Üçbucaq bərabərsizliyinə əsasən $R-\rho\le r\le R+\rho$ olduğundan, $u(x)\ge 0$ bərabərsizliyinin köməyilə

$$u(x)\le\frac{R+\rho}{R(R-\rho)^{m-1}}\cdot\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}u(\xi)d_\xi S_R=\frac{(R+\rho)R^{m-2}}{(R-\rho)^{m-1}}u(0)\,,$$

$$u(x)\ge\frac{R-\rho}{R(R+\rho)^{m-1}}\cdot\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}u(\xi)d_\xi S_R=\frac{(R-\rho)R^{m-2}}{(R+\rho)^{m-1}}u(0)$$

bərabərsizliklərini alırıq ki, bunlar da

$$\frac{(R-\rho)R^{m-2}}{(R+\rho)^{m-1}}u(0)\le u(x)\le\frac{(R-\rho)R^{m-2}}{(R-\rho)^{m-1}}u(0)$$

deməkdir. Bu bərabərsizlik müsbət $u(x)$ harmonik funksiyasının ixtiyari nöqtədəki qiymətini, onun koordinat başlanğıcındakı qiymətilə qiymətləndirir. Bu bərabərsizliyə Harnak bərabərsizliyi deyilir. Bu bərabərsizlikdə $R\to\infty$ limitə keçsək,

$$u(0)\le u(x)\le u(0)$$

alarıq. Bu da $u(x)\equiv C$ deməkdir.

§7. Kürə üçün xarici Dirixle məsələsi.

Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən R radiuslu

kürənin xaricində harmonik olan elə $u(x)$ funksiyası quraq ki, bu funksiya kürənin S_R sferası üzərində

$$u\big|_{S_R}=\varphi(x) \qquad (7.1)$$

sərhəd şərtini ödəsin.

Göstərək ki, $\varphi(x)$ kəsilməz funksiya olduqda, bu məsələnin həlli

$$u(x)=\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}\varphi(\xi)d_\xi S_R \qquad (7.2)$$

düsturu ilə verilir, burada $r=|x-\xi|$, $\rho=|x|$.

Verilmiş funksiyanın Laplas tənliyini ödədiyini bilavasitə yoxlamaqla göstərmək olar. Kafi qədər böyük $|x|$-lər üçün funksiyanın xassəsini öyrənək. Tutaq ki, $\rho>2R$. Onda $r>\rho-R>\frac{1}{2}\rho$ olduğundan, (7.2) bərabərliyi ilə ifadə olunan funksiya üçün

$$|u(x)|\le\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}|\varphi(\xi)|\,d_\xi S_R<$$

$$<\frac{1}{\rho^{m-2}}\cdot\frac{2^m}{|\sigma_1|R}\cdot\int_{S_R}|\varphi(\xi)|\;d_\xi S_R=\frac{C}{\rho^{m-2}} \qquad (7.3)$$

bərabərsizliyini alarıq. Deməli, $u(x)$ xarici oblastda harmonik funksiyadır.

Bu funksiyanın (7.1) şərtini ödədiyini, yəni ixtiyari $x_0\in S_R$ üçün

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=\varphi(x_0) \qquad (7.4)$$

olduğunu göstərək. Bu məqsədlə x nöqtəsilə S_R sferasına nəzərən simmetrik olan x' nöqtəsinə baxaq. Verilmiş x nöqtəsilə S_R sferasına nəzərən simmetrik olan x' nöqtəsi, elə nöqtəyə deyilir ki, bu nöqtə x nöqtəsilə mərkəzdən çıxan eyni şüa üzərində yerləşməklə, bu nöqtələrin mərkəzdən olan məsafəsinin hasili R^2-na bərabərdir

$$|x|\cdot|x'|=R^2. \tag{7.5}$$

Aydındır ki, x nöqtəsi R radiuslu kurənin xaricindədirsə, onunla simmetrik olan nöqtə kürənin daxilində olacaq. Asanlıqla göstərə bilərik ki, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ və $x'=(x_1',x_2',\ldots,x_m')$ nöqtələrinin koordinatları arasında $x_k'=\dfrac{\rho'}{\rho}x_k,\quad k=\overline{1,m}$, $\rho'=|x'|$ münasibətləri doğrudur. Sfera üzərində götürülmüş ixtiyari $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)$ nöqtəsi üçün $|\xi|=R$ olduğunu yada salaq. Onda, (7.5)-in köməyi ilə

$$r_1=|x'-\xi|=\left[\sum_{k=1}^m(x_k'-\xi_k)^2\right]^{1/2}=\left[\sum_{k=1}^m\left(\frac{\rho'}{\rho}x_k-\xi_k\right)^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\rho'^2-2\frac{\rho'}{\rho}\sum_{k=1}^m x_k\xi_k+\sum_{k=1}^m\xi_k^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\frac{R^4}{\rho^2}-2\frac{R^2}{\rho^2}\sum_{k=1}^m x_k\xi_k+R^2\right]^{1/2}=\frac{R}{\rho}\left[R^2-2\sum_{k=1}^m x_k\xi_k+\rho^2\right]^{1/2}=$$

$$=\frac{R}{\rho}\left[\sum_{k=1}^m\xi_k^2-2\sum_{k=1}^m x_k\xi_k+\sum_{k=1}^m x_k^2\right]^{1/2}=\frac{R}{\rho}\cdot r$$

bərabərliyini alarıq.

Buradan

$$\frac{1}{r}=\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1} \tag{7.6}$$

olduğunu yaza bilərik. İndi x nöqtəsi kürənin xaricində olduqda

$$J=\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}d_\xi S_R$$

inteqralını hesablayaq. Yuxarıdakı (7.5) və (7.6) bərabərliklərinə əsasən

$$J=\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr_1^m}\cdot\left(\frac{R}{\rho}\right)^m d_\xi S_R=$$

$$=\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\cdot\frac{1}{|\sigma_1|}\cdot\int_{S_R}\frac{R^2-\rho^2}{Rr_1^m}d_\xi S_R$$

alarıq. Yada salaq ki, burada $x\in K_R,\ r_1=|x'-\xi|,\ \rho'=|x'|$. Belə inteqralı isə biz yuxarıda (4.11) düsturu ilə hesablamışdıq. Beləliklə, kürənin xaricində olan ixtiyari x nöqtəsi üçün

$$\frac{1}{|\sigma_1|}\int_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}d_\xi S_R=\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \tag{7.7}$$

bərabərliyini almış olarıq. Bu bərabərliyin hər tərəfini $\varphi(x_0)$-a vuraq və (7.2) düsturundan çıxaq, nəticədə

$$u(x)-\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\varphi(x_0)=\frac{1}{|\sigma_0|}\cdot\int_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}\cdot[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]d_\xi S_R$$

alarıq.

Daxili Dirixle məsələsində olduğu kimi hərəkət etməklə

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)-\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\varphi(x_0)\right]=0$$

bərabərliyini isbat edərik.

Sonra isə

$$|u(x)-\varphi(x_0)| \le \left| u(x) - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \varphi(x_0) \right| + |\varphi(x_0)| \cdot \left[1 - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \right]$$

bərabərsizliyində, $x \to x_0$-da sağ tərəfdəki hər iki toplanan sıfra yaxınlaşdığından (7.4) bərabərliyini alarıq.

Paraqrafın sonunda harmonik funksiyanın törəmələrinin sonsuzluq ətrafında xassəsinə nəzər salaq. Göstərdiyimiz kimi, R radiuslu sferanın xaricində harmonik funksiya

$$u(x) = \frac{1}{|\sigma_1| R} \cdot \int_{S_R} \frac{\rho^2 - R^2}{r^m} u(\xi) d_\xi S_R$$

düsturu ilə işarə olunur. Bu funksiyanın törəmələrini hesablayaq və bunları qiymətləndirmək

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \le \frac{1}{|\sigma_1| R} \cdot \int_{S_R} \left| \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^m}\right)\right| \cdot |u(\xi)| d_\xi S_R, \; k = 1,2,\dots,m. \quad (7.8)$$

Kafi qədər böyük $|x|$-lər üçün $r > \frac{1}{2}\rho$ olduğundan

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^m}\right)\right| = \left| \frac{2x_k}{r^m} - \frac{m(\rho^2 - R^2)}{r^{m+1}} \cdot \frac{x_k - \xi_k}{r} \right| <$$

$$< \frac{2|x_k|}{r^m} + \frac{m\rho^2}{r^{m+1}} \cdot \frac{|x_k - \xi_k|}{r} <$$

$$< \frac{2 \cdot 2^m \cdot \rho}{\rho^m} + \frac{m \cdot 2^{m+1} \cdot \rho^2}{\rho^{m+1}} = \frac{2^{m+1}(m+1)}{\rho^{m-1}}.$$

Bunu (7.8)-də nəzərə alsaq, harmonik funksiyanın törəmələri üçün

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \le \frac{C_1}{\rho^{m-1}}, \quad k = 1,2,\dots,m \quad (7.9)$$

qiymətləndirilmələrini alarıq, burada

$$C_1 = \frac{2^{m+1}(m+1)}{|\sigma_1| R} \cdot \int_{S_R} |u(\xi)| d_\xi S_R .$$

§8. Neyman məsələsi üçün yeganəlik teoremi.

Əvvəlcə (1.4), (1.5) daxili Neyman məsələsinin həllinin yeganəliyini öyrənək. Aydındır ki, $u(x)$ funksiyası bu məsələnin həllidirsə, onda ixtiyari C sabiti üçün $u(x)+C$ funksiyası da bu məsələnin həllidir. Ona görə də daxili Neyman məsələsinin həllinin müəyyən sabit toplanan dəqiqliyi ilə yeganəliyindən söhbət gedə bilər.

Teorem 8.1. Daxili Neyman məsələsinin həlləri sabit toplananla fərqlənirlər.

Tutaq ki, məsələnin iki $u_1(x)$ və $u_2(x)$ həlləri var. Onda onların fərqi olan $v(x) = u_1(x) - v_2(x)$ funksiyası

$$\Delta v = 0 \quad (8.1)$$

tənliyini və

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_S = 0 \quad (8.2)$$

sərhəd şərtini ödəyir. Teoremi isbat etmək üçün göstərmək kifayətdir ki, $v(x) \equiv const$.

İxtiyari $v(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ funksiyası üçün doğru olan

$$\int_{\Omega}\left[v\Delta v+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right]dx=\int_S v\frac{\partial v}{\partial \nu}d_{\xi}S \qquad (8.3)$$

eyniliyində, $v(x)$ olaraq (8.1), (8.2) məsələsinin həllini götürsək

$$\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx=0$$

alarıq. Buradan $v(x)\equiv C$ alınar.

Teorem 8.2. Fəzanın ölçüsü $m\geq 3$ olduqda xarici Neyman məsələsinin həlli yeganədir.

Əksini fərz edək. Fərz edək ki, $u_1(x)$ və $u_2(x)$ funksiyaları xarici Neyman məsələsinin həlləridir. Onda onların fərqi $v(x)=u_1(x)-u_2(x)$ sonsuz oblastda harmonik olmaqla

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_S=0$$

sərhəd şərtini ödəyir. Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan elə kafi qədər böyük R radiuslu S_R sferası çəkək ki, S səthi tamamilə bu sferanın daxilində qalsın. Bu S_R və S səthləri ilə əhatə olunmuş oblastı Ω_R-lə işarə edək. İxtiyari $v(x)\in\ \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ üçün doğru olan (8.3) düsturunu Ω_R oblastına tətbiq etsək

$$\int_{\Omega_R}\left[v\Delta v+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2\right]dx=\int_S v\frac{\partial v}{\partial \nu}d_{\xi}S+\int_{S_R} v\frac{\partial v}{\partial \nu}d_{\xi}S_R$$

alarıq. Bu bərabərlikdə $v(x)$ olaraq xarici Neyman məsələsinin həlləri fərqini götürsək,

$$\Delta v=0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_S=0$$

olduğundan

$$\int_{\Omega_R}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx=\int_{S_R} v\frac{\partial v}{\partial \nu}d_{\xi}S_R$$

alarıq. Qeyri-məhdud oblastda harmonik olan funksiyanın və onun törəmələrinin sonsuzluqda xassələrini ifadə edən (7.3) və (7.9) bərabərsizliklərinin köməyi ilə

$$\int_{S_R} v\frac{\partial v}{\partial \nu}d_{\xi}S_R<C\cdot C_1\int_{S_R}\frac{1}{R^{m-2}}\cdot\frac{1}{R^{m-1}}d_{\xi}S_R=$$

$$=\frac{C\cdot C_1}{R^{2m-3}}\cdot|\sigma_1|\cdot R^{m-1}=\frac{C\cdot C_1\cdot|\sigma_1|}{R^{m-2}} \qquad (8.5)$$

qiymətləndirməsini alarıq. İxtiyari $\varepsilon>0$ qeyd edək və R radiusunu elə seçək ki, $\dfrac{C\cdot C_1\cdot|\sigma_1|}{R^{m-2}}<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin. Onda bu şərti ödəyən R-lər üçün

$$\int_{\Omega_R}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx<\varepsilon$$

bərabərsizliyini alarıq. Buradan

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}=0, \quad k=1,2,\ldots,m$$

bu isə o deməkdir ki, $v(x)\equiv C$. Lakin $v(x)$ harmonik funksiya olmaqla, sonsuzluqda sıfra yaxınlaşdığından, $v(x)\equiv 0$ alarıq. Bununla yeganəlik teoremi isbat olur.

Qeyd 8.1. Fəzanın ölçüsü $m=2$ olduqda xarici Neyman məsələsinin həlləri sabit toplananla fərqlənə bilərlər.

Qeyd 8.2. Daxili (1.4),(1.5) Neyman məsələsinin ümumiyyətlə həlli olmaya ola bilər. Doğrudan da $u(x)\in C^2(\Omega)\cap\ \cap C^1(\overline{\Omega})$

funksiyaları üçün doğru olan

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{S} \frac{\partial u}{\partial \nu} d_{\xi} S$$

düsturundan görünür ki, qoyulmuş Neyman məsələsinin həlli olması üçün, tənliyin sağ tərəfi və sərhəd funksiyası

$$\int_{\Omega} F dx = \int_{S} \varphi(\xi) d_{\xi} S \tag{8.6}$$

şərti ödəməlidirlər. Bu şərt (1.4), (1.5) Neyman məsələsinin həllinin olması üçün zəruri şərtdir.

VII FƏSİL.

POTENSİALLAR NƏZƏRİYYƏSİ.

§1. Lyapunov səthləri.

Potensiallar nəzəriyyəsinin şərhi üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edən Lyapunov səthləri ilə tanış olaq.

Tutaq ki, m ölçülü fəzada hər hansı S səthi verilmişdir. Fərz edək ki, bu səthin hər nöqtəsində səthə çəkilən normal var. Səth üzərində götürülmüş x_0 nöqtəsində lokal koordinat sistemi, elə $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ dekart koordinat sisteminə deyilir ki, bu koordinat sisteminin başlanğıcı x_0 nöqtəsində yerləşməklə, ξ_m oxu həmin nöqtədə səthə çəkilən normal istiqamətində, qalan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ oxları isə bir-biri ilə ortoqonal olmaq şərtilə, səthə çəkilən toxunan müstəvi üzərində yerləşirlər.

Əgər verilmiş S səthi aşağıdakı şərtləri ödəyirsə:

1$^{\mathrm{o}}$.Səthin ixtiyari x nöqtəsi üçün, mərkəzi bu nöqtədə olan elə d

radiuslu γ_d sferası var ki, bu sferanın S səthindən ayırdığı S_x səth hissəsinin tənliyi, bu nöqtədəki lokal koordinat sistemində

$$\xi_m = f(\xi'), \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}) \tag{1.1}$$

şəklində göstərilə bilər.

2$^{\mathrm{o}}$. Elə $H > 0$ və $0 < \alpha < 1$ sabitləri var ki, iki ixtiyari $\xi, \eta \in S_x$ nöqtələri və toxunan müstəvi üzərində yerləşən ixtiyari t istiqaməti üçün

$$\left| \frac{\partial f(\xi')}{\partial t} - \frac{\partial f(\eta')}{\partial t} \right| \le H \left[\sum_{k=1}^{m-1} (\xi_k - \eta_k)^2 \right]^{\alpha/2} \tag{1.2}$$

bərabərsizliyi ödənir, onda S səthinə Lyapunov səthi deyilir.

Bu tərifdəki γ_d sferasına Lyapunov sferası, d-yə isə Lyapunov radiusu deyilir. Aydındır ki, d Lyapunov radiusudursa, ixtiyari $d_1 < d$ də Lyapunov radiusudur.

İxtiyari $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in S_x$ nöqtəsi götürək və

$$\rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2, \quad r^2 = \rho^2 + \xi_m^2$$

işarələri qəbul edək. (1.2) bərabərsizliyində $\eta = x$ götürsək, $f(x,0)$, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial t} = 0$ olduğundan, bu funksiyasının törəmələri üçün

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \le H \rho^{\alpha} \tag{1.3}$$

və həm də

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \right| \le H r^{\alpha}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{1.4}$$

bərabərsizliklərini alarıq.

İxtiyari $(\xi', \xi_m) \in S_x$ nöqtəsi üçün $\xi_m = f(\xi')$ kəmiyyətini qiymətləndirək. Bunun üçün ξ' və x nöqtələrini birləşdirən parçasının cari nöqtəsini $\eta' = (\eta_1, \dots, \eta_{m-1})$ və $\rho' = |x - \eta'|$ işarə edək. Onda $f(0,\dots,0) = 0$ bərabərliyinin və (1.3) bərabərsizliyinin köməyilə

$$|\xi_m| = |f(\xi')| = \left|\int_0^\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} d\rho'\right| \le \int_0^\rho \left|\frac{\partial f}{\partial \rho'}\right| d\rho' \le$$

$$\le H\int_0^\rho \rho'^\alpha d\rho' = c\rho^{\alpha+1}, \quad c = \frac{H}{\alpha+1} \tag{1.5}$$

və nəhayət

$$|\xi_m| = |f(\xi')| \le cr^{\alpha+1}, \quad c = \frac{H}{1+\alpha} \tag{1.5$_1$}$$

bərabərsizliklərini alarıq.

Verilmiş S səthinə x və ξ nöqtələrində çəkilən normalları, uyğun olaraq, n və ν ilə işarə edək. Tutaq ki, $\xi \in S_x$ və $r = |x - \xi|$. Onda

$$\cos(n, r) = \cos(\xi_m, r) = \frac{\xi_m}{r}$$

olduğundan, (1.5$_1$) bərabərsizliyini nəzərə alsaq

$$|\cos(n, r)| \le Cr^\alpha \tag{1.6}$$

bərabərsizliyini və buradan da x və ξ nöqtələrinin yerini dəyişməklə

$$|\cos(\nu, r)| \le Cr^\alpha \tag{1.7}$$

bərabərsizliyini alarıq.

İsbat olunur ki, S qapalı Lyapunov səthidirsə, onda elə C sabiti var ki, ixtiyari $x \in E_m$ üçün

$$\int_S \left|\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| d_\xi S \le C, \tag{1.8}$$

bərabərsizliyi ödənir. Biz bu faktı isbatsız verəcəyik. Onun isbatını

ədəbiyyatda tapmaq olar[1)].

Yönəldici kosinusların

$$\cos(\nu, \xi_k) = \pm \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}}{\sqrt{1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2}}, \quad k = 1,2,\dots, m-1$$

ifadəsindən, (1.4) bərabərsizliklərinin köməyilə

$$|\cos(\nu, \xi_k)| \le Hr^\alpha, \quad k = 1,2,\dots, m-1 \tag{1.9}$$

alarıq.

§2. İkiqat lay potensialının düz qiyməti.

Tutaq ki, S qapalı Lyapunov səthi və $\mu_1(\xi)$ bu səth üzərində kəsilməz funksiyadır. Sıxlığı $\mu_1(\xi)$ olan

$$u_1(x) = \int_S \mu_1(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S, \quad r = |x - \xi| \tag{2.1}$$

ikiqat lay potensialının S səthi ilə ortaq nöqtəsi olmayan ixtiyari oblastda harmonik funksiya olduğunu demişdik. S səthi üzərində isə inteqralaltı funksiyanın $x = \xi$ nöqtəsində məxsusiyyəti var. Bununla belə, göstərəcəyik ki, $x \in S$ olduqda da ikiqat lay potensialının müəyyən qiyməti var və x nöqtəsi S səthi üzərində dəyişdikdə bu qiymət kəsilməz dəyişir. İkiqat lay potensialının bu cür təyin olunmuş qiymətinə, onun düz qiyməti deyilir və onu $\overline{u_1(x)}$ şəklində işarə edəcəyik.

Əvvəlcə $x \in S$ olduqda (2.1) inteqralının yığılanlığını göstərək.

---

1) бах [ ]

İstiqamətə görə törəməni hesablayaq.

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_k) =$$

$$= -\frac{m-2}{r^{m-1}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial r}{\partial \xi_k}\cos(\nu,\xi_k) = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k - x_k}{r}\cos(\nu,\xi_k) =$$

$$= -\frac{m-2}{r^{m-1}}\sum_{k=1}^{m}\cos(r,\xi_k)\cos(\nu,\xi_k) = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(\nu,r).$$

Beləliklə,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(\nu,r) \qquad (2.2)$$

olduğunu alırıq.

Sıxlıq $\mu_1(\xi)$ kompakt S çoxluğunda kəsilməz olduğundan, həm də məhduddur $|\mu_1(\xi)| \le M$. Onda (1.7) və (2.2) münasibətlərinin köməyilə

$$\left|\mu_1(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| \le |\mu_1(x)| \cdot \frac{(m-2)|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}} \le CM(m-2)\frac{1}{r^{m-1-\alpha}}$$

bərabərsizliyini alırıq ki, bu da (2.1) inteqralının yığılanlığını göstərir. İkiqat lay potensialının $x \in S$ olduqda kəsilməzliyi isə zəif məxsusiyyətli inteqral operatorun kəsilməz funksiyanı kəsilməz funksiyaya keçirməsi xassəsindən çıxır.

§3. Qauss inteqralı.

Sıxlığı eynilik kimi vahid olan ikiqat lay potensialına

$$w_0(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S \qquad (3.1)$$

Qauss inteqralı deyilir.

Əgər S qapalı Lyapunov səthidirsə, onda Qauss inteqralı üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$w_0(x) = \begin{cases} -(m-2)|\sigma_1|, & x \text{ нюгтяси } S\text{-индахилиндя олдугда} \\ 0, & x \text{ нюгтяси } S\text{-инхариъиндя олдугда} \\ -\dfrac{(m-2)|\sigma_1|}{2}, & x \in \Gamma \text{ олдугда} \end{cases} \qquad (3.2)$$

burada, $|\sigma_1|$ – yuxarıda dediyimiz kimi, m ölçülü fəzada vahid radiuslu sferanın səthidir.

Əvvəlcə birinci hala baxaq. Tutaq ki, x nöqtəsi S səthinin daxilindədir. Mərkəzi bu nöqtədə olan və tamamilə S səthinin əhatə etdiyi oblastda yerləşən ε radiuslu S_ε sferası götürək. Aydındır ki, sərhəddi $S \cup S_\varepsilon$ olan oblast daxilində $\dfrac{1}{r^{m-2}}$ funksiyası harmonik funksiyadır. Onda məlum olduğu kimi

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S + \int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S_\varepsilon = 0$$

bərabərliyi doğrudur.

Sfera səthi üzrə xarici normal radiusun əksinə yönəldiyindən

$$\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S_\varepsilon = -\int_{S_\varepsilon}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi S_\varepsilon = (m-2)\int_{S_\varepsilon}\frac{1}{r^{m-1}}\,d_\xi S_\varepsilon =$$

$$= \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\int_{S_\varepsilon} d_\xi S_\varepsilon = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\cdot|\sigma_1|\cdot\varepsilon^{m-1} = (m-2)|\sigma_1|$$

alırıq ki, bununla (3.2) düsturlarından birincisi isbat olur.

İndi tutaq ki, x nöqtəsi S səthinin əhatə etdiyi oblastın xaricindədir. Onda $\dfrac{1}{r^{m-2}}$ funksiyası S-in əhatə etdiyi oblastda harmonik funksiyadır və buna görə də

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = 0 .$$

Nəhayət, tutaq ki, $x \in S$. Lyapunov radiusundan kiçik ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi götürək və mərkəzi x nöqtəsində olan ε radiuslu C_ε sferasını çəkək. Bu sferanın S səthinin əhatə etdiyi oblast daxilində qalan hissəsini C'_ε-la, S səthinin sferanın xaricində qalan hissəsini S'_ε-la işarə edək. Aydındır ki, $\dfrac{1}{r^{m-2}}$, $r = |x - \xi|$ funksiyası $S'_\varepsilon \cup C'_\varepsilon$ səthilə əhatə olunmuş oblast daxilində harmonik funksiyadır və buna görə də

$$\int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S'_\varepsilon + \int_{C'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi C'_\varepsilon = 0 .$$

Buradan $\varepsilon \to 0$ şərtilə limitə keçsək, birinci toplanan Qauss inteqralını verdiyindən

$$w_0(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi C'_\varepsilon$$

alarıq. Sağ tərəfdəki inteqralda normal radiusun əksinə yönəldiyindən

$$w_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C'_\varepsilon} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi C'_\varepsilon =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C'_\varepsilon} \frac{m-2}{r^{m-1}} d_\xi C'_\varepsilon = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C'_\varepsilon} d_\xi C'_\varepsilon$$

Kafi qədər kiçik ε üçün C'_ε səthi yarımsferaya yaxındır[1)] və buna görə də axırıncı bərabərlikdən

$$w_0(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \cdot \frac{|\sigma_1|\, \varepsilon^{m-1}}{2} = -\frac{(m-2) \cdot |\sigma_1|}{2}$$

alarıq. Bununla (3.2) düsturunun üçüncüsü isbat olur.

[1)] Бу фактын дягиг исбаты ядябиййатда вар.

§4. İkiqat lay potensialının limit qiymətləri.

Qauss inteqralının misalında gördük ki, ikiqat lay potensialı fəzada ümumiyyətlə kəsilən funksiyadır. Belə ki, qapalı S səthinin əhatə etdiyi oblastın daxilində olan x-lər üçün Qauss inteqralının bir sabit qiyməti, oblastın xaricində olan nöqtələr üçün başqa sabit qiyməti, nəhayət nöqtə S səthi üzərində olduqda isə üçüncü sabit qiyməti var. Biz göstərəcəyik ki, x nöqtəsi S səthi üzərində götürülmüş x_0 nöqtəsinə daxildən və xaricdən yaxınlaşdıqda ikiqat lay potensialının limit qiymətləri var və bu qiymətlər ikiqat lay potensialının x_0 nöqtəsindəki düz qiymətilə müəyyən münasibətlə bağlıdırlar.

Əvvəlcə, sonra istifadə edəcəyimiz bir lemma isbat edək.

Lemma 4.1. Tutaq ki, S qapalı Lyapunov səthi, $\mu(\xi)$ isə bu səth üzərində verilmiş kəsilməz funksiyadır. Onda $\mu(x)$ funksiyasının sıfra çevrildiyi nöqtələrdə $w(x)$ ikiqat lay potensialı kəsilməz funksiyadır.

Fərz edək ki, $x_0 \in S$ və $\mu(x_0) = 0$. Bu nöqtədə

$$w(x) = \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S$$

funksiyasının kəsilməzliyini göstərək. Mərkəzi x_0 nöqtəsində və radiusu Lyapunov kürəsinin radiusundan kiçik olan δ radiuslu sfera çəkək. Bu sferanın S səthindən ayırdığı daxili hissəni S_1, xarici hissəni isə S_2 ilə işarə edək. Buna uyğun olaraq $w(x)$ inteqralı iki hissəyə ayrılır

$$w_i(x) = \int_{S_i} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S, \quad i = 1,2.$$

İnteqralların x_0 nöqtəsindəki düz qiymətlərini $\overline{w_i(x_0)}$ işarə

edək və belə fərqə baxaq

$$|w(x) - \overline{w(x_0)}| = |w_1(x) + w_2(x) - \overline{w_1(x_0)} - \overline{w_2(x_0)}| \le$$

$$\le |w_1(x)| + |\overline{w_1(x_0)}| + |w_2(x) - \overline{w_2(x_0)}|. \qquad (4.1)$$

Sağ tərəfdəki toplananları qiymətləndirək. İxtiyari kafi qədər kiçik $\varepsilon > 0$ qeyd edək və δ radiusunu elə seçək ki, S_1 səthinin $|\xi - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən nöqtələri üçün

$$|\mu(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

bərabərsizliyi ödənsin, burada C sabiti (1.8) bərabərsizliyini ödəyən sabitdir. Aydındır ki, $\mu(x_0) = 0$ və $\mu(\xi)$ kəsilməz olduğundan, belə seçim mümkündür. Onda

$$|w_1(x)| \le \int_{S_1} |\mu(\xi)| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi S_1 <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3C} \cdot \int_S \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi S = \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.2)$$

Eyni qayda ilə

$$|\overline{w_1(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.3)$$

alarıq. Götürdüyümüz δ radiusunu qeyd edək. Aşkardır ki, $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ şərtini ödəyən x nöqtələri və ixtiyari $\xi \in S_2$ üçün

$$r = |x - \xi| = |x - x_0 + x_0 - \xi| \ge |\xi - x_0| - |x - x_0| > \frac{\delta}{2}$$

olduğundan $w_2(x)$ inteqralında inteqralaltı funksiya kəsilməzdir və buna görə də, elə $\eta > 0$ ədədi var ki, $|x - x_0| < \eta$ olduqda

$$|w_2(x) - \overline{w_2(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.4}$$

olur. Beləliklə, alırık ki, $|x - x_0| < \min\left(\frac{\delta}{2}, \eta\right)$ şərtini ödəyən x-lər üçün (4.2), (4.3), (4.4) bərabərsizlikləri ödənir. Bunları (4.1)-də nəzərə alsaq

$$|w(x) - \overline{w(x_0)}| < \varepsilon$$

alarıq ki, bu da $w(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməzliyi deməkdir.

İndi ikiqat lay potensialının limit qiymətlərinə baxaq. Tutaq ki, S qapalı Lyapunov səthi fəzanı iki hissəyə ayırır. Bu hissələrdən sonlusuna daxili, sonsuzuna isə xarici oblast deyək və bu oblastları uyğun olaraq Ω_i və Ω_e ilə işarə edək. İxtiyari $x_0 \in S$ nöqtəsi götürək. İkiqat lay potensialının

$$w(x) = \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S \tag{4.5}$$

bu nöqtədəki daxili və xarici limit qiymətlərini $w_i(x_0)$ və $w_e(x_0)$ ilə işarə edək

$$w_i(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega_i}} w(x),$$

$$w_e(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega_e}} w(x).$$

İkiqat lay potensialının limit qiymətləri üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 4.1. Əgər S qapalı Lyapunov səthi, sıxlıq funksiya $\mu(\xi)$ isə kəsilməz funksiyadırsa, onda (4.5) ikiqat lay potensialının limit qiymətləri üçün

$$\begin{aligned} w_i(x_0) &= -\frac{(m-2)|\sigma_1|}{2} \cdot \mu(x_0) + \overline{w(x_0)}, \\ w_e(x_0) &= \frac{(m-2)|\sigma_1|}{2} \cdot \mu(x_0) + \overline{w(x_0)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

düsturları doğrudur, burada $\overline{w(x_0)}$ ikiqat lay potensialının x_0 nöqtəsindəki düz qiymətidir.

İsbat üçün (4.5) inteqralını

$$w(x) = w_1(x) + \mu(x_0) w_0(x) \tag{4.7}$$

şəklində yazaq, burada

$$w_0(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S$$

Qauss inteqralı,

$$w_1(x) = \int_S [\mu(\xi) - \mu(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S \tag{4.8}$$

isə sıxlığı x_0 nöqtəsində sıfra çevrilən ikiqat lay potensialıdır.

Yuxarıdakı lemmaya əsasən, $w_1(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiyadır, yəni onun xaricdən, daxildən limit qiymətləri və bu nöqtədəki düz qiyməti bir-birinə bərabərdir

$$w_{1i}(x_0) = w_{1e}(x_0) = \overline{w_1(x_0)} \tag{4.9}$$

Qauss inteqralı üçün isbat etdiyimiz (3.2) düsturuna əsasən

$$\begin{aligned} w_{0i}(x_0) &= -(m-2) \cdot |\sigma_1|, \\ w_{0e}(x_0) &= 0, \\ \overline{w_0(x_0)} &= -\frac{(m-2) \cdot |\sigma_1|}{2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

olduğunu yaza bilərik. Digər tərəfdən (4.7) bərabərliyindən

$$w_i(x_0) = w_{1i}(x_0) + \mu(x_0)w_{0i}(x_0),$$

$$w_e(x_0) = w_{1e}(x_0) + \mu(x_0)w_{0e}(x_0),$$

$$\overline{w(x_0)} = \overline{w_1(x_0)} + \mu(x_0)\overline{w_0(x_0)}$$

düsturunu yazarıq. Axırıncı düsturların üçüncüsünü birincidən, sonra isə ikincisindən çıxsaq və bu zaman (4.9), (4.10) bərabərliklərini nəzərə alsaq

$$w_i(x_0) - \overline{w(x_0)} = -\frac{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}{2} \cdot \mu(x_0),$$

$$w_e(x_0) - \overline{w(x_0)} = \frac{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}{2} \cdot \mu(x_0)$$

düsturlarını alarıq ki, bu da (4.6) düsturları deməkdir. Teorem isbat olur.

İsbat etdiyimiz (4.6) düsturlarından, bilavasitə, ikiqat lay potensialının sıxlığı ilə onun limit qiymətləri arasında münasibət ala bilərik

$$w_e(x_0) - w_i(x_0) = (m-2)\,|\,\sigma_1\,| \cdot \mu(x_0)\,. \tag{4.11}$$

Qeyd 4.1. Göstərmək olar ki, səth qapalı Lyapunov səthi, sıxlıq isə kəsilməz funksiyadırsa, onda ikiqat lay potensialı öz limit qiymətlərin müntəzəm yığılır.

§5. Sadə lay potensialının normal törəməsi.

Tutaq ki, S qapalı Lyapunov səthi, $\mu(\xi)$ isə bu səth üzərində verilmiş kəsilməz funksiyadır.

$$V(x) = \int_S \mu(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S$$

şəklində təyin olunmuş inteqrala sadə lay potensialı demişdik.

Fəzada götürülmüş ixtiyari x nöqtəsi üçün bu nöqtədən keçən və S səthinə çəkilmiş xarici normalı n ilə işarə edək. Aydındır ki, x nöqtəsi S səthi üzərində deyilsə, onda sadə lay potensialının n istiqaməti üzrə törəməsi var və bu törəmə

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S$$

düsturu ilə hesablanacaq. Çünki bu halda $r = |\,x-\xi\,| > 0$ olduğundan inteqralaltında parametrə görə törəmə almaq olar. Yuxarıda çıxardığımız (2.2) düsturuna analoji olaraq

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(r,n) \tag{5.1}$$

almaq olar. Beləliklə, x nöqtəsi S səthi üzərində olmadıqda, bu nöqtədən keçən normal üzrə sadə lay potensialının törəməsi üçün

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = (m-2)\int_S \mu(x)\frac{\cos(r,n)}{r^{m-1}}d_\xi S \tag{5.2}$$

düsturunu alırıq.

İndi göstərək ki, $\mu(\xi)$ səthi üzərində məhdud cəmlənən funksiyadırsa, x nöqtəsi S səthi üzərində olduqda da (5.2) inteqralı yığılandır. Fərz edək ki, $|\,\mu(\xi)\,| < M$.

Mərkəzi x nöqtəsində olan Lyapunov sferasını quraq və S səthinin bu sfera daxilində qalan hissəsini $S'(x)$-lə işarə edək. Aydındır ki, (5.2) inteqralının yığılanlığını göstərmək üçün $S'(x)$ üzrə inteqralın yığılanlığını göstərmək kifayətdir. Başlanğıcı x nöqtəsində olan lokal koordinat sistemi quraq və $S'(x)$ səthinin x nöqtəsində səthə çəkilən toxunan müstəvi üzərindəki proyeksiyasını $P'(x)$ ilə işarə edək. Onda

$$\int\limits_{S'(x)} \mu(x)\frac{\cos(r,n)}{r^{m-1}}d_\xi S = \int\limits_{P'(x)} \mu(\xi)\frac{\cos(r,n)d\xi_1\cdots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}\cos(\nu,\xi_m)}. \quad (5.3)$$

Səthə çəkilən normalın yönəldici kosinusu

$$\cos(\nu,\xi_m) = \left[1+\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

olduğunu yada salaraq, (1.4) bərabərsizliklərinin köməyi ilə

$$\frac{1}{\cos(\nu,\xi_m)} \le \sqrt{1+(m-1)H^2 r^{2\alpha}}$$

yaza bilərik. Lyapunov d radiusunu elə kiçik seçək ki, $(m-1)H^2 d^{2\alpha} < 1$ bərabərsizliyi ödənsin. Onda $S'(x)$ səthinin nöqtələri üçün

$$\frac{1}{\cos(\nu,\xi_m)} < \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < 2 \quad (5.4)$$

bərabərsizliyini alarıq.

İndi (5.3) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqralaltı funksiyanı qiymətləndirə bilərik.

(1.6) və (5.4) bərabərsizliklərindən istifadə etsək

$$\left|\mu(\xi)\frac{\cos(r,\nu)}{r^{m-1}\cos(\nu,\xi_m)}\right| \le \frac{2M\cdot Cr^\alpha}{r^{m-1}} \le \frac{2M\cdot C}{\rho^{m-1-\alpha}}$$

alarıq. Bu qiymətləndirmə göstərir ki, (5.3) inteqralı və bununla da sadə lay potensialının normal törəməsini ifadə edən (5.2) inteqralı yığılınadır. Həmin inteqralın bu qayda ilə təyin olunmuş qiymətinə, sadə lay potensialının normal törəməsinin x nöqtəsindəki düz qiyməti deyilir və $\overline{\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}}$ şəklində işarə olunur.

Qapalı S Lyapunov səthinin fəzanı ayırdığı daxili Ω_i və xarici Ω_e oblastları üçün sadə lay potensialının limit qiymətlərini

$x_0 \in S$ üçün

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega_i}} \frac{\partial V(x)}{\partial n},$$

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega_e}} \frac{\partial V(x)}{\partial n}$$

işarə edək. Bunlara sadə lay potensialının normal törəməsinin daxili və xarici limit qiymətləri deyilir.

Lemma 5.1. Əgər S qapalı Lyapunov səthi, $\mu(\xi)$ isə bu səth üzərində kəsilməz funksiyadırsa, onda x nöqtəsi normal boyunca S səthini kəsdikdə

$$R(x) = \int\limits_S \mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi S \quad (5.5)$$

funksiyası kəsilməz funksiyadır.

Fərz edək ki, x_0 səth üzərində hər hansı nöqtə, n bu nöqtədə səthə çəkilən normal, x isə bu normal üzərində yerləşən ixtiyari nöqtədir. Mərkəzi x_0 nöqtəsində yerləşən $\eta < d$ (d Lyapunov radiusudur) radiuslu sferanın S səthindən ayırdığı daxili hissəni S'_η, xarici hissəni isə S''_η ilə işarə edək. Onda

$$R(x) = R'(x) + R''(x),$$

$$R'(x) = \int\limits_{S'_\eta} \mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi S,$$

$$R''(x) = \int\limits_{S''_\eta} \mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi S$$

şəklində göstərilə bilər.

Aşağıdakı fərqə baxaq

$$|R(x)-R(x_0)| = |R'(x)+R''(x)-R'(x_0)-R''(x_0)| \le$$
$$\le |R'(x)| + |R'(x_0)| + |R''(x)-R''(x_0)| \qquad (5.6)$$

və bu fərqi $|x-x_0|$-in kafi qədər kiçik qiymətləri üçün qiymətləndirək.

Aydındır ki, $|x-x_0|<\dfrac{\eta}{2}$ şərtini ödəyən x-lər və $\xi\in S''_\eta$ nöqtələri üçün, $|x_0-\xi|>\eta$,

$$r=|x-\xi|=|x-x_0+x_0-\xi|\ge|x_0-\xi|-|x-x_0|>\eta-\frac{\eta}{2}=\frac{\eta}{2}$$

olduğundan, $R''(x)$ inteqralında inteqralaltı funksiyada məxrəc sıfra çevrilmir və buna görə də, ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün, elə $\eta>0$ var ki, $|x-x_0|<\eta/2$ olduqda

$$|R''(x)-R''(x_0)|<\varepsilon/3 \qquad (5.7)$$

olur.

İndi $R'(x)$ inteqralını qiymətləndirək. Aydındır ki,

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(n,\xi_k)=\frac{m-2}{r^{m-1}}\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k-x_k}{r}\cos(n,\xi_k),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu,\xi_k)=-\frac{m-2}{r^{m-1}}\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{\xi_k-x_k}{r}\cos(\nu,\xi_k).$$

Başlanğıcı x_0 nöqtəsində olan lokal koordinat sistemində $x_1=x_2=\cdots=x_{m-1}=0$ və n normalı ξ_m istiqamətində yönəldiyindən

$$\cos(n,\xi_k)=0,\quad k=1,2,\ldots,m-1$$
$$\cos(n,\xi_m)=1.$$

Bunları nəzərə alsaq, $R'(x)$ inteqralının nüvəsi üçün

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}=\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_m-x_m}{r}\times$$
$$\times[1-\cos(\nu,\xi_k)]-\frac{m-2}{r^{m-1}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\xi_k}{r}\cos(\nu,\xi_k) \qquad (5.8)$$

alarıq. Bəzi qiymətləndirmələr aparaq. Yönəldici kosinusun ifadəsinin və (1.4) bərabərsizliyinin köməyilə

$$1-\cos(\nu,\xi_m)=1-\frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{1+(m-1)H^2r_0^{2\alpha}}}\le$$

$$\le\frac{(m-1)H^2r_0^{2\alpha}}{2}\le\frac{(m-1)H^2\cdot d^\alpha\cdot r_0^\alpha}{2}=a_1r_0^\alpha,\quad r_0=|x_0-\xi|$$

qiymətləndirməsini, sonra da (1.9) bərabərsizliyinin köməyilə

$$|\cos(\nu,\xi_k)|\le Hr_0^\alpha,\quad k=1,2,\ldots,m-1$$

yaza bilərik. Alınmış bu bərabərsizlikləri (5.8) də nəzərə alsaq

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|\le\frac{Ar_0^\alpha}{r^{m-1}},\quad A=const \qquad (5.9)$$

bərabərsizliyini alarıq.

Yuxarıdakı (1.5) bərabərsizliyindən ıistifadə edərək

$$r_0^2=\rho^2+\xi_m^2\le\rho^2+c^2\rho^{2\alpha+2}=\rho^2(1+c^2\rho^{2\alpha})<\rho^2(1+c^2d^{2\alpha})$$

yazarıq. Onda Lyapunov radiusunu kafi qədər kiçik götürməklə, S'_η səthinin nöqtələri üçün

$$r_0<2\rho$$

bərabərsizliyini alarıq. Sonra isə

$$r^2 = |x-\xi|^2 = \sum_{k=1}^{m}(\xi_k - x_k)^2 = \rho^2 + (\xi_m - x_m)^2 \geq \rho^2$$

olduğunu nəzərə alsaq, bunların köməyilə (5.9) münasibətindən

$$|R'(x)| \leq 2^\alpha \cdot A \cdot M \int_{S'_\eta} \frac{d_\xi S}{\rho^{m-1-\alpha}}$$

bərabərsizliyini alarıq. S'_η səthinin x_0 nöqtəsində səthə çəkilən toxunan müstəvi üzərindəki poyeksiyasını P'_η ilə işarə edək və S'_η üzrə inteqraldan P'_η üzrə inteqrala keçək

$$|R'(x)| \leq 2^\alpha \cdot A \cdot M \int_{P'_\eta} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}\cos(\nu, \xi_m)}.$$

Proyeksiyanın $\rho < \eta$ kürəsində yerləşdiyini nəzərə alsaq, polyar koordinat sisteminə keçərək, (5.4)-ün köməyi ilə

$$|R'(x)| \leq 2^{1+\alpha} \cdot A \cdot M \int_{\tau_1} d\tau_1 \int_0^\eta \rho^{\alpha-1} d\rho = \frac{2^{\alpha+1} \cdot A \cdot M \cdot |\tau_1|}{\alpha}\eta^\alpha$$

alarıq, burada $|\tau_1|$ ilə $m-1$ ölçülü fəzada vahid radiuslu sferanın səthi işarə olunmuşdur. Axırıncı bərabərsizlikdən görünür ki, η-nı seçməklə

$$|R'(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.10}$$

bərabərsizliyini və eləcə də

$$|R'(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.11}$$

bərabərsizliyini ala bilərik. (5.6), (5.7), (5.10) və (5.11) bərabərsizliklərindən $|x - x_0| < \eta/2$ şərtini ödəyən x-lər üçün

$$|R(x) - R(x_0^0)| < \varepsilon$$

bərabərsizliyini alırıq ki, bu da $R(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməzliyi deməkdir. Bununla lemma isbat olur.

Teorem 5.1. Əgər S qapalı Lyapunov səthi, $\mu(\xi)$ isə bu səth üzərində kəsilməz funksiyadırsa, onda S səthi üzərində sadə lay potensialının normal törəməsinin müntəzəm limit qiymətləri var və bu limit qiymətləri üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} &= \frac{(m-2)|\sigma_1|}{2}\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}, \\ \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} &= -\frac{(m-2)|\sigma_1|}{2}\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Lemmadakı $R(x)$ funksiyasının təyini göstərir ki, bu funksiya sadə lay potensialının normal törəməsi $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$ ilə, ikiqat lay potensialı $w(x)$-in cəmindən ibarətdir. Onun x_0 nöqtəsində kəsilməzliyi

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} + w_i(x_0) = \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} + \overline{w(x_0)} = \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} + w_e(x_0)$$

deməkdir. Bu bərabərliklərdən

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} &= \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} + [\overline{w(x_0)} - w_i(x_0)], \\ \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} &= \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}} + [\overline{w(x_0)} - w_e(x_0)] \end{aligned} \tag{5.13}$$

yaza bilərik. İkiqat lay potensialının limit qiymətləri üçün(4.6) düsturlarını nəzərə alsaq

$$\overline{w(x_0)} - w_i(x_0) = \frac{(m-2)|\sigma_1|}{2}\mu(x_0),$$

$$\overline{w(x_0)} - w_e(x_0) = -\frac{(m-2)|\sigma_1|}{2}\mu(x_0).$$

Bunlar, (5.13) düsturlarının köməyi ilə (5.12) deməkdir. Teoremin isbatını tam axıra çatdırmaq üçün limitlərin müntəzəmliyini göstərmək lazımdır. Bunun üçün sadə lay potensialının normal törəməsini

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \left[\frac{\partial V(x)}{\partial n} + w(x)\right] - w(x)$$

şəklində göstərmək kifayətdir. Çünki sağ tərəfdəki kvadrat mötərizənin öz limitinə müntəzəm yığıldığını göstərdik. İkiqat lay potensialı olan $w(x)$ funküsiyasının isə öz limitinə müntəzəm yığıldığını §4-də demişdik.

Sonralar istifadə edəcəyimiz bir düsturu da çıxaraq. (5.12) düsturlarını tərəf-tərəfə çıxsaq

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} - \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} = (m-2)|\sigma_1|\cdot\mu(x_0). \qquad (5.14)$$

düsturunu alırıq.

VIII FƏSİL.

POTENSİALLARIN KÖMƏYİLƏ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİ.

§1. İnteqral tənliklər. Fredholm teoremləri.

Məchul funksiya inteqral işarəsi altında olan tənliklərə ***inteqral tənliklər*** deyilir. Xətti inteqral tənliklərin bir sinfi olan ikinci növ Fredholm tənlikləri haqqında məlumat verək.

Tutaq ki, Ω m ölçülü E_m fəzasında hər hansı məhdud oblast və ya $m+1$ ölçülü fəzada m ölçülü məhdud qapalı səthdir. Aşağıdakı şəkildə inteqral tənliyə baxaq:

$$u(x) - \lambda\int_\Omega K(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x). \qquad (1.1)$$

Belə tənliklərə ikinci növ Fredholm tənlikləri deyilir. Tənlikdəki $K(x,\xi)$ funksiyası inteqral tənliyin nüvəsi, $f(x)$ isə sərbəst həddi adlanır, λ hər hansı parametrdir.

Əgər inteqral tənliyin nüvəsi $K(x,\xi)$, hər hansı məhdud $A(x,\xi)$ funksiyası və x və ξ nöqtələri arasında olan $r = |x-\xi|$ məsafəsi üçün

$$K(x,\xi) = \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha},\quad 0<\alpha<m \qquad (1.2)$$

şəklində göstərilə bilirsə, onda $K(x,\xi)$ nüvəsinə ***zəif məxsusiyyətli nüvə***, (1.1) tənliyinə isə ***zəif məxsusiyyətli inteqral tənlik*** deyilir.

Sərbəst həddi $f(x)\equiv 0$ olan

$$u(x) - \lambda\int_\Omega K(x,\xi)u(\xi)d\xi = 0 \qquad (1.1_0)$$

tənliyinə, (1.1) tənliyinə uyğun ***bircins tənlik*** deyilir.

Aydındır ki, λ parametrinin ixtiyari qiymətində, bircins (1.3) tənliyinin eynilik kimi sıfır həlli var. Belə həllə ***triviyal həll*** deyilir.

Parametrin verilmiş qiymətində, bircins (1.1_0) tənliyinin ancaq eynilik kimi sıfır həlli varsa, onda parametrin bu qiymətinə $K(x,\xi)$ nüvəsinin ***düzgün qiyməti*** deyilir.

Parametrin hər hansı qiymətində, (1.1_0) tənliyinin eynilik kimi sıfır olmayan həlli varsa, onda parametrin bu qiymətinə $K(x,\xi)$ nüvəsinin (və həm də (1.1_0) tənliyinin) ***xarakteristik qiyməti***, həmin həllərə isə $K(x,\xi)$ nüvəsinin (və həm də (1.1_0)

tənliyinin) verilmiş xarakteristik qiymətə uyğun ***məxsusi funksiyaları*** deyilir.

Aydındır ki, əgər $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ funksiyaları $K(x,\xi)$ nüvəsinin müəyyən xarakteristik qiymətə uyğun məxsusi funksiyalarıdırsa, onda bu məxsusi funksiyaların ixtiyari xətti kombinasiyası da həmin xarakteristik qiymətə uyğun məxsusi funksiya olacaq.

Xarakteristik qiymətə uyğun xətti asılı olmayan məxsusi funksiyaların sayına həmin xarakteristik qiymətin ***ranqı*** deyilir.

Əgər xarakteristik qiymətin ranqı birə bərabərdirsə, onda ona ***sadə*** xarakteristik qiymət deyilir.

Verilmiş $K(x,\xi)$ nüvəsi ilə

$$K^*(x,\xi) = \overline{K(\xi,x)}$$

şəklində bağlı olan $K^*(x,\xi)$ nüvəsinə, $K(x,\xi)$ nüvəsi ilə ***qoşma nüvə*** deyilir, burada xətt kompleks qoşmanı göstərir.

Aydındır ki, $K(x,\xi)$ funksiyası həqiqi funksiyadırsa, onda qoşma nüvəni almaq üçün ancaq x və ξ dəyişənlərinin yerini dəyişmək kifayətdir

$$K^*(x,\xi) = K(\xi,x)\,.$$

Nüvəsi $K^*(x,\xi)$ olan

$$v(x) - \lambda \int\limits_{\Omega} K^*(x,\xi) v(\xi) d\xi = F(x) \qquad (1.3)$$

tənliyinə, (1.1) tənliyinə ***qoşma tənlik***,

$$v(x) - \lambda \int\limits_{\Omega} K^*(x,\xi) v(\xi) d\xi = 0 \qquad (1.3_0)$$

tənliyinə isə (1.1) tənliyinə uyğun ***qoşma bircins*** tənlik deyilir.

Zəif məxsusiyyətli ikinci növ Fredholm tənlikləri üçün ***Fredholm alternativləri*** adlanan aşağıdakı teoremlər doğrudur. Bu teoremlərin isbatını müxtəlif kitablarda tapmaq olar [ ].

Teorem 1.1. Əgər (1.1) tənliyinə uyğun bircins (1.1_0) tənliyinin ancaq triviyal həlli varsa, onda (1.1) tənliyinin, istənilən kəsilməz $f(x)$ üçün yeganə həlli var.

Teorem 1.2. Əgər λ_0 bircins (1.1_0) tənliyinin xarakteristik qiymətidirsə, onda qoşma (1.3_0) tənliyinin də xarakteristik qiymətidir və bu tənliklərin hər ikisinin λ_0 xarakteristik qiymətinə uyğun xətti asılı olmayan məxsusi həllərinin sayı eynidir.

Teorem 1.3. Əgər (1.1_0) bircins tənliyinin trivial olmayan həlləri varsa, onda qeyri bircins (1.1) tənliyinin həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt, onun sağ tərəfi olan $f(x)$ funksiyasının, (1.1_0) tənliyinə qoşma olan (1.3_0) bircins tənliyinin həllərinin tam sisteminə ortoqonal olmasıdır

$$\int\limits_{\Omega} f(\xi) v_j(\xi) d\xi = 0, \quad j = 1,2,\dots,k\,. \qquad (1.4)$$

Biz potensiallar nəzəriyyəsinin köməyi ilə Dirixle və Neyman məsələlərini inteqral tənliklərə gətirib, alınan tənliklərə yuxarıdakı Fredholm teoremlərini tətbiq edəcəyik.

§2. Dirixle və Neyman məsələlərinin inteqral tənliklərə gətirilməsi.

Qapalı S Lyapunov səthinin əhatə etdiyi sonlu daxili oblastı Ω_i, xarici oblastı isə Ω_e ilə işarə edək.

Aşağıdakı kimi daxili və xarici Dirixle məsələlərinə baxaq:

Daxili Ω_i (xaraci Ω_e) oblastında harmonik olan elə $u(x)$ funksiyası tapmalı ki, bu funksiya $\Omega_i \cup S$ oblastında ($\Omega_e \cup S$ oblastında) kəsilməz olmaqla, S sərhəddi üzərində verilmiş kəsilməz $\varphi(x)$ funksiyası üçün

$$u\big|_S = \varphi(x) \tag{2.1}$$

şətini ödəsin.

Bu məsələlərə uyğun olaraq D_i və D_e məsələləri deyəcəyik. Məsələlərin həllini sıxlığı $\mu(x)$ məchul funksiyası olan ikiqat lay potensialı

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S \tag{2.2}$$

şəklində axtaraq. Məlum olduğu kimi, $\mu(x)$ kəsilməz funksiyadırsa, (2.2) düsturu ilə təyin olunmuş $u(x)$ funksiyası həm Ω_i və həm də Ω_e oblastlarında harmonik funksiyadır. Bu funksiyanın D_i və ya D_e məsələlərinin həlli olması üçün, daxili və ya xarici limit qiymətləri, uyğun olaraq,

$$u_i(x) = \varphi(x), \quad x \in S$$

və ya

$$u_e(x) = \varphi(x), \quad x \in S$$

şərtini ödəməlidir. İkiqat lay potensialının limit qiymətləri düsturundan, D_i məsələsi üçün

$$-\frac{(m-2)|\sigma_1|}{2} \cdot \mu(x) + \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = \varphi(x),$$

D_e məsələsi üçün

$$\frac{(m-2)|\sigma_1|}{2} \cdot \mu(x) + \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = \varphi(x)$$

bərabərliklərini yaza bilərik.

Bununla, D_i və D_e məsələləri, uyğun olaraq,

$$\mu(x) - \frac{2}{(m-2)|\sigma_1|} \cdot \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = -\frac{2\varphi(x)}{(m-2)|\sigma_1|} \tag{2.3}$$

və

$$\mu(x) + \frac{2}{(m-2)|\sigma_1|} \cdot \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = \frac{\varphi(x)}{(m-2)|\sigma_1|} \tag{2.4}$$

inteqral tənliklərə gətirilir.

Bu inteqral tənlikləri araşdırmaqdan əvvəl, daxili və xarici Neyman məsələlərini də inteqral tənliklərə gətirək, sonra isə alınan tənlikləri bir yerdə araşdırarıq.

Neyman məsələlərinin qoyuluşunu yada salaq:

Daxili Ω_i (xarici Ω_e) oblastında harmonik olan elə $u(x)$ funksiyası tapmalı ki, bu funksiya $\Omega_i \cup S$ oblastında ($\Omega_e \cup S$ oblastında) kəsilməz törəmələrə malik olmaqla, S sərhəddi üzərində verilmiş kəsilməz $\psi(x)$ funksiyası üçün

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = \psi(x) \tag{2.5}$$

şərtini ödəsin.

Bu məsələlərə N_i və N_e məsələləri deyəcəyik. Məsələlərin həllini sıxlığı $\tau(x)$ məchulu olan sadə lay potensialı

$$u(x) = \int\limits_S \tau(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S \qquad (2.6)$$

şəklində axtaraq. Belə təyin olunmuş $u(x)$ funksiyası Ω_i və Ω_e oblastlarında harmonik funksiyadır. Bu funksiyanın məsələnin həlli olması üçün normal törəmənin limit qiymətləri, uyğun olaraq,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_i} = \psi(x), \ \ x \in S$$

və

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_e} = \psi(x), \quad x \in S$$

şərtlərini ödəməlidir.

Sadə lay potensialının normal törəməsinin limit qiymətləri düsturlarının köməyilə, daxili Neyman məsələsini

$$\tau(x) + \frac{2}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|} \cdot \int\limits_S \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = \frac{2\psi(x)}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|}, \quad (2.7)$$

xarici Neyman məsələsini isə

$$\tau(x) - \frac{2}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|} \cdot \int\limits_S \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = -\frac{2\psi(x)}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|} \quad (2.8)$$

inteqral tənliklərinə gətirərik.

Alınmış (2.3), (2.4), (2.7), (2.8) tənliklərinə, adətən potensial nəzəriyyəsinin inteqral tənlikləri deyilir.

Beləliklə, Dirixle və Neyman məsələlərinin həlli potensial nəzəriyyəsinin inteqral tənliklərinin araşdırılmasına gətirilir.

Bu tənliklərin araşdırılması ilə məşğul olaq.

Əvvəlcə qeyd edək ki, inteqral tənliklərin nüvələri üçün keçən fəsildə aldığımız

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}} \cos(\nu, r),$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{-(m-2)}{r^{m-1}} \cos(n, r)$$

düsturları və

$$|\cos(n, r)| \le c r^{\alpha},$$

$$|\cos(\nu, r)| \le c r^{\alpha}$$

qiymətləndirmələri göstərir ki, bu nüvələr zəif məxsusiyyətli nüvələrdir. Ona görə də bu inteqral tənliklərə yuxarıda söylədiyimiz Fredholm teoremlərini tətbiq edə bilərik.

§3. Potensial nəzəriyyəsinin inteqral tənliklərinin araşdırılması.

Yada salaq ki, n səth üzərində götürülmüş x nöqtəsində, ν isə ξ nöqtəsində səthə çəkilən normallar idi. (2.8) tənliyinin nüvəsi, (2.3) tənliyinin nüvəsində ν əvəzinə n yazmaqla alınır. Bu o deməkdir ki, bu inteqral tənliklərin nüvələri x və ξ-nin yerini dəyişməklə alınırlar. O nüvələr həm də həqiqi olduqlarından, onlar bir biri ilə qoşmadırlar. Eyni əsasla, (2.4) və (2.7) tənliklərinin nüvələri bir biri ilə qoşmadır.

Əvvəlcə qoşma (2.3) və (2.8) inteqral tənliklərini araşdıraq. Göstərək ki, (2.8) tənliyinə uyğun bircins

$$\tau(x) - \frac{2}{(m-2)\,|\,\sigma_1\,|} \cdot \int\limits_S \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = 0 \qquad (2.8_0)$$

tənliyinin yalnız eynilik kimi sıfır həlli var.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, $\tau_0(x)$ funksiyası bu tənliyin eynilik kimi sıfır olmayan hər hansı kəsilməz həllidir. Sıxlığı $\tau_0(x)$ olan

$$V_0(x) = \int_S \tau_0(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S$$

sadə lay potensialı düzəldək. Bu potensialın normal törəməsinin xarici limit qiyməti

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} = -\frac{(m-2)|\sigma_1|}{2}\tau_0(x) + \int_S \tau_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S,$$

(2.8_0) tənliyinə görə, sıfırdır,

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} = 0, \quad x \in S. \tag{3.1}$$

Digər tərəfdən, $V_0(x)$ funksiyası sadə lay potensialı olmaqla, Ω_e oblastında harmonikdir. Deməli, $V_0(x)$ funksiyası xarici Neyman məsələsinin (3.1) şərtini ödəyən həllidir. Xarici Neyman məsələsinin həllinin yeganəliyindən, $x \in \Omega_e$ üçün

$$V_0(x) \equiv 0 \tag{3.2}$$

olduğunu alırıq. Sadə lay potensialı bütün fəzada kəsilməz funksiya olduğundan

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in S \tag{3.3}$$

alarıq. Lakin $V_0(x)$, sadə lay potensialı kimi, Ω_i oblastında harmonikdir, onda (3.3) şərtinə görə $V_0(x) \equiv 0,\ x \in \Omega_i$.

Bu o deməkdir ki,

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} = 0, \ x \in S. \tag{3.4}$$

Keçən paraqrafın (5.14) düsturuna görə, (3.1) və (3.4) bərabərliklərindən $\tau_0(x) \equiv 0$ alarıq. Deməli, (2.8_0) bircins tənliyinin yalnız eynilik kimi sıfır həlli var. Onda Fredholmun ikinci teoreminə görə, qoşma (2.3_0) tənliyinin də ancaq sıfır həlli var. Beləliklə, Fredholmun birinci teoreminə əsasən, (2.3) və (2.8) tənliklərinin, ixtiyari $\varphi(x), \psi(x)$ kəsilməz funksiyaları üçün yeganə həlləri var.

Bu deyilənləri aşağıdakı şəkildə yekunlaşdıra bilərik.

Teorem 3.1. İxtiyari qapalı S Lyapunov səthi və bu səth üzərində verilmiş kəsilməz $\varphi(x)$ funksiyası üçün daxili Dirixle məsələsinin yeganə həlli var və bu həll ikiqat lay potensialı şəklində göstərilə bilər.

Teorem 3.2. İxtiyari qapalı S Lyapunov səthi və bu səthin üzərində verilmiş kəsilməz $\psi(x)$ funksiyası üçün xarici Neyman məsələsinin yeganə həlli var və bu həll sadə lay potensialı şəklində göstərilə bilər.

İndi (2.4) və (2.7) qoşma inteqral tənliklərinin tədqiqinə keçək.

Keçən fəsildə hesabladığımız (3.2) Qauss düsturundan görünür ki, $\mu_0(x) \equiv 1$ funksiyası (2.4) tənliyinə uyğun bircins

$$\mu(x) + \frac{2}{(m-2)|\sigma_1|}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = 0 \tag{2.4$_0$}$$

tənliyinin həllidir. Deməli, $-\dfrac{2}{(m-2)|\sigma_1|}$ ədədi (2.4_0) tənliyinin xarakteristik qiymətidir. Onda Fredholmun ikinci teoreminə görə bu qiymət qoşma tənlik üçün də xarakteristik qiymətdir, yəni

$$\tau(x) + \frac{2}{(m-2)|\sigma_1|}\int_S \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = 0 \tag{2.7$_0$}$$

tənliyinin də heç olmasa bir sıfırdan fərqli $\tau_0(x)$ həlli var. Göstərək ki, bu tənliyin $\tau_0(x)$-lə xətti asılı olmayan başqa həlli yoxdur.

Bu məqsədlə sıxlığı $\tau_0(x)$ olan sadə lay potensialı

$$V_0(x) = \int_S \tau_0(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S$$

düzəldək. $\tau_0(x)$ funksiyasının (2.7$_0$) tənliyini ödəməsi

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} \equiv 0, \quad x \in S \qquad (3.5)$$

deməkdir. Sadə lay potensialı olmaqla, Ω_i oblastında harmonik olan $V_0(x)$ funksiyası, (3.5) bircins Neyman şərtini ödədiyindən, daxili Neyman məsələsinin həllinin yeganəliyi teoreminə əsasən, Ω_i oblastında eynilik kimi sabitdir $V_0(x) \equiv C_0 = const$.

<u>Lemma 3.1.</u> Sadə lay potensialı $V_0(x)$ Ω_i oblastında eynilik kimi sıfırdırsa, onda bu potensialın sıxlığı da eynilik kimi sıfırdır.

Doğrudan da, $V_0(x)$ funksiyasının kəsilməzliyindən, onun S sərhəddi üzərində də eynilik kimi sıfır olduğunu alarıq. Bu funksiya Ω_e oblastında Dirixle məsələsinin sıfır sərhəd şərtini ödəyən həlli olardı. Onda $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_e$ alardıq. Bu isə, öz növbəsində,

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} = 0, \quad x \in S \qquad (3.6)$$

demək olardı. Alınan (3.5) və (3.6) bərabərliklərindən, keçən fəsilin (5.14) düsturuna görə, $\tau_0(x) \equiv 0$ alardıq. Lemma göstərir ki, $C_0 \neq 0$ olmalıdır.

İndi tutaq ki, (2.7$_0$) tənliyinin $\tau_0(x)$-dən fərqli hər hansı $\tau_1(x)$ həlli də var. Bu sıxlıqla

$$V_1(x) = \int_S \tau_1(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S$$

sadə lay potensialı düzəldək. Yuxarıdakı qayda ilə göstərə bilərik ki, $x \in \Omega_i$ üçün, $V_1(x) \equiv C_1 = const$.

İki həllin xətti kombinasiyası kimi

$$\tau_2(x) = C_1\tau_0(x) - C_0\tau_1(x)$$

funksiyası da (2.7$_0$) tənliyinin həllidir. Bu həllin köməyilə düzəldilmiş

$$V_2(x) = \int_S \tau_2(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S = C_1 V_0(x) - C_0 V_1(x)$$

sadə lay potensialı üçün, $x \in \Omega_i$ oblastında

$$V_2(x) = C_1 C_0 - C_0 C_1 = 0$$

alardıq. Onda yuxarıdakı lemmaya görə, sıxlıq $\tau_2(x) \equiv 0$ olardı. Bu isə o deməkdir ki, $\tau_1(x) = \frac{C_1}{C_0}\tau_0(x)$, yəni $\tau_0(x)$ və $\tau_1(x)$ həlləri xətti asılıdır. Deməli, (2.7$_0$) bircins tənliyinin yalnız bir xətti asılı olmayan həlli var. Onda Fredholmun ikinci teoreminə görə, (2.4$_0$) tənliyinin də ancaq bir xətti asılı olmayan həlli var. Fredholmun üçüncü teoreminə əsasən, (2.7) tənliyinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt, onun sağ tərəfinin vahidə ortoqonal olmasıdır

$$\int_S \psi(\xi) d_\xi S = 0. \qquad (3.7)$$

Yenə həmin teoremə görə, (2.3) tənliyinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt onun sağ tərəfinin (2.7$_0$) tənliyinin $\tau_0(x)$ həllinə ortoqonal olmasıdır

$$\int_\Omega \tau_0(\xi)\varphi(\xi) d_\xi S = 0. \qquad (3.8)$$

Deyilənləri aşağıdakı teoremlər şəklində yekunlaşdıra bilərik.

Teorem 3.3. İxtiyari qapalı S Lyapunov səthi və bu səth üzərində verilmiş kəsilməz $\varphi(x)$ funksiyasına görə xarici Dirixle məsələsinin ikiqat lay potensialı şəklində göstərilə bilən həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt (3.8) bərabərliyinin ödənməsidir.

Teorem 3.4. İxtiyari qapalı S Lyapunov səthi və səth üzərində verilmiş $\psi(x)$ kəsilməz funksiyasına görə daxili Neyman məsələsinin həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt (3.7) bərabərliyinin ödənməsidir. Məsələnin həlli varsa, onu sadə lay potensialı şəklində göstərmək olar.

Qeyd 3.1. Yuxarıdakı (3.8) şərti ödənmirsə, (2.4) inteqral tənliyinin həlli yoxdur. Bu hələ xarici Dirixle məsələsinin həllinin olmaması demək deyil. Bu ancaq o deməkdir ki, məsələnin həlli ikiqat lay potensialı şəklində göstərilə bilmir.

§4. Xarici Dirixle məsələsinin həlli.

Xarici Dirixle məsələsinin həll olunması üçün (3.8) şərti ona görə alınır ki, biz məsələnin həllini ikiqat lay potensialı şəklində axtarmaqla, həllin üzərinə $|x|\to\infty$-da $O(|x|^{1-m})$ şəklində sıfıra yaxınlaşma tələbi qoyuruq. Lakin funksiyanın qeyri-məhdud oblastda harmonikliyi üçün onun $O(|x|^{2-m})$ şəklində sıfıra yaxınlaşması kifayətdir.

Ümumiliyi pozmadan, fərz edək ki, koordinat başlanğacı S Lyapunov səthinin əhatə etdiyi Ω_i daxili oblastına daxilidir. Xarici Ω_e oblastı üçün Dirixle məsələsinin həllini

$$u(x) = \int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S + \frac{\alpha}{|x|^{m-2}} \tag{4.1}$$

şəklində axtaraq, burada $\mu(\xi)$ S səthi üzərində təyin olunmuş məchul funksiya, α isə hələlik məchul sabitdir.

Bərabərliyin sağ tərəfindəki toplananların hər biri harmonik funksiya olduğundan, (4.1) bərabərliyinin təyin etdiyi $u(x)$ funksiyası Ω_e oblastında harmonik funksiyadır. Bu funksiyanın xarici Dirixle məsələsinin həlli olması üçün S səthi üzərində

$$\mu(x) + \frac{2}{(m-2)|\sigma_1|}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S +$$

$$+\frac{2}{(m-2)|\sigma_1|}\cdot\frac{\alpha}{|x|^{m-2}} = \frac{2\varphi(x)}{(m-2)|\sigma_1|} \tag{4.2}$$

münasibəti ödənməlidir.

Yuxarıda aldığımız (3.8) şərtinə görə, (4.2) tənliyinin həll olunması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_S \tau_0(\xi)\left[\varphi(\xi) - \frac{\alpha}{|\xi|^{m-2}}\right]d_\xi S = 0 \tag{4.3}$$

şərtinin ödənməsidir, burada $\tau_0(x)$ (2.7_0) tənliyinin yeganə triviyal olmayan həllidir. Biz yuxarıda göstərdik ki, sıxlığı bu $\tau_0(x)$ həlli olan

$$V_0(x) = \int_S \tau_0(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}d_\xi S, \quad r = |x-y|$$

sadə lay potensialı, $x\in\Omega_i$ nöqtələri üçün eynilik kimi sabitdir və həm də bu sabit sıfır deyil $V_0(x)\equiv C_0 \neq 0$. Bu C_0 sabitini vahid götürmək olar. Çünki əks halda, (2.7_0) tənliyinin $\tau_0(x)$ həlli əvəzinə $\frac{\tau_0(x)}{C_0}$ həllini götürərdik və sıxlığı $\frac{\tau_0(x)}{C_0}$ olan sadə lay potensialı

$$V_0(x) = \int_S \frac{\tau_0(\xi)}{C_0} \cdot \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S \equiv 1, \quad x \in \Omega_i$$

olduğundan, xüsusi halda $x = 0$ götürməklə,

$$\int_S \tau_0(\xi) \frac{1}{|\xi|^{m-2}} d_\xi S = 1$$

bərabərliyini alarıq.

Beləliklə, (4.2) tənliyinin həll olunanlığı üçün (4.3) zəruri və kafi şərtindən, (4.1) göstərişindəki α sabitini

$$\alpha = \int_S \tau_0(\xi)\varphi(\xi)d_\xi S$$

şəklində taparıq.

Bununla, aşağıdakı teoremi söyləyə bilərik.

Teorem 4.1. İxtiyari qapalı S Lyapunov səthi və bu səth üzərində verilmiş kəsilməz $\varphi(x)$ funksiyası üçün xarici Dirixle məsələsinin həlli var bu həll ikiqat lay potensialı ilə

$$\frac{1}{|x|^{m-2}} \int_S \tau_0(\xi)\varphi(\xi)d_\xi S$$

toplananın cəmi şəklində göstərilə bilər.

Ə D Ə B İ Y Y A T

1. С.Г.Михлин. Линейные уравнения в частных производных. Москва, «Высшая школа», 1977.
2. А.В.Бицадзе. Уравнения математической физики. Москва, «Наука», 1982.
3. С.Л.Соболев. Уравнения математической физики. Москва, «Наука», 1966.
4. М.М.Смирнов. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Москва, «Наука», 1964.
5. И.Г.Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.
6. A.N.Tixonov, A.A.Samarskiy. Riyazi fizika tənlikləri. Azərbaycan Dövlət tədris-pedaqoji ədəbiyyatı nəşriyyatı, Bakı, 1962.
7. В.С.Владимиров. Уравнения математической физии. Москва, «Наука», 1967.
8. В.Я.Арсенин. Методы математической физики и специальные функции. Москва, «Наука», 1974.
9. Г.Н.Положий. Уравнения математической физики. Москва, «Высшая школа», 1964.
10. Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962.